arXiv:2601.07775v1 [cs.GT] 12 Jan 2026

随机控制博弈的复杂性

SarvinBahmani、RasmusIbsen-Jensen、Soumyajit Paul、Sven Schewe、FriedrichSlivovsky、Qiyi Tang、Dominik Wojtczak 和 Shufang Zhu

利物浦大学，英国利物浦 {r.bahmani, r.ibsen-jensen, soumyajit.paul, sven.schewe, f.slivovsky, qiyi.tang, dkw, shufang.zhu}@liverpool.ac.uk

摘要。 我们研究在固定有限图上进行的双人无限时长博弈的求解复杂性，其中节点的控制权并非预先确定，而是随机分配的。在经典的随机回合博弈中，每次对局访问某个节点时，都会随机分配该节点的控制权。在本文中，我们研究这一设定的两种自然变体，其中每个节点的控制权只分配一次：(i) 在对局中首次访问某个节点时随机分配其控制权，此后在整场对局中保持不变；(ii) 在博弈开始前，通过独立抛硬币为每个节点预先分配控制权，然后开始对局。

我们研究计算三类目标——可达性、奇偶性和能量——的获胜概率所涉及的复杂性。我们证明，对于所有变体和所有目标，定性问题都是**NL**完全的。对于定量问题，我们证明，在第一种机制下，判定最大化玩家能否以至少达到给定阈值的概率获胜，对于所有目标都是**PSPACE**完全的；而在第二种机制下，计算所有目标的精确获胜概率都是**#P**完全的。为补充关于第二种机制的困难性结果，我们提出随机近似方案，可高效估算这三类目标的获胜概率；该方案假设奇偶颜色数量有界，且能量目标的权重采用一元编码。我们还通过实证展示了该方案的快速收敛性。

关键词： 轮流制博弈、双人博弈、随机轮流博弈、随机博弈

1 引言

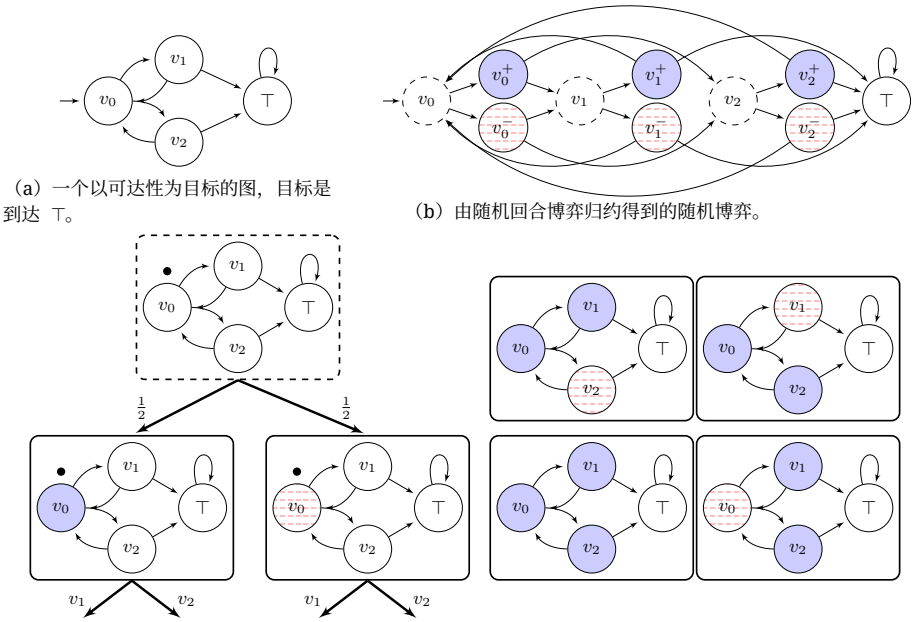
图博弈是形式化验证 [18,24,1,2] 和反应式综合 [32,9]中用于建模和研究决策场景的基础框架。在最经典的设定中，图博弈用于刻画系统与对抗性环境之间的交互。这可以自然地视为系统与环境之间的双人博弈，其中系统期望满足的要求被表述为博弈的胜利条件。经典的胜利

无限轨迹上的胜利条件包括可达性、奇偶性和能量 [19]。在图上的双人回合制博弈中，令牌被放置在图的一个初始节点上，玩家轮流沿边移动令牌，由此生成一条无限轨迹。每个节点通常归其中一名玩家所有：系统在属于自己的节点上选择后继节点，而环境则在属于自己的节点上做出选择。这类图上的双人博弈通常假设节点的所有权在博弈开始前就已固定。每个节点永久属于其中一名玩家，在整个博弈过程中控制权从不易手。然而，这一假设忽略了某些决策的控制权归属存在不确定性的情形。随机性是模拟不确定性的自然方式，因此可以通过抛硬币来决定某个节点的控制权，从而产生所谓的随机轮流博弈。

随机轮流博弈已在组合博弈 [31] 以及无限时长图博弈 [6]中得到研究。这类博弈也应用于议价网络 [12]。在随机轮流博弈中，每次访问一个节点时，该节点的所有权都会被随机、独立地确定。尽管这种机制很简单，却也让玩家在博弈初期有很大的余地做出非最优选择。此外，这种机制无法描述决策点的控制权仅取决于某个单一不确定事件的情形。在本文中，我们研究随机轮流博弈的一种形式：某个节点的所有权随机确定，但只确定一次；也就是说，一旦分配了节点的所有权，就会固定下来。对于一些具有无环状态图的棋盘游戏， [31] 所研究的随机轮流博弈已经采用了这种做法。

我们研究这种博弈的两种自然变体：（i）随着博弈进行，逐步即时确定节点的所有权，并在之后的博弈中保持不变，这种博弈称为展开式随机轮次博弈——这类博弈可被视为一个更大型随机博弈的展开；（ii）在博弈开始前，预先随机且独立地确定所有节点的所有权，这种博弈称为随机竞技场博弈——这等价于为该博弈随机选择一个博弈场。引入随机性后，我们关注的基本问题是计算系统玩家获胜的概率。随机轮流博弈、展开式随机轮次博弈和随机竞技场博弈都可以化归为等价的随机博弈 [16]。对于随机轮流博弈，这种转换实际上可在确定性对数空间内完成，从而得到一个多项式规模的随机博弈。然而，任何随机博弈能否化归为一种结构保持（即在确定性对数空间内进行简单转换）且概率保持的随机轮流博弈，目前仍不得而知。另一方面，对于展开式随机轮次博弈和随机竞技场博弈，等价随机博弈的规模可能会出现指数级膨胀。本文考察三种经典目标：可达性、奇偶性和能量。例1 通过图1（a）中的一个简单图，展示了这些具有随机控制的博弈变体，并采用可达性目标。

例*1*。 在图 1(a) 所示的博弈图中，令牌最初位于状态 s_0。玩家为 Max 和Min，而Max的目标是最大化到达目标节点的概率



（a）一个以可达性为目标的图，目标是到达 ⊤。

（b）由随机回合博弈归约得到的随机博弈。

（c）由展开后的随机回合博弈归约得到的随机（显式）博弈——前两个层级。

(d) 该随机竞技场博弈。

图1：蓝色节点由 Max 控制，带粉色虚线图案的节点由 Min 控制，带虚线轮廓的白色节点为随机节点，带实线轮廓的白色节点尚未分配。在 (c) 和 (d) 中，方框表示博弈状态。部分节点上方的黑点表示棋子位置。每个随机节点的转移概率均匀分布。

⊤。考虑在此图上进行的随机控制博弈，其中所有权始终以均匀随机方式确定。首先，在随机竞技场博弈中，$\{v_0, v_1, v_2\}$ 中的每个节点都以 Max 或Min的概率 1_2被分配给相应玩家。因此，$2^3 = 8$个可能的博弈场各自出现的概率为 1_8。其中，Max在其中4个博弈场中拥有获胜策略，其所有权分别对应于 $\{v_0, v_1\}$、$\{v_0, v_2\}$、$\{v_0, v_1, v_2\}$、$\{v_1, v_2\}$；见图 1(d)。因此，在此图上，Max 在随机竞技场博弈中的获胜概率为1_2。

另一方面，在这张图上的展开式随机轮次博弈中，初始节点 v_0 以概率 1_2 被赋值给 Max 或 Min。赋值完成后，相应的玩家会从 v_1 或 v_2中选择一个节点。由于对称性，这两个选项同样好，不失一般性地假设他们选择了 v_1。接下来，随机为 v_1 赋值。如果 v_0 被赋值给 Min，那么当 Min 得到 v_1时，Max 就会输，因为 Min 可以走环 v_0，v_1，v_0。另一种情况下，即 Max 得到 v_1时，Max 会赢。如果v_0 被赋值给 Max，那么当 Max 得到 v_1时，Max 会赢；而如果 Min 得到v_1，他们就会把令牌移回 v_0。由于 Max 已经拥有 v_0，他们将

然后移至仍未赋值的 v_2。在对 v_2进行随机赋值时，如果 v_2 被赋值给 Max，Max 就会赢；否则就会输。因此，Max 获胜的概率为 $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}) = \frac{5}{8}$。

此外，对于该图上的随机回合博弈，Max 几乎必然获胜，即获胜概率为 1，因为只要 Max 获得 v_1 或 v_2，就会获胜，而这件事以概率 1 发生。□

我们的贡献。我们首先考察这样一个问题：是否存在从随机博弈到随机回合博弈的确定性对数空间转换，并且该转换保持获胜概率不变。我们证明这不太可能：首先，我们证明，带有可达性目标的随机回合博弈的定性问题是 **NL**-完全的；随后，我们推断，简单的保持结构和概率的转换将意味着 **NL** =**P**。

本文主要关注两种全新且不同的控制权分配方式：(i) 当节点首次被访问时动态决定所有权；(ii) 通过为每个节点独立抛硬币，预先确定所有权。这些模型不同于标准随机博弈，我们证明它们表现出显著不同的计算复杂度：对于 (i)，定量问题是 **PSPACE**-完全的；对于 (ii)，则是 **#P**-完全的；与此同时，两者在定性问题上都保持 **NL**-完全性。这些复杂度结果适用于安全性、可达性、奇偶性和能量目标。对于 (ii)，在奇偶颜色数量有界且能量目标使用一元编码权重的假设下，我们还以随机近似方案补充了 **#P**-完全性结果，该方案能够高效估计三个目标的获胜概率。缺失的证明可在完整版中找到。

