arXiv:2601.07759v1 [math.PR] 12 Jan 2026

随机零和博弈的价值

RomainCosson LaurentMassouli´
eromain.cosson@nyu.edu laurent.massouli´e@inria.fr

2026年1月

摘要

我们研究随机矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 上双人零和博弈的博弈值，该博弈定义为 $v(M) = \min_{\boldsymbol{x}\in\Delta_n} \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta_m} \boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y}$。在 $n = m$ 和 M 具有独立同分布的标准高斯矩阵元的情形下，我们证明，$v(M)$ 的标准差为 $\frac{1}{n}$ 量级。这证实了一个可追溯至20世纪80年代的实验猜想。我们还研究了 M 为满足 $m = n + \lambda\sqrt{n}$ 的矩形高斯矩阵的情形，并证明博弈的期望值为 $\frac{\lambda}{n}$ 量级；此外，我们也研究了 M 为随机正交矩阵的情形。我们的方法基于概率论论证和凸几何。我们认为，研究随机博弈或许能为理论计算机科学中的各种问题带来新的视角。

目录

1 引言 **1**

2 预备知识 **3**
2.1 记号与定义 .3 2.2 随机博弈预备知识 .4

3 随机博弈 高斯矩阵上的随机博弈 6
3.1 主要结果及其含义 .6 3.2 通过比较原理实现的方法 .7 3.3 定理 3.1 的证明.8

4 随机博弈 正交矩阵上的博弈 10
4.1 几何方法.10 4.2 凸几何背景.11 4.3 定理 4.1 的证明结构.12 4.4 命题 4.7 的证明.13 4.5 命题 4.8 的证明.15 4.6 引理 4.13 的证明.16 4.7 引理 4.9 的证明.18

5 开放问题与结论 19
5.1 开放问题 .19 5.2 结论 .21

A 实验 以及简单的集中性结果 22
A.1 博弈值标度的经验证据。.22 A.2 $\mathbb{E}(||g^{+}|)$ 的下界.22 A.3 矩形矩阵期望值的推论.23 A.4 利用优化问题 (P) 中的对称性.23 A.5 定理 3.1 证明中使用的集中性结果.24

B 戈登不等式与高斯比较原理 24

参考文献 **26**

1 引言

在一篇发表于1928年的论文中 [vN28] ，题为《论策略博弈理论》，约翰·冯·诺依曼证明了，对于任意实矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$,

$$v(M) = \min_{\boldsymbol{x}\in\Delta_n} \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta_m} \boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{y} = \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta_m} \min_{\boldsymbol{x}\in\Delta_n} \boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{y} \tag{1}$$

其中， $\Delta_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \ \sum_i x_i = 1\}$ 是 n维概率单纯形，而 $v(M)$称为由 M定义的双人零和博弈的值。这一具有重要影响的结果被称为冯·诺伊曼极小极大定理。

与博弈论的联系如下。考虑这样一个策略博弈：玩家 1（分别地，玩家 2）从矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 中选择一行 $i \in [n]$ （分别地，一列 $j \in [m]$），收益 M_{ij} 从玩家 1 转移给玩家 2。在这个博弈中，玩家若能在确定自己的选择之前知道对手的策略，显然会更有利。然而，冯·诺伊曼极小极大定理表明，如果允许玩家使用所谓的混合策略——即行（分别地，列）上的概率分布——那么双方行动的先后顺序并不会影响博弈的值。在数学上，这一讨论可概括如下：

$$\max_{j\in[m]} \min_{i\in[n]} M_{ij} \le \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta_m} \min_{i\in[n]} (M\boldsymbol{y})_i = v(M) = \min_{\boldsymbol{x}\in\Delta_n} \max_{j\in[m]} (\boldsymbol{x}^T M)_j \le \min_{i\in[n]} \max_{j\in[m]} M_{ij}. \tag{2}$$

量 $v(M)$ 是与矩阵 M相关的一项基本量，在算法分析中发挥着核心作用。本文研究 $v(M)$，其中 M 是随机矩阵，延续了始于20世纪60年代的一系列研究。托马斯·M·科弗在1966年说过的话，至今仍然十分适用：“即使在最简单的情形下，确定随机博弈价值的分布在很大程度上仍是一个未解决的问题” [科弗66]。

主要结果。我们运用概率论和凸几何中的现代技术，加深了对 $v(M)$分布的理解。具体而言，对于 $v(M)$，当$M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是一个具有独立同分布的标准高斯矩阵元的随机矩阵且 $m/2 \le n \le 2m$时，我们给出了尾界。对于方阵，我们的结果意味着随机博弈的值的标准差为$\Theta(1/n)$，验证了Faris和Maier提出的实验猜想 [FM87] ，并改进了Jonasson此前给出的 $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$界 [Jon04]。对于矩形矩阵，我们证明，在 $\bar{m} = n + \lambda\sqrt{n}$的情形下，噪声与矩阵长宽比之间存在竞争。具体而言，在该情形下，我们证明 $v(M)$的期望为 λ/n 量级，而其波动 $v(M)$为 $1/n$量级。随后，我们研究 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为随机正交矩阵的情形，并为 $v(M)$给出尾界，由此可直接推出其标准差为 $\mathcal{O}(1/n^{3/2})$。对于高斯矩阵和正交矩阵，我们都引入了研究随机博弈的强大新工具，并在第3.2节（高斯部分）和第 4.2 节（正交部分）中加以概述。

与理论计算机科学的联系。在算法分析和决策规则中，冯·诺伊曼极小极大定理通常更广为人知的名称是姚氏极小极大原理，以纪念计算机科学家 Andrew Yao。该原理指出，对于给定的算法问题，最佳随机化算法的最坏情况性能，等于最佳确定性算法在最坏输入分布下的性能。该原理直接应用了方程 (1) 到矩阵 M，其中行对应算法，列对应输入，单元格 M_{ij} 对应算法 $i \in [n]$ 在输入 $j \in [m]$上的成本，而数值 $v(M)$ 对应于由 M表示的算法问题的复杂度。

Yao 首次应用该原理 [Yao77] 时证明，任何用于检测图中是否存在完美匹配的随机化算法，都至少需要 $\Omega(|V|^2)$ 次探测（按期望计），其中 $|V|$ 是图中的节点数。如今，该框架已广泛应用于在线算法、通信复杂度和计算复杂度等多个领域（示例见 [MR96、BEY05、Wig19]）。在论文的最后一节，我们将讨论如何利用随机矩阵探究随机化在最坏情况分析中带来的优势有多大，并提出一些我们认为与理论计算机科学界相关的开放问题。

与统计物理学的关系。统计物理学的一个核心目标，是通过研究微观结构的概率模型，理解大型复杂系统的典型行为。这一视角在识别涌现现象方面成效卓著，例如相变：当参数越过某个阈值时，宏观性质会发生突变。经典例子包括随机图上的渗流 [Bol11]，当平均度达到 1 时会出现巨型连通分量；以及随机 k-SAT [MMZ06]中的可满足性阈值。

随机博弈是博弈论背景下此类模型的自然对应物。在这里，“微观”随机性体现在收益矩阵的各项中，它们代表策略之间带有噪声或异质性的相互作用。“宏观”可观测量则是博弈值$v(M)$。从统计物理学的角度看，$v(M)$的作用类似于无序系统的基态能量——它是在随机能量景观上进行全局优化（对一位玩家的策略取最小值，对另一位玩家的策略取最大值）所得的结果。这种对应关系表明，随机博弈可能呈现自身的“博弈论相变”，例如，当长宽比 $v(M$越过 1 时，其符号会发生急剧变化。这一特定现象已由 Cover 正式证明 [Cov66]。

正如我们将看到的，现代统计物理学所发展出的工具体系适用于随机博弈的研究。具体而言，我们发现，高斯比较不等式 [Gor85，LT13]——这些不等式曾被用于分析统计学背景下的相变 [MM21]——也适用于这一情境。因此，我们的工作属于更广泛的研究计划：利用统计物理学和概率论中的思想，理解算法问题的标度律（例如，参见 [DKMZ11]）。正如随机图成为研究典型情形行为的经典对象（例如，聚类的谱算法 [Abb18]），我们认为随机博弈值得关注，并且是一个简洁且便于解析处理的模型，处于概率论、优化与博弈论的交汇处。关于与统计物理学的进一步联系，请参见 [BE98、Ber00]，他们在 $m = \alpha n$ 对于某个常数$\alpha \in \mathbb{R}$ 的情形下，采用所谓的“副本”启发式方法研究随机博弈问题。

前人工作。自20世纪60年代起，随着切尔诺夫和泰彻的工作 [CT65], ，关于随机双人零和博弈的研究形成了一条规模有限但持续发展的研究路线。最初，[CT65] 研究了纯策略的博弈值，描述了 $\min^{i\in[n]} \max_{j\in[m]} M_{ij}$ 的极限分布类别。遗憾的是，这对研究 $v(M)$ 几乎没有帮助，因为不等式 $\max^{j\in[m]} \min_{i\in[n]} M_{ij} \le v(M) \le \min^{i\in[n]} \max_{j\in[m]} M_{ij}$ 通常非常松。在这些不等式取等的特殊情形下（即以矩阵M 具有鞍点这一不太可能发生的事件为条件），思罗尔和福尔克 [TF65] 明确推导出了 $v(M)$ 的分布。关于随机环境中、与我们情形类似的 $v(M)$ 的博弈值，首个一般性结果来自 Cover [Cov66]：他证明了 $\mathbb{P}(v(M) > 0) = \mathbb{P}(X \le m)$，其中 X 是一个参数为$X \sim \mathcal{B}(1/2,$ $n+m-1)$的二项随机变量。该结果表明，当 $m >> n+\sqrt{n}$ 时，$v(M)$ 几乎总是为正，这与本文_给出的尾界一致。Cover 的证明使用了一个几何

论证，该论证源于 Schl¨afli [Sch50]，研究随机子空间与正正交象限相交的概率，其显著优点是适用于更广泛的分布。我们将在第 4 节中更详细地讨论他们的工作，并在那里解释我们自己的几何论证。后来，在20世纪80年代，尽管关于 $v(M)$ 博弈值的研究缺乏理论进展，Faris 和 Maier 的一项实证研究 [FM87] 猜想，对于具有独立同分布高斯元素的 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$|v(M)|$ 通常为 $\Theta(1/n)$ 量级。他们还注意到，最优策略支撑集的基数非常接近二项分布 $\mathcal{B}(1/2, n)$。更近期，Jonasson [Jon04] 证明了最优混合策略支撑集的基数以高概率处于$[0.1n, 0.9n]$ 之内。他还证明了 $|v(M)|$ 以高概率为 $O(1/\sqrt{n})$ 量级，相较于朴素的 $O\left(\sqrt{\log n/n}\right)$ 尾界略有改进（见第 2 节），并强调了一个重要问题：证明博弈值实际上位于~~Θ~~$(1/n)$ 中（[Jon04]中的猜想 2.3）。

我们注意到，随机 N 人博弈 [RS00, McL05, ACSZ21, HJM+23]、随机双矩阵博弈[MB05, ARY21], 以及随机零和博弈 [Rob06, Bra17]也在经济学文献中有所研究。具体而言，Roberts [Rob06] 研究了重尾（柯西）分布下的博弈值；Brandl [Bra17], 则证明，对于随机反对称矩阵，相应零和博弈的最优策略支撑集在$[n]$ 所有基数为奇数的子集中均匀分布。随机零和博弈也在生物学 [CN89]、数学 [Tan10],和统计物理学 [BE98, Ber00]中得到研究。

论文结构。本文结构安排如下。首先，第2 节回顾全文将用到的预备结果和定义。接着，第3 节给出关于高斯矩阵的主要结果。本节依赖于高斯比较原理，相关内容将在附录B中回顾。随后，第4 节给出关于正交矩阵的结果，这些结果基于几何论证。最后，第5 节介绍我们认为与计算机科学尤为相关的随机博弈研究开放问题。

2 预备知识

2.1 符号与定义

一般情况。 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 表示一个有 n 行、 m 列的矩阵，其中 n， $m \geq 2$。根据对称性，我们通常只关注 $m \geq n$的情形。我们用 $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示单位矩阵（当 $n = m$时）。 $\Delta_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i : \ x_i \geq 0 \ \sum_i x_i = 1\}$ 是 n维概率单纯形。我们约定玩家 1 为行玩家，选择纯策略 $i \in [n]$或混合策略 $\boldsymbol{x} \in \Delta_n$；玩家 2 为列玩家，选择纯策略 $j \in [m]$或混合策略 $\boldsymbol{y} \in \Delta_m$。我们用 $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ 表示全 1 向量。当维度可从上下文中明确得知时，例如在矩阵与向量相乘的情形下，我们会省略下标。我们将向量 $\frac{1}{n}\mathbf{1}_n \in \Delta_n$ 称为均匀策略。

