已投稿至《空间研究进展》，2026年1月，审稿中

阐释钱德勒周期的差异并预测地球自转动力学的变化

Ranjan Vepa[1]

工程与材料科学学院，伦敦玛丽女王大学，伦敦，E1 4NS，英国。

摘要

本文首先基于物理原理对地球的姿态动力学进行建模，以便正确预测钱德勒摆动及其周期等特征。为此，模型不仅纳入了稳态和动态重力梯度力矩，还考虑了离心加速度对行星可变形黏弹性模型的影响。在验证钱德勒摆动响应后，本文进一步尝试预测地球的姿态响应，不仅着眼于数年内的变化，也关注更长时间尺度上的变化。这需要对整个行星的能量平衡效应进行建模，而不仅仅是对质量和惯性的重新分布进行建模，还要考虑惯性特性的变化。为此，本文纳入了一个更简单的能量平衡过程物理模型，以展示长期内地球日长响应的持续变化。本文的总体目标是聚焦于在较长且合理的时间范围内导致地球姿态动力学变化的关键物理过程。文中还展示了姿态动力学在短期和中期内的总体响应。

关键词

钱德勒摆动、姿态动力学模型、热力学能量平衡、日长、重力梯度力矩、地球的转动惯量

引言

尽管地球的自转和公转对其气候有着显著影响，但气候变化和全球变暖对地球自转速度的影响也确实大于月球对其的影响，进而改变了日长。因此，气候与地球自转之间存在相互作用，而且这种耦合可能是非线性的。米兰科维奇周期包括地球轨道的形状（即偏心率）、地球自转轴相对于地球轨道平面的倾斜角度（即倾角），以及地球自转轴所指的方向（即岁差）；这些周期本身无法解释当前的全球变暖事件，尤其是 CO_2，浓度持续上升、全球气温升高以及北极海冰持续减少的现象。有研究指出，米兰科维奇周期的变化，特别是倾角和岁差的变化（其成因包括钱德勒摆动等），除了 CO_2，持续增加之外，还可能由于二阶效应引起周期性的温度变化以及持续的非线性升温，从而导致日长变化及其他相关后果。Kiani Shahvandi 等人（Kiani Shahvandi 等人，2024a、2024b）利用物理信息神经网络（PINN），在一项由 NASA-JPL 资助的研究中探讨了气候变化对日长变化的影响。

NASA此前资助了有关解释气候变化的研究；Wang 和 Lee（2024年）指出，NASA通过一支由20颗卫星和若干立方体卫星组成的星群监测气候变化参数，正如 NASA科学编辑团队（2020年）、Velev（2025年）和 Velev（2024年）所述。其中值得关注的包括 GRACE-FO（重力恢复与气候实验后续任务）：提供全球地表质量变化观测

[1] 通讯作者，电子邮箱：r.vepa@qmul.ac.uk

，有助于监测冰盖和地下水等方面的变化；NISAR（NASA-ISRO合成孔径雷达）：与印度空间研究组织（ISRO）联合开展的任务，监测地球不断变化的生态系统和冰冻区域；Terra：美国国家航空航天局地球观测系统的一项旗舰任务，长期提供有关各种地球系统的数据；以及全球降水测量（全球降水测量计划）：与日本宇宙航空研究开发机构（JAXA）联合开展的任务，提供全球范围内详细的降水信息。

气候变化导致的质量重新分布会影响地球的引力和重力模型（Howarth，2025年）。这是由于两极附近的质量发生变化，而由此产生的极移则表现为行星摆动。最初的重力恢复与气候实验任务记录了地球的重力场及其随时间的变化，观测时长超过160个月。后续任务GRACE-FO（Flechtner，2025年）与德国的 GFZ（德国国家地球系统研究中心）合作，旨在获取地球重力场静态分量和时变分量的精确高分辨率模型。卫星运行在近极轨道上，轨道高度为485千米。

本文的主要目标是提供一份路线图，以建立高保真模型，用于分析地球在短期、中期和长期尺度上的旋转动力学。

地球自转速率

北极和南极附近极地冰盖融化的主要后果之一，是固态冰转变为液态（水），随后水由于离心力和科里奥利效应发生径向向外及方位位移，从而导致地球极地转动惯量（MI）增加。液态粒子向外移动，是由于液相中将它们结合在一起的粒子间作用力减弱所致。由此产生的极地转动惯量增加量，可以根据估算重力模型中带谐波的变化计算得出。地球极地转动惯量无论增加得多么微小，都会使地球绕极轴的自转速率略微减慢，进而改变日长以及受太阳照射的时间，而二者都会增加。这会导致温度升高，加速冰盖融化，并使地球自转速率进一步减慢。简而言之，这是一个不稳定的过程！然而，地球极地转动惯量的增加通常被认为是一种长期效应，因为赤道隆起形变的变化需要数百年才能完成。在中期（20—100年）内，海平面上升引起的地球转动惯量变化，可以通过附录A中概述的近似方法计算。在这一初步模型中，假定月球的影响（潮汐效应）、离心力和大气效应不发生变化，并将在后续阶段纳入。离心力会不成比例地影响极地转动惯量，而潮汐力则会影响转动惯量的横向分量。这些变化表明，在中期内，地球极地转动惯量略有减小，从而导致地球自转速率增加，尽管增幅非常小。自2020年起，已经观测到地球自转速率增加，尽管在过去一千年中它一直在稳步下降。因此，这些变化的复杂性是显而易见的。离心效应与地球稳定的自转速率有关。从物理上看，行星的自转导致赤道隆起，因而两极出现扁平化。

