arXiv:2601.07776v1 [math.GT] 12 Jan 2026

Cerf 理论中的墙穿越坐标

ROGER CASALS

Abstract. 我们将实 Morse 理论中的布鲁哈特数与辫簇中的簇变量联系起来。这为研究 Cerf 图提供了墙穿越坐标的实例。

1. Introduction

这篇短札旨在将实 Morse 理论中的布鲁哈特数与辫簇中的簇变量联系起来。具体而言，文中讨论了 [PT23]，在 [Bar94]，的基础上引入并加以完善的布鲁哈特数，以及 [CGG+25b]，在 [CG24、CW24、CZ22] 的基础上构造的簇结构。J. Cerf 在参数化 Morse 理论领域的开创性工作 [Cer70] 是本文的一个研究动机。

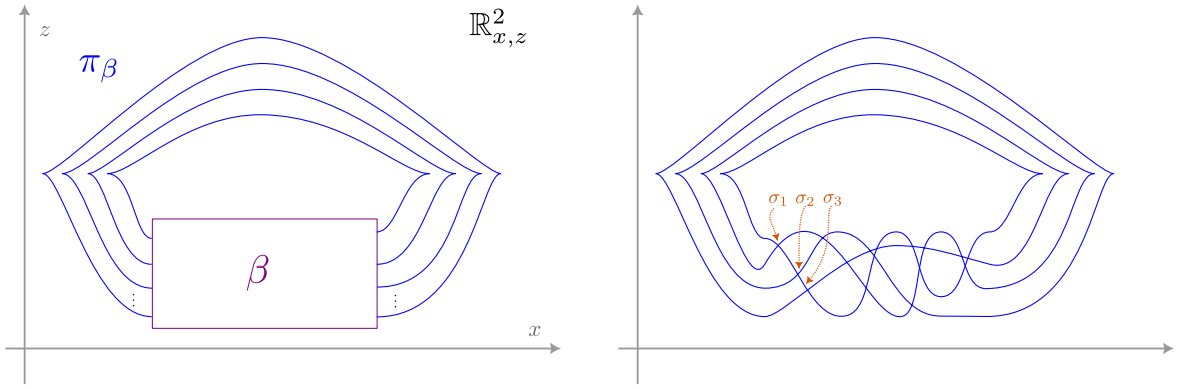

Figure 1. （左）正辫词 β 对应的 Cerf 图 π_β 的一般形式。辫子字的每个正交叉都对应临界点之间的一次值交换。（右）一个 $\beta = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$ 的例子。

1.1. 科学背景。 一个出发点是与正辫词β相关联的 Cerf 图 π_β，如图 1（左）所示。 z轴记录了一参数广义 Morse 函数族 f_x 的临界点取值：$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$， $x \in \mathbb{R}$；当 $|x|$ 足够大时， f_x 没有临界点，并假设所有 f_x 在无穷远处线性。这类 Cerf 图是整体研究 1 参数和 2 参数 Morse 理论的核心，参见例如 [Cer70，定理 ´eor`eme 2’] 及其证明。事实上， [Cer70，第二至第四章]中的半局部引理用于将具有相同边界条件、定义在 x 及每个 f_x上的任意 Cerf 图化为上述形式之一。在[Cer70，第六章], 的基本引理中，借助 GL_n的 Bruhat 分解描述了一个关键相对基本群的生成元，该分解由其 Weyl 群 S_n 编索引。例如，文中记作$\delta_{i,\ g}$ 的生成元由一个一参数莫尔斯函数族描述，该函数族实现了 Morse 指数为 $i+1$的点之间的值交换。在（带框架的）莫尔斯函数背景下对 Bruhat 分解的运用，由 S. Barannikov 在 [Bar94], 中作了进一步阐释；另可参见 [Lau15，LPNV13],中的重要结果，以及 P. Pushkar 和 M. Tyomkin 最近的工作 [PT23]。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：53D10。次要分类：57K43、13F60。[1]在 [Cer70], 中，对相应的（广义）莫尔斯函数空间的同伦型的研究聚焦于连通性，分为三个部分：局部、半局部和整体。另见大纲 [Cer71]。