高斯变量。对于实值随机变量 X，我们用 $\mathbb{E}(X)$表示其期望，用 $\mathrm{Var}(X)$ 表示其方差，用 $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$表示其标准差。若实值随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$，则称其服从标准高斯分布 $X \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$。注意， $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X>a}) = \int_a^\infty x\varphi(x)dx = \varphi(a)$，因为 $\forall x \in \mathbb{R}:\ x\varphi(x) = -\varphi'(x)$。我们还将使用以下关于 $x \geq 0$ 的经典尾部不等式： $\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \Phi(x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$，其中 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t)dt$ 是累积分布函数。

高斯向量。对于对称正定矩阵 $\Sigma \in S_{++}^n$，若向量 $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$服从均值为零、协方差矩阵为 $\Sigma \in \mathbb{S}_{++}^n$ 的多元高斯分布，我们记作 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$。其密度函数为 $\varphi_\Sigma(\boldsymbol{g}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \text{ 行列式 } \Sigma}} \exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{g})$。

卡方分布。 高斯向量 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ 的范数服从所谓的自由度为 n 的卡方分布， $||\boldsymbol{g}|| \sim \chi_n$。 经典结果是， $a_n = \mathbb{E}(||\boldsymbol{g}||) = \sqrt{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ ，其中$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)dt$ 是伽马函数。注意到 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $a_n a_{n+1} = n$， 且 $a_n^2 \le \mathbb{E}(||\boldsymbol{g}||^2) = n$ （由詹森不等式），我们对所有 $n \ge 1$ 均有，

$$\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \le a_n \le \sqrt{n}. \tag{3}$$

注意，$a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的完整级数展开可通过归纳法得到（例如参见 [Gor85]），但方程 (3) 已足以满足本文的需要。

正部。对于高斯向量 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0, I_n)$，我们用 $\boldsymbol{g}^+ = (\max\{0, g_i\})_{i\in[n]}$ 表示其正分量，用 $\boldsymbol{g}^- = (\max\{0, -g_i\})_{i\in[n]}$ 表示其负分量，因此 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^+ - \boldsymbol{g}^-$。对于 $i \in [n]$，直接计算可得 $\mathbb{E}(g_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。根据詹森不等式， $\mathbb{E}(||\boldsymbol{g}^+||) \le \sqrt{\mathbb{E}(||\boldsymbol{g}^+||^2)} = \sqrt{\frac{n}{2}}$。我们还有下界 $\mathbb{E}(||\boldsymbol{g}^+||) \ge \sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{3}{\sqrt{n}}$ （推导见附录 A.2）。

高斯集中不等式。（例如，参见 [BLM13]）。令 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 表示关于欧几里得范数的 1-Lipschitz 函数，且 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0, I_n)$。那么，对所有 $t > 0$,

$$\mathbb{P}(f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}(f(\boldsymbol{g})) > t) \le \exp\left(-t^2/2\right).$$

在本文中，我们通常将此集中不等式应用于以下 1-Lipschitz 函数 $\boldsymbol{g} \to \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i g_i^+$，以及 $\boldsymbol{g} \to ||\boldsymbol{g}||$ 和 $\boldsymbol{g} \to ||\boldsymbol{g}^+||$。

2.2 随机博弈的预备知识

本节将介绍一些重要的预备结果。

命题 2.1（例如，参见 [Jon04]，以了解更多细节）。设 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是一个具有独立同分布的标准高斯矩阵元的随机矩阵（参见第3节），或者 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个均匀随机正交矩阵，其中 $m = n$（参见第4节）。以概率 *1*，方程$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, v)$ ((1) 的解唯一，且满足以下等式:

$$C = \{j \in [m] : y_j > 0\} = \{j \in [m] : (\boldsymbol{x}^T M)_j = v\},$$
$$R = \{i \in [n] : x_i > 0\} = \{i \in [n] : (M\boldsymbol{y})_i = v\},$$

其中， C 支撑列的集合与 R 支撑行的集合具有相同的基数$|C| = |R|$。此外，记$(M_{RC}, \boldsymbol{x}_R, \boldsymbol{y}_C)$ 为 $(M, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在行 R和列 C上的限制，则 M_{RC} 几乎必然可逆，并且

$$\boldsymbol{y}_C = vM_{RC}^{-1}\mathbf{1} \quad and \quad \boldsymbol{x}_R = v\mathbf{1}^T M_{RC}^{-1} \quad with \quad v = \frac{1}{\mathbf{1}^T M_{RC}^{-1}\mathbf{1}}. \tag{4}$$

证明概要。 方程（$\boldsymbol{x}$、 $\boldsymbol{y}$、 v）的解由以下线性优化

问题给出。

原问题		Dual		
最小化 v		最大化 v		
变量 $v \in \mathbb{R}$,	$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$	变量 $v \in \mathbb{R}$,	$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^m$	(5)
约束条件 $\boldsymbol{x}^T\mathbf{1} = 1$		满足 $\mathbf{1}^T\boldsymbol{y} = 1$		
$\boldsymbol{x}^T M \le v\mathbf{1}$		$M\boldsymbol{y} \ge v\mathbf{1}$		

假设约束多面体的任一边都不与目标向量正交，则可知（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，v）是唯一的。对于具有密度函数的随机向量，该条件几乎必然成立。

在线性规划（5）中，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^m$ 是约束 $\boldsymbol{x}^T M \le v\mathbf{1}$所对应的对偶变量，而 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$ 是约束 $M\boldsymbol{y} \ge v\mathbf{1}$ 所对应的对偶变量。因此，考虑最优原始—对偶对（$\boldsymbol{x}$，v）、（$\boldsymbol{y}$，v），并记

$$\begin{cases} C = \{j \in [m] : (\boldsymbol{x}^T M)_j = v\} \\ C' = \{j \in [m] : y_j = 0\} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} R = \{i \in [n] : (M\boldsymbol{y})_i = v\} \\ R' = \{i \in [n] : x_i = 0\} \end{cases},$$

根据互补松弛，有 $C \cup C' = [m]$ 和 $R \cup R' = [n]$。此外，假设约束是非退化的（即，任一可行点处的活跃约束数量至多等于维数），则最优解（$\boldsymbol{y}$，v）恰好使 m 个不等式约束取等号，而（$\boldsymbol{x}$，v）恰好使 n 个不等式约束取等号。因此，$|C| + |R'| = n$ 且$|R| + |C'| = m$。由此可推得 $C = [m] \setminus C'$ 和 $R = [n] \setminus R'$。注意，对于我们考虑的随机矩阵，约束多面体几乎必然是非退化的。最后，（4）直接由 C 和 R的定义得出。

□

注 2.2（博弈值的对称性）。由线性规划表述可直接得出，对于任意矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$，都有 $v(-M^T) = -v(M)$。因此，对于随机方阵，若有如下分布相等关系，$M =^{dist} -M^T$，便可立即得到 $\mathbb{E}(v(M)) = 0$。

现在我们给出随机双人博弈的博弈值的一个简单尾界。该结果直接源于这样的观察：行玩家始终可以采用均匀策略。

命题 2.3. 设 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是一个随机矩阵，其元素独立同分布，服从 $\mathcal{N}(0,1)$，则，

$$\mathbb{P}(v(M) \ge t) \le m\exp(-nt^2/2). \tag{6}$$

证明。由于行玩家可以采用均匀策略 $\frac{1}{n}\mathbf{1} \in \Delta_n$，显然有 $v(M) \le \frac{1}{n}\max_{j\in[m]} \left(\mathbf{1}^T M\right)_j$，它是 m个独立同分布、服从 $\mathcal{N}(0, 1/n)$ 的随机变量中的最大值。因此，根据并集界，对于所有 $t \ge 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(v(M) \ge t) &\le m(1 - \Phi(t\sqrt{n})) \\ &\le m\exp(-nt^2/2), \end{aligned}$$

其中，最后一行使用了标准高斯尾不等式 $1 - \Phi(x) \le \exp(-x^2/2)$。 □

注 2.4（解释与推论）。这一结果的一个直接推论是以下高概率界：对于所有 $t \ge 0$，以及具有独立同分布高斯元素的 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$，

$$\mathbb{P}\left(-t\sqrt{\frac{\log n}{m}} \le v(M) \le t\sqrt{\frac{\log m}{n}}\right) \ge 1 - 2\exp(-t^2/2).$$

这一界在文献中广为人知（例如参见 [FM87]），但并不精确。首先，对于 $n = m$，它与 $\Theta(1/n)$ 猜测的 $v(M)$阶不符。其次，对于 $m >> n + \sqrt{n}$，它没有体现这样一个事实：游戏的值几乎总是正的（见 Cover [Cov66]）。

We 以如下关于 $v(M)$ 方差的下界结束本节。

命题 2.5。 设 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为随机矩阵，其元素独立同分布，服从 $\mathcal{N}(0, 1)$，则，

$$\mathrm{Var}(v(M)) \geq \frac{1}{nm}.$$

证明。 考虑 $M' = M - a\mathbb{J}$，其中 $a = \frac{1}{nm}\sum_{ij} M_{ij}$，且 $\mathbb{J} \in \mathbb{R}^{n\times m}$为全 1 矩阵。注意到 $v(M) = v(M') + a$，并且 M'和 $a\mathbb{J}$相互独立，因为它们是高斯向量 M 在正交空间上的投影。由此可得

$$\mathrm{Var}(v(M)) = \mathrm{Var}(v(M')) + \mathrm{Var}(a) \geq \mathrm{Var}(a) = \frac{1}{nm}.$$

□

回顾注 2.2，对于满足 $n = m$ 的高斯矩阵，有 $\mathbb{E}(v(M)) = 0$，这是由对称性得出的。因此，命题 2.5 支持 [FM87] 关于方阵中 $v(M)$ 的典型值为 $1/n$ 数量级的实验猜想。为进一步支持这一猜想，请参阅附录 1 中的图 A.1，其中提供了我们自己的实验依据。

3 高斯矩阵上的随机博弈

3.1 主要结果及其含义

本节旨在证明以下论述，它是我们关于高斯矩阵的主要技术结果。

定理 3.1。 我们固定 $n \leq m \leq 2n$。由下式定义的随机博弈的值为

$$v(M) = \min_{\boldsymbol{x}\in\Delta_n} \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta_m} \boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y},$$

对于 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 个元素独立同分布且服从 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的矩阵，对所有 $t > 0$，均满足

$$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{n} - \frac{t}{n} \leq v(M) \leq 40\sqrt{2}\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{n} + \frac{t}{n},$$

其概率至少为 l 东边 $1-c_1\exp(-c_2t^2)-c_3\exp(-c_4n)$，其中 c_1、c_2、c_3、$c_4 > 0$ 为某些普适常数 .

定理3.1 有以下两个直接推论：

i. 对于方阵（$m = n$），这意味着 σ（v（M））$= \mathcal{O}$（$1/n$），因此 σ（v（M））$= \Theta$（$1/n$），根据命题2.5的下界可得。事实上，利用定理3.1 中关于 v（M）较小偏差的尾界，以及方程（6）

对于 $v(M)$ 的较大偏差，

$$\begin{aligned}\sigma(v(M))^2 = \mathbb{E}(v(M)^2) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(v(M)^2 \geq s)ds \\ &= 2\int_0^1 \mathbb{P}(v(M) \geq \sqrt{s})ds + 2\int_1^\infty \mathbb{P}(v(M) \geq \sqrt{s})ds \\ &\leq 2\int_0^1 c_1 \exp(-c_2 n^2 s) + c_3 \exp(-c_4 n)ds + 2\int_1^\infty n\exp(-ns/2)ds \\ &\leq 2\frac{c_1}{c_2 n^2} + 2c_3\exp(-c_4 n) + 2\exp(-n/2) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

ii. 对于矩形矩阵（$n < m \leq 2n$），通过类似的论证，定理 3.1 给出了 $v(M)$ 的期望的阶，

$$\Omega\left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{n}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \mathbb{E}(v(M)) \leq \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

详细证明见附录 A.3，其中还解释了我们在上述方程中对朗道记号稍显不同寻常的用法。注意，在 $m = n + \lambda\sqrt{n}$ 的情形下，对于 $\lambda > 0$，$\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{n}$ 的尺度为 $\frac{\lambda}{n}$，因此，即使对于“稍微”呈矩形的矩阵，我们也能捕捉到长宽比效应：在该情形下，长宽比与噪声共同决定量 $v(M)$。

注 3.2 （情形 $m > 2n$ 或 $n > m$）。定理 *3.1* 还给出了 $m > 2n$ 情形下相差至多一个 $\sqrt{}$对数 m 因子的尾界。具体而言，在该情形下，将列玩家限制为只在形状为 $(n, 2n)$ 的左侧子矩阵上行动，只会降低 $v(M)$ 的值，因此定理 *3.1*以高概率给出一个 $\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 下界。此外，在该情形下，命题 *4.8* 给出的上界几乎匹配，误差为 $\mathcal{O}\left(\sqrt{}\text{对数}\, m/\sqrt{n}\right)$。最后注意，$n > m$ 的情形可由对称性直接推出。