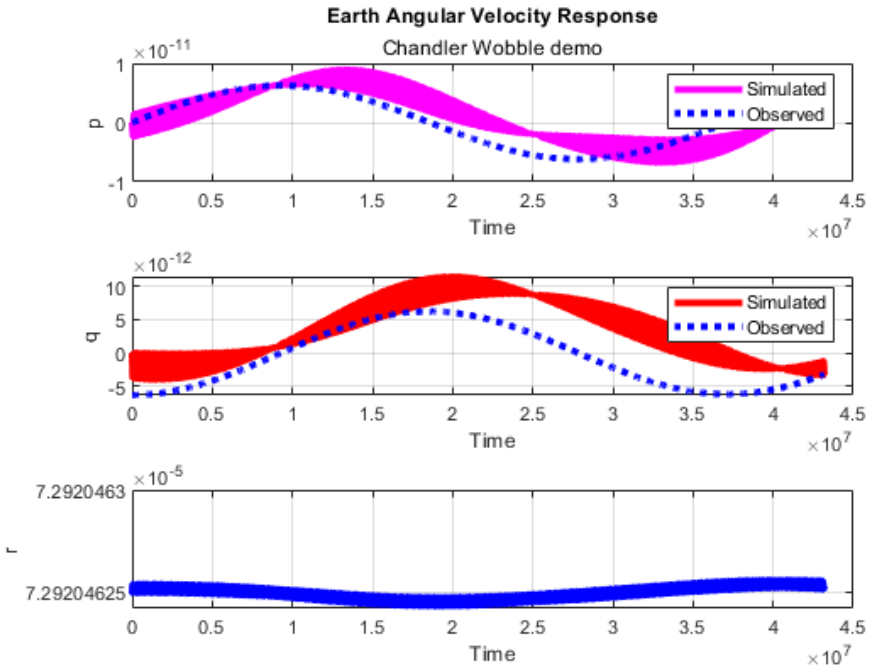

图1 钱德勒摆动：500天内的三轴响应

地球轨道、姿态与自转速率预测

更新后的重力模型原则上可用于预测地球绕太阳运行的轨道和姿态，从而预测米兰科维奇周期（或地球轨道参数）以及地球摆动的变化。地球摆动是地球内部或地球表面质量重新分布所导致的一种地球姿态的自由欧拉章动，可使用类似于喷气推进实验室在其由太阳系动力学组（2025年）维护的 Horizons 网站上所采用的多体预测器，以及 Patočka 和 Walterová（2025年）的方法进行预测（另见 Yamaguchi 和 Furuya，2025年）。

本文采用附录B中讨论的姿态动力学响应计算方法，预测地球钱德勒摆动的周期约为435天（如图1所示，观测周期约为430.3天），可将其视为一种相对短期的效应。下一节将讨论这一预测的详细内容。观测到的振荡图基于振荡周期和品质因数绘制。海平面上升似乎不会显著影响钱德勒摆动的周期，因为假定相应的质量惯量变化是均匀的。不过，随着时间推移，这种情况可能会改变。

原则上，姿态和轨道变化的物理机制表明，尽管无法预测全部气候变化参数，但可以采用苏黎世联邦理工学院 Kiani Shahvandi 等人（2024c）的方法预测其中一些参数，因为该方法并非完全基于物理机制。不过，目前尚不清楚这类预测需要哪些数据输入，以及如何从原始来源汇集这些数据。

解释钱德勒周期中的差异

一般而言，如果地球是完全刚性的，那么根据地球目前已知的转动惯量特性，其摆动运动的周期应为304.5恒星日，即303.6天。刚性地球每日自转时，地面上的观察者会看到角动量和速度矢量都缓慢地绕第三轴转动。这三个矢量处于同一

旋转平面内，彼此之间的夹角保持不变。主要由于地球地幔具有有限的弹性，地球摆动的周期有所延长。根据近期观测，估计周期约为433或434天。为纪念最早观测到这一运动的人，这种现象被称为钱德勒摆动。多位作者试图解释这一差异，但迄今对其物理原因仍未达成共识。

Shen、Chen 和 Sun（2008）以及 Liu、Huang 和 Zhang（2017）讨论了地球转动惯量矩阵各分量的估算。姿态运动响应取决于该矩阵。根据 Liu、Huang 和 Zhang（2017）的转动惯量模型，地幔似乎已纳入其中