独立地，簇变换为代数几何和辛几何中的墙穿越现象研究提供了一个框架，参见例如 [GHKK18，KS14，Nei14]。[2] 具体而言，簇代数的簇变量确定了各个室（即簇图表）的指数达布坐标，而它们的变异则与相关散射图中的墙相对应，参见 [GHKK18，第 1]节。簇代数早期重要的实例之一是布鲁哈特胞腔的坐标环及其变体，参见 [BFZ05], ，其中室拟设规定了如何用广义子式表示簇变量。Bruhat 分解无论是博雷尔形式还是幺幂形式，在此类簇代数的研究中都发挥着关键作用。[CGG+25b]中借助 [CW24，CZ22], 的编织演算构造的辫簇上的簇结构，也可以从 Bruhat 分解和广义子式的角度来理解，详见 [CGG+25a]。

简言之，对 [Cer70] 的研读，以及 Bruhat 分解在簇代数中的关键作用，使作者推测 J. Cerf 在 [Cer70] 中的结果预示着，在实参数莫尔斯理论的研究中存在墙与室结构。下面的比较引理旨在通过一个练习阐明这一见解。

1.2. **主要结果**。 本文将讨论以下引理，它比较了簇坐标（红色）与布鲁哈特数（蓝色）：

比较引理。 设 $\beta = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_l}$ 是一个正辫词，$(\pi_\beta, \{f_x\})$ 是其对应的 Cerf 图，$X(w_0\beta) \subset \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_l]$ 是其辫子簇。那么，簇变量 $A_k \in \mathbb{Z}[X(w_0\beta)]$ 等于

$$A_k(z_1, \ldots, z_k) = \mathrm{sgn}_k \cdot \prod_{j=1}^{i_k^*} \beta_j(f_{x_k}) \tag{1.1}$$

其中 $x_k \in \mathbb{R}$ 任意接近但大于 π_β 的第 k 个交叉的 x 坐标，$\beta_j(f_{x_k})$ 是 f_{x_k} 的第 j 个布鲁哈特数，并且 $\mathrm{sgn}_k := (-1)^{\lfloor i_k^*/2 \rfloor + i_k^*(n-1)}$，其中 $i_k^* := n - i_k$。

比较引理将在第 2.4 节证明。直观而言，它的含义如下。设$\beta = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_l}$是一个由 n 股组成、长度为 $l \in \mathbb{N}$ 的正辫词。文献中研究过与 β 相关的两类数据：

(1) 莫尔斯数据：Cerf 图 π_β，如图 1 所示。这是关于实莫尔斯函数单参数族的临界点的数据。相关内容在 [Cer70] 中得到了深入研究。

(2) 簇数据：在 $\mathbb{Z}[X(w_0\beta)]$, 中研究的簇代数 [CGG+25b]。簇代数与墙穿越之间的关系见 [GHKK18, KS14]。

对于莫尔斯数据，我们固定一个足够大的 Morse 指数 $\iota \in \mathbb{N}$，并假设在 Cerf 图的每个尖点处，上分支的 Morse 指数始终等于 $(\iota + 1)$。因此，所有尖点处下分支的 Morse 指数均为 ι。我们还假设所有手柄滑动都恰好发生在值交换（即交叉）或消亡（即右尖点）的左侧。这就是 A-标准形，见[HR15a], ，另见 [HR15b，第 5] 节。注意，任何带有手柄滑动标记的 Cerf 图都可以通过 Cerf 图连接到一个标准形的 Cerf 图：这可由经过整数化精化并在函数层面进行精化的变换 [Hen09，图 3.6-3.8] 得出。与第 k 个交叉相关的手柄滑动标记记作变量 z_k, $k \in [1, l]$。我们用 $(\pi_\beta, \{f_x\})$ 表示任何一对对象，其中一项是处于该标准形的莫尔斯函数单参数族 $\{f_x\}$，另一项是π_β 的 Cerf 图，$x \in \mathbb{R}$。