相关工作。先前的研究考察了 随机轮流博弈 [30]，其中每次访问某个状态时，状态的所有权都会被随机地（重新）分配。这类博弈可以在确定性对数空间内转换为 随机博弈 [16]，且具有相同的获胜概率，因此通常被视为随机博弈的一个子类。由于具有我们所考虑目标的随机博弈可以在 $\mathbf{NP} \cap \text{-}\mathbf{NP}$ [16,37,15,14],中求解，因此随机轮流博弈也适用相同的复杂度界。已有研究表明，出度为 2 的随机轮流博弈可以在多项式时间内求解 [6], ，这意味着不存在简单的保持度数的反向归约，因为 简单随机博弈——即所有随机顶点的出度均为 2 的随机博弈——其难度已经不低于一般随机博弈 [37]。

此外，大量研究还探讨了通过其他机制决定控制权的图博弈 。在竞价博弈中， [25,26], 每个回合都由两位玩家进行一场“拍卖”，以决定谁来移动令牌。研究者探讨了不同的竞价规则，包括*Richman*竞价 [5]（以 David Richman 命名），其中出价较高者向出价较低者付款；以及穷人竞价 [6], ，其中出价较高者向银行付款，且这笔款项会被扣除。 [25]研究者发现，可达性Richman竞价博弈（也只有这类博弈）等价于随机回合博弈。

另一种相关模型是兵卒博弈 [4]，其中顶点的控制权也会在对局过程中动态变化。在这种模型中，控制权由“兵卒”决定：每个兵卒拥有博弈图中的一部分顶点，而兵卒分配给不同玩家，其所有权可能在对局过程中发生变化。正如兵卒博弈的开创性研究 [4], 所指出的，这类博弈与竞价博弈有着根本区别：兵卒博弈支持更丰富、更灵活的控制权转移机制，而竞价博弈则完全依赖严格的基于拍卖的机制。

2 预备知识

博弈图与博弈场。 在本文中，我们研究由两位玩家——Max 和 Min——在有限有向图上进行的轮流行动的零和博弈，这些图称为博弈场。有限有向图是 $G = (V, E)$，其中 V 是一个非空节点集， $E \subseteq V \times V$ 是一个非空边集。由于我们的博弈可能持续无限长，我们只考虑没有死端的图，即对于每个 $u \in V$，都存在某个 v 属于 V，使得 $(u, v) \in E$。

图 $G = (V, E)$ 上的博弈场 是一个元组 $\mathcal{A} = (G, V_0, V_1, v_0)$，其中$V$ 是节点集， $E \subseteq V \times V$ 是边集， v_0 是起始节点。节点集 V 被划分为集合 V_0 （由玩家 Max 控制的节点）和集合 V_1 （由玩家 Min 控制的节点）。此类博弈的对局从在起始节点 v_0放置一个令牌开始。控制该节点的玩家随后选择一个后继节点 v_1 ，使得 $(v_0, v_1) \in E$ ，并将令牌移至该后继节点。下一回合，控制节点 v_1 的玩家选择后继节点 v_2 ，使得 $(v_1, v_2) \in E$ ，并相应地移动令牌。两位玩家以此方式在博弈场中移动令牌，从而形成一场博弈对局。请注意，在节点集为 V 的图 G 上，可能的博弈场总数为 $2^{|V|}$。

对局与策略。 形式上，博弈 $\mathcal{A}$ 的一局对局 是一个有限（分别为无限）节点序列 $\langle v_0, v_1, \ldots \rangle \in V^*$（分别为 $\langle v_0, v_1, \ldots \rangle \in V^\omega$），满足对所有$i \geq 0$，都有 $(v_i, v_{i+1}) \in E$。我们用 $\mathrm{Plays}_{\mathcal{A}}(v)$ 表示从节点 $v \in V$ 开始的博弈 $\mathcal{A}$ 的对局集合，用 $\mathrm{Plays}_{\mathcal{A}}$ 表示该博弈的对局集合。若上下文中的博弈场明确，则省略下标。

给定博弈场中玩家 Max 的策略是一个函数 $\sigma : V^* V_0 \to V$，满足对所有 $\rho \in V^*$ 和 $v \in V_0$， $\big(v, \sigma(\rho, v)\big) \in E$。如果策略 σ 仅取决于最后一个状态（对所有 $\rho, \rho' \in V^*$ 和 $v \in V_0$， $\sigma(\rho, v) = \sigma(\rho', v)\big)$ ，则称其为无记忆的策略。一局对局 $\langle v_0, v_1, \ldots \rangle$ 与策略 σ 一致，当且仅当该对局的每个以玩家 Max 的状态（$v_n \in V_0$）结尾的初始序列 $\rho_n = v_0, v_1, \ldots, v_n$ 都满足$\sigma(\rho_n) = v_{n+1}$ 。玩家 Min 的策略定义类似。

价值的直观概念。给定双方玩家的固定策略，即一个策略组合，博弈的结果是一场无限对局，它会产生一个概率，表示玩家 Max 的目标得以实现的概率。我们将此概率称为策略组合的价值。玩家的策略价值则定义为该玩家采用此策略与对手的最优策略对抗时的获胜概率。最后，博弈的价值（从给定的初始顶点出发）是玩家 Max 在双方都采取最优策略时能够保证的获胜

概率。直观地说，这一价值体现了在双方都采取最优策略时，玩家 Max 实现目标的可能性。

博弈目标。我们考虑三种目标：可达性、奇偶性和能量。对于可达性 博弈，我们有一个目标节点 $\top \in V$。如果在对局过程中访问了 $\top$，则宣布玩家 Max 获胜，并立即终止博弈。否则，如果从未访问 $\top$，则玩家 Min 获胜。

对于奇偶性 目标，我们为博弈配备一个优先级函数 pri：$V \to \mathbb{N}$。如果在对局 $\langle v_0, v_1, \ldots\rangle$ 中，无限次出现的最大优先级为偶数，即 $\limsup_{i\to\infty} \text{pri}(v_i)$ 为偶数，则玩家 Max 获胜；否则玩家 Min 获胜。

对于能量 目标，博弈具有初始信用值 $c \in \mathbb{N}$ 和权重函数 $w : V \to \mathbb{Z}$。玩家 Max 的目标是构造一个无限对局$\langle v_0, v_1, \ldots\rangle$，使得

$$c + \sum_{i=0}^{j} w(v_i) \geq 0 \text{ for all } j \geq 0. \tag{1}$$

量 $c + \sum_{i=0}^{j} w(v_i)$ 称为对局前缀$\langle v_0$，v_1，……，$v_j\rangle$的能量水平。对局 $\langle v_0$，v_1，$\ldots\rangle$ 若满足方程（1），则由玩家 Max 获胜；否则由玩家 Min获胜。

节点 $v \in V$ 是玩家 Max （分别地，Min）的获胜节点，当且仅当存在玩家 Max （分别地，Min）从 v出发的获胜策略。所有三种博弈都是无记忆确定性的 [17,21,28,18,10]；也就是说，对于所有 $v \in V$，v 要么是玩家Max 要么是玩家Min的获胜节点，且无记忆策略足以应对。

随机控制博弈。在随机控制博弈中，我们在一个固定的博弈图 G上进行对局，该图具有指定的起始节点 v_0，目标可以是可达性、奇偶性或能量。尽管图 G 是固定的，但其节点的控制权并未预先确定；起初，图 V并未划分为 V_0 和 V_1。相反，每个节点 $v \in V$ 的控制权都由一次抛硬币随机且独立地决定：给定函数 t：$V \to$ (0,1)，节点 v以概率 t(v)（即 $v \in V_0$）分配给玩家 Max，以概率 $1-$ t(v)（即 $v \in V_1$）分配给玩家 Min。因此，划分 (V_0，V_1) 完全由这些抛硬币结果决定。

令 own：$V \rightharpoonup$ {Max，Min} 为一个偏函数，在有定义时将某位玩家分配给图中的一个节点。博弈从一个空的所有权函数 own $= \emptyset$开始。节点的所有权在对局过程中随机确定。我们考虑经典随机轮流博弈 [30],的两种变体，在这些变体中，每轮由抛硬币决定行动的玩家。在展开式随机轮次博弈中，节点的所有权在其首次被访问时确定，此后保持不变。在随机竞技场博弈中，所有节点的所有权都在博弈开始时确定。

随机博弈。随机博弈也是一种回合制博弈，由玩家 Max 和 Min 在博弈场上进行。与非随机博弈不同，随机博弈包含随机节点。形式上，节点集合 V被划分为三个互不相交的子集：V_0，由 Max 控制；V_1，由

Min 控制；以及 V_r，表示随机节点。随机节点的转移具有概率性，由转移函数 $\delta: V_r \to \text{Dist}(V)$ 指定，其中 Dist(V) 表示 V 上的概率分布集合。随机回合博弈可以视为随机博弈的一种特殊情况。正如我们稍后将展示的，展开式随机轮次博弈可以转换为一个规模呈指数级增长的随机博弈，称为显式博弈；而随机竞技场博弈可以转换为一个简单的随机博弈，其中包含一个初始随机节点，该节点会转移到控制权赋值各不相同的博弈场，转移概率对应于生成每种随机赋值的可能性。

3 定性分析与随机回合博弈

本节讨论随机控制博弈的定性分析，重点关注玩家 Max 在随机回合博弈、展开式随机回合博弈和随机竞技场博弈中的几乎必胜与必胜。若玩家 Max 以概率 1 获胜，则称博弈几乎必胜；若无论抛硬币的结果如何，Max 都能获胜，则称为必胜。我们证明，对于带有可达性目标的随机回合博弈，以及带有可达性、奇偶性或能量目标的展开式随机回合博弈和随机竞技场博弈，判定 Max 是否必胜或几乎必胜是**NL**-完全的。我们还讨论随机回合博弈与随机博弈之间的归约。

我们首先证明，判定 Max 是否几乎必胜于带有可达性目标的随机回合博弈是**NL**-完全的。该归约基于 st-连通性这一著名的**NL**-完全问题。

定理2。 判定**NL**-完全的问题是：Max 是否几乎必胜于带有可达性目标的随机回合博弈。

对于随机轮流博弈，几乎必胜和必胜通常并不相同——例如，Max 在图 1（a）所示的随机轮流博弈中几乎必胜但并非必胜；参见图 1（b）中的等价随机博弈：如果每次访问时恰好将 v_1 和 v_2 分配给Min ，那么 Max 就会输；然而，这一事件的概率为零。尽管如此，判定 Max 是否必胜同样是**NL**-完全的。

该结果也适用于奇偶性和能量目标：对于奇偶性目标，当且仅当存在一条“坏的”套索路径，且其环的最大优先级为奇数时，Max 并非必胜；对于能量目标，当且仅当存在一条“坏的”套索路径，在该路径上的任意位置能量水平降至零以下，或其环为负时，Max 并非必胜。在这两种情况下，都可以在**NL**中检查是否存在这样的套索路径。