;

地核也有表示，其中包括相对柔韧的流体核心以及刚性固态的外核。地核可假定为球形。其表示的准确程度仍有待商榷。因此，只需修正转动惯量，而不必修正

f

转动惯量的非对角乘积。在 Eubanks（1993）中，参数 $_{zz}$ $_{xx}I$ $I-$ 给定为 2.61×1.0e35 。该差分参数的值为$_{xx}I$ 的 0.325794091%。尽管 Liu、Huang 和 Zhang（2017）声称转动惯量矩阵各元素的精度或误差范围小于 0.0015%，但对我们的分析而言，重要的是地球主转动惯量之差的误差范围。根据现有数据，该误差约为 0.05%。这是一个相对较大的不确定性。

可以看出，估算地球转动惯量矩阵通常有两种不同的方法：一种基于重力测量，另一种则假定地球物质的几何形状由流体静力平衡决定。事实上，基于重力测量的方法无法确定惯性矩阵的所有元素，而且也依赖于通过其他方法估算得到的极地转动惯量。因此，转动惯量的估算值确实容易出现误差；必须指出，决定钱德勒摆动的关键参数是转动惯量分量之差，$_{zz}$ $_{xx}I$ I $-$ 。根据 Liu、Huang 和 Zhang（2017）提出的模型，$_{zz}$ $_{xx}I$ $I-$ 为 2.6540×1.0e35。该数值为$_{xx}I$ 的 0.33%。Chen 和 Shen（2010）此前也得到了类似结果。总体而言，考察多个参考文献后，$_{zz}$ $_{xx}I$ $I-$ 的取值介于 (2.6540±0.005)×1.0e35 之间。事实上可以看出，自 Eubanks（1993）以来，$_{zz}$ $_{xx}I$ $I-$ 的估算值有所增加，这实际上会使钱德勒周期的误差变得更严重。

笔者认为，出现这一差异的原因在于，人们假定地球的几何形状也决定了地球的惯性分布。在动力学情形下，对地球形状所作的假设未必成立，尤其是因为地球由多层变形材料构成，而各层在不同深度的黏弹性性质差异很大。地球主转动惯量之差存在相对较大的不确定性，这是钱德勒摆动难以预测的主要原因。我们需要对地球的整体转动惯量作出虽小但意义重大的修正。因此，必须纳入离心力以及太阳潮汐效应引起的地球转动惯量矩阵变化，因为这些变化导致转动惯量各分量之差出现误差，而这些误差正是观测到的钱德勒周期差异的主要原因。这些误差会显著改变钱德勒摆动的周期以及响应的其他相关特征。

在考虑金星的极移时，Phan 和 Rambaux（2025年）指出，金星的黏弹性形变会影响极移，这是因为离心力会导致转动惯量矩阵发生变化。他们采用了 Williams 等人（2001年）先前使用的 Love数形式体系，并得到了

行星转动惯量矩阵变化的表达式，该表达式将其表示为 Love数与时域转动惯量矩阵变化的卷积。就我们的目的而言，可以将修正限制为 Love数的平均值，并以矩阵形式表示转动惯量矩阵的修正，如下：

$$\Delta \boldsymbol{I}_c = \bar{k}_2 \frac{\omega_{ss}^2 R_e^5}{9G} \begin{bmatrix} -2m_z & 0 & 3m_x \\ 0 & -2m_z & 3m_y \\ 3m_x & 3m_y & 4m_z \end{bmatrix}. \quad (1)$$

在上述方程中，ω_{ss} 是行星绕自转轴的稳定自转速度，R_e 是行星的赤道半径，k_2 是与行星由离心势引起的平均Love数，G 是万有引力常数，而m_x 、m_y 和m_z 由以下关系定义，

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{ss} + \Delta\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ss} \end{bmatrix} + \omega_{ss} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}. \quad (2)$$

考虑到Love数k_2的各种随时间变化的取值，地球的平均值取为$k_2 = 0.325k$。忽略周期性或时变项后，太阳引力对转动惯量矩阵产生的潮汐修正项[17]，形式为，

$$\Delta \boldsymbol{I}_t = \bar{k}_2 \frac{n_{orbital}^2 R_e^5}{2G} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

在方程（3）中，$n_{轨道}$ 是地球绕太阳运行的轨道角速度。方程（1）和（3）给出的转动惯量矩阵修正项在数值积分姿态动力学时，于每个时间步长纳入计算。在姿态动力学积分过程中，$\Delta \boldsymbol{I}_c$ 和$\Delta \boldsymbol{I}_t$ 均被加到转动惯量矩阵$\boldsymbol{I}$中，并在每个时间步长执行。钱德勒周期的计算结果见图1。