在图 1 的 (x, z)-坐标中，我们始终假设广义 Morse 函数的单参数族 $f_x : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义在某个 $\mathbb{R}^N$ 上，其中 $N \in \mathbb{N}$ 固定且足够大，并且在无穷远处线性。莫尔斯函数 f_x 的布鲁哈特数见 [PT23] 中的介绍，记作 $\beta_j(f_x)$，$j \in [1, n]$。

对于簇数据，辫子簇上的簇结构在 [CGG+25b], cf. also[CGGS24, CW24] 中进行了研究：辫簇是一类定义在 $\mathbb{Z}$ 上的光滑代数簇，其正则函数的 $\mathbb{Z}$-代数

[2]另见 SLMath 于 201 年 3 月举办的“簇代数与墙穿越”研讨会的录制讲座 6.

$\mathbb{Z}[X(w_0\beta)]$ 被证明是簇代数，见 [CGG+25b，第 1.1] 定理。根据定义， $X(w_0\beta)$ 是一个模空间，其参数化对象为线性旗标组，且其相对位置由 β 决定。存在一个定义嵌入 $X(w_0\beta) \subset \mathbb{Z}^l$，其中环境坐标$z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{Z}^l$ 可以与 β 的交叉 z_k 一一对应，而这些交叉与 σ_{i_k} 相关。我们用 $A_k, k \in [1, l]$ 表示由 βw_0 的右归纳编织给出的初始种子的簇变量，参见 [CGG+25b，第 5.3] 节。根据构造，簇变量 $A_k = A_k(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{Z}[X(w_0\beta)]$ 可以表示为前 k 个环境变量 $z_1, \ldots, z_k$ 上的一个正则函数。在墙穿越的语境下，与该初始簇种子对应的室由开集$\{A_1 \neq 0, \ldots, A_l \neq 0\} \subset X(w_0\beta)$给出。

简而言之，为了建立莫尔斯数据与簇数据之间的联系，由 $X(w_0\beta)$ 中一点参数化的旗标可以理解为函数 f_x 的次水平集的整系数同调群的一种滤过，这些函数生成了 Cerf 图 π_β。直观地说， $X(w_0\beta)$ 是一个有限维模型，它参数化了所有具有 Cerf 图 π_β 的莫尔斯函数单参数族空间的一部分；有关更多背景，请参见第 2.5 节。比较引理左侧的簇变量 A_k on $X(w_0\beta)$，从代数上度量了初始标准旗标与第 k 次交叉之后的旗标之间的横截性。与此相应，并作适当描述后， f_x 的某些布鲁哈特数的乘积可以理解为衡量 f_x 相对于 $f_{-\infty}$ 的相对位置：这种相对位置可以用从 $f_{-\infty}$ 到给定 f_x 所需的手柄滑动和值交换来表示，而比较引理的右侧则对其进行了定量测量。

致谢：我谨向 2025年佐治亚国际拓扑学会议的组织者致以谢意。他们再次为来自各地的几何学家和拓扑学家营造了绝佳的环境，使大家得以相聚、交流，并探讨这一数学领域令人振奋的新进展。我也感谢 F. Laudenbach，他关于 Morse 理论的研究至今仍给予我启发。作者的研究得到美国国家科学基金会通过 DMS-2505760 和 DMS-1942363 项目的资助。□

2. The argument

本节旨在证明比较引理，证明过程见第 2.4 节。关于增强布鲁哈特分解以及莫尔斯函数的布鲁哈特数，请参阅优秀论文 [PT23] ；关于辫簇及其函数环上的簇结构，请参阅 [CGG+25b] 。

2.1. 初始设置。 设 $\beta = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_l} \in \mathrm{Br}_n^+$是一个 n股正辫词，$(\pi_\beta, \{f_x\})$ 是其对应的 Cerf 图，如图 1 所示，其中 $f_x : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个广义 Morse 函数的单参数族，在标准 A-形式下，且在无穷远处线性。设 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个形如 $f = f_x$ 的莫尔斯函数，其中 x 位于 π_β的两组嵌套尖点的 x坐标之间，并且也不是任何交叉的 x坐标。这样的 f 仅有指标为 ι和 $\iota + 1$的临界点，且每种恰有 n 个。指标为 ι的临界点记作 q_1、.....、q_n，指标为 $\iota + 1$ 的临界点记作 p_1、.....、p_n，并且我们总是假设

$$f(q_n) < f(q_{n-1}) < \ldots < f(q_1) < f(p_{n-1}) < f(p_{n-2}) < \ldots < f(p_1).$$