定理 3。 判定 **NL**-*whether* Max 是否在具有可达性、奇偶性或能量目标的随机轮流博弈中必胜，是 **NL**-完全的。

由于随机轮流博弈的定性解具有 **NL** 完全性，因此不存在简单结构[1] 且概率保持的

[1] 我们所说的保结构，是指任何简单的转换，例如通过构造小工具实现的转换，且都能在确定性对数空间内计算。

从随机博弈到随机回合博弈的转换，即使将随机博弈限制为非随机双人博弈也是如此。

定理 4。 如果 **NL** $\neq$**P**，那么就不存在从双人可达性博弈到随机回合博弈的保持结构和概率的转换。

证明。 求解双人可达性博弈是 **P**完全的 [20]。若存在一种确定性对数空间归约（对数空间归约），能够保证概率保持，并将问题归约到一个 **NL**完全问题，那么这就意味着我们可以在 **NL** 中求解这个可达性问题，从而有 **NL** = **P**。

尽管对于更一般的博弈而言，确定性对数空间归约听起来并不常见，但我们注意到， [23]中从奇偶性到均值收益、再从均值收益到折扣收益的归约都是确定性对数空间归约；由于对这些博弈而言，**P**完全性并非问题，因此通常不会特别强调其属于**L** 。不可归约性的论证也适用于奇偶性博弈和能量博弈，因为它们分别可以用 2 个优先级以及权重 0 和 -1 来编码可达性。

推论 5。 如果 **NL** $\neq$**P**，那么就不存在从双人奇偶性博弈或能量博弈到随机回合博弈的保持结构和概率的转换。

现在我们考察展开式随机回合博弈和随机竞技场博弈中的几乎必胜与必胜。首先注意到，展开式随机回合博弈和随机竞技场博弈中的必胜，与随机回合博弈中的必胜是相同的。接下来我们注意到，对于展开式随机回合博弈和随机竞技场博弈，几乎必胜与必胜相一致。根据定理 3，我们立即得到：

定理 6。 对于可达性、奇偶性或能量目标，判定**NL**-完全的：*Max* 在展开式随机回合博弈或随机竞技场博弈中是否几乎必胜或必胜。

4 展开式随机回合博弈

在本节中，我们将证明，对于可达性、奇偶性或能量目标中的任一目标，判定 Max 在展开式随机回合博弈中的获胜概率是否至少为给定阈值 θ 是**PSPACE**-完全的。

下面陈述主要的复杂度结果；上界在第 4.1 节证明，下界则分别在第 4.2节证明。

定理 7。 判断玩家 Max 能否在展开后的随机轮流制博弈中，以至少为给定有理数阈值 θ 的概率赢得具有给定可达性、奇偶性或能量目标的博弈（该阈值以二进制编码），是一个 **PSPACE**-完全问题。

4.1 PSPACE 中的成员资格

要确定展开式随机轮次博弈中玩家 Max 的获胜概率，可以将该博弈转换为一个等价的随机可达性博弈、奇偶博弈或能量博弈，称为<名称 id='1'>显式博弈</名称>，然后直接求解该显式博弈。我们正式定义显式博弈如下。

<名称 id='1'>显式博弈 </名称>令 $G = (V$<名称 id='5'>，</名称> $E)$ 表示一个展开式随机轮次博弈的博弈图，并令 t 为其对应的抛硬币函数。我们假设 t 为顶点分配有理概率，每个概率均由有限二进制编码给出。<名称 id='8'>显式博弈 </名称> $\mathcal{G}$ 是一个随机博弈，其状态形式为 (G< 名称 id='12'>，</ 名称 >own u)，其中 own 是一个所有权函数，而 $u \in V$ 是当前棋子位置。初始状态为 (G<名称 id='17'>，</名称> $\emptyset$<名称 id='20'>，</名称> v_0)，其中没有为任何节点分配所有权，并且$v_0 \in V$ 是原始展开式随机轮次博弈中的初始节点。

显式博弈中的转移定义如下。在博弈状态（G，own u）处，

– 若 own(u) 未定义，则该状态为随机状态。它以概率 t(u) 转移到（G，own′，u），其中 own′ = own$\cup\{u \mapsto$ Max$\}$；并以概率1 – t(u) 转移到（G，own″，u），其中 own″ = own $\cup\{u \mapsto$ Min$\}$；– 否则，own(u) 有定义，（G，own′，u）归玩家 own(u) 所有，并且其后继状态为所有（G，own v），其中（u，v）$\in E$。

由图 1(a) 中博弈图上的展开式随机轮次博弈构造出的显式博弈的前两层，如图 1(a) 所示。若投影对局 $\langle$(G，$\emptyset$，v_0)，（G，own$_1$，v_1），（G，own$_2$，v_2） $\ldots\rangle$ 由 Max 获胜，则玩家 Max 赢得该对局。例如，对于可达性目标，博弈状态（G，own $\top$）是目标状态。因此，Max 在 G 上的展开式随机轮次博弈中获胜的概率，等于 Max 在对应的 $\mathcal{G}$ 随机博弈中获胜的概率。

直接求解显式博弈——即随机可达性博弈、奇偶博弈或能量博弈——即可确定其可判定性。然而，这种方法效率低下，因为显式博弈包含 $3^{|V|}\cdot|V|$ 个状态：可能的所有权函数有 $3^{|V|}$ 种，可能的棋子位置有 $|V|$ 种。尽管如此，我们证明，判定玩家Max 的获胜概率可以在交替多项式时间（**交替多项式时间**）内完成，这等价于 **PSPACE** [13]，，与第 **PSPACE**-困难下界相匹配，该下界已在第 4.2 节中证明。

我们首先注意到，尽管显式博弈规模庞大，但其结构简单，并且直接继承了确定性可达性博弈、奇偶博弈和能量博弈中的无记忆最优策略。此外，当两位玩家都遵循各自的无记忆最优策略时，任何通向获胜环的路径长度都是多项式级的。而且，每个博弈状态下 Max 和 Min 的获胜概率都可以用多项式规模表示。这些性质共同使得我们能够在**交替多项式时间**内判定显式博弈初始状态下的获胜概率。

引理 8。 我们的展开式随机轮次博弈具有 *(a)* 最优的无记忆策略。此外，*(b)* 获胜概率可以写成一个分数，其分母是所有未分配状态的抛硬币分母的乘积。如果Max （分别是Min）玩家采用最优策略，则他们可以 *(c)* 确保到达并闭合的第一个环以至少

[2] 请注意，对于可达性问题，我们假设目标状态的后继状态也都是目标状态。

（分别以至多）其最优获胜概率获胜，*(d)* 长度至多为 $|V|$，且 *(e)* 闭合这些环的路径长度至多为$(|V|+1)\cdot(|V|+2)/2$。

证明。 为了分析展开式随机回合博弈，我们注意到它具有自然的有向无环图结构，因为未分配状态的集合只会减少。我们从底部强连通分量开始，自下而上对博弈进行归纳分析，从所有节点的所有权均已分配的 $2^{|V|}$份开始（归纳基础）。对于环闭合前的路径长度，我们证明一个更强的结论：如果有 m 个未赋值节点，则该长度为 (f) $\sum_{i=0}^{m}(|V|-i+1)$。注意，(f) 蕴含 (e)。

对于这个 **归纳基础**，该博弈是一个普通的非随机双人博弈；它具有无记忆确定性，并存在无记忆最优策略[17,21,28,18,10] (a,c)，这些策略保证获胜方在不超过 $|V|$ (d) $|V|+1$ 步内到达并闭合一个获胜环 (f)。显然，这些策略也是最优的。

由于这只允许获胜概率为 0 和 1，因此它们是分母为一个空乘积的分数，这说明了 (b)。

对于 **归纳步骤**，我们假设这些性质已针对最多有 m 个未分配状态的情形得到证明，接着讨论有 $m+1$ 个未分配状态的情形。

从一个未分配节点 s 出发，下一步是抛硬币，以确定归属方。获胜概率为 t(s) 乘以从 s 开始时的获胜概率；该显式博弈状态与当前状态的唯一区别是，s 分配给了 Max（Max 赢得了抛硬币），再加上 $1-$t(s) 乘以从 s 开始时的获胜概率；该显式博弈状态与当前状态的唯一区别是，s 分配给了 Min（Min 赢得了抛硬币）。

根据归纳假设，该概率可以写成一个分数，其分母是所有未分配状态对应抛硬币的分母的乘积 (b)。

我们还可以继承这一点：Max（分别为 Min）的最优无记忆策略保证，到达的第一个环以至少（至多）该概率获胜（a）。在闭合该环之前，路径的长度恰好比从任一后继状态出发的路径长一（c、d、f）。

对于已分配所有者的状态，我们关注 $|V|$ 具有固定的部分赋值的博弈状态。对于这些状态，我们设计了一种称为强（分别为弱） p-博弈的博弈，针对任意 $p\in[0,1]$，方法是将所有获胜概率为 $\geq p$ （分别为 $>p$）的未分配状态变为获胜[3] 汇节点，并将获胜概率为 $<p$ （分别为 $\leq p$）的状态变为失败汇点。

如果 Max（相应地，Min）在具有固定的部分赋值的博弈中，通过在强（相应地，弱） p-博弈中遵循其无记忆策略，赢得强（相应地，弱） p-博弈，并在离开该博弈后采用归纳假设所保证存在的最优策略，则 Max（相应地，Min）以至少 p （相应地，$1-p$）的概率获胜。这是因为，在遵循该策略时，要么在此区域内闭合一个获胜环

[3] 对于可达性博弈，获胜（失败）汇点是仅带有一个自环的终止（非终止）状态；对于奇偶博弈，这些汇点状态分别获得偶数（奇数）优先级；对于能量博弈，则分别具有正（负）权重。

（其长度随后为 $\leq |V| - m$，并在 $\leq |V| - m + 1$ 步内到达并闭合），要么在 $|V| - m$ 步内到达一个通过抛硬币进行赋值的状态。从该状态出发，Max（相应地，Min）以至少 p（相应地，$1 - p$）的概率获胜（见上文），从而得到（d,f）。

根据其构造，对于每个状态，在 p-博弈中都存在明确的单调性：Max 赢得强 1-博弈，Min 赢得弱 0-博弈，或者存在一个 p，使得 Max 赢得强 p-博弈而 Min 赢得弱 p-博弈；在这三种情况下，该概率都是每位玩家能够保证的概率 (a,c)。在后一种情况下，这 p是某个未分配状态所产生的概率，从而如上所示给出 (b)。

这就完成了归纳论证和证明。 □

借助引理 8，我们得到了一个算法，用于判定获胜概率是否达到给定的 **交替多项式时间 = PSPACE**阈值。

定理 9。 检查玩家 Max 是否能够以至少给定有理数阈值 θ 的概率，在具有给定可达性、奇偶性或能量目标的展开随机控制博弈中获胜（该阈值以二进制编码），可以在交替多项式时间内完成。