地球温度升高导致的持续质量与转动惯量损失

将地球温度持续升高导致的质量和转动惯量持续损失纳入考量，似乎相当重要。质量变化对于关联气候和温度相关变化至关重要，而这些变化是与大气和海洋相互作用的结果。原则上，可以将地表能量平衡模型中的质量变化与大气强迫纳入考量，以预测温度的持续变化。
Mackay 等（2025）概述的 JULES 方法是一套利用基于物理原理的能量平衡方案，在气候强迫下模拟冰川演化的工作流程；模型间的数据交换与反馈是可行的。有关这些模型的更详细说明，请参阅 Best 等（2011）和 Maussion 等（2019）。

就本文而言，我们采用 Schwartz（2007年）提出的较简单模型。地球气候系统的辐射平衡极为接近：吸收的短波（太阳）辐射与外层大气层发出的长波（热红外）辐射几乎相等。当两者不

平衡时，就会产生净辐射强迫，即外层大气球面发出或以其他方式损失的辐射，少于大气和地球表面吸收的能量。这一差值导致能量平衡方程中的净辐射强迫。对于20世纪，以年为时间单位，

$$C_p \frac{d\Delta T}{dt} = -C_p \frac{\Delta T}{\tau} + C_p \frac{T_0}{\tau} = -C_p \frac{\Delta T}{\tau} + F_0 . \quad (4)$$

在（4）中，基于辐射项数值较小，暂时将其忽略。时间常数 τ与平衡温度输入敏感度[1] $_s\lambda^-$及系统热容量 $_pC$ 之间的关系如下:

$$\lambda_s^{-1} \equiv T_0 / F_0 , \tau = \lambda_s^{-1} C_p . \quad (5)$$

根据 Schwartz（2007）提供的20th 世纪数据以及（4），

$$\frac{T_0}{\tau} = \frac{F_0}{C_p} = \frac{1.9}{16.7} = 0.1138 , \tau = 5 yrs , \Delta T_{ss} = T_0 = \tau \frac{F_0}{C_p} = 5 \times 0.1138 = 0.57 . \quad (6)$$

对于21st 世纪，仍忽略辐射项时，

$$\tau \frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = K_{ct} T_0 \text{ or } 5 \frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = 0.57 K_{ct} . \quad (7)$$

在上述公式中，$_{ct}K$反映了气候（大气）相关效应的增益，或大气对能量平衡方程的输入。一些作者称之为反馈因子。在能量平衡框架中，随着全球平均表面温度（GMST）升高，大气中水汽混合比增加会导致行星有效发射率降低，和/或云量减少会导致行星反照率互补量增加，从而产生正反馈。

对于21st 世纪，$_{ct}K$峰值的保守估计在10到20之间。现在计入辐射项（按单位面积计！），并假设能量具有辐射增益，

$$\tau \frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = K_{ct} T_0 + \frac{\tau}{C_p} \sigma \times \varepsilon_{eff} \left(T_r^4 - T_{ss}^4 \right), T_r = \Delta T + T_{ss} , \quad (8)$$

或者，采用 Schwartz（2007年）中的年作为时间单位，并将最后一项提出，

$$5 \frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = 0.57 K_{ct} + 0.29940 \sigma \times \varepsilon_{eff} \Delta T \left(T_r + T_{ss} \right) \left(T_r^2 + T_{ss}^2 \right). \quad (9)$$

对于21st 这个世纪，假设时间常数 τ的变化速率与$_{ct}K$不同，尽管已知它确实会变化，但变化幅度小得多。因此，将其设为5 年τ = 。将时间单位转换为秒，因为 1 年 = 31.

$$\left(5 \times Y_s \right) \frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = 0.57 K_{ct} + 0.29940 \sigma \times \varepsilon_{eff} \Delta T \left(T_r + T_{ss} \right) \left(T_r^2 + T_{ss}^2 \right). \quad (10)$$

在方程（10）中，σ 为斯忒藩-玻尔兹曼常数，地球的有效发射率$_{eff}\varepsilon$ 被假定为常数，取值为 0.78。反馈因子$_{ct}K$ 被假定在整个世纪内保持不变，并设为 5。这里必须指出，反馈因子$_{ct}K$可能具有自身的动力学特征，这些特征取决于日长，但这些