Morse 复形 $CM_*(f)$、 $q_i \in CM_\iota(f)$ 和 $p_i \in CM_{\iota+1}(f)$ 中相应的元素，分别对应于列向量 $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^t$，其中唯一的 1 位于第 i 个位置。这明确描述了同构 $CM_\iota(f) \cong \mathbb{Z}^n$ 和 $CM_{\iota+1}(f) \cong \mathbb{Z}^n$。

例 2.1. 考虑一个 x-坐标 x_0 ，其值任意接近但大于 π_β 的最右侧左尖点的 x-坐标。在上述坐标中，并且已知在这样的 x_0 值之前不会发生手柄滑动， f_x 的莫尔斯微分 ∂ 可表示为

$$\partial : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n, \quad \partial(p_i) = (-1)^{i+1} q_{w_0(i)}, \quad i \in [1, n],$$

其中， w_0 是 S_n的最长元，即半扭转。特别地，这个微分 ∂ 可以表示为 SL_n 中的一个置换矩阵，该矩阵将其 Weyl 群 S_n中的元素 w_0 提升而来。□

2.2. **一个显式的钉扎**。对于 SL_n，我们选择以下矩阵 $x_i(z)$ 和 $B_i(z)$：

$$x_i(z) := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & z & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_i(z) := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中，(2×2) 子矩阵位于第 i 行和第 $(i+1)$ 行及列上。因此，变量 z 是 $x_i(z)$ 的第 $(i,i+1)$ 个元素，也是 $B_i(z)$ 的第 (i,i) 个元素。这可以看作是 SL_n 的一种钉扎选择的一部分，参见例如 [CGG+25b，第 3.4] 节。类似地，考虑矩阵 $P_i(z)$

$$P_i(z) := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

其中，(2×2) 子矩阵位于第 i 行和第 $(i+1)$ 行及列上。给定一个正辫词 $\beta = \sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_l}$，我们定义

$$B_\beta(z_1,\dots,z_l) := B_{i_1}(z_1)\cdots B_{i_l}(z_l) \qquad \text{and} \qquad P_\beta(z_1,\dots,z_l) := P_{i_l}(z_l)\cdots P_{i_1}(z_1).$$

注意，$P_i(z)^{-1} := B_i(z)$，因此

$$P_\beta(z)^{-1} = B_\beta(z). \tag{2.3}$$

我们分别用 Δ_i^{sw}、Δ_i^{se} 和 Δ_i^{nw} 表示从左下角（西南）、右下角（东南）和左上角（西北）开始的第 i 个主子式。特别地，Δ_i^{nw} 是第 i 个顺序主子式，即 SL_n 中对应于基本权 ω_i 的广义子式，参见例如 [BFZ05，第 2.3] 节。

例 2.2. 令 $\mathrm{U}\subset\mathrm{SL}_n$ 为上三角幺模矩阵组成的幺幂子群，$\mathrm{T}\subset\mathrm{SL}_n$为对角矩阵组成的嘉当子群。假设 $M\in\mathrm{SL}_n$ 属于幺幂 Bruhat 胞腔$M\in \mathrm{U}w_0\mathrm{TU}\subset\mathrm{SL}_n$，那么

$$\Delta_i^{\mathsf{sw}}(M) = (-1)^{i(i-1)/2}\cdot\Delta_i^{\mathsf{nw}}(t),$$

其中 $t\in T$ 是该胞腔中 M 的嘉当代表元。事实上，柯西-比内公式表明 $\Delta_i^{\mathsf{sw}}(M) = \Delta_i^{\mathsf{sw}}(w_0t)$，而 $\Delta_i^{\mathsf{sw}}(w_0t) = (-1)^{i(i-1)/2}\Delta_i^{\mathsf{nw}}(t)$则可直接计算得到。□