证明。 我们可以使用交替机器直接正向进行显式博弈：首先通过猜测分子来猜测获胜概率 p，并隐式地使用分母，即所有未分配状态（最初为所有状态）的概率分母之乘积，该概率由 t 给出。然后检查 $p \geq \theta$ 是否成立，并将当前节点 v 设置为 v_0。

然后我们重复以下循环：

1. 将当前节点写在一条字符串上。2. 对于赋值给 Max（分别为 Min）的状态，我们选择一个后继状态（分别以存在量词和全称量词表示），并将当前节点 v 更新为该后继状态。3. 对于未赋值节点，存在性地猜测分子[4]，即 Max 抛硬币获胜时（p_+）以及 Min 抛硬币获胜时（p_-）的获胜概率。然后，我们以全称量词表示地选择：要么检查这些概率的加权和是否至少等于当前获胜概率，要么全称地选择其中一个赋值，并据此将概率更新为 p_+ 分别为 p_-。4. 随后，我们依次让两位玩家选择是否声称自己已经闭合了一个获胜环。若玩家能够证明这一点，则声称者获胜；否则输掉对局。（注意，检查是否已经闭合获胜环是一项简单的确定性检查。）

如果实际概率是 $p \geq \theta$，Max 总能猜对概率并遵循其最优策略。如果实际概率是 $p < \theta$，玩家 Min 总能遵循其最优策略；若存在局部不一致，就提出质疑，否则若 p_+ 高于实际概率，就提出质疑 p_+，否则提出质疑 p_-。□

[4] 如果只用分子表示分数，并使用所有未赋值节点的分母的乘积，那么我们就可以检查 $p \geq p_+ \cdot n + p_- \cdot (d - n)$，其中 d/n 是 Max 赢得抛硬币的概率。

4.2 PSPACE 困难性

为了证明计算展开后的随机回合博弈获胜概率的 **PSPACE** 困难性，我们将前束合取范式（PCNF）中的量化布尔公式（QBF）可满足性问题归约到该问题。

为简单起见，我们假设该量化布尔公式的量词前缀严格交替，因此输入具有如下形式

$$\Phi \;=\; \forall x_1 \exists y_1 \; \forall x_2 \exists y_2 \; \ldots \; \forall x_n \exists y_n \;\; \varphi,$$

其中矩阵 $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ 采用合取范式，且只包含量词前缀中出现的变量。众所周知，判定此类量化布尔公式是否可满足是**PSPACE**完全的 [29]。此外，可以通过以下由全称玩家和存在玩家进行的（求值）博弈来理解其语义。玩家按照量词前缀中的顺序为变量赋值：全称玩家为全称量化的变量赋值x_i，存在玩家为存在量化的变量赋值 y_i。如果由此得到的真值赋值满足矩阵，则存在玩家获胜；如果该赋值使矩阵不满足，则全称玩家获胜。若存在玩家在求值博弈中拥有获胜策略，则该量化布尔公式可满足（为真）；若全称玩家拥有获胜策略，则该公式不可满足（为假）。

为了从量化布尔公式可满足性进行归约，我们将构造一个博弈图 G_Φ，并证明：如果 Φ 可满足，则最大化玩家获胜的概率至少为 θ；如果 Φ 不可满足，则该概率严格小于 θ。其中阈值 θ 仅取决于 n。

博弈图构造。给定 Φ，我们构造一个有向博弈图 G_Φ，其节点如下：对于每个全称量化 变量 x_i，设有节点 $\forall x_i$、x_i、$\neg x_i$；对于每个存在量化 变量 y_i，设有节点 $\exists y_i$、y_i、y_i'、$\neg y_i$、$\neg y_i'$、y_i''、$\neg y_i''$；对于 φ 的每个子句 C_j，设有一个节点 C_j；此外还有一个合取节点 $\wedge$，以及两个汇 节点 $\top$ 和 $\bot$。初始节点为 $\forall x_1$，目标节点为 $\top$。添加边如下：
全称选择。从 $\forall x_i$ 向 x_i 和 $\neg x_i$ 添加边。
存在选择。从 $\exists y_i$ 添加边到 y_i''和 $\neg y_i''$。从 y_i''添加一条边到 y_i'，再从 $\neg y_i''$ 添加一条边到 $\neg y_i'$。此外，从 y_i' 到 y_i 添加边，并从$\neg y_i'$ 到 $\neg y_i$添加边。

量词推进。从 x_i 和 $\neg x_i$ 添加边到 $\exists y_i$。对于 $1 \le i < n$，添加从 y_i 和 $\neg y_i$ 到 $\forall x_{i+1}$ 的边。对于 $i = n$，添加从 y_n 和 $\neg y_n$ 到 $\wedge$的边。**子句选择**。从 $\wedge$向每个子句 C_j添加一条边。
文字选择。文字是一个变量或其否定。对于每个子句 C_j 和每个文字 $\ell \in \{x_i, \neg x_i, y_i, \neg y_i\}$，若 $\ell \in C_j$，则从 C_j 到 ℓ 添加一条边（因此每个子句都与其文字的否定相连）。

汇点连接。从文字节点 x_i、$\neg x_i$、y_i、$\neg y_i$、每个 $\forall x_i$ 以及 $\wedge$ 添加边到 $\top$。从每个 $\exists y_i$、节点 y_i'、$\neg y_i'$、y_i''、$\neg y_i''$ 以及每个 C_j 添加边到 $\bot$。最后，在 $\top$ 和 $\bot$ 上添加自环。

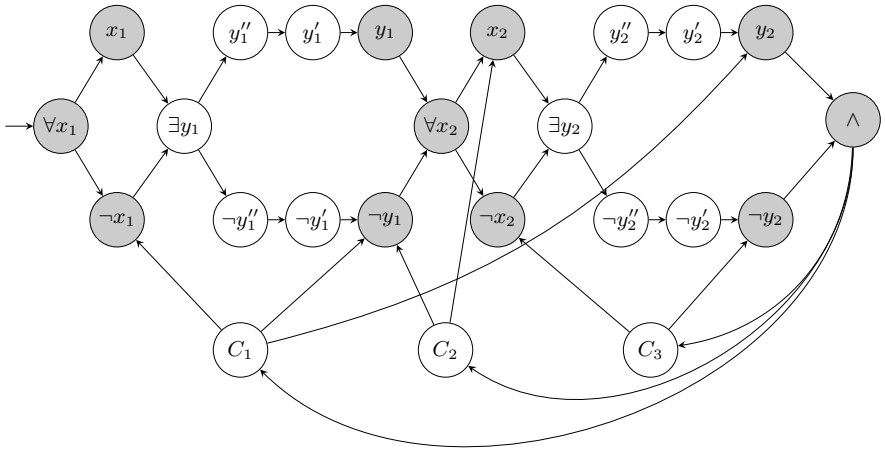


图 2：示例中量化布尔公式的简化博弈图 10。阴影节点可转移至目标节点 $\top$，而所有其他节点都转移至 $\bot$。

例*10*。 考虑量化布尔公式

$$\Phi \;=\; \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \; \varphi$$

带有矩阵

$$\varphi \;=\; \underbrace{(x_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg x_2 \vee y_1)}_{C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee y_2)}_{C_3}.$$

图 2展示了其简化博弈图的示意图 G_Φ，其中省略了汇节点及其关联边。□

考虑一个在 G_Φ 上进行、具有可达性目标的展开式随机轮次博弈，其中每次抛硬币的概率为1 2，也就是说，每个节点以相同概率分配给最大化玩家或最小化玩家。如果一个带有通往 $\top$的边的节点被分配给最大化玩家，最大化玩家可以沿该边移动并立即获胜。同样，我们可以假设，在有机会时，最小化玩家总是转移至 $\bot$ 。反之，显然，前往 $\bot$不符合最大化玩家的利益，而前往 $\top$也不符合最小化玩家的利益，因此可以假设，只要存在其他可用的转移，他们绝不会选择此类转移。

只有当令牌到达分配给 Max 玩家的子句节点时，博弈才会变得有趣。只有在此前访问过的任何带有 $\top$-转换的节点都分配给 Min、任何带有 $\bot$-转换的节点都分配给 Max 的情况下，才会发生这种情况。现在我们论证，在此之前玩家选择的对局（假设他们都进行理性决策）并不影响该事件的概率；该概率只取决于量词前缀中的变量数量。

– 令 p_i 表示令牌到达量词节点 $\forall x_i$（对应 $1 \le i \le n$）之前最大化玩家获胜的概率，并令 p_{n+1} 表示令牌到达 $\wedge$ 节点之前他们获胜的概率。

– 此外，令 q_i 表示令牌到达节点 $\forall x_i$ （对应 $1 \leq i \leq n$）的概率，并令 q_{n+1} 表示令牌到达 $\wedge$ 节点的概率。– 最后，令 q 表示令牌到达子句节点 C_j 且最大化玩家获得控制权的概率，并令 p 表示令牌到达子句节点 C_j之前最大化玩家获胜的概率。

引理11. 给定 n，上述定义的概率可按如下方式计算：

$$q_1 = 1, \quad q_{i+1} = 2^{-6} q_i, \qquad\qquad q = 2^{-2} q_{n+1},$$
$$p_1 = 0, \quad p_{i+1} = p_i + q_i(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-6}), \quad p = p_{n+1} + 2^{-1} q_{n+1}.$$

证明。由于 $\forall x_1$ 是初始状态，$q_1 = 1$和 $p_1 = 0$。要以概率 q_i到达 $\forall x_{i+1}$ 以实现 $1 \leq i < n$，需要到达 $\forall x_i$，并将 $\forall x_i$、$(\neg)x_i$ 和 $(\neg)y_i$ 分配给Min，同时将 $\exists y_i$、$(\neg)y_i''$和 $(\neg)y_i'$ 分配给Max，因此概率为 $q_{i+1} = 2^{-6} q_i$。用同样的论证可得，$q_{n+1} = 2^{-6} q_n$。从节点 $\forall x_i$ 出发，对于 $1 \leq i \leq n$，Max玩家可以在令牌到达 $\forall x_{i+1}$ （对于 $1 \leq i < n$）或$\wedge$ （对于 $i = n$）之前获胜，方法是将一条边通向 $\top$的节点之一分配给自己，此情况发生的概率为 $2^{-1}+2^{-2}+2^{-6}$。因此，$p_{i+1} = p_i + q_i(2^{-1}+2^{-2}+2^{-6})$。从 $\wedge$节点出发，如果该节点分配给Max玩家，则Max玩家获胜，因此$p = p_{n+1} + 2^{-1} q_{n+1}$；令牌以 $1/4$ 的概率传递给由Max控制的子句节点，因此 $q = 2^{-2} q_{n+1}$。□