特征被忽略了，并假定其为常数，以保持模型的简洁性。此外，如果$T\Delta$ 所表示的温度变化过大，作为非线性方程的方程（10）可能会变得不稳定。

假设地球质量的减少遵循与 Marzeion等人 使用的线性回归方程相似的关系[23] ，并由地球质量变化的关系式给出；在我们的情形下，该关系式可简化为：

$$M_e = M_{e0} - \mu_{tm} A_{\text{exposed}} \Delta T_{ss} \,. \tag{11}$$

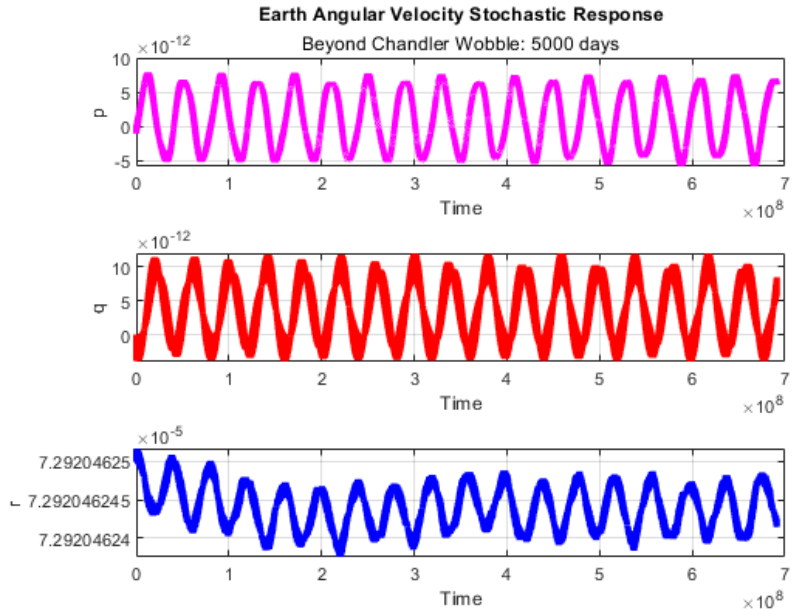

图 2 前 20 年时间段内的三轴角速度响应

在上述公式中，$_eM$表示温度演变过程中任意时刻的地球质量，而$_{0e}M$表示不存在任何温度变化

对于超过 20 年的时间范围，约每隔 20 年时间段便获得一次结果。响应行为的总体趋势与图 2 十分相似。87.7 至 109.6 年以后的时间范围结果如图 3 所示。此外，在此时间范围内未出现不稳定性。所得结果与图 2 和图 3 所示结果相似，其中 时间常数τ设为 10 年。图 2 和图 3 中的结果不仅表明，地球绕南北轴的角速度持续减小，而且还表明同一角速度分量存在一个 ~10 年半周期（对应于一个 ~20 年周期性响应）。显然，这可能会对气候变化产生长期影响。到目 为止，数据中的周期仅通过目视检查进行了分析。然而，目前正在对这 109.6 年的数据开展更为详细的分析

使用小波变换，预计这将对频谱提供更为详细的分解。

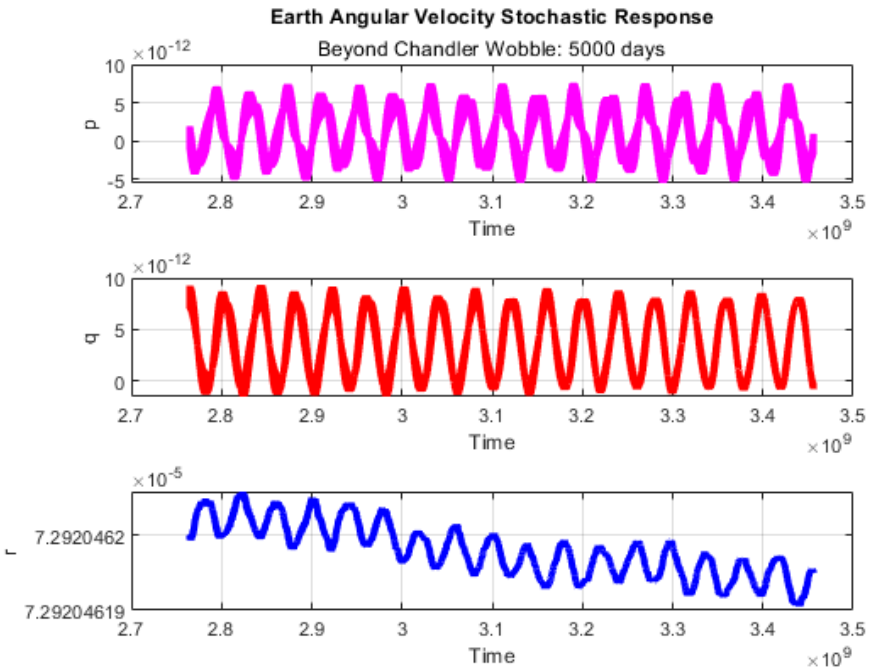

图3 87.7年至109.6年时间范围内的三轴角速度响应。

结论

本文所提出的简单模型旨在突出行星姿态运动的一些物理特征。文中讨论并解释了钱德勒摆动周期存在偏差的原因。通过采用更加复杂和详细的模型，确实可以改进预测结果。例如，可以引入两个方程来模拟能量平衡：一个用于表示损失的能量，另一个用于表示获得的能量。此外，反馈因子$_{ct}K$ 的动力学变化也被忽略了。然而，本文的意图在于确定似乎决定地球姿态运动的主要物理过程，从而能够更有把握地评估这些变化对气候变化的影响；这种影响源于姿态运动与大气变化和海洋变化之间的耦合。此外，本文也旨在保持完整模型的简洁性。本文的一项重要发现是，在预测地球的姿态响应时，解析模型不仅必须包含由形变中的地球所产生的离心加速度和潮汐力导致的质量惯量变化效应，还必须包含能量平衡效应，因为后者确实会影响中长期的响应。