3.2 一种基于比较原理的方法

高斯比较不等式是概率论中的基础工具 [LT13]。它们已应用于计算机科学，包括流式算法 [BCIW16], 降维 [Dir16], 压缩感知 [PV12],以及机器学习 [MM21，TOH15]。

比较不等式的一个经典例子是斯莱皮安引理 [Sle62], ，它指出，n 正相关标准高斯变量的最大值的期望，小于 n 相互独立的标准高斯变量的最大值的期望。更一般地说，高斯比较不等式使我们能够将复杂（例如，相关）高斯过程的性质与简单（例如，不相关）高斯过程的性质进行比较。请注意，这一思想与“球入箱”情形下所谓的泊松近似十分相似（例如，参见其在散列中的经典应用 [MU17]）。斯莱皮安引理是 Kahane 不等式的直接推论。本文附录B（定理 B.3）回顾了该不等式，并介绍了更高级的高斯比较不等式。

本节中，我们使用一种特定的高斯比较原理，称为戈登不等式[Gor85]。戈登不等式有许多等价表述，我们将在下文陈述

定理3.3，这是与我们的目的最直接相关的版本。为求完整，我们在附录B中介绍该不等式的背景和其他表述，并从基本原理出发概述其证明。

定理 3.3 将对 $v(M$ 的研究转化为对另一个"更简单"的随机量$\Phi_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})$ 的研究。这正是我们在定理 3.1 的证明中分析的量。虽然对于正交博弈的研究而言，这种方法比第 4 节中的几何方法更直接，但我们认为几何方法也很有启发性，因此建议读者参阅第 4.1 节的概述。

定理 3.3 (戈登不等式)。设 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 和 $D_y \subset \mathbb{R}^m$ 是紧集。令 $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为一个元素独立同分布于 $\mathcal{N}(0,\ 1)$ 的矩阵，且 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0,\ I_n)$ 和 $\boldsymbol{h} \sim \mathcal{N}(0,\ I_m)$。定义：

$$\Phi_1(G) = \min_{\boldsymbol{x}\in D_x} \max_{\boldsymbol{y}\in D_y} \boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y},$$
$$\Phi_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) = \min_{\boldsymbol{x}\in D_x} \max_{\boldsymbol{y}\in D_y} ||\boldsymbol{y}||\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x} + ||\boldsymbol{x}||\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{y},$$

那么，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，我们有：

$$\mathbb{P}(\Phi_1(G) \le t) \le 2\mathbb{P}(\Phi_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \le t). \tag{7}$$

3.3 定理 3.1 的证明

我们现在展开 定理 3.1 的证明。我们应用戈登原理（定理3.3）到

$$v(M) = \min_{\boldsymbol{x}\in\Delta_n} \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta_m} \boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y},$$

这意味着对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(v(M) \le t) \le 2\mathbb{P}(\Phi_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \le t), \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0,\ I_n)$ 和 $\boldsymbol{h} \sim \mathcal{N}(0,\ I_m)$ 是独立采样的，并且

$$\Phi_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) = \min_{\boldsymbol{u}\in\Delta_n} \max_{\boldsymbol{v}\in\Delta_m} ||\boldsymbol{v}||\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{u} + ||\boldsymbol{u}||\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{v}. \tag{P}$$

利用备注 $v(M) = -v(-M^T)$ 中的对称性 2.2，并利用 $\Phi_2(\cdot,\ \cdot)$ 的性质（详情见附录 A.4 ），我们还可得出，对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(v(M) \ge t) \le 2\mathbb{P}(\Phi_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \ge t). \tag{9}$$

现在我们研究量 $\Phi_2(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{h})$。我们固定两个向量 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{g}$，并假设 $\boldsymbol{g}^- \neq 0$ 和$\boldsymbol{h}^+ \neq 0$。首先考虑确定性多项式时间，然后考虑 $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{h}^+}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{h}^+}$，从而得到以下界$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{g}}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{g}^-}$，——

——

$$\frac{||\boldsymbol{h}^+||}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{h}^+} \min_{\boldsymbol{u}\in\Delta_n} \left\{\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{u} + ||\boldsymbol{h}^+||||\boldsymbol{u}||\right\} \le \Phi_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \le \frac{||\boldsymbol{g}^-||}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{g}^-} \max_{\boldsymbol{v}\in\Delta_m} \left\{\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{v} - ||\boldsymbol{g}^-||||\boldsymbol{v}||\right\}. \tag{10}$$

因此，对于某个固定向量 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$ 和某个固定参数 $\gamma > 0$，我们重点关注以下优化问题，

$$\max_{\boldsymbol{v}\in\Delta_m} f(\boldsymbol{v}) \quad \text{where} \quad f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{v} - \gamma||\boldsymbol{v}||. \tag{R}$$

函数：$\boldsymbol{v} \to f(\boldsymbol{v})$ 在 Δ_m上强凹且可微，而 是一个闭有界凸集。我们写出 (R) 的拉格朗日函数，并引入对偶变量 $\mu \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda_j \geq 0$,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}, \mu, (\lambda_j)) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{v} - \gamma ||\boldsymbol{v}|| + \sum_{j \in [m]} \lambda_j v_j + \mu \left(1 - \sum_{j \in [m]} v_j\right) = \sum_{j \in [m]} v_j (h_j + \lambda_j - \mu) - \gamma ||\boldsymbol{v}|| + \mu.$$

根据强对偶性和强凹性，存在一个满足原始与对偶可行性的一组原始-对偶对 $(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\lambda},\ \mu)$，并满足一阶条件 $v_j = \frac{||\boldsymbol{v}||}{\gamma}(h_j + \lambda_j - \mu)$ 和互补松弛条件 $\forall j \in [m]:\ v_j \lambda_j = 0$。特别地，$v_j > 0$ 蕴含 $v_j = \frac{||\boldsymbol{v}||}{\gamma}(h_j - \mu)$，而 $v_j = 0$ 蕴含 $h_j - \mu = -\lambda_j \leq 0$。因此，对所有 $j \in [m]$，我们可以写出:

$$v_j = \frac{||\boldsymbol{v}||}{\gamma}(h_j - \mu)^+.$$

这施加了如下约束

$$||(\boldsymbol{h} - \mu \mathbf{1})^+|| = \gamma \tag{11}$$

由于 $\mu \to ||(\boldsymbol{h} - \mu \mathbf{1})^+||$ 从$+\infty$ 开始严格递减，直至达到 0，因此该约束唯一确定了 $\mu \in \mathbb{R}$ 的值。此外，利用 $\boldsymbol{v} \in \Delta_m$ 这一事实，我们得到

$$\forall i \in [m] : v_j = \frac{1}{\sum_{j' \in [m]} (h_{j'} - \mu)^+} (h_j - \mu)^+.$$

总而言之，我们得到 (R) 的如下取值,

$$(\mathrm{R}) = \frac{1}{\sum_{j \in [m]} (h_j - \mu)^+} \left(\boldsymbol{h}^T (\boldsymbol{h} - \mu \mathbf{1})^+ - \gamma^2\right),$$

注意到 $\boldsymbol{h}^T (\boldsymbol{h} - \mu \mathbf{1})^+ \leq \boldsymbol{h}^+ (\boldsymbol{h} - \mu \mathbf{1})^+$，应用柯西-施瓦茨不等式，并利用 (11)，可得 ,

$$(\mathrm{R}) \leq \frac{\gamma}{\sum_{j \in [m]} (h_j - \mu)^+} \left(||\boldsymbol{h}^+|| - \gamma\right). \tag{12}$$

现在回到方程（10）的右边，并在 $\gamma = ||\boldsymbol{g}^-||$ （R）中取值，我们得到以下界:

$$\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \leq \frac{||\boldsymbol{g}^-||}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{g}^-} \frac{||\boldsymbol{g}^-||}{C(\mu)} (||\boldsymbol{h}^+|| - ||\boldsymbol{g}^-||), \tag{13}$$

其中 $C(\mu) = \sum_{j \in [m]} (h_j - \mu)^+$ 其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 为满足 $||(\boldsymbol{h} - \mu \mathbf{1})^+|| = ||\boldsymbol{g}^-||$ 的常数 .

利用方程（10）的左边，并注意到 $\min_{\boldsymbol{u} \in \Delta_n} \left\{\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{u} + ||\boldsymbol{h}^+|| ||\boldsymbol{u}||\right\} = -\max_{\boldsymbol{u} \in \Delta_n} \left\{ (-\boldsymbol{g})^T \boldsymbol{u} - ||\boldsymbol{h}^+|| ||\boldsymbol{u}||\right\}$，我们得到:

$$\frac{||\boldsymbol{h}^+||}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{h}^+} \frac{||\boldsymbol{h}^+||}{C'(\mu')} (||\boldsymbol{h}^+|| - ||\boldsymbol{g}^-||) \leq \Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}), \tag{14}$$

其中 $C'(\mu') = \sum_{i \in [n]} (-g_i - \mu')^+$ 对于满足 $||(-\boldsymbol{g} - \mu' \mathbf{1})^+|| = ||\boldsymbol{h}^+||$ 的常数 $\mu' \in \mathbb{R}$.

以下简单的集中性结果见附录 A.5。对于某个常数 $c_4 > 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\boldsymbol{g}^- \neq 0 \ \text{ and } \ \boldsymbol{h}^+ \neq 0) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)), \\ \mathbb{P}(||\boldsymbol{g}^-|| \leq \sqrt{n}) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)), \\ \mathbb{P}(\mathbf{1}^T \boldsymbol{g}^- \geq n/4) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)), \\ \mathbb{P}(C(\mu) \geq m/20) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)), \\ \mathbb{P}(||\boldsymbol{h}^+|| \geq \sqrt{m}/2) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)), \\ \mathbb{P}(\mathbf{1}^T \boldsymbol{h}^+ \leq m/2) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)), \\ \mathbb{P}(C'(\mu') \leq \sqrt{2}\ n) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)), \end{cases}$$

并且，对于所有 $t > 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\sqrt{m/2} - 3/\sqrt{m} - t \leq ||\boldsymbol{h}^+|| \leq \sqrt{m/2} + t) \geq 1 - 2\exp(-t^2/2), \\ \mathbb{P}(\sqrt{n/2} - 3/\sqrt{n} - t \leq ||\boldsymbol{g}^-|| \leq \sqrt{n/2} + t) \geq 1 - 2\exp(-t^2/2). \end{cases}$$

因此，利用方程（13），通过并集界可得

$$\mathbb{P}\left(\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \leq \frac{80}{m}\left(\sqrt{m/2} - \sqrt{n/2} + 3/\sqrt{n} + 2t\right)\right) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)) - 2\exp(-t^2/2),$$

并利用（14），我们得到:

$$\mathbb{P}\left(\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}n}\left(\sqrt{m/2} - \sqrt{n/2} - 3/\sqrt{m} - 2t\right)\right) \geq 1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n)) - 2\exp(-t^2/2).$$

这意味着，对于常数 c_1、c_2、c_3、$c_4 > 0$ 的适当选择，该定理成立。

4 正交矩阵上的随机博弈

4.1 几何方法

现在我们考虑博弈矩阵从方正交矩阵集合中均匀随机抽取的情形 $O_n = \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ Q^T Q = I_n\}$。本段讨论仍采用非正式的表述，以传达我们方法的核心思想；正式定义留待第4.2节给出。我们的方法利用了凸锥的几何结果。

我们首先初步说明随机博弈与凸几何之间的联系。记 $K = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{y} \geq 0\}$ 为正正交象限，记 $Q^T K = \{Q^T \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{y} \geq 0\}$ 为经随机正交矩阵 Q^T旋转后的正交象限。我们注意到， $v(Q) \geq 0$ 当且仅当存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 使得 $\boldsymbol{y} \geq 0$ 且 $Q\boldsymbol{y} \geq 0$。这可以改写为 $v(Q) \geq 0 \Leftrightarrow K \cap Q^T K \neq \{0\}$。因此，由 Q 定义的博弈的值为正的概率，$\mathbb{P}(v(Q) \geq 0)$（根据对称性，该概率等于 $1/2$），也等于将 $\mathbb{R}^n$ 的正交象限随机旋转后与正正交象限有非平凡交集的概率。据我们所知，这也是证明以下反直觉事实最直接的方法：两个随机旋转的正交象限相交的概率为 $1/2$, 且与环境维数 n无关。

这段讨论暗示了 Cover [Cov66] 如何为矩形矩阵得出 $\mathbb{P}(v(Q) \geq 0)$ 的显式表达式。具体而言，他的证明依赖于 Schl¨afli [Sch50] 提出的一个公式，该公式给出了维数为 $n < m$ 的随机子空间与 $\mathbb{R}^m$的正正交象限相交的概率。

然而，这一论证未能进一步给出 $v(Q)$ 的典型取值范围，而不仅仅是确定其符号。为此，我们旨在界定随机旋转正交象限的交集足够"宽"的概率。值得庆幸的是，多年来人们已发展出此类几何结果：具体来说，所谓的 锥形运动学公式 根据凸锥的内在体积，给出了两个随机旋转的凸锥相交概率的精确公式（参见 [SW08]一书）。最近， [ALMT14]在压缩感知背景下提出了锥形运动学公式的一种实用近似变体。