2.3. 莫尔斯微分的坐标化。 </style} ∂_l^h 表示柄滑动前后的莫尔斯微分，其中柄滑动是指 q_i 沿着 q_{i-1} 进行柄滑动，柄滑动标记为变量 z, $i\in[2,n]$，二者之间的关系为

$$\partial_r^{(h)} = x_i(-z)\partial_l^{(h)}. \tag{2.4}$$

参见图 2（左），其中描绘了 Cerf 图的一部分中此类微分的位置。

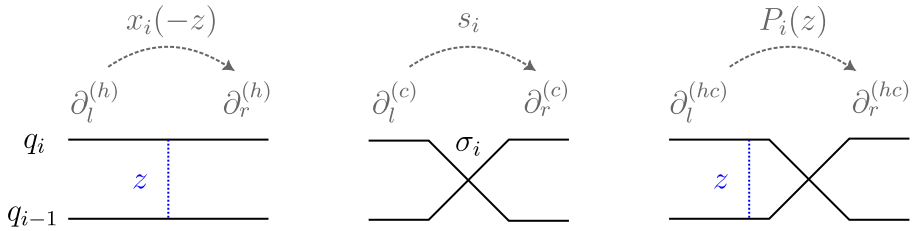

FIGURE 2. 左侧为方程 (2.4) 的示意图，中间为方程 (2.5)，右侧为方程 (2.6)。Cerf 图以黑色表示，柄滑标记以蓝色虚线表示，莫尔斯微分的位置及其关系以灰色表示。

交换 q_{i-1} 和 q_i、 $i \in [2,n]$ 的值之前和之后的莫 Morse 微分 ∂_l^c 和 ∂_r^c，即如图 2（中）所示的 Cerf 图中的 σ_i 交叉，满足关系式

$$\partial_r^{(c)} = s_i \partial_l^{(c)}, \tag{2.5}$$

其中 $s_i = P_i(0)$ 是提升简单换位 $s_i \in S_n$ 的置换矩阵。

注 2.3. (i) 布鲁哈特数的定义与度量的选取无关，参见 [PT23，第 0 节2] ，因此不会因柄滑动而改变。这一点在上面的方程 (2.4) 中有代数上的体现：由于 $x_i(z)$ 是幺幂上三角矩阵，与任意矩阵 M 和$x_i(\pm z)M$ 相关联的车矩阵必定相同，因此它们的布鲁哈特数也相等。不过，在两个临界点之间进行柄滑动并交换它们的值之后，布鲁哈特数则取决于把手滑动标记。

(ii) 在例 2.1、方程 (2.4) 和 (2.5) 中， ∂, $x_i(-z)$ 和 s_i 中的负号，是由于对稳定胞腔和不稳定胞腔的相对定向作了适当选择，以使其与 [CGG+25b 第 3 节4]中 SL_n 的钉扎相匹配。□

根据方程 (2.4) 和 (2.5)，如图 2（右）所示，在 q_i 和 q_{i-1} 之间的一对柄滑标记 z 以及一次值交换之前和之后的微分 $\partial_l^{(hc)}$ 和 $\partial_r^{(hc)}$，满足

$$\partial_r^{(hc)} = s_i \partial_l^{(c)} = s_i x_i(-z) \partial_l^{(hc)} = P_i(z) \partial_l^{(hc)}, \tag{2.6}$$

通过直接计算可得 $s_i \cdot x_i(-z) = P_i(z)$。因此，在所有手柄滑动都恰好发生在交叉左侧的 Cerf 图中，第 k 次交叉之后紧接着的微分 ∂_k 为

$$\partial_k = P_{i_k}(z_k) \cdots P_{i_2}(z_2) P_{i_1}(z_1) \partial_0, \tag{2.7}$$

其中 $\partial_0 = P_{w_0}(0)$ 是最长置换 $w_0 \in S_n$ 的置换矩阵，如例 2.1 所示 .