本文探讨了利用地球引力场的精确实时测量数据，并通过某种形式的高级滤波，以及通过模拟预测地球自身绕太阳运行的轨道和姿态，来预测地球自转动力学的可行性。此外，还需要进行高保真建模，以基于物理上切实可信的.....来预测气候变化

已于2026年1月投稿至《空间研究进展》，目前正在审稿

能够捕捉与气候变化相关的所有关键过程在短期、中期和长期内的动力学的模型，从而能够预测本世纪剩余时间内气候参数的实际变化。本文提出的基准模型可扩展，以纳入更全面的大气热力平衡方程和海洋动力学方程、反馈因子$_{ct}K$随时间变化的动力学，以及勒夫数的动力学，从而更新地球形变动力学。

致谢

谨向伦敦玛丽女王大学、东伦敦大学以及位于南安普敦的国家海洋学中心（NOC）的同事及其他人士致谢，感谢他们就本文所呈现的结果展开富有成效的讨论，并分享了宝贵见解。

参考文献

Best, M. J., Pryor, M., Clark, D. B., Rooney, G. G., Essery, R. L. H., Ménard, C. B., Edwards, J. M., Hendry, M. A., Porson, A., Gedney, N., Mercado, L. M., Sitch, S., Blyth, E., Boucher, O., Cox, P. M., Grimmond, C. S. B. & Harding, R. J.（2011）。英国联合陆地环境模拟器（JULES）模型说明——第1部分：能量和水通量。《地球科学模型开发》，4，677–699。

Chen W. 和 Shen W.（2010），《三轴非刚性地球的惯性张量与自转新估计》，J. Geophys. Res., 115, B12419，数字对象标识符:10.1029/2009JB007094。

Eubanks, T. M.（1993）《地球定向的变化》，载于《空间大地测量学对地球动力学的贡献：地球动力学》，Geodyn. Ser., 第24卷，由 D. E. Smith 和 D. L. Turcotte 编，页码 1–54，美国地球物理联合会，华盛顿特区。

Flechtner F.（2025年）重力恢复与气候实验后续任务 | GRACE-FO, https://www.gfz.de/en/section/global-geomonitoring-and-gravity-field/projects/grace-fo-gravity-recovery-and-climate-experiment-follow-on-mission 访问日期：2025年12月15日。

Howarth, T. (2025年) 气候变化很快就会让地球的日子变长。这对这颗行星意味着什么，https://www.sciencefocus.com/planet-earth/climate-change-is-making-days-longer访问日期：2025年12月15日。

Kiani Shahvandi M, Adhikari S, Dumberry M, Modiri S, Heinkelmann R, Schuh H, Mishra S, Soja B. (2024a) 地核、地幔和气候过程对地球极移的贡献。载于：《自然·地球科学》，2024年7月12日。数字对象标识符：外部页面https://doi.org/10.1038/s41561-024-01478-2 。

Kiani Shahvandi M, Adhikari S, Dumberry M, Mishra S, Soja B, (2024b) 气候变化对日长变化的影响日益占据主导地位。载于：美国国家科学院院刊，PNAS 2024，第121卷。数字对象标识符：外部页面 https://doi.org/10.1073/pnas.2406930121 。

Kiani Shahvandi 等人（2024c）Kiani Shahvandi 等人的新出版物（2024），空间大地测量组，苏黎世联邦理工学院，https://space.igp.ethz.ch/news/2024/07/new-publications-by-kiani-shahvandi-et-al-2024.html

Liu, C.、Huang C. 和 Zhang, M.（2017）基于地球静力平衡形状计算的主转动惯量，《大地测量与地球动力学》，8，201-205。

Mackay, J. D., Barrand, N. E., Hannah, D. M., Potter, E., Montoya, N. and Buytaert, W., (2025年) 热带安第斯山脉气候变化背景下冰川演化的物理机制建模，《冰冻圈》, 19, 685–712, https://doi.org/10.5194/tc-19-685-2025

Marzeion, B., Hock, R., Anderson, B., Bliss, A., Champollion, N., Fujita, K., 等. (2020年) 全球冰川质量变化集合预测的不确定性分解。《地球的未来》. 8, e2019EF001470

.

https://doi.org/10.1029/2019EF001470.