由于随机正交模型相当复杂，而且不像随机高斯模型那样常见，我们将研究范围限定在方阵的情形 $n = m$。具体而言，我们的主要结果如下。

定理 4.1。 固定 $n \geq 2$。由下式定义的随机博弈的值

$$v(Q) = \min_{\boldsymbol{x} \in \Delta_n} \max_{\boldsymbol{y} \in \Delta_n} \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{y},$$

其中 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 取自正交矩阵上的哈尔测度，对所有 $t >$，均满足 0,

$$v(Q) \leq \frac{t}{n\sqrt{n}}, \tag{15}$$

以至少 $1 - c_1 \exp(-c_2 t^2) - c_3 \exp(-c_4 n)$ 的概率成立，其中 $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ 为普适常数。注 *4.2*（解读及与定理 *3.1* 的比较）。定理 *4.1* 呼应了定理 *3.1* 对高斯矩阵给出的尺度关系。*(15)* 中多出的 $1/\sqrt{n}$ 因子是自然的，因为高斯矩阵的各行以高概率具有 $\sqrt{n}$ 范数，而 Q 的各行范数均为 *1*。此外，我们马上可以看到，行玩家的均匀策略 $\boldsymbol{x} = \frac{1}{n}\mathbf{1}$ 所诱导的值 $\frac{1}{n}\max_{j \in [n]} (\mathbf{1}^T Q)_j$ 的阶为 $\sqrt{\log n}/n$：由于哈尔测度在旋转下具有不变性，向量 $\mathbf{1}^T Q$ 在半径为 n 的欧几里得球面上均匀分布，因此其最大坐标的阶为 $\sqrt{\log n}$。总之，与高斯矩阵的情形类似，定理 *4.1* 表明，最优策略相较于均匀策略具有阶为 $\Theta(\sqrt{\log n}/\sqrt{n})$ 的"理性优势"。

4.2 凸几何背景

正交归一矩阵。 正交矩阵 $O_n = \{Q \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ Q^T Q = I_n\}$ 在乘法和求逆运算下是稳定的，因此构成可逆矩阵的一个子群。哈尔测度是正交矩阵上的均匀测度，进一步记为 $\mathcal{U}(O_n)$。形式上，它被定义为在群元素乘法作用下保持不变的唯一概率测度，即对于任意 $Q' \in O_n$，都有 $Q \sim \mathcal{U}(O_n) \implies Q'Q \sim \mathcal{U}(O_n)$ 和 $QQ' \sim \mathcal{U}(O_n)$。从哈尔测度中抽取矩阵的一种简单构造方法，是对具有独立同分布高斯元素的矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 进行奇异值分解。

凸锥。 锥 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是满足对所有 $\lambda \geq 0$ 均有 $x \in K \implies \lambda x \in K$的集合。凸锥是指在 $\mathbb{R}^n$中为凸的锥。对于正交矩阵 $Q \sim \mathcal{U}(O_n)$ 和凸锥 K，我们将由矩阵 Q"旋转"后的锥记为 $QK = \{Q\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in K\}$。[1] 凸锥的旋转仍然是凸锥。

锥形运动学公式。 两个随机旋转的锥相交的概率，可以用它们的内在体积来表示。对于我们的目的而言，一个无需定义内在体积的锥形运动学公式近似版本就足够了。它依赖于以下定义。

[1]这在用语上略有不严谨。

定义 4.3 (统计维数 [ALMT14])。 凸锥 $\delta(K)$ 的统计维数$K \subset \mathbb{R}^n$ 定义如下

$$\delta(K) = \mathbb{E}(||\Pi_K(\boldsymbol{g})||^2),$$

其中 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ 是欧几里得范数，而 $\Pi_K(\cdot)$ 表示到锥 K, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$: $\Pi_K(\boldsymbol{x}) = \arg\min_{\boldsymbol{y} \in K} ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$ 的欧几里得投影。
例如，正正交象限 $K = (\mathbb{R}_+)^n$ 的统计维数满足 $\delta(K) = \mathbb{E}(||\boldsymbol{g}^+||^2) = n/2$。现在我们可以陈述近似运动学公式。
定理 4.4 (近似运动学公式 [ALMT14])。 令 $\eta \in (0,1)$。令 K_1 和 K_2 为 $\mathbb{R}^n$ 和 $Q \sim \mathcal{U}(O_n)$中的凸锥，则记 $a_\eta = \sqrt{8 \log(4/\eta)}$，对于 $\eta \in (0,1)$，

$$\begin{aligned} \delta(K_1) + \delta(K_2) \leq n - a_\eta \sqrt{n} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(K_1 \cap QK_2 \neq \{0\}) \leq \eta, \\ \delta(K_1) + \delta(K_2) \geq n + a_\eta \sqrt{n} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(K_1 \cap QK_2 \neq \{0\}) \geq 1 - \eta. \end{aligned}$$

备注 4.5 (高斯宽度)。 凸锥的统计维数是另一种相关概念——高斯宽度的良好近似，而高斯宽度早于统计维数提出。高斯宽度定义为 $\mathbb{E}(\sup_{\boldsymbol{y} \in K:\ ||\boldsymbol{y}||=1} \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{g})$。就我们的目的而言，这两个量可以任意选用，我们选择了统计维数。

4.3 定理4.1的证明结构

在本节中，我们证明定理4.1。在此过程中，我们引入两个关键命题，即命题 4.7 和命题 4.8，它们揭示了随机博弈最优策略的结构性质。这些命题将在本文的后续章节中予以证明。在整个证明过程中，我们将使用以下由 $\epsilon \geq 0$参数化的凸锥族，

$$K(\epsilon) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ \forall i : z_i \geq \epsilon ||\mathbf{z}||\}.$$

我们从以下简单引理开始。
引理 4.6。 $(K(\epsilon))_{\epsilon \geq 0}$ 是一个按包含关系递减的凸锥族。 $K(\epsilon)$在 $\epsilon = 0$ 时等于正正交象限，在 $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 时为一条半直线，并且在 $\epsilon \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 时约化为 $\{0\}$。

证明。 $K(\cdot)$ 的基本性质可直接由范数的性质得到。注意到$\mathbf{z} \in K(\epsilon)$ 意味着 $||\mathbf{z}||^2 = \sum_i z_i^2 \geq n\epsilon^2 ||\mathbf{z}||^2$，这对 $\epsilon = 1/\sqrt{n}$ 导出 $K(\epsilon) = \{\lambda \mathbf{1} : \ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$。 □

现在我们研究 $K(\epsilon)$的统计维数，其定义如下:

$$\delta(\epsilon) = \mathbb{E}(||\Pi_{K(\epsilon)}(\boldsymbol{g})||^2),$$

其中 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ 且 $\Pi_{K(\epsilon)}$是作用于 $K(\epsilon)$ 上的正交投影。在第 4.4 节中，我们给出以下关于 $K(\epsilon)$ 统计维数的界。
命题 4.7。 对于 $\epsilon \geq 0$, $K(\epsilon)$ 的统计维数满足 $\delta(\epsilon) \leq \frac{1}{2}n - \frac{1}{8}\epsilon n\sqrt{n} + 2\epsilon^2 n^2$.

接下来我们引入如下量

$$v'(Q) = \max_{\substack{\boldsymbol{y} \geq 0 \\ ||\boldsymbol{y}||_2 = 1}} \min_{i \in [n]} (Q\boldsymbol{y})_i,$$

并注意到，对于任意 $\epsilon > 0$, 以下等价关系成立,

$$(v'(Q) \geq \epsilon) \Leftrightarrow (K(0) \cap Q^T K(\epsilon) \neq \{0\}), \tag{16}$$

现在回想一下，$\delta(0) = n/2$ 因为 $K(0)$ 是正正交象限，并且命题 4.7给出了 $\delta(\epsilon)$ 值的上界。将 $\epsilon = t/n$ 代入 $t \le \sqrt{n}/16$ 这一上界，可得

$$\delta(0) + \delta(t/n) \le n - t\sqrt{n}/16.$$

因此，我们可以应用定理4.4 以及方程（16）中确立的等价关系，得到

$$\mathbb{P}\left(v'(Q) \ge \frac{t}{n}\right) \le 4\exp(-t^2/32). \tag{17}$$

最后，我们证明，对 $v'(Q)$ 的上界足以推出对 $v(Q)$ 的上界。具体而言，我们证明，存在一些普适常数 c_1，$c_2 > 0$，

$$\mathbb{P}\left(v(Q) \le \frac{c_1}{\sqrt{n}} v'(Q)\right) \ge 1 - \exp(-c_2 n). \tag{18}$$

为此，只需证明列玩家的最优策略（定义为 $\boldsymbol{y} \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{y}\in\Delta_n} \min_{i\in[n]}(Q\boldsymbol{y})_i$）满足 $||\boldsymbol{y}||_2 \le \frac{c_1}{\sqrt{n}}$ 的概率很高。这正是下面命题的结论，我们将在第 4.8 节证明该命题。

命题 4.8。 列玩家在 $Q \sim \mathcal{U}(O_n)$ 上的最优策略，定义为 y

$$\boldsymbol{y} \in \arg\max_{\boldsymbol{y}\in\Delta_n} \min_{i\in[n]} (Q\boldsymbol{y})_i,$$

几乎必然唯一，并且满足 $||\boldsymbol{y}|| \le \frac{c_1}{\sqrt{n}}$ 的概率至少为 $1 - \exp(-c_2 n)$，其中 c_1、$c_2 > 0$ 是一些普适常数。

这就完成了证明概要，因为对（18）和（17）应用并集界可得 $t \le \sqrt{n}/16$，

$$\mathbb{P}\left(v(Q) \le \frac{c_1}{\sqrt{n}} \frac{t}{n}\right) \ge 1 - \exp(-c_2 n) - 4\exp(-t^2/32).$$

调整常数 c_1、c_2、c_3、$c_4 > 0$ 后，我们恢复定理 4.1 的原始表述。[2]我们其余的技术工作都用于证明命题 4.7 和 4.8。

4.4 命题 4.7 的证明

本节将证明命题 4.7，我们在下文重新陈述该命题。

命题 4.7。 对于 $\epsilon \ge 0$，$K(\epsilon)$ 的统计维数满足 $\delta(\epsilon) \le \frac{1}{2}n - \frac{1}{8}\epsilon n\sqrt{n} + 2\epsilon^2 n^2$。

证明。对于所有 $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$，利用 $\boldsymbol{g} - \Pi_{K(\epsilon)}(\boldsymbol{g})$ 与 $\Pi_{K(\epsilon)}(\boldsymbol{g})$ 的正交性，并注意到 $K(\epsilon)$ 是一个凸锥，可得

$$||\Pi_{K(\epsilon)}(\boldsymbol{g})||^2 = ||\boldsymbol{g}||^2 - \min_{\mathbf{z}\in K(\epsilon)} ||\boldsymbol{g} - \mathbf{z}||^2.$$

我们将该优化问题的拉格朗日函数写为 $\min_{\mathbf{z}\in K(\epsilon)} ||\boldsymbol{g} - \mathbf{z}||^2$，其对偶变量为 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_+$：

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) = ||\boldsymbol{g} - \mathbf{z}||^2 + \sum_{i\in[n]} \lambda_i(\epsilon||\mathbf{z}|| - z_i). \tag{19}$$

[2]注意，我们不必担心 $t > cst \cdot \sqrt{n}$ 的情形，因为在该情形下，我们可以选取 $c_4 > 0$，使得 $c_1\exp(-c_2 t^2)$ 中的项被 $c_3\exp(-c_4 n)$ 中的项所支配。

根据强对偶性，我们有：

$$\min_{\mathbf{z}\in K(\epsilon)} ||\boldsymbol{g}-\mathbf{z}||^2 = \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n_+} \min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{z},\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n} \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}(\mathbf{z},\boldsymbol{\lambda}). \tag{20}$$

我们建议取 $\boldsymbol{\lambda} = 2\boldsymbol{g}^- \in \mathbb{R}^n_+$ 于（20）的右侧。具体而言，我们使用以下界

$$\min_{\mathbf{z}\in K(\epsilon)} ||\boldsymbol{g}-\mathbf{z}||^2 \geq \min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{z}, 2\boldsymbol{g}^-).$$

我们稍后将证明， $\mathcal{L}(\mathbf{z}\ 2\boldsymbol{g}^-)$ 的极小值点$\mathbf{z}$ 为

$$\begin{cases} \mathbf{z} = 0 \quad \text{if} \quad ||\boldsymbol{g}^+|| \leq \epsilon \sum_i g_i^-, \\ \mathbf{z} = \left(1 - \frac{\epsilon \sum_i g_i^-}{||\boldsymbol{g}^+||}\right) \boldsymbol{g}^+ \quad \text{otherwise}, \end{cases} \tag{21}$$