上述引理使我们能够计算最大化玩家在获得子句节点的控制权之前赢得博弈的概率 p 。接下来，我们将证明，如果他们在量化布尔公式 Φ的求值博弈中遵循存在玩家获胜策略，那么从子句节点出发，他们可以以$1/2$ 的概率获胜。

引理12。 如果存在玩家在 Φ的求值博弈中拥有获胜策略，那么最大化玩家可以在以 G_Φ 为可达性目标的展开式随机轮次博弈中，以至少 $p + \frac{1}{2}q$的概率获胜。

证明。 将从 $\forall v$ 到 v 的转移解释为将变量 v 设为真，并将到 $\neg v$ 的转移解释为将 v 设为假，在到达子句节点之前，最大化玩家会模仿 Φ的存在玩家获胜策略。假设最小化玩家采取理性行动，最大化玩家在到达子句节点之前以 p 的概率获胜 C_j。以 q的概率，他们最终会到达由他们控制的子句节点 C_j 。由于他们模仿了存在玩家获胜策略，因此存在一个文字$\ell \in C_j$ ，被玩家行动所诱导的赋值满足该文字。因此，根据 G_Φ的构造，从 C_j 到此前尚未访问过的否定文字节点ℓ 存在一条边。最大化玩家移动到 ℓ，并通过获得该节点的控制权后移动到 $\top$，以$1/2$的概率获胜。总的来说，最大化玩家获胜的概率至少为 $p + \frac{1}{2}q$。□

另一方面，如果全称玩家在求值博弈中拥有获胜策略，Min 玩家便可以模仿这一策略，迫使 Max 玩家访问一个先前见过的节点，从而降低其到达 $\top$ 的概率。

引理13。 如果全称玩家在针对 Φ 的求值博弈中拥有获胜策略，那么最大化 玩家就能在以 G_Φ 为可达性目标的展开式随机轮次博弈中获胜，且获胜概率至多为 $p + \frac{1}{4}q$。

证明。 在这种情况下，Min 玩家采取的策略是模仿通用获胜策略。因此，在获得 $\wedge$-节点的控制权后，Min 玩家可以转移到子句 C_j ，该子句会被玩家选择所诱导的赋值否定。假设玩家采取理性行动，那么在访问子句 C_j之前，Max 玩家以概率 p获胜，并以概率 q到达 C_j 并获得控制权。由于 C_j 被否定，且根据 G_Φ的构造，只有指向此前访问过且由 Min 玩家控制的文字节点 ℓ 的边。假设 Min 玩家只是重复之前的行动。Max 玩家战胜这一策略的唯一机会，是最终获得此前未访问过的文字节点 y_i 或 $\neg y_i$ 的控制权，并从那里前往目标节点 $\top$。为此，他们必须先经过文字节点 y_i''和 y_i' 或 $\neg y_i''$和 $\neg y_i'$，并获得这两个节点的控制权；这种情况发生的概率为$1\ 4$。总之，Max 玩家要么在获得子句节点 C_j 的控制权之前以概率 p获胜，要么以概率q获得子句节点 C_j 的控制权，再以至多$1\ 4$的概率到达此前未访问过的文字节点 y_i 或 $\neg y_i$ ，并从那里获胜。因此，Max 玩家获胜的概率至多为 $p + \frac{1}{4}q$。□

定理 14. 判断玩家 Max 能否在展开的随机回合博弈中，以至少给定阈值 θ 的概率赢得可达性、奇偶性或能量目标，属于 **PSPACE**-困难问题。

证明。 给定一个量化布尔公式 Φ，我们构造博弈图 G_Φ ，并计算上述定义的概率 p 和 q 。显然，这可以在多项式时间内完成。令 $\theta = p + \frac{1}{2}q$。

由引理 13 和引理 12 可知，玩家 Max 在博弈图 G_Φ 上进行展开的随机回合博弈，并以至少 θ 的概率赢得可达性目标，当且仅当量化布尔公式 Φ 可满足。由此可知，判断展开的随机回合博弈中玩家**PSPACE**-困难性：判断玩家Max在具有可达性目标的展开随机回合博弈中的获胜概率是否至少达到给定阈值 θ。

这一结果可以轻松推广到具有奇偶性目标或能量目标的展开式随机回合博弈。具体而言，可以将具有可达性目标的展开式随机回合博弈转换为具有奇偶性目标或能量目标的博弈，同时保留Max的获胜概率。对于奇偶性目标，可以为每个目标节点添加一个自环，将其优先级设为偶数2，并将所有其他节点的优先级设为奇数1。对于能量目标，也可以为每个目标节点添加一个权重为1的自环，同时将所有其他节点的权重设为 -1；随后可将初始能量级别设为$(|V| + 1) \cdot (|V| + 2)/2$，根据引理 8，该值是闭合获胜环的路径长度上界。□

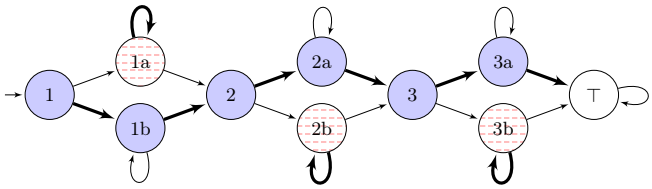


图3：一个具有可达性目标的随机竞技场博弈，其中玩家 Max 需要针对指数多个不同竞技场采用不同的策略。该图展示了 $\mathcal{G}_3$的一种赋值。双方玩家的最优策略均以粗边标出。

5 随机竞技场博弈

我们证明，对于具有任意一种目标（可达性、奇偶性或能量）的随机竞技场博弈，计算 Max 的精确获胜概率在计算上是困难的。事实上，该问题是 **#P**-完全的。随后，我们提出了能够高效估算该概率的近似算法，并通过实验证明这些算法能够快速收敛。

我们先来看一个例子，它揭示了为什么在随机竞技场博弈中计算玩家 Max 的获胜概率很困难。在随机竞技场博弈中，Max 的策略会为 G 上的每个竞技场提供一种策略。我们的目标是计算玩家 Max在随机生成的竞技场中拥有获胜策略的概率。请注意，两个竞技场 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{A}'$可能采用 Max 指定的相同策略。然而，要使获胜概率最大化，Max 可能需要指数多个不同的策略。这一点可由一个具有可达性目标的简单博弈类 $\mathcal{G}_n$ 来说明，该博弈类是如图 3所示的链，适用于 $\mathcal{G}_3$。在这个博弈中，Max 需要采用一种特定的路径策略，沿着属于自己的节点前进，才能赢得这一特定博弈。对顶端和底端节点进行赋值，至少有 2^n 种方式可以使路径唯一，因此需要一种唯一且不同的策略。这表明，计算最优策略可能代价高昂。

5.1 #P 完全性

其困难性源于对双终端可靠性问题某个变体的归约；已知该问题是 #P 完全的 [33]。给定一个有向图 $G = (V, E)$，其指定终端为 s、$t \in V$，双终端可靠性问题要求计算 s 能够到达 t的概率，并假设每条边 $(u, v) \in E$ 都以概率 p独立存在。即使对于无向图或最大度为三的无环源汇平面图，该问题仍然是 #P 完全的。我们考虑一种调整后的变体，该变体同样是 #P 完全的：起始节点 s 有一条入边，该边以概率 p存在；因此，从 s 到 t 存在路径的概率为 $p \cdot \alpha$，其中 α 表示在该入边存在的条件下，从 s 到 t 的可达概率。为证明 #P 困难性，

对于随机竞技场博弈，我们给出从这一调整后的问题到具有可达性目标的随机竞技场博弈的对数空间归约，并将这一论证扩展到奇偶性目标和能量目标。该归约的直观思路是：我们在一个图上构造随机竞技场博弈，使每个节点的所有权模拟 G中对应边的存在或缺失。

对于属于 $\#\mathbf{P}$，可以通过枚举所有可能的所有权分配，逐一检查 Max 是否有获胜策略，并统计 $\#\mathbf{P}$中获胜的所有权分配所占的比例，从而计算 Max 在随机竞技场博弈中获胜的概率。可达性目标与奇偶性目标或能量目标的关键区别在于：由固定所有权分配诱导的可达性博弈可以在多项式时间内求解，而对于奇偶性博弈或能量博弈，目前尚无已知的多项式时间算法。为了得到 $\#\mathbf{P}$ 上界，我们依赖经典结果：求解奇偶性博弈或能量博弈属于 $\mathbf{UP} \cap \text{co-}\mathbf{UP}$ [23,10]，这使我们能够通过非确定性猜测每个博弈唯一的短证书。请注意，如果判定奇偶性博弈或能量博弈的胜者这一子问题仅属于 $\mathbf{NP}$，这种方法就会失效：一个肯定实例可能存在多个短证书，因此对证书计数就无法正确统计获胜的所有权分配。

定理 15. 在具有可达性、奇偶性或能量目标的随机竞技场博弈中，计算Max的获胜概率是$\#\mathbf{P}$-完全的。

5.2 FPRAAS

尽管在随机竞技场博弈中精确计算获胜概率是 #P-完全的，但这并不排除高效近似该概率的可能性。不过，已有研究表明，在给定的 $\varepsilon > 0$ 加性误差范围内近似双终端可靠性问题是 #P-困难的，其中误差以二进制记法表示为有理数；因此，近似我们博弈的价值也同样是 #P-困难的。这仍然没有排除以高概率近似该价值的可能性。事实上，我们将借助蒙特卡罗方法（参见例如 [35]）随机地从给定分布中抽取双人博弈，并检查玩家 Max 在这些博弈中获胜的频率，从而证明这种方案确实存在。当这样做“足够长时间”后，在随机选取的实例中获胜的频率便能很好地近似实际获胜概率，但这种近似成立的概率小于 1。为了正式定义“足够长时间”，我们将使用 Hoeffding 不等式的一个特殊情形，该情形适用于所有随机变量均同分布且取值只能为 0 或 1 的情况。

定理 16（Hoeffding 不等式 [22]）。设 $X_1, \ldots, X_n$ 是相互独立且同分布的随机变量，并且 $X_i \in \{0,1\}$ 几乎必然成立。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，概率 $\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\,e^{-2\varepsilon^2 n}$.