Maussion, F., Butenko, A., Champollion, N., Dusch, M., Eis, J., Fourteau, K., Gregor, P., Jarosch, A. H., Landmann, J., Oesterle, F., Recinos, B., Rothenpieler, T., Vlug, A., Wild, C. T. and Marzeion, B., (2019年) 开放式全球冰川模型（OGGM）v1.1。《地球科学模型开发》, 12, 909-931。

NASA科学编辑团队，（2020年）米兰科维奇（轨道）周期及其在地球气候中的作用，https://science.nasa.gov/science-research/earth-science/milankovitch-orbital-cycles-and-their-role-in-earths-climate/ 访问日期：2025年12月15日。

Phan P.-L. 和 Rambaux, N.（2025年）金星的极移，《天文学与天体物理学》，6月2日 5.

Patočka, V. 和 Walterová, M.（2025年）钱德勒周期公式（行星天体的自由摆动）。《地球物理研究快报》，5，e2024GL112997。https://doi.org/10.1029/2024GL112997

Schwartz, S. E.，（2007年）地球气候系统的热容量、时间常数和灵敏度，已获准在《地球物理研究杂志》发表，布鲁克海文国家实验室环境科学部/大气科学部，纽约州，美国。

Shen, W.、Chen W. 和 Sun R.（2008年）地球瞬时主转动惯量与变速自转，《地球空间信息科学》，11:2，127-132，数字对象标识符：10.1007/s11806-008-0064-1

，

https://doi.org/10.1007/s11806-008-0064-1。

太阳系动力学组（2025年）Horizons系统，喷气推进实验室，https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/ 访问日期：2025年12月15日。

Velev, K.（编辑）（2024年）证据，https://science.nasa.gov/climate-change/evidence/ 访问日期：2025年12月15日。

Velev,K.（编辑）（2025年）气候变化，https://science.nasa.gov/climate-change/ 访问日期：2025年12月15日。

Wang, A.、Lee, J.（2024）NASA资助的研究解释气候如何改变地球自转，https://www.jpl.nasa.gov/news/nasa-funded-studies-explain-how-climate-is-changing-earths-rotation/ 访问日期：2025年12月15日。

Williams, J. G.、Boggs, D. H.、Yoder, C. F.、Ratcliff, J. T. 和 Dickey, J. O.（2001）月球自转a I固体部分和熔融核中的耗散，《地球物理研究：行星》，106，E11，27-933—27-968。

Yamaguchi R. 和 Furuya M.，（2025年）我们能否仅使用观测到的极移数据估算钱德勒摆动的周期和品质因数？《地球、行星与空间》，77:99，https://doi.org/10.1186/s40623-025-02240-7。

已提交至《空间研究进展》，2026年1月，审稿中

附录A

估算海平面上升导致的地球转动惯量变化

可以假设地球表面是扁球体，并使用扁球体表面积和扁球壳转动惯量的方程，重新计算或估算地球的转动惯量矩阵。假设壳层的密度与水相同。由于地球表面只有70.8%被海洋覆盖，因此只考虑壳层质量的70.8%。此外，在此计算过程中，假设地球质量保持不变。首先，将地球的转动惯量矩阵转换为主转动惯量，并保存特征向量以供后续使用。根据质量分数缩减主转动惯量，该质量分数定义为扁球壳质量的70.8%与地球质量之比。然后，将扁球壳质量的70.8%所对应的主转动惯量加到缩减后的主转动惯量上，以计算地球主转动惯量的新估计值。随后使用已保存的特征向量将其转换回去，并假设这些特征向量保持不变。

附录B

作用于地球的重力梯度力矩

地球的姿态动力学满足欧拉运动方程，

$$\boldsymbol{I}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\tau}\ ,\ \boldsymbol{I}=M_e\boldsymbol{R}_{gy}^2 \tag{B1}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 是地球绕旋转轴的转动惯量矩阵，M_e 是地球质量，$\boldsymbol{R}_{gy}^2$ 是回转半径平方构成的矩阵，$\boldsymbol{\omega}$ 是旋转速率向量，$\boldsymbol{\tau}$ 是绕同一旋转轴作用于地球的总动力力矩。在稳态条件下，

$$\boldsymbol{I}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_{ss}=-\boldsymbol{\omega}_{ss}\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}_{ss}+\boldsymbol{\tau}_{ss}=\boldsymbol{0}\ . \tag{B2}$$

因此，在稳态条件下，

$$\boldsymbol{\tau}_{ss}=\boldsymbol{\omega}_{ss}\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}_{ss}\ . \tag{B3}$$

因此，稳态重力梯度力矩$\boldsymbol{\tau}_{ss}$ 可根据$\boldsymbol{\omega}_{ss}$ 和地球的$\boldsymbol{I}$ 进行估算。已知，由于大气及其他扰动，$\boldsymbol{\omega}_{ss}$ 会减小，恒星日的时长会增加约 5 ms (ΔT_{ss})，相当于恒星日时长的 5.8e-06%。通过线性化可知，扰动扭矩的大小近似为：

$$\left|\Delta\boldsymbol{\tau}_d\right|=\left(\Delta T_{ss}/T_{ss}\right)\boldsymbol{\tau}_{ss}\ , \tag{B4}$$