等价地，按照 $\frac{\boldsymbol{g}^+}{||\boldsymbol{g}^+||} = 0$ if $\boldsymbol{g}^+ = 0$ 的约定，我们可以写成，

$$\mathbf{z} = \left(||\boldsymbol{g}^+|| - \epsilon \sum_{i\in[n]} g_i^-\right)^+ \frac{\boldsymbol{g}^+}{||\boldsymbol{g}^+||}.$$

注意， $\forall i \in [n]: g_i^- z_i = 0$ ，且 $||\mathbf{z}|| \geq ||\boldsymbol{g}^+|| - \epsilon \sum_i g_i^-$。因此，对于 $\epsilon \geq 0$,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}\in K(\epsilon)} ||\boldsymbol{g}-\mathbf{z}||^2 &\geq \mathcal{L}(\mathbf{z}, 2\boldsymbol{g}^-) \\ &= ||\boldsymbol{g}-\mathbf{z}||^2 + \sum_{i\in[n]} 2g_i^-(\epsilon||\mathbf{z}|| - z_i) \\ &= ||\boldsymbol{g}-\mathbf{z}||^2 + \sum_{i\in[n]} 2g_i^-\epsilon||\mathbf{z}|| \\ &\geq ||\boldsymbol{g}^-||^2 + 2\epsilon \left(\sum_{i\in[n]} g_i^-\right) ||\boldsymbol{g}^+|| - 2\epsilon^2 \left(\sum_{i\in[n]} g_i^-\right)^2. \end{aligned}$$

取期望，并利用 $\mathbb{E}(||\boldsymbol{g}^+||) \geq \sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{3}{\sqrt{n}}$， 以及 $\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i\in[n]} g_i^-\right)^2\right) = \frac{n}{2} + n(n-1)\frac{1}{2\pi} \leq n^2$ 和[3] $\mathbb{E}(g_1^-||\boldsymbol{g}^+||) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{g_1\leq 0}(g_1^-||\boldsymbol{g}^+||) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}\left(\sqrt{\sum_{i=2}^n (g_i^+)^2}\right) \geq \frac{1}{2\pi}\sqrt{n-1} \geq \frac{\sqrt{n}}{16}$ for $n \geq 2$，得到，

$$\mathbb{E}\left(\min_{\mathbf{z}\in K(\epsilon)} ||\boldsymbol{g}-\mathbf{z}||^2\right) \geq \frac{n}{2} + \epsilon\frac{n\sqrt{n}}{8} - 2\epsilon^2 n^2$$

因此，

$$\rho_1(\epsilon) \leq \frac{n}{2} - \frac{n\sqrt{n}}{8} + 2\epsilon^2 n^2.$$

[3]在这里，我们先对 g_1 的符号进行条件化，然后对剩余的 $n-1$ 个坐标使用柯西–施瓦茨不等式 $\mathbb{E}(||\boldsymbol{g}^+||) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}^T\boldsymbol{g}^+\right) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$。

现在我们证明， $\mathcal{L}(\mathbf{z}\ 2\boldsymbol{g}^{-})$ 的极小值点由 (21) 给出。假设最优解处 $\mathbf{z}\ \neq 0$ ，并记 $\lambda=\sum_{i\in[n]}\lambda_{i}$。我们将拉格朗日函数（19）的一阶条件写为：$2(z_i-g_i)+\epsilon\bar{\lambda}\frac{z_i}{||\mathbf{z}||}-\lambda_i=0$，由此可得 $z_i=g_i+\frac{1}{2}(\lambda_i-\epsilon\bar{\lambda}\frac{z_i}{||\mathbf{z}||})$，等价地

$$z_i\left(2+\frac{\epsilon\bar{\lambda}}{||\mathbf{z}||}\right)=2g_i+\lambda_i.$$

回想对偶变量的选取，$\lambda_i=2g_i^{-}\geq 0$ 我们得到：

$$z_i\left(1+\frac{\epsilon\sum_i g_i^{-}}{||\mathbf{z}||}\right)=g_i^{+}. \tag{22}$$

对等式（22）两边取范数，可知必有 $||\mathbf{z}||+\epsilon\sum_i g_i^{-}=||\boldsymbol{g}^{+}||$，因此 $||\mathbf{z}||=||\boldsymbol{g}^{+}||-\epsilon\sum_i g_i^{-}$。所以，只有在 $||\boldsymbol{g}^{+}||-\epsilon\sum_i g_i^{-}\geq 0$时，一阶条件才能成立；否则，必有 $\mathbf{z}=0$。这就得到了方程（21），证明完毕。 □

4.5 命题 4.8的证明

本节旨在证明命题4.8，该命题给出了随机博弈的最优策略范数的如下界。

命题 4.8。 列玩家在 $Q\sim\mathcal{U}(O_n)$ 上的最优策略定义为

$$\boldsymbol{y}\in\arg\max_{\boldsymbol{y}\in\Delta_n}\min_{i\in[n]}(Q\boldsymbol{y})_i,$$

几乎必然唯一，并且以至少 $1-$ 的概率满足 $||\boldsymbol{y}||\leq\frac{c_1}{\sqrt{n}}\exp(-c_2 n)$，其中 c_1、$c_2>0$ 为某些普适常数。

证明。 唯一性已在命题 2.1 中证明。我们用 R 表示支撑行的集合，用 C 表示该博弈的支撑列集合，并用 $k=|C|=|R|$ 表示它们的基数。正如命题2.1 中所述，几乎必然地，这些量都有明确定义。在引理 4.13 中（我们将在第 4.13 节证明该引理），我们证明：

$$\mathbb{P}(k\geq n/20)\geq 1-2^{-0.3n}.$$

我们用 $\mathcal{I}=\{(R,\ C)$ 表示： $|R|=|C|\geq n/20\}$ 所有大小大于 $n/20$ 的子矩阵对应的行列索引对的集合。回顾命题 2.1，若 $k\geq n/20$，则列玩家的最优策略满足：

$$||\boldsymbol{y}||\in\mathcal{Y}=\left\{\frac{1}{\mathbf{1}^T Q_{R,C}^{-1}\mathbf{1}}||Q_{R,C}^{-1}\mathbf{1}||\quad\text{s.t.}\quad Q_{R,C}^{-1}\mathbf{1}\geq 0\quad\text{and}\quad(R,C)\in\mathcal{I}\right\}.$$

对于一对固定的索引（$R,\ C$） $\in\mathcal{I}$，其基数为 $k\leq n$，引理 4.11 证明随机向量 $Q_{RC}^{-1}\mathbf{1}\in\mathbb{R}^k$ 在 $\mathbb{R}^k$ 中是旋转不变的（这由哈尔测度的定义可知）。因此，

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\mathbf{1}^T Q_{RC}^{-1}\mathbf{1}}||Q_{RC}^{-1}\mathbf{1}||\geq\frac{c_0}{\sqrt{k}}\quad\&\quad Q_{RC}^{-1}\mathbf{1}\geq 0\right)=\mathbb{P}\left(\mathbf{1}^T\mathbf{z}\leq\frac{1}{c_0}\sqrt{k}\quad\&\quad\mathbf{z}\geq 0\right)\leq 2^{-3n},$$

其中 $\mathbf{z}=\frac{1}{||\boldsymbol{g}||}\boldsymbol{g}$，对于 $\boldsymbol{g}\sim\mathcal{N}(0,\ I_k)$，且其中 $c_0>0$是下文引理 4.9中相应的常数，用以得到 2^{-3n}的速率。

引理 4.9。 对于 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0,\ I_k)$，且 $\mathbf{z} = \frac{1}{||\boldsymbol{g}||}\boldsymbol{g}$，有：

$$\mathbb{P}(\mathbf{z} \geq 0 \ \&\ \mathbf{1}^\top \mathbf{z} \leq \theta\sqrt{k}) \leq e^{-kf(\theta)}$$

其中 极限$_{\theta \to 0}\, f(\theta) = +\infty$。

由于 $\mathcal{Y}$ 的基数小于 2^{2n}，由并集界可得

$$\mathbb{P}\left(||\boldsymbol{y}|| \geq \frac{\sqrt{20}\ c_0}{\sqrt{n}}\right) \leq 2^{-n} + 2^{-0.3n},$$

由此完成证明。常数 $c_1,\ c_2 > 0$ 的选取是适当的。 □

4.6 引理 4.13的证明

本节中，我们将证明一系列引理，最终证明关于最优策略的范数的引理 4.13。

引理 4.10 (正交不变性)。我们考虑矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的分块分解

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$$

其中 Q_1 的形状为 $k \times k$，Q_4 的形状为 $(n-k)\times(n-k)$。对于任意正交矩阵 $U_1 \in O_k$、$U_2 \in O_{n-k}$ 和 $U_3 \in O_{n-k}$，若 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 服从正交矩阵上的哈尔测度，即 $Q \sim \mathcal{U}(O_n)$，则有以下分布相等关系，

$$\begin{aligned} Q_1 &=^d U_1 Q_1, \quad and \quad Q_1 U_1 =^d Q_1, \\ (Q_1, Q_2 U_2) &=^d (Q_1, Q_2), \\ (Q_1, U_3 Q_3) &=^d (Q_1, Q_3). \end{aligned}$$

证明。 我们将证明第三个结论；另外两个结论的证明非常类似。考虑由下式定义的 $U_3 \in O_{n-k}$ 和 $U \in O_n$

$$U = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix}.$$

根据哈尔测度的定义，有 $UQ =^d Q$。分块乘积可写为

$$UO = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ U_3 Q_3 & U_3 Q_4 \end{pmatrix}.$$

因此可得 $(Q_1,\ U_3 Q_3) =^d (Q_1,\ Q_3)$。 □

引理 4.11 (旋转不变性)。 设 R、$C \subset [n]$ 是基数相同的固定子集，基数为 $k \geq 1$，且 $Q \sim \mathcal{U}(O_n)$，则向量 $\mathbf{z} = (Q_{RC})^{-1}\mathbf{1}$ 在 $\mathbb{R}^k$ 中旋转不变。换言之，$\mathbf{z}$ 的方向均匀分布，且与其范数相互独立。

证明。根据引理 4.10，对于任意固定的 $U \in O_k$，我们有 $Q_{RC}U^T =^d Q_{RC}$。对该等式两边取逆，得到 $U(Q_{RC})^{-1} =^d (Q_{RC})^{-1}$，也就是说，$(Q_{RC})^{-1}$是正交不变的。因此，对于任意 $U \in O_k$，我们有 $U(Q_{RC})^{-1}\mathbf{1} =^d (Q_{RC})^{-1}\mathbf{1}$。这个对所有$U \in O_k$都成立的分布相等，在从哈尔测度中采样 U 时仍然成立，即 $U \sim \mathcal{U}(O_k)$，由此得证。 □

引理 4.12。 设 R、$C \subset [n]$ 是基数相同的固定子集， $k \geq 1$ ，且 Q 是从哈尔测度中抽取的随机矩阵，则由行 R 和列 C 支撑集所支撑的 Q 上的博弈，其概率小于 2^{k-n}。

证明。 以下论证借鉴了 Jonasson [Jon04]的研究。不失一般性，我们研究该博弈由左上角子矩阵 $Q_1 \in \mathbb{R}^{k\times k}$支撑的概率，其中

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}.$$

根据命题 2.1 ，博弈在 Q上由 Q_1支撑有两个必要条件 :

(i) The vectors $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\mathbf{1}^T (Q_1^T)^{-1}\mathbf{1}} \left(Q_1^T\right)^{-1}\mathbf{1}$ and $\boldsymbol{y} = \frac{1}{\mathbf{1}^T Q_1^{-1}\mathbf{1}} Q_1^{-1}\mathbf{1}$, satisfy $\boldsymbol{x} \geq 0$ and $\boldsymbol{y} \geq 0$.