定义 17（全多项式随机加性近似方案（FPRAAS））。令 $\mathcal{V}$ 为一个将问题实例 x 映射到

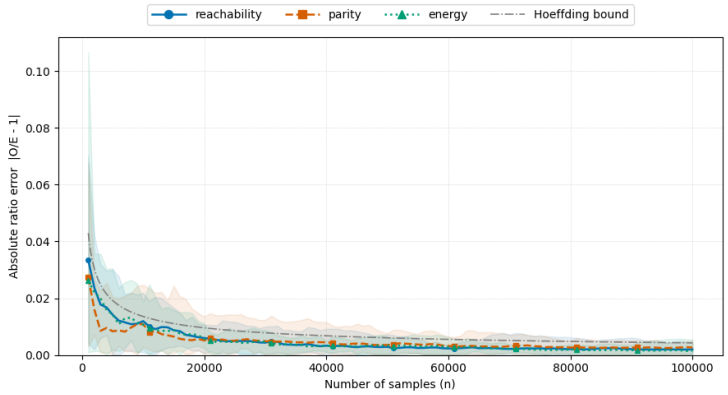


图4：采用可达性、奇偶性和能量目标的随机竞技场博弈中，FPRAAS 的误差收敛情况。每条线表示 10 个随机博弈图上的平均绝对比率误差，阴影区域表示方差。

非负实数值 $\mathcal{V}(x)$。随机化算法 A 是针对 $\mathcal{V}$ 的加性(ε, δ)-近似方案，如果对于每个实例 x 以及任意 $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$，输出$\hat{\mathcal{V}} = A(x, \varepsilon, \delta)$ 满足 $\Pr\left[|\hat{\mathcal{V}} - \mathcal{V}(x)| \leq \varepsilon\right] \geq 1 - \delta$.

算法 A 称为完全多项式随机加法近似方案（FPRAAS），如果对于任意输入(x, ε, δ)，A 是一个加法(ε, δ)近似方案，且其运行时间关于 $|x|$、$\frac{1}{\varepsilon}$ 和$\log \frac{1}{\delta}$为多项式。

根据 Hoeffding 不等式（参见定理 16），取 $n \geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \ln \frac{2}{\delta}$ 可确保 A 确实是一个加法 (ε, δ)近似方案，且运行时间关于 $1/\varepsilon$ 和 $\ln(1/\delta)$为多项式。

现在，要得到 FPRAAS，博弈 G的每个实例都必须能在多项式时间内求解。可达性博弈可以在线性时间内求解。输入权重采用一元表示时，能量博弈可以在多项式时间内求解。最后，当优先级数量为 $\mathcal{O}(\log |G|)$ [27]时，奇偶博弈可以在多项式时间内求解。

定理 18. 具有可达性目标、带有 $\mathcal{O}(\log |G|)$ 个优先级的奇偶性目标，或权重以一元表示给出的能量目标的随机竞技场博弈，均存在 *FPRAAS*。

实现与实验。我们为具有可达性、奇偶性和能量目标的随机竞技场博弈实现了 FPRAAS [7]。配套制品包含复现本文结果所需的完整源代码、实验脚本和数据集。该实现基于两个外部工具：ggg [3] 用于可达性和奇偶博弈，其求解器基于 [11,8]，以及 egsolver [36] 用于能量博弈，其求解器基于 [11]。所有实验均在一台运行 macOS 的机器上完成，该机器配备 Apple M3 8 核中央处理器和 16 GB 内存。对于每个目标，我们生成了 10 个随机博弈图，其

节点数为 20，最大出度为 20；奇偶目标最多使用 6 个优先级，能量目标的初始信用值为 0，权重取值范围为 $\{-10,\dots,10\}$。我们通过穷举所有Max 的 2^{20} 所有权分配，计算出精确的获胜概率，并将其与 100,000 个随机样本得到的近似概率进行比较。平均绝对比率误差 $|O/E-1|$是在全部 10 个图上计算得出的。图4 展示了误差（纵轴）随累积样本数（横轴）的变化，其中蓝色实线、橙色虚线和绿色点线分别表示可达性、奇偶性和能量。实测误差的收敛速度远快于霍夫丁界（$\varepsilon=0.005$，$\delta=0.05$，灰色点划线），并且随着样本数增加，方差逐渐减小，阴影区域也相应变窄。精确计算可达性和奇偶性需耗时一小时以上，计算能量则需耗时 24 小时以上；相比之下，我们的 FPRAAS 对可达性和奇偶性约 6 分钟即可达到相当精度，对能量约需 2 小时，证明 FPRAAS 既高效又有效。

6 讨论

我们研究了双人无限时长博弈的计算复杂性，其中节点控制权通过随机方式分配——要么在首次访问时动态分配，要么在对局开始前静态分配。这些设定不同于经典随机轮次博弈，在后者中，每次访问节点时都可能重新分配控制权。我们的结果勾勒出不同变体和目标下清晰的复杂性图景。尽管大多数定性问题都是**NL**完全的，但定量问题的复杂性更高：展开式随机轮次博弈为**PSPACE**完全，随机竞技场博弈为**#P**完全。为补充这些困难性结果，我们针对后一种情形开发了高效的近似方案，并证明了其实际有效性。

我们还探讨了能否将随机博弈高效归约为随机回合博弈；尽管我们的发现提供了部分见解，但这种归约是否存在仍是一个开放问题。未来一个有前景的研究方向是考察随机回合博弈与展开式随机轮次博弈之间的中间机制，在这种机制中，所有权仅在第 k 次访问时固定。研究 k 的增加如何影响获胜概率，或许能让我们更细致地理解控制权的随机性与策略结果之间的关系。

除了理论研究价值之外，随机竞技场博弈在游戏设计中也具有潜在应用，尤其有助于确保竞争中的公平性。我们计算精确获胜概率的方法可用于评估两个竞争性玩家之间的特定游戏设计是否公平——也就是说，双方玩家的获胜机会是否大致相等。此外，通过调整节点控制概率或固定选定节点的控制权，可以系统地平衡策略优势，并提升游戏机制的公平性。

致谢。 本研究由英国工程与自然科学研究委员会通过资助项目 EP/X03688X/1 和 EP/X042596/1 提供支持。

参考文献

1. de Alfaro, L., Henzinger, T.A., Majumdar, R.：从验证到控制：面向 ω-正则目标的动态程序。载于：第 16 届年度 IEEE计算机科学逻辑研讨会，美国马萨诸塞州波士顿，2001 年 6 月 16—19 日，论文集。第 279—290 页。IEEE计算机学会（2001）。https://doi.org/10.1109/LICS.2001.932504 2. Alur, R., Henzinger, T.A., Kupferman, O.：交替时序逻辑。ACM学报（JACM）49(5)，672—713（2002） 3. Austin, P., Dell' Erba, D., Totzke, P.：游戏图训练场。https://github.com/gamegraphgym/ggg，提交：5d31ac68e36cd781bfa00b9672ea0861872c45cf，访问日期：2025年-10-02 4. Avni, G., Ghorpade, P., Guha, S.：兵卒博弈。逻辑方法与计算机科学 21 2025 5 2 2025 10 46298 21 2 3 ( ) ( )。https://doi.org/ . /LMCS- (:) . Avni, G., Henzinger, T.A., Chonev, V.：无限时长竞价博弈。ACM学报（JACM）66(4)，1—29（2019） 6. Avni, G., Henzinger, T.A., Ibsen-Jensen, R.：无限时长穷人竞价博弈。载于：网络与互联网经济学——第 14 届国际会议，WINE 2018，英国牛津，2018 年 12 月 15—17 日，论文集。第 21—36 页（2018） 7. Bahmani, S., Ibsen-Jensen, R., Paul, S., Schewe, S., Slivovsky, F., Tang, Q., Wojtczak, D., Zhu, S.：随机竞技场博弈实验（2026年 1 月）。https: //doi.org/10 18166538 8 5281. /zenodo. . Benerecetti, M., Dell'Erba, D., Mogavero, F.：通过优先级提升求解奇偶博弈。形式化方法与系统设计 52(2)，193—226（2018）。https://doi.org/10. 1007 1 9 10703 018 0315 /S - - - . Bloem, R., Chatterjee, K., Jobstmann, B.：图博弈与反应式综合，第 921 962 2018 10 1007 978 3 319 10575 8_27 —页。10 施普林格（ ）。https://doi.org/ . / - - - - . Bouyer, P., Fahrenberg, U., Larsen, K.G., Markey, N., Srba, J.：具有能量约束的加权定时自动机中的无限运行。载于：Cassez, F., Jard, C.（编）：定时系统的形式化建模与分析，第 6 届国际会议，FORMATS 2008，法国圣马洛，2008 年 9 月 15—17 日，论文集。《计算机科学讲义》，第 5215 卷，第 33—47 页。施普林格（2008）。https://doi.org/ 10 1007 978 3 540 85778 5_4 . / - - - - . Brim, L., Chaloupka, J., Doyen, L., Gentilini, R., Raskin, J.：均值收益博弈的更快速算法。形式化方法与系统设计 38(2)，97—118（2011）。https: //doi.org/10.1007/S10703-010-0105-X 12. Celis, L.E., Devanur, N.R., Peres, Y.：通过随机轮流博弈研究议价网络中的局部动态。载于：第 6 届国际网络与互联网经济学会议论文集。第 133—144 页。WINE'10，施普林格出版社，柏林、海德堡（2010） 13. Chandra, A.K., Kozen, D.C., Stockmeyer, L.J.：交替。ACM学报 28(1)，114 322243 14 133 1981 10 1145 322234 —（1 月）。https://doi.org/ . / . . Chatterjee, K., Henzinger, T.A.：随机奇偶博弈到随机均值收益博弈的归约。《信息处理快报》106(1)，1—7（2008）。https://doi.org/10.1016/J. IPL.2007.08.035 15. Chatterjee, K., Jurdzinski, M., Henzinger, T.A.：定量随机奇偶博弈。载于：Munro, J.I.（编）第十五届年度 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，SODA 2004，美国路易斯安那州新奥尔良，2004 年 1 月 11—14 日。第 121—130 页。SIAM（2004），http://dl.acm.org/citation.cfm?id=982792.982808