其中，$T_{ss}=2\pi/\boldsymbol{\omega}_{ss}$为已知量，表示恒星日的时长（惯性参考系中地球的自转周期），比恒星日长 8.4 ms。

关于稳态自转速率的扰动态姿态动力学为：

$$\boldsymbol{I}\frac{d}{dt}\Delta\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_{ss}\times\boldsymbol{I}\Delta\boldsymbol{\omega}+\Delta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}_{ss}=\Delta\boldsymbol{\tau}\ , \tag{B6}$$

其中，$\Delta\boldsymbol{\omega}$ 是相对于稳态旋转速率向量的旋转速率向量扰动，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 是作用于行星的扰动力矩，该力矩由扰动力矩和重力梯度力矩扰动组成。因此，

$$\Delta\boldsymbol{\tau}=\Delta\boldsymbol{\tau}_d+\Delta\boldsymbol{\tau}_{gg}\ . \tag{B7}$$

所需幅值的扰动扭矩$\Delta\boldsymbol{\tau}_d$由高斯随机数生成器生成。根据小扰动假设，可以证明：

$$\Delta\boldsymbol{\tau}_{gg} = 3n^2\mathbf{C}\boldsymbol{I}\mathbf{c} \equiv 3n^2\begin{bmatrix}0 & -c_3 & c_2\\ c_3 & 0 & -c_1\\ -c_2 & c_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{11} & I_{12} & I_{13}\\ I_{12} & I_{22} & I_{23}\\ I_{13} & I_{23} & I_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}. \quad \text{(B8)}$$

假设稳态下扰动重力梯度力矩$_{gg}\Delta\boldsymbol{\tau}$为零。或者，也可以滤除任何稳态偏置向量。上述内容中，n是地球绕太阳运行的轨道角速度，向量$\mathbf{c}$是指向太阳中心方向的方向余弦单位向量。可以使用任何指标不重复的欧拉角序列来预测行星的姿态。因此，可由此得到线性化扰动方程，并由式（B6）、（B7）和（B8）得出。指向太阳中心方向的方向余弦单位向量$\mathbf{c}$最初在地心地固惯性参考系中，以地球相对于太阳的轨道位置和倾角表示。该向量记为$_0\mathbf{c}$，随后转换到地心地固本体坐标系中，因此向量$\mathbf{c}$表示为：

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{T}_{BI}\boldsymbol{c}_0,$$

其中，$_{BI}\boldsymbol{T}$ 是用于连接地心地固惯性坐标系与地心地固本体坐标系的坐标变换矩阵，并根据（3-2-1）欧拉角序列定义如下：

$$\begin{bmatrix}x_b\\ y_b\\ z_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta_1 & s\theta_1\\ 0 & -s\theta_1 & c\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\theta_2 & 0 & -s\theta_2\\ 0 & 1 & 0\\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\theta_3 & s\theta_3 & 0\\ -s\theta_3 & c\theta_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{T}_{BI}\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{bmatrix}. \quad \text{(B10)}$$

在方程（B10）中，余弦θ_i = θ $_{ic}$和正弦$_i$sθ = θ 。

（3-2-1）欧拉角序列与角速度分量之间的关系为：

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \sin\theta_1\tan\theta_2 & \cos\theta_1\tan\theta_2\\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ 0 & \sin\theta_1/\cos\theta_2 & \cos\theta_1/\cos\theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}. \quad \text{(B11)}$$

也可以使用其他指标不重复的欧拉角序列（如（1-2-3）序列或（2-3-1）序列）来预测行星的姿态。或者，也可以采用四元数表述。在我们的研究中，尽管仅展示了与（3-2-1）序列相关的结果，但已使用上述三种欧拉角序列分别验证了动力学模型。

将强迫项限定为稳态分量和扰动分量后，地球的完整非线性姿态动力学可由方程（B1）、（B3）和（B7）表示为：

$$\boldsymbol{I}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_{ss} + \Delta\boldsymbol{\tau}_d + \Delta\boldsymbol{\tau}_{gg},\ \boldsymbol{I} = M_e\boldsymbol{R}_{gy}^2 + \Delta\boldsymbol{I}_c + \Delta\boldsymbol{I}_t. \quad \text{(B12)}$$

$_{gg}\Delta\boldsymbol{\tau}$ 由方程（B8）给出，所需幅值的扰动扭矩 $_d\Delta\boldsymbol{\tau}$ 使用高斯随机数生成器生成。$_c\Delta\boldsymbol{I}$ 和 $_t\Delta\boldsymbol{I}$ 在每个时间步长处计算，并由方程（1）和（3）给出，其中包含地球 Love 数的平均值 $_2k$。

将方程（8）中的热能平衡方程以及方程（11）给出的质量变化方程加入姿态动力学后，姿态动力学的完整方程组由方程（B11）、（B12），以及方程（8）或方程（10）和方程（11）给出。