(ii) 这些向量（也称为均衡策略）满足鞍点条件 $\boldsymbol{x}^T Q_2 \leq v\mathbf{1} \leq Q_3\boldsymbol{y}$ 其中 $v = \boldsymbol{x}^T Q_1 \boldsymbol{y}$。

条件 (ii) 体现了当行玩家采用其均衡策略时，列玩家不会因在 Q_2 上行动而获益；而当列玩家采用其均衡策略时，行玩家不会因在 Q_3上行动而获益。

概率论 因此，游戏由其 $k \times k$ 左上角子矩阵支撑的概率小于

$$\mathbb{P}((ii) \text{ is satisfied}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{x}^T Q_2 \leq v\mathbf{1} \leq Q_3\boldsymbol{y}).$$

现在我们对 Q_1 的取值进行条件化，并将界定 $\mathbb{P}((ii)$ 成立$|Q_1)$。请注意，在此条件下， v、 $\boldsymbol{x}$、 $\boldsymbol{y}$ 的取值均已固定。不失一般性，我们假设 $v \geq 0$，并记

$$\mathbb{P}((ii) \text{ is satisfied}|Q_1) \leq \mathbb{P}(v\mathbf{1} \leq Q_3\boldsymbol{y}|Q_1).$$

由引理 4.10 可知，对于任意固定的正交矩阵$U_3 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$， $(Q_1, Q_3) =^d (Q_1, U_3Q_3)$，因此我们可以令 U_3 为随机对角矩阵，其对角元素独立且均匀地从 $\{+1, -1\}$中采样。请注意，此时 $U_3Q_3\boldsymbol{y}$ 的所有元素的符号都是随机的。由于 v 为正，只有当 $U_3Q_3\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n-k}$ 是一个所有符号均为正的向量时， $v \leq U_3Q_3\boldsymbol{y}$ 才成立，而这种情况发生的概率为 2^{k-n}。对于 $v \geq 0$ ，我们以相同的方式处理，并利用对于 $U_2 \in O_2$， $(O_1, O_2) =^d (O_1, O_2U_2)$。我们已经证明，无论 Q_1取何值， $\mathbb{P}((ii)$ 成立$|Q_1) \leq 2^{k-n}$。因此，我们可以得出结论:

$$\mathbb{P}((ii) \text{ is satisfied}) \leq 2^{k-n},$$

至此，证明完毕。 □

引理 4.13。 在 $Q \sim \mathcal{U}(O_n)$ 上，博弈的支撑集的基数 k 满足

$$\mathbb{P}(k \leq n/20) \leq 2^{-0.3n}.$$

证明。 根据引理 4.12，我们注意到，给定一个大小为 $k \times k$ 的子矩阵是博弈的支撑集的概率至多为 2^{k-n}。因此，根据并集界，任何大小小于 $n/20$的子矩阵是博弈的支撑集的概率小于，

$$\begin{aligned} 2^{-19/20n} \sum_{k\leq n/20} \binom{n}{k}^2 &\leq 2^{-19/20n} \sum_{k\leq n/20} 2^{2nH(k/n)} \\ &\leq \frac{n}{20} 2^{(2H(1/20)-19/20)n} \\ &\leq 2^{-0.3n}, \end{aligned}$$

其中我们用到了 $\binom{n}{k} \le 2^{nH(k/n)}$，并且 $H(p) = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$ 是二元熵函数（它为正且满足 $H(1/20) \le 0.3$）。 □

4.7 引理 4.9的证明

本节证明以下集中引理。

引理 4.9。 对于 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0、 I_k)$以及 $\mathbf{z} = \frac{1}{||\boldsymbol{g}||}\boldsymbol{g}$，有：

$$\mathbb{P}(\mathbf{z} \ge 0 \ \&\ \mathbf{1}^\top \mathbf{z} \le \theta\sqrt{k}) \le e^{-kf(\theta)}$$

其中 $\lim_{\theta\to 0} f(\theta) = +\infty$。

证明。 记 $\gamma < 1/2$ 为：

$$\mathbb{E}(e^{\gamma g_1^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1-2\gamma)x^2/2} dx = (1-2\gamma)^{-1/2}.$$

Thus

$$\mathbb{P}(\|\boldsymbol{g}\|^2 \ge ku) \le \exp(-kh(u)),$$

其中对于 $u > 1$，有

$$h(u) = \sup_{\gamma\in\mathbb{R}} \gamma u + \frac{1}{2}\ln(1-2\gamma) = \frac{1}{2}[u - 1 + \ln(1/u)].$$

于是，记 $r > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{z} \ge 0 \ \&\ \mathbf{1}^T\mathbf{z} \le v\sqrt{k}) &\le \mathbb{P}(\mathbf{1}^T|\mathbf{z}| \le v\sqrt{k}) \\
&= \mathbb{P}(\|\boldsymbol{g}\|^{-1}\mathbf{1}^T|\boldsymbol{g}| \le v\sqrt{k}) \\
&\le \mathbb{P}(\|\boldsymbol{g}\| \ge r\sqrt{k}) + \mathbb{P}(\mathbf{1}^T|\boldsymbol{g}| \le rvk).
\end{aligned}$$

现在记 $\gamma > 0$:

$$\mathbb{E}(e^{-\gamma|g_1|}) = \sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty} e^{-\gamma x - x^2/2} dx.$$

我们将 $[0,2]$ 上的高斯密度的两倍上界估计为某个常数 $\alpha > 0$，并将其在 $[2,\infty)$ 上的上界估计为 e^{-x}，从而得到

$$\mathbb{E}(e^{-\gamma|g_1|}) \le \alpha\frac{1-e^{-2\gamma}}{\gamma} + \int_2^{\infty} e^{-(\gamma+1)x} dx$$

因此

$$\mathbb{E}(e^{-\gamma|g_1|}) \le \alpha\frac{1-e^{-2\gamma}}{\gamma} + \frac{e^{-2(\gamma+1)}}{\gamma+1}.$$

最后得到

$$\mathbb{E}(e^{-\gamma|g_1|}) \le \frac{c_0}{\gamma}$$

其中某个常数为 $c_0 > 0$。因此：

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}^T|\boldsymbol{g}| \le \beta k) \le \exp(-kf(\beta)),$$

其中

$$f(\beta) = \sup_{\gamma>0}(-\gamma\beta - \ln \mathbb{E}(e^{-\gamma|g_1|})).$$

因此：

$$f(\beta) \geq \sup_{\gamma>0} -\gamma\beta - \ln(c_0/\gamma) = -1 - \ln(c_0) + \ln(1/\beta).$$

由此得到

$$\mathbb{P}(\mathbf{z} \geq 0 \ \& \ \mathbf{1}^T\mathbf{z} \leq v\sqrt{k}) \leq e^{-kh(r^2)} + e^{-kf(rv)}.$$

现在，由于

$$\lim_{r\to+\infty} h(r) = \lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = +\infty,$$

因此我们有

$$\mathbb{P}(\mathbf{z} \geq 0 \ \& \ \mathbf{1}^T\mathbf{z} \leq v\sqrt{k}) \leq 2e^{-k\psi(v)},$$

其中 $\lim_{v\to 0}\psi(v) = +\infty$。

事实上，将 $r = v^{-1/2}$ 代入前面的界即可得到这一结果，并且

$$\psi(v) = \min(h(v^{-1}), f(v^{1/2})).$$

□

5 开放问题与结论

5.1 开放问题

其他分布及相关问题。 定理 3.1中描述的缩放似乎适用于连续分布以外的情形，例如所有元素均为独立伯努利随机变量的矩阵，见图 1。这一推广在计算机科学中尤为重要，因为底层零和博弈的成本通常是离散的（例如，表示操作次数）。注意，矩阵 M 取 $\{0,1\}$ 值的情形，可以有另一种解释：将其视为随机二分图上的问题 $G = (V, E)$，其中节点被划分为两个子集 $V = [n] \cup [m]$，且每条潜在边 $(i, j) \in [n] \times [m]$属于 E 当且仅当 $M_{ij} = 1$。具体而言，以下问题等价（在归约意义下）：

1. 随机二分图中的捉迷藏博弈：考虑这样一个博弈：玩家 1 在 $[n]$ 的节点上选择一种隐藏策略（即分布），玩家 2 在 $[m]$ 中选择一个节点，以最大化其通过一条边与玩家 1 相连的概率。如果双方都采用最优策略，追捕者赢得博弈的概率等于 $v(M)$；

2. 随机二分图中的分数顶点覆盖：考虑在 $[m]$ 的节点上定义一个由 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^m$ 表示的分数配置，使其覆盖左侧节点，即满足 $\forall i \in [n] : \sum_{(i,\ j)\in E} y_j \geq 1$，同时使成本 $\sum_{j\in[m]} y_j$ 最小。最优分数覆盖的权重等于 $1/v(M)$。

这种具有伯努利分布条目的设定，也与计算机科学中的其他问题相关，例如差异最小化、集合覆盖和指派问题 [PV23, Vaz01, Ald01]。

尽管图 1 提供了经验证据，但我们的方法并不能自然地推广到离散情形，而高斯比较不等式众所周知很难推广。不过，我们认为，在稀疏区域可以采用其他方法；当平均度 $M_{ij} \sim \mathcal{B}(d/n)$ 为固定值 $d = \mathcal{O}(1)$ 时，相应的二分图具有局部树状结构（例如，参见 [AS04]）。

用于寻找近似最优策略的计算高效算法。我们的证明有一个令人惊讶之处：它们是非构造性的，也就是说，我们没有给出一个策略$\boldsymbol{x} \in \Delta_n$，使其与最优策略的差距不超过标准差。一种明确且计算开销低的策略是均匀策略，其中 $\boldsymbol{x} = \frac{1}{n}\mathbf{1}$，但现在已经清楚，这种策略并非最优。一个自然的问题是，是否存在一种简单的策略，能够以高概率取得接近最优值的结果——也就是说，能够发挥理性优势 [FM87]。所谓简单策略，是指具有闭式表达的策略，或者由迭代过程给出的策略；该过程所需的计算量少于使用现成的线性优化算法求得最优策略的 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$-近似解。

–

最优策略的结构。此前一些关于随机博弈的研究 [Jon04、Bra17] 关注的一个主题是最优分布 $\boldsymbol{x} \in \Delta_n$的结构，尤其关注其支撑集的基数。在我们所描述的高斯情形中，经验观察发现，$\boldsymbol{x}$ 的支撑集非常接近于在 $[n]$ [FM87], 的子集上均匀分布，尽管并非完全如此（例如，注意到 $\boldsymbol{x}$ 的支撑集不可能为空）。Jonasson [Jon04]观察到，一旦证明博弈的值属于 $\Theta(1/n)$，关于这一问题的结果就会更加紧密（参见他的猜想 2.9 及其推论）。为了更进一步，读完定理 3.1 的证明后，很容易相信随机博弈的最优策略对（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$）具有一种结构，类似于策略对 $\left(\frac{\boldsymbol{g}^-}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{g}^-}, \frac{\boldsymbol{h}^+}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{h}^+}\right)$的结构，其中 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0,\ I_n)$，且 $\boldsymbol{h} \sim \mathcal{N}(0,\ I_m)$。然而，这种直觉存在明显的缺口：具体来说，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的支撑集基数应该相等（命题 2.1），而 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 是独立向量。因此，我们认为，要准确刻画最优策略的结构，需要全新的论证。

算法复杂性中的诠释。在我们看来，最令人振奋的潜在进展之一，是从随机博弈的视角重新审视算法复杂性中的经典问题。鉴于引言中所介绍的统计物理学诠释，我们不禁认为，这一框架或许能为算法复杂性中某些现象的普适性提供启发式依据（例如计算复杂度中的 NP 完全性，或随机化为在线算法带来的指数级优势）。因此，我们回到 Yao 的框架，在其中考察与某个算法问题相关的矩阵：行以算法为索引，列以输入为索引，矩阵中的值则表示某个算法在给定输入上的成本。当然，对于给定的算法问题，算法和实例往往没有自然的枚举方式；部分挑战在于找到合适的问题，使其对应的矩阵能够由随机矩阵准确建模。下一段中，我们将从随机博弈的视角，对一个经典的计算复杂度问题作高层次的非正式讨论。

我们普遍猜想，能够借助随机性在多项式时间内求解的算法问题（RP），也能由确定性算法在多项式时间内求解（P）。读过本文后，这个猜想（记作 $P = RP$）想必会让人感到意外，因为我们看到，在典型的零和博弈中，混合策略相较于纯策略具有显著优势（参见相关工作中关于具有鞍点的矩阵的讨论）。因此，这表明，描述算法问题复杂度的矩阵在 P 中都具有很强的结构性（远非元素独立同分布的方阵）。具体而言，这些矩阵要么极度不对称（$n >> m$），行数（可能的算法）远多于列数（可能的实例）；要么具有某些结构性质，严重违背独立性假设，例如，对于任意两行，

都存在第三行可在这两行之间进行插值（实际上，这使得我们能够用一种纯策略模拟混合策略）。因此，我们认为，理解满足 $\min_{x\in\Delta_n}\max_{j\in[m]}(x^T M)_j \approx \min_{i\in[n]}\max_{j\in[m]} M_{ij}$ 的随机矩阵类别，或许能让我们洞悉可在多项式时间内求解的算法问题类别的结构。更一般地说，我们认为，随机博弈为探索随机化能够给算法和决策规则带来的优势幅度提供了一个自然的模型。

5.2 结论

本文针对随机博弈的值给出了新的尾界。我们的结果基于高斯比较原理和凸几何。我们认为，在数学、统计物理学与计算机科学的交汇处，随机博弈领域存在着颇具前景的研究方向；上文也指出了一些开放问题。

致谢。RC 感谢 Mo¨ıse Blanchard 和 Vianney Perchet 提供了有益的讨论。

A 实验与简单的集中结果

A.1 博弈值标度的经验证据。

下面，我们提供了一些经验证据，说明方阵中 $v(M)$ 的值的标度。尽管理论结果仅适用于高斯矩阵，但图1 也提供了经验证据，表明博弈值的标度可推广至含有独立拉德马赫元素的矩阵（即以概率 ± 1 取值 $1/2$）。请注意，最初促使人们猜想 $v(M)$ 的标准差为 $\Theta(1/n)$ 的实验由 [FM87]完成。有关实验设置的更详细讨论，请参阅他们的研究。