16. Condon, A.：《随机博弈的复杂性》。《信息与计算》，第203–224页（1992年）17. Ehrenfeucht, A., Mycielski, J.：平均收益博弈的位置策略。《国际博弈论杂志》8，109–113（1979年）。https://doi.org/10.1007/BF01768705 18. Emerson, E.A., Jutla, C.S.：树自动机、μ演算与确定性（扩展摘要）。载于：FOCS。第368–377页。IEEE计算机学会（1991年），http://dblp.uni-trier.de/db/conf/focs/focs91 91 19 .html# EmersonJ . Fijalkow, N., Aiswarya, C., Avni, G., Bertrand, N., Bouyer, P., Brenguier, R., Carayol, A., Casares, A., Fearnley, J., Gastin, P., Gimbert, H., Henzinger, T.A., Horn, F., Ibsen-Jensen, R., Markey, N., Monmege, B., Novotný, P., Ohlmann, P., Randour, M., Sankur, O., Schmitz, S., Serre, O., Skomra, M., Sznajder, N., Vandenhove, P.：《图上的博弈：从逻辑与自动机到算法》（2025年）。https://doi.org/10 10546 20 48550 2305 . /arXiv. . . Goldschlager, L.M.：单调电路求值问题和平面电路求值问题是P的对数空间完全问题。《SIGACT新闻》9(2)，25–29（1977年夏）21. Gurvich, V., Karzanov, A., Khachivan, L.：循环博弈及一种求解有向图中极小极大环路均值的算法。《苏联计算数学与数学物理》28(5)，85–91（1988年）。https://doi.org/https://doi. org/10 2 22 1016 0041 5553 88 90012 . / - ( ) - . Hoeffding, W.：有界随机变量之和的概率不等式。《美国统计学会杂志》58(301)，13–30（1963年）23. Jurdzinski, M.：判定奇偶博弈的胜者属于UP ∩ co-UP。《信息处理快报》68 1 24 3 119 124 1998 10 1016 0020 0190 98 00150 ( ), – ( ). https://doi.org/ . / S - ( ) - . Kupferman, O., Vardi, M.Y.：重新探讨模块检查。载于：计算机辅助验证国际会议。第36–47页。施普林格（1997年）25. Lazarus, A.J., Loeb, D.E., Propp, J.G., Stromquist, W.R., Ullman, D.H.：拍卖玩法下的组合博弈。《博弈与经济行为》27(2)，229–264（1999年）26. Lazarus, A.J., Loeb, D.E., Propp, J.G., Ullman, D.：里奇曼博弈。《无胜算的博弈》29，439–449（1996年）27. Lehtinen, K., Parys, P., Schewe, S., Wojtczak, D.：一种在准多项式时间内求解奇偶博弈的递归方法。《计算机科学中的逻辑方法》18（2022年）28. Mostowski, A.：《带禁位的博弈》。预印本——格但斯克大学数学研究所，格但斯克大学（1991年），https://books.google.co.uk/books?id=clvwtgAACAAJ 29. Papadimitriou, C.H.：《计算复杂性》。艾迪生-韦斯利，马萨诸塞州雷丁（1994年）30. Peres, Y., Schramm, O., Sheffield, S., Wilson, D.B.：拔河博弈与无穷拉普拉斯算子。《美国数学会杂志》22(1)，167–210（2009年）。https://doi.org/10 1 31 1090 0894 0347 08 00606 . /S - - - - . Peres, Y., Schramm, O., Sheffield, S., Wilson, D.B.：随机轮流六角棋及其他选择博弈。《美国数学月刊》114，373–387（2005年），https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15583858 32. Pnueli, A., Rosner, R.：关于反应式模块的综合。载于：编程语言原理研讨会（POPL 1989）。第179–190页。计算机协会（1989年 75293 33 10 1145 75277）。https://doi.org/ . / . . Provan, J.S.：平面图和无环图中可靠性计算的复杂性。《SIAM计算杂志》15(3)，694–702（1986年）。https://doi.org/10.1137/0215050

34. Provan, J.S., Ball, M.O.：计数割以及计算图连通概率的复杂性。《SIAM计算杂志》**12**(4)，777–788（1983年）35. Rubinstein, R.Y., Kroese, D.P.：《模拟与蒙特卡罗方法》。Wiley概率与统计丛书，Wiley，第2版（2007年）。
https://doi.org/10.1002/978047023038136. Totzke, P.：Egsolver。
https://github.com/pazz/egsolver，提交版本：4 10 37 8 500 892 10073 8 3 52 6700 2 2025 10 f c f c a e b cf ddbf deeda，访问日期：--。Zwick, U., Paterson, M.：图上平均收益博弈的复杂性。《理论计算机科学》**158**(1&2)，343–359（1996年）。
https://doi.org/10.1016/0304-3975(95)00188-3

第 3 节缺失的证明3

给定一个以可达性目标进行的随机回合博弈，运行于 $G = (V,\ E)$ 上，我们可以将其约化为运行于 $G' = (V',\ E')$ 上的随机可达性博弈。我们有 $\top \in V'$，并且对于 G 中的每个节点 $v \neq \top$，在 G' 中创建三个副本，使得 v 中的 G' 成为随机节点，而 (v^+) 和 (v^-) 分别由 Max 和 Min 控制。边集 E' 定义如下：

$-(v,\ v^+)$、$(v,\ v^-) \in E'$，对于所有随机节点 $v \in V'$，每条转移的概率分别为 $\mathsf{t}(v)$ 和 $1 - \mathsf{t}(v)$；$-(v^+,\ u)$、$(v^-,\ u) \in E'$，对于所有由 Max 控制的节点 v^+ 和由 Min 控制的节点 v^-，使得 $(v,\ u) \in E$。

考虑图 1(a) 中的博弈图，我们得到由它规约而来的随机博弈，如图 1(b) 上方所示。

定理2。 判定Max 是否几乎必然赢得一个具有可达性目标的随机回合博弈，是**NL**-完全的。

证明。 我们首先证明，判定 Max 是否几乎必然获胜属于**NL**。给定一个在博弈图 G 上进行的随机回合博弈，令 t 表示抛硬币函数。注意，当且仅当一个节点无法到达目标状态时，它对 Max 来说几乎必然（且必然）失败。对于“仅当”方向，结论显然成立：如果一个节点无法到达目标状态，那么 Max 必然失败，因此也几乎必然失败。反过来，假设一个节点 v 可以到达目标状态。令 $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$ 为从 $v = v_0$ 到目标状态 v_n 的最短路径，并让 Max 按照这条路径行动。那么，从 v 到达目标状态的概率至少为 $\prod_{i=0}^{n-1} \mathsf{t}(v_i) > 0$，这意味着 v 对 Max 来说并非几乎必然失败。

接下来，我们证明，节点 v 对 Max 来说几乎必胜，当且仅当它无法到达必败节点。显然，到达必败节点会使总体获胜概率低于 1。反过来，假设 v 无法到达必败节点；等价地说，从 v 可达的每个状态都有一条通往目标的路径。对于每个这样的节点，我们固定 Max 的策略，使其沿着到目标的最短路径前进。由这些固定策略（对于 Max）和 Min 的任意策略所诱导的随机博弈，随后会变成一条马尔可夫链，其中目标节点是唯一的底部强连通分量。因此，从 v 出发，Max 在诱导的随机博弈和原始随机回合博弈中都几乎必胜。

为了判定补问题——即 Max 是否并非几乎必胜——我们有一个 **NL** 算法，用于搜索一条从初始节点到无法到达目标的节点 v 的路径。由于 st-连通性和 st-非连通性问题都是 **NL**-完全的，因此这可以在 **NL** 中完成。由于**NL** = **co-NL**，Max 是否几乎必胜的问题属于**NL**。

对于**NL**-困难性，我们从 st-连通性问题进行归约。该问题询问在有向图 G 中，t 是否可以从 s 到达。给定一个实例 $\langle G, s, t\rangle$，我们通过将 s 设为初始节点、t 设为目标节点，在图 G' 上构造一个随机回合博弈。此外，对于 G 中的每个其他节点 v，我们在 G' 中添加一条边 (v, s)。当且仅当在 G 中 t 可以从 s 到达时，Max 才能在 G' 上以概率 1 获胜。

如果 t 可以从 s 到达，那么 G' 中的每个节点都可以到达 s，并且没有节点会使 Max 必然落败。因此，Max 从 s 出发时以概率 1 获胜。否则，如果在 G 中 t 无法从 s 到达，那么在 G' 中它仍然无法到达，因此 s 是一个使 Max 必然落败的节点，其获胜概率为 0。

因此，判断 Max 是否在随机回合博弈中几乎必然获胜是**NL**-完全的。□

定理 3. 判断Max 是否必然赢得一个具有可达性、奇偶性或能量目标的随机回合博弈是**NL**-完全的。

证明。 我们证明，Max 不会必然获胜，当且仅当博弈图中存在一条不包含目标状态的“坏”套索路径。可以在**NL**中猜测这样一条套索路径。为了证明**NL**-困难性，我们从 st 非连通问题归约而来：该问题询问在有向图 G中， t 是否不可 从 s 到达；此问题是**NL**-完全的。我们构造一个包含 n 层节点的博弈图 G' ，其中每个节点（v， i）表示节点 v 在 G中恰好经过 i 步后从 s 可达。我们还添加一个新的目标节点 $\top$ 和一个汇节点 $\bot$；汇节点仅可从所有 $0 \leq i \leq n$对应的（t， i）到达。 G' 中的套索路径应包含汇节点 $\bot$ ，因为 G' 中唯一的环是 $\bot$ 上的自环。现在很容易看出，在 G中， t 无法从 s 到达，当且仅当 Max 赢得 G'上的随机回合博弈，也就是说， G'中不存在套索路径。□

定理 6. 判定**NL**完全问题：在可达性、奇偶性或能量目标下，Max 是否几乎必胜或必胜于展开式随机轮次博弈或随机竞技场博弈。

证明。 我们首先注意到，在展开式随机轮次博弈和随机竞技场博弈中必胜，与在随机轮流博弈中必胜是等价的。由于存在一条“坏的”套索路径，就能证明Max无法在这三种博弈中的任何一种中必胜。由定理 3 可知，判定**NL**完全问题：Max 是否必胜于具有可达性、奇偶性或能量目标的展开式随机轮次博弈或随机竞技场博弈。

接下来我们观察到，对于展开式随机回合博弈和随机竞技场博弈，几乎必胜与必胜等价。显然，如果 Max 必胜一场博弈，那么他们也几乎必胜。然而，一般来说，Max 几乎必胜并不意味着他们必胜，正如我们在随机回合博弈中所见。对于展开式随机回合博弈和随机竞技场博弈，我们给出一个逆否论证：如果 Max 没有必胜，那么 Max 也不会几乎必胜。假设 Max 没有必胜，那么博弈图中就存在一条“坏的”套索路径。对于展开式随机回合博弈，以正概率生成一个博弈状态，使得“坏的”套索路径上的每个节点都分配给 Min；对于随机竞技场博弈，如果玩家 Min 沿着这条套索路径行动，由于该博弈状态以正概率可达，Min 就有正概率获胜。在这两种情况下，Max 的获胜概率都严格小于 1。□

B 第5节证明补充

B.1 #P 困难性

我们通过从双端可靠性问题归约，证明该问题是 $\#\mathbf{P}$-困难的。给定一个有限有向图 $G=(V,E)$，其中 $E\subseteq V\times V$，双端可靠性问题要求计算指定终端 s能够到达目标终端 t的概率，假设每条边 $e\in E$ 独立地以概率 p存在。已知求解双端可靠性问题是$\#\mathbf{P}$-完全的，即使对于无向图以及度数至多为三的无环有向源汇平面图也是如此；也就是说，一个节点至多有三条出边 [33]。