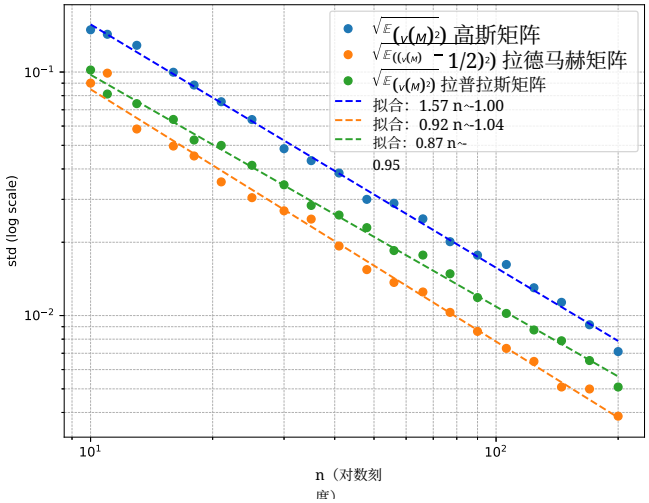


图1：大小为 n 、从 5 到 200 变化的方阵的随机博弈值 $v(M)$ 的经验缩放。每个数据点对应一次批量大小为 200 的实验。

A.2 $\mathbb{E}(||g^+||)$ 的下界

注意到，通过对 g 的正分量数量进行条件化，我们有 $\mathbb{E}(||g^+||) = \mathbb{E}(a_X)$，其中 $X \sim \mathcal{B}(1/2, n)$，且 a_n 是自由度为 n 的卡方分布的期望。然后，利用（3），可得：

$$\mathbb{E}(||g^+||) \geq \mathbb{E}\left(\sqrt{X} - \frac{\mathbb{1}_{X>0}}{2\sqrt{X}}\right), \tag{23}$$

现在我们分析方程（23）右侧。

我们首先推导 $\mathbb{E}(\sqrt{X})$ 的一个下界。注意到 $\forall x \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{x} \geq 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2}$，并将该不等式应用于 X/μ（对于 $\mu = n/2$），利用 $\mathbb{E}(X/\mu) = 1$ 以及 $\mathrm{Var}(X/\mu) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mu^2} = \frac{1}{2\mu}$，可得 $\mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{X}{\mu}}\right) \geq 1 - \frac{1}{4\mu}$，因此，

$$\mathbb{E}(\sqrt{X}) \geq \sqrt{\mu} - \frac{1}{4\sqrt{\mu}} = \sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2n}}. \tag{24}$$

接下来，我们给出 $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\mathbb{1}_{X>0}\right)$ 的一个上界。根据切尔诺夫界，有 $\mathbb{P}(X \leq n/4) \leq \exp\left(-\frac{1}{8}n\right)$，因此，

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\mathbb{1}_{X>0}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{8}n\right) + \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{4}{\sqrt{n}}. \tag{25}$$

结合方程（23）、（24）和（25）可得 $\mathbb{E}(||\boldsymbol{g}^+||) \geq \sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{3}{\sqrt{n}}$。

A.3 矩形矩阵期望值的推论

我们在此说明，定理 3.1 如何推出：对于 $n < m \leq 2n$，我们有

$$\Omega\left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{n}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \mathbb{E}(v(M)) \leq \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

对于上界，我们考虑以下分解，为简洁起见，记$A = 40\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{n}$，并应用定理 3.1 和命题 2.3中的尾界，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(v(M)) &\leq \int_0^\infty \mathbb{P}(v(M) \geq s)ds \\
&\leq \int_0^A \mathbb{P}(v(M) \geq s)ds + \int_0^{1-A} \mathbb{P}(v(M) \geq A+s)ds + \int_1^\infty \mathbb{P}(v(M) \geq s)ds \\
&\leq A + \int_0^{1-A} c_1 \exp(-c_2 n^2 s^2) + c_3 \exp(-c_4 n)ds + \int_1^\infty m\exp(-ns^2)ds \\
&\leq A + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

其中，我们通过变量替换 $\int_0^\infty \exp(-c_2 n^2 s^2)ds = \frac{1}{n\sqrt{c_2}}\int_0^\infty \exp(-u^2)du = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$，并进行直接计算 $\int_1^\infty \exp(-ns^2)ds \leq \int_1^\infty \exp(-ns)ds = \exp(-n)/n$。

对于下界，我们使用简写 $B = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{\ln(c_1)}}{n\sqrt{c_2}}$ 来得到，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(v(M)) &\geq \int_0^B \mathbb{P}(v(M) \geq s)ds - \int_0^\infty \mathbb{P}(v(M) \leq -t)dt \\
&\geq B\left(1 - e^{-1} - c_3\exp(-c_4 n)\right)\right) - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\geq \Omega\left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{n}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

我们注意到，这里略显不寻常的 $\Omega(\cdot)-\mathcal{O}(\cdot)$ 记号反映了这样一个事实：对于 $m = n+cst$，例如对于 $m = n+1$，我们并未论证在 $\Omega(1/n)$ 中存在 $\mathbb{E}(v(M))$ 的下界。

A.4 利用优化问题中的对称性(确定性多项式时间)

利用 $v(M) = -v(-M^T) =^{dist} -v(M^T)$，我们得到，

$$\mathbb{P}(v(M) \geq t) = \mathbb{P}(v(M^T) \leq -t).$$

接着，我们回顾定义 $\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) = \min_{\boldsymbol{u}\in\Delta_n} \max_{\boldsymbol{v}\in\Delta_m} ||\boldsymbol{v}||\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{u} + ||\boldsymbol{u}||\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{v}$，并定义$\Psi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) = \min_{\boldsymbol{v}\in\Delta_m} \max_{\boldsymbol{u}\in\Delta_n} ||\boldsymbol{v}||\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{u} + ||\boldsymbol{u}||\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{v}$。我们可以利用基本极小极大不等式写出

$$-\Psi_2(-\boldsymbol{g}, -\boldsymbol{h}) = \max_{\boldsymbol{v}\in\Delta_m} \min_{\boldsymbol{u}\in\Delta_n} ||\boldsymbol{v}||\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{u} + ||\boldsymbol{u}||\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{v} \le \Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}).$$

因此，同样利用 $(-\boldsymbol{g}, -\boldsymbol{h}) =^{dist} (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})$，我们得到

$$\mathbb{P}(\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \ge t) \ge \mathbb{P}(-\Psi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \ge t).$$

现在，我们可以将方程 (8应用于转置矩阵 $M^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$，得到 M 的上尾界，形式如下：

$$\mathbb{P}(v(M) \ge t) = \mathbb{P}(v(M^T) \le -t) \le 2\mathbb{P}(\Psi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \le -t) \le 2\mathbb{P}(\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \ge t).$$

请注意，戈登不等式的一些表述会在定理陈述中明确提及 $\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})$ 的极小极大值性质，例如 [MM21]。

A.5 定理 3.1 证明中用到的集中结果

我们通过补充说明过程中所用集中不等式的细节，完成定理 3.1 的证明。下文中，我们写作以高概率 (简称 w.h.p.)，意指概率至少为 $1 - \mathcal{O}(\exp(-c_4 n))$，其中 c_4为某个正常数。

关于 $||\boldsymbol{h}^+||, \mathbf{1}^T\boldsymbol{h}^+$ 以及 $||\boldsymbol{g}^-||, \mathbf{1}^T\boldsymbol{g}^-$ 的界。 这些项的所有不等式均基于预备知识中介绍的高斯集中不等式。请注意，我们利用了$\mathbb{E}(||\boldsymbol{h}^+||) \in [\sqrt{m/2 - 3/\sqrt{m}}, \sqrt{m/2}]$ 以及 $\mathbb{E}(\mathbf{1}^T\boldsymbol{h}^+) = m/\sqrt{2\pi}$。

关于 $C'(\mu')$的界。 我们有 $C'(\mu') = \mathbf{1}^T(-\boldsymbol{g} - \mu'\mathbf{1})^+$，因此根据柯西-施瓦茨不等式，$C'(\mu') \le ||\mathbf{1}||||(-\boldsymbol{g} - \mu'\mathbf{1})^+|| = \sqrt{n}||\boldsymbol{h}^+||$。因此，以高概率，$C'(\mu') \le \sqrt{nm} \le \sqrt{2}n$。

$C(\mu)$ 的界。我们首先证明 $\mu \le 1$以高概率成立。为此，注意到$\mathbb{E}(||(\boldsymbol{h} - \mathbf{1})^+||) \le \sqrt{\mathbb{E}(||(\boldsymbol{h} - \mathbf{1})^+||^2)} \le \sqrt{\frac{m}{5}} \le \sqrt{\frac{2n}{5}}$，其中我们利用了 $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \ge 1) \le \frac{1}{5}$以及$m \le 2n$。接着，我们利用 $\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{3}{\sqrt{n}} \le \mathbb{E}(||\boldsymbol{g}^-||)$，从而得到 $||(\boldsymbol{h} - \mathbf{1})^+|| \le ||\boldsymbol{g}^-||$以高概率成立，进而有 $\mu \le 1$ 以高概率成立。因此，$C(1) \le C(\mu)$ 以高概率成立，其中 $\mathbb{E}(C(1)) = m\mathbb{E}((h_1 - 1)^+) = \varphi(1) - (1 - \Phi(1)) > 0.083m$。根据高斯集中不等式，以高概率，$C(1) \ge m/20$，因此，以高概率，$C(\mu) \ge m/20$。

B Go戈登不等式和高斯比较原理

本节将介绍一些高斯比较原理的背景知识，我们在第 3 节中用到了这些原理。我们先准确陈述本文所用的戈登不等式版本，然后为方便读者，概要证明这一结果。以下版本的戈登不等式与 [MM21]中的推论 G.1 类似。

定理 3.3 （戈登不等式）。设 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 和 $D_y \subset \mathbb{R}^m$ 是紧集。令$G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为一个元素独立同分布的矩阵，其元素服从 $\mathcal{N}(0, 1)$，且 $\boldsymbol{g} \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ 和 $\boldsymbol{h} \sim \mathcal{N}(0, I_m)$。定义：

$$\Phi_1(G) = \min_{\boldsymbol{x}\in D_x} \max_{\boldsymbol{y}\in D_y} \boldsymbol{x}^T G\boldsymbol{y},$$

$$\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) = \min_{\boldsymbol{x}\in D_x} \max_{\boldsymbol{y}\in D_y} ||\boldsymbol{y}||\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x} + ||\boldsymbol{x}||\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{y},$$

那么，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，有：

$$\mathbb{P}(\Phi_1(G) \le t) \le 2\mathbb{P}(\Phi_2(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \le t). \tag{7}$$

证明概要。我们首先着重证明在 D_x 和 D_y 均为有限集的情况下的方程（$D_x \times D_y$ 7）。我们定义两个以

$$X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y} + z||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||,$$
$$Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{y}||\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{x} + ||\boldsymbol{x}||\boldsymbol{h}^T \boldsymbol{y},$$

其中 $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 是一个相互独立的标准高斯标量。直接计算可得，对于任意$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}' \in D_x^2 \times D_y^2$，

$$\mathbb{E}(X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})X(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')) = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}')(\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}') + ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||||\boldsymbol{x}'||||\boldsymbol{y}'||,$$
$$\mathbb{E}(Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})Y(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')) = ||\boldsymbol{y}||||\boldsymbol{y}'||\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}' + ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{x}'||\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}'.$$

因此，利用 $(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}' - ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{x}'||)\ (\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}' - ||\boldsymbol{y}||||\boldsymbol{y}'||) \ge 0$，可得：

$$\mathbb{E}(X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})X(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')) \ge \mathbb{E}(Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})Y(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')),$$

当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$时取等号。接着应用戈登不等式（如下方定理 B.2 所示），可得对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{x}\in D_x}\max_{\boldsymbol{y}\in D_y} X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le t\right) \le \mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{x}\in D_x}\max_{\boldsymbol{y}\in D_y} Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le t\right).$$

在事件 $z \le 0$ 条件下，其概率为 $1/2$，我们有 $\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{x}\in D_x}\max_{\boldsymbol{y}\in D_y} X\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \le t\right) \ge \frac{1}{2}\mathbb{P}_{z\le 0}\left(\min_{\boldsymbol{x}\in D_x}\max_{\boldsymbol{y}\in D_y} X\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \le t\right) \ge \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{x}\in D_x}\max_{\boldsymbol{y}\in D_y} \boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y} \le t\right)$，因此，

$$\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{x}\in D_x}\max_{\boldsymbol{y}\in D_y} \boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y} \le t\right) \le 2\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{x}\in D_x}\max_{\boldsymbol{y}\in D_y} Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le t\right). \tag{26}$$

请注意，方程 (26) 对 D_x 和 D_y的基数没有任何约束。通过对 (7) 中的 D_x，D_y 逐渐加细地取有限覆盖，即可自然地得到允许紧集为无限集的初始表述 ($D_x \times D_y$)（参见，例如 [TOH15]）。 □

注 B.1 （历史视角）。*Gordon* 不等式的原始论述（*[Gor85], 1985*中的定理 *1.1*）涉及一族有限的高斯变量（下文的定理 *B.2* ）。这项早期工作已经包含了其他一些表述（例如，D_x 为单位球面的情形，见 *[Gor85]*中的推论 *1.2*）。据我们所知，将其推广到任意紧集是 *[TOH15]*完成的。

定理 B.2 （戈登不等式（ [Gor85]中的定理 1.1））。设$(X_{i,\ j})$ 和$(Y_{i,\ j})$是两个中心化高斯随机向量，其中 $i \in [n], j \in [m]$，且满足

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_{i,j}^2] = \mathbb{E}[Y_{i,j}^2], & for\ all\ i, j, \\ \mathbb{E}[X_{i,j}X_{i,k}] \le \mathbb{E}[Y_{i,j}Y_{i,k}], & for\ all\ i, j, k, \\ \mathbb{E}[X_{i,j}X_{l,k}] \ge \mathbb{E}[Y_{i,j}Y_{l,k}], & for\ all\ i \ne l\ and\ all\ j, k. \end{cases}$$

那么，对于所有实数 $(\lambda_{i,\ j})_{\ i,\ j\in[n]\times[m]}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\{X_{i,j} \ge \lambda_{i,j}\}\right) \ \ge\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\{Y_{i,j} \ge \lambda_{i,j}\}\right).$$

特别地，对于所有实数 t，

$$\mathbb{P}\left(\min_i \max_j X_{i,j} \le t\right) \le \mathbb{P}\left(\min_i \max_j Y_{i,j} \le t\right).$$

证明概要。尽管 [Gor85] 中的原始证明较为复杂，但该定理可直接应用 Kahane 不等式 [Kah86]（下文的定理 B.3）于 $N = n \times m$ 得出，其中 $[N]$ 的元素由有序对 $(i,j) \in [n] \times [m]$ 编号，使用模 m 的欧几里得除法；并应用于由 $\forall x \in \mathbb{R}^N$ 定义的函数 $f(\cdot)$：$f(x) = \mathbb{1}\left(\bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \{x_{(i,j)} \ge \lambda_{i,j}\}\right)$。注意，Kahane 不等式的假设成立，因为 $f(\cdot)$ 的混合偏导数（按分布的意义）满足 $\partial_{(i,j)}\partial_{(l,k)} f(x) \ge 0$（对 $i \ne l$），且 $\partial_{(i,j)}\partial_{(i,k)} f(x) \le 0$。 □

定理 B.3 (Kahane 不等式 [Kah86])。设 $X = (X_1, \dots, X_N)$ 和 $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的高斯随机变量。假设 A 和 B 构成 $\{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$ 的一个划分，使得

$$\mathbb{E}[X_i X_j] \le \mathbb{E}[Y_i Y_j] \quad \text{if } (i,j) \in A, \quad \text{and,} \quad \mathbb{E}[X_i X_j] \ge \mathbb{E}[Y_i Y_j] \quad \text{if } (i,j) \in B.$$

令 f 为实数一个定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的函数，其二阶导数（按分布的意义）满足 y

$$\partial_{ij} f \ge 0 \quad \text{if } (i,j) \in A, \quad \text{and,} \quad \partial_{ij} f \le 0 \quad \text{if } (i,j) \in B.$$

Then

$$\mathbb{E}[f(X)] \le \mathbb{E}[f(Y)].$$

证明概要。考虑向量 X 的两个独立副本 Y，以及插值随机变量 $Z(t) = \sqrt{1-t}X + \sqrt{t}Y$。目标是证明 $\gamma(0) \le \gamma(1)$，其中

$$\gamma(t) = \mathbb{E}(f(Z(t))).$$

只需证明和式 $\gamma'(t) = \sum_{i \in [n]} \mathbb{E}(\partial_i f(Z(t)) \partial_t Z_i(t))$ 中所有项均为正。固定 $t \in [0,1]$，$i \in [N]$，$(Z(t)\ \partial_t Z_i(t))$ 是一个高斯向量，使得对于 $j \in [n]$，$\mathbb{E}(Z_j(t)\partial_t Z_i(t)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_i Y_j - X_i X_j)$ 的符号指示了 $\partial_i f(\cdot)$ 关于其第 j 个坐标的单调性。因此，我们可以应用下文所述的高斯正相关原理来完成证明。

引理 B.4。若 $(Z、Z') \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个中心高斯向量，其中 Z' 是满足 $\forall i \in [n]$：$\mathbb{E}(Z_i Z') \ge 0$ 的标量，并且 h：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的一阶导数非负，则 $\mathbb{E}(h(Z)Z') \ge 0$。

为证明引理 B.4，我们将 Z_i 对 Z' 的高斯回归写成对所有 $i \in [n]$ 均成立的形式：$Z_i = \alpha_i Z' + W_i$，其中 $\alpha_i = \mathbb{E}(Z_i Z')/\mathbb{E}(Z'^2) \ge 0$，并且 W_i 是一个与 Z' 独立的中心高斯随机变量。然后，引入 $Z(u) = u\alpha_i Z' + W_i$，注意到 $\zeta(u) = \mathbb{E}(h(Z(u))Z')$ 满足 $\zeta(0) = 0$，而 $\zeta'(u) = \sum_{i \in [n]} \alpha_i \mathbb{E}(\partial_i h(Z(u)) Z'^2) \ge 0$，因此 $\zeta(1) = \mathbb{E}(h(Z)Z') \ge 0$。 □

注 B.5（详细证明的出处）。定理 *3.3* 由定理 *B.2* 推导出的证明见 *[MM21]* 的附录 *G.3*。定理 *B.2* 的第一性原理证明见 *Gordon* 的原著 *[Gor85]*，，而这里概述的、更直接的证明由 *Kahane* 提出 *[Kah86]*，可见于 *Talagrand* 和 *Ledoux* 所著书籍的第 *3* 章 *[LT13]*（第 *75* 页）。

参考文献

[Abb18] Emmanuel Abbe。社群检测与随机块模型：近期进展。《机器学习研究杂志》，18(177):1–86，2018。[ACSZ21] Ben Amiet、Andrea Collevecchio、Marco Scarsini 和 Ziwen Zhong。随机博弈中的纯纳什均衡与最佳响应动态。《运筹学数学》，46(4):1552–1572，2021。[Ald01] David J Aldous。随机指派问题中的 $\zeta(2)$ 极限。《随机结构与算法》，18(4):381–418，2001。[ALMT14] Dennis Amelunxen、Martin Lotz、Michael B McCoy 和 Joel A Tropp。立足边缘：随机数据凸规划中的相变。《信息与推断：IMA 期刊》，3(3):224–294，2014。[ARY21] Noga Alon、Kirill Rudov 和 Leeat Yariv。随机博弈中的优势可解性。arXiv 预印本 arXiv:2105.10743，2021。[AS04] David Aldous 和 J Michael Steele。目标方法：概率组合优化与局部弱收敛。载于《离散结构上的概率》，第 1–72 页。施普林格，2004。[BCIW16] Vladimir Braverman、Stephen R Chestnut、Nikita Ivkin 和 David P Woodruff。在插入流中寻找重频项，超越 CountSketch。载于美国计算机协会第四十八届年度计算理论研讨会论文集，第 740–753 页，2016。[BE98] J Berg 和 A Engel。矩阵博弈、混合策略与统计力学。《物理评论快报》，81(22):4999，1998。[Ber00] Johannes Berg。随机双人博弈的统计力学。《物理评论E》，61(3):2327，2000。[BEY05] Allan Borodin 和 Ran El-Yaniv。在线计算与竞争分析。剑桥大学出版社，2005。[BLM13] St´ephane Boucheron、G´abor Lugosi 和 Pascal Massart。《集中不等式——独立性的非渐近理论》。牛津大学出版社，2013。[Bol11] B´ela Bollob´as。随机图。载于《现代图论》，第 215–252 页。施普林格，2011。[Bra17] Florian Brandl。对称零和博弈中最优策略的分布。《博弈与经济行为》，104:674–680，2017。[CN89] Joel E Cohen 和 Charles M Newman。寄主—寄生物关系与随机零和博弈：策略多样化的稳定作用。《美国博物学家》，133(4):533–552，1989。[Cov66] Thomas M Cover。随机博弈不公平的概率。《数理统计年刊》，37(6):1796–1799，1966。[CT65] Herman Chernoff 和 Henry Teicher。独立同分布随机变量的极小极大值的极限分布。《美国数学会会刊》，116:474–491，1965。

[Dir16] Sjoerd Dirksen. 使用次高斯矩阵进行降维：统一理论。《计算数学基础》，16(5):1367–1396，2016年。[DKMZ11] Aurelien Decelle、Florent Krzakala、Cristopher Moore 和 Lenka Zdeborov´a。模块化网络随机块模型及其算法应用的渐近分析。《物理评论E：统计、非线性与软物质物理》，84(6):066106，2011年。[FM87] William G Faris 和 Robert S Maier。随机博弈的值：理性优势。《复杂系统》，1:235–244，1987年。[Gor85] Yehoram Gordon。关于高斯过程的若干不等式及其应用。《以色列数学杂志》，50:265–289，1985年。[HJM+23] Torsten Heinrich、Yoojin Jang、Luca Mungo、Marco Pangallo、Alex Scott、Bassel Tarbush 和 Samuel Wiese。随机博弈中的最佳响应动态、博弈序列与收敛至均衡。《国际博弈论杂志》，52(3):703–735，2023年。[Jon04] Johan Jonasson。关于随机博弈中的最优策略。《概率电子通讯》，2004年。[Kah86] Jean-Pierre Kahane。关于高斯过程上的 Slepian 和 Gordon 型不等式。《以色列数学杂志》，55:109–110，1986年。[LT13] Michel Ledoux 和 Michel Talagrand。《巴拿赫空间中的概率：等周理论与过程》。Springer Science & Business Media，2013年。[MB05] Andrew McLennan 和 Johannes Berg。双人标准型博弈的纳什均衡期望数的渐近分析。《博弈与经济行为》，51(2):264–295，2005年。[McL05] Andrew McLennan。标准型博弈的纳什均衡期望数。《计量经济学》，73(1):141–174，2005年。[MM21] L´eo Miolane 和 Andrea Montanari。套索回归的分布。《统计年鉴》，49(4):2313–2335，2021年。[MMZ06] Stephan Mertens、Marc M´ezard 和 Riccardo Zecchina。基于腔方法的随机 k-SAT 阈值。《随机结构与算法》，28(3):340–373，2006年。[MR96] Rajeev Motwani 和 Prabhakar Raghavan。随机化算法。《ACM计算综述》(CSUR)，28(1):33–37，1996年。[MU17] Michael Mitzenmacher 和 Eli Upfal。《概率与计算：算法与数据分析中的随机化和概率技术》。剑桥大学出版社，2017年。[PV12] Yaniv Plan 和 Roman Vershynin。稳健的1位压缩感知与稀疏逻辑回归：一种凸规划方法。《IEEE信息论汇刊》，59(1):482–494，2012年。[PV23] Lucas Pesenti 和 Adrian Vladu。通过正则化实现差异最小化。载于《2023年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》(SODA)，第1734–1758页。SIAM，2023年。

[Rob06] David P Roberts。柯西随机零和博弈与协调矩阵博弈的纳什均衡。《国际博弈论杂志》，34(2):167–184，2006年。[RS00] Yosef Rinott 和 Marco Scarsini。随机博弈中纯策略纳什均衡的数量。《博弈与经济行为》，33(2):274–293，2000年。[Sch50] Ludwig Schl¨afli。《数学论文集》，第1卷。施普林格，1950年。[Sle62] David Slepian。高斯噪声的单侧障碍问题。《贝尔系统技术杂志》，41(2):463–501，1962年。[SW08] Rolf Schneider 和 Wolfgang Weil。《随机几何与积分几何》。施普林格，2008年。[Tan10] Akio Tanikawa。随机零和博弈值的稳定性。载于《*ISCIE*随机系统理论及其应用国际研讨会论文集》，第2010卷，第310–314页。ISCIE随机系统理论及其应用研讨会，2010年。[TF65] RM Thrall 和 JE Falk。关于博弈核的一些结果。《*SIAM*评论》，7(3):359–375，1965年。[TOH15] Christos Thrampoulidis、Samet Oymak 和 Babak Hassibi。正则化线性回归：对估计误差的精确分析。载于学习理论会议，第1683–1709页。PMLR，2015年。[Vaz01] Vijay V Vazirani。近似算法，第1卷。施普林格，2001年。[vN28] J v. Neumann。关于博弈论。《数学年刊》，100(1):295–320，1928年。[Wig19] Avi Wigderson。《数学与计算：一场革新技术与科学的理论革命》。普林斯顿大学出版社，2019年。[Yao77] Andrew Chi-Chin Yao。概率计算：迈向统一的复杂度度量。载于《第*18*届计算机科学基础年度研讨会（*SFCS 1977*）》，第222–227页。IEEE计算机学会，1977年。