我们考虑双端可靠性问题的一种变体，称为调整后的双端可靠性问题。在该问题中，我们假设起始节点s 有一条入边，且这条入边存在的概率为 p。因此，在此变体中，从 s到 t 存在路径的概率为 $p\times\alpha$，其中 α 是在考虑到通向 s 的入边存在的情况下，从 s 到达 t 的概率。因此，以下结果成立：

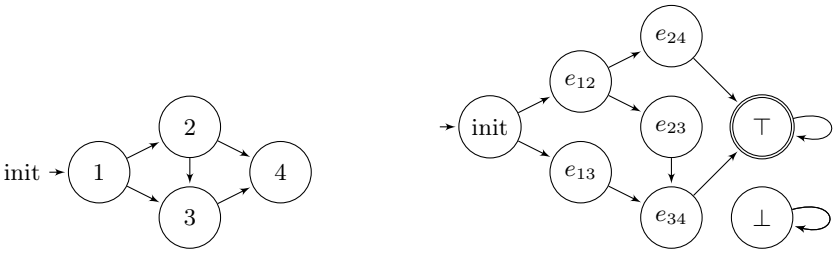
推论 19. 调整后的双端可靠性问题仍然是$\#\mathbf{P}$-完全的。

为了证明具有任意目标的随机竞技场博弈是**#P**困难的，我们首先证明，从调整后的双端可靠性问题到具有可达性目标的随机竞技场博弈存在对数空间归约。随后，我们证明这一困难性结果可以轻松扩展到奇偶性目标和能量目标。

博弈图构造。给定一个调整后的双终端可靠性问题实例 $\langle G,\ s,\ t,\ p\rangle$，我们按如下方式构造一个有向博弈图 $G'=(V',\ E')$：对于每条边 $(u,\ v)\in E$，若 $(u,\ v)$ 不是 s 的入边，则引入一个节点 e_{uv}。此外，我们再引入三个新节点 $init$、$\top$ 和 $\bot$。因此，$V'=\{e_{uv}\mid(u,\ v)\in E\}\cup\{init,\bot,\top\}$ 和 $|V'|=|E|+2$。边按如下方式添加：

– 对于每个满足 $u=s$ 的节点 $e_{uv}\in V'$，添加边 $(init,\ e_{uv})$。– 对于每对节点 $e_{uv},\ e_{vw}\in V'$，添加边 $(e_{uv},\ e_{vw})$。– 对于每个满足 $v=t$ 的节点 $e_{uv}\in V'$，添加边 $(e_{uv},\ \top)$。– 对于每个满足 $v'\neq\top$ 的节点 $v'\in V'$，添加边 $(v',\ \bot)$。– 对于 $\bot$，添加自环，即边 $(\bot,\ \bot)$ 和 $(\top,\ \top)$。

在构造的博弈图 $G'=(V',\ E')$ 中，G 中的每条边 $(u,\ v)\in E$（除通向 s 的入边外）都由一个中间节点 $e_{uv}\in V'$ 表示，其所有权由随机方式决定：它以概率 p 归 Max 所有（表示保留该边），以概率 $1-p$ 归 Min 所有（表示移除该边）。也就是说，对于所有 $v\in V'$，我们都有抛硬币函数 $\mathsf{t}(v)=p$。通向 s 的入边由节点 $init$ 表示，该节点的所有权也由随机方式决定：如果 $init$ 由 Max 控制，则该边存在，博弈可以继续；否则，博弈转至 $\bot$。



(a) 针对一个实例的双端可靠性问题的博弈图 G 调整后的，起始节点为 1，目标节点为 4。

(b) 根据左侧的 G 构造的随机竞技场博弈的博弈图 G' 。

图 5：#**P**-困难性归约的博弈图构造。在右侧的博弈图 G' 中，$init$是起始节点，$\top$是目标节点，除 $\top$ 外的所有节点都通过一条有向边连接到 $\bot$；为简洁起见，图中省略了这些边。

图 $\#\mathbf{P}$-完全性归约的一个示例见图 5：给定一个博弈图 G，它表示图 *5a* 中调整后的双端可靠性问题的一个实例，构造出图 5a中的随机竞技场博弈博弈图 G'，如图 5b 所示。

直观地说，G 中是否存在一条边 $(u,\ v) \in E$（分别为 $init$），反映为 G' 中对应节点 e_{uv}（分别为 $init$）的所有权：如果 G中存在该边，则玩家 Max 拥有 G' 中的对应节点，并可以选择移动到拒绝汇点 $\bot$ 以外的后继状态，从而继续进行可达性博弈；否则，玩家 Min 拥有该节点，并转移到汇点 $\bot$ 以赢得可达性博弈。

引理 20。 设 $\langle G, s, t, p\rangle$ 是一个调整后的 双端可靠性问题实例。设 $\langle G', \mathsf{t}\rangle$ 是一个以可达性为目标的随机竞技场博弈实例，其中 $G' = (V', E')$ 是如上构造的博弈图，并且对所有 $v \in V'$，$\mathsf{t}(v) = p$ 。*Max* 在 G' 上赢得该博弈的概率，等于调整后的 双端可靠性问题$\langle G, s, t, p\rangle$的概率。

证明。给定一个调整后的 双端可靠性问题$\langle G, s, t, p\rangle$的实例，我们按上述方法构造一个以可达性为目标的随机竞技场博弈 $\langle G', \mathsf{t}\rangle$。

给定一个函数 $\chi : E \to \{0, 1\}$，其中 $\chi(e) = 1$ 表示 $e \in E$ 存在于 G 中，而 $\chi(e) = 0$ 则表示否则，据此可诱导出 G 的一个子图 $G(\chi)$。这样的函数总共有 $2^{|E|}$ 个，每个对应的子图生成的概率相同。

接下来，我们可以定义一个所有权分配函数 own$_\chi$：$V' \setminus \{\bot, \top\} \to$ {Max,Min}，作用于 G'，满足：若 $\chi(init) = 1$，则 own$_\chi(init)$ = Max；若对于 (u, v)，$(u, v) = 1$，则 own$_\chi$(e_{uv}) = Max；否则 own$_\chi(v)$ = Min。

总共有 $2^{|E|}$ 种这样的赋值函数，且每种赋值都以相同的概率生成。同样，给定一个所有权分配函数

own$_\chi$ on G'，我们可以定义一个对应的函数来表示边的存在情况。

容易看出，当且仅当存在一条路径 v_0，v_1，……，v_n，使得在 $G(\chi)$ 中，s 可以到达 t，当且仅当在所有权分配函数 own$_\chi$ 下，Max 在 G' 上的博弈中获胜：若路径 v_0，v_1，……，v_n 中的节点 $v_0 = s$、$v_n = t$，以及每条边 (v_i, v_{i+1})（$i \in [0, n-1]$）在 χ 下均存在，则该路径对应于 G' 中的路径 $init$，e_{sv_1}，……，$e_{v_{n-1}t}$，$\top$，且根据 own$_\chi$，这些节点均归 Max 所有。

因此，Max 在 G' 上的随机竞技场博弈中获胜的概率，恰好等于 G 上调整后的双端可靠性问题的概率。

□

由于调整后的双端可靠性问题是#**P**-完备的（根据推论 19），且根据引理 20，我们已证明从调整后的双端可靠性问题到具有可达性目标的随机竞技场博弈存在对数空间归约，因此我们确立了具有可达性目标的随机竞技场博弈的 #**P**-困难性。

与定理 14类似，这一困难性结果可以轻松推广到具有奇偶性目标或能量目标的随机竞技场博弈。具体而言，可以将具有可达性目标的随机竞技场博弈转换为具有奇偶性目标或能量目标的博弈，同时保持 Max的获胜概率不变。对于奇偶性目标，可以为每个目标状态添加一个自环，将其优先级设为偶数 2，并将所有其他状态的优先级设为奇数 1。对于能量目标，同样可以为每个目标状态添加权重为 1的自环，同时为所有其他状态赋予权重 -1；随后可以将初始能量级别设为 $|V| + 1$，即闭合一个获胜环所需路径长度的上界。

不难看出，在 G 上，Max 赢得可达性博弈，当且仅当在具有相同随机所有权分配的新博弈图 G' 上，Max 赢得奇偶博弈（分别为能量博弈）。我们有：

定理 21。在具有可达性、奇偶性或能量目标的随机竞技场博弈中，计算Max 的获胜概率是#**P**-困难的。

B.2 属于 #P

现在我们证明其属于 #**P**。

定理 22。在具有可达性、奇偶性或能量目标的随机竞技场博弈中，计算Max 的获胜概率属于#**P**。

证明。设 $\langle G, \mathsf{t}\rangle$ 是一个随机竞技场博弈实例，其中 $G = (V, E)$ 是博弈图，$\mathsf{t} : V \to [0, 1]$ 是抛硬币函数。对于每个满足 $\mathsf{t}(v) \in (0, 1)$ 的 $v \in V$，将 $\mathsf{t}(v)$ 表示为既约分数 a_v/b_v，其中 a_v 和 b_v 是以二进制编码的互质正整数。我们用一个由 $|V|$ 个部分组成的字符串 str 对每种可能的所有权分配进行编码，其中每个部分 i $(1 \le i \le |V|)$ 对应一个节点 $v_i \in V$，而 str 的部分 i 按如下方式确定所有权：

– 如果 str 的第 i 个部分编码了价值 $< a_{v_i}$，则将 v_i 分配给 Max；– 如果 str 的第 i 个部分编码了价值 $\geq a_{v_i}$，并且 $< b_{v_i}$，则将其分配给 Min；– 否则，该编码不合法，应予忽略。

这种编码的长度以多项式为界，因为每个字符串的长度都不超过 $\max_{v \in V} \lceil \log(b_v) \rceil \cdot |V|$。

每个赋值 str 都会导出一个具有可达性、奇偶性或能量目标的标准双人博弈。对于可达性目标，判定 Max 在导出的博弈中是否具有获胜策略属于 **P**，因此，计算 Max 获胜的所有权分配数量属于 **#P**。

对于奇偶性和能量目标，每个导出的博弈都有一个唯一的简短（多项式大小）证书，以证明 Max 获胜，因为判定奇偶性或能量博弈的胜者属于 **UP** [23,10]。利用 **#P** 机器的非确定性能力，我们可以猜测并验证每种所有权分配对应的这个唯一证书。因此，接受计算分支的数量等于 Max 获胜的所有权分配数量。

因此，在具有可达性、奇偶性或能量目标的随机竞技场博弈中，计算 Max 具有获胜策略的所有权分配数量（也就是概率）属于 **#P**。□