引理 2.4 (由柄滑标记得到的布鲁哈特数)。 设 $\beta = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_l}$，且其关联的 *Cerf* 图（$\pi_\beta, \{f_x\}$） 为标准形。考虑莫尔斯函数 f_k 的莫尔斯微分 ∂_k 在第 k 次交叉之后的情形，以及其布鲁哈特数 β_j（f_k）， $j \in [1,n]$。则

$$\prod_{j=1}^{i_k^*} \beta_j(f_k) = (-1)^{i_k^*(i_k^*-1)/2} \cdot \Delta_{i_k^*}^{\mathsf{sw}}(P_{i_k}(z_{i_k}) \cdots P_{i_1}(z_1) w_0). \tag{2.8}$$

若 $P_{i_k}(z_{i_k}) \cdots P_{i_1}(z_1) w_0 \in \mathsf{U}w_0\mathsf{TU}$ 属于 $w_0 \in S_n$ 的幺幂 *Bruhat* 胞腔。

证明。 该结论由方程（2.7）和例 2.2 得出。 □

2.4. **比较引理的证明**。 公式（1.1）由以下等式得出 :

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{i_k^*} \beta_j(f_k) &\overset{(1)}{=} \rho_1(k) \cdot \Delta_{i_k^*}^{\mathsf{sw}}(P_{i_k}(z_{i_k}) \cdots P_{i_1}(z_1) w_0) \\
&\overset{(2)}{=} \rho_1(k)\rho_2(k) \cdot \Delta_{i_k^*}^{\mathsf{se}}(P_{i_k}(z_{i_k}) \cdots P_{i_1}(z_1)) \\
&\overset{(3)}{=} \rho_1(k)\rho_2(k) \cdot \Delta_{i_k}^{\mathsf{nw}}(B_{i_1}(z_1) \cdots B_{i_k}(z_k)) \\
&\overset{(4)}{=} \rho_1(k)\rho_2(k) \cdot A_k(z_1, \ldots, z_k).
\end{aligned}$$

这里我们用 $\rho_1(k) := (-1)^{i_k^*(i_k^*-1)/2} = (-1)^{\lfloor i_k^*/2 \rfloor}$ 和 $\rho_2(k) := (-1)^{i_k^*(n-1)}$ 表示这些符号。每个等式都可如下证明：

(1) 等式（1）即引理 2.4 中的等式（2.8）。由于 $P_{i_k}(z_{i_k}) \cdots P_{i_1}(z_1) w_0 \in \mathsf{U}w_0\mathsf{TU}$ 是一个开条件，我们可以并且确实假设它成立：在此假设下得到的等式可延拓为 $X(w_0\beta)$ 上相应全局正则函数之间的等式。

(2) 等式 (2) 可由以下线性代数事实推出：对于任意 $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$， $\Delta_m^{\mathsf{sw}}(Mw_0) = (-1)^{m(n-1)} \cdot \Delta_m^{\mathsf{se}}(M)$；将其应用于 $m = i_k^*$ 和 $M = P_{i_k}(z_{i_k}) \cdots P_{i_1}(z_1)$ 即可。

(3) 等式 (3) 源于这样一个事实：可逆的 $(n\times n)$ 阶矩阵的第 m 个顺序主子式，等于其逆矩阵的第 $(n-m)$ 个末尾主子式。也就是说，我们使用了如下线性代数恒等式：对于任意 $M\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，$\Delta_m^{\mathsf{se}}(M) = \Delta_{n-m}^{\mathsf{nw}}(M^{-1})$；将其应用于$m = i_k^*$ 和 $M = P_{i_k}(z_k)\cdots P_{i_1}(z_1)$，于是根据方程 (2.3)，$M^{-1} = B_{i_1}(z_1)\cdots B_{i_k}(z_k)$。

(4) 等式 (4) 是 [CGG$^+$25b 定理 5.12] 和 [CGG$^+$25b 第 3.7], 节最后一行等式的推论，其中簇变量表示为广义子式。□

注 2.5。 (*i*) 注意，$\beta_j(f_k)\in\mathbb{Q}(z_1,\ldots,z_2)$ 是定义在 z-变量上的有理函数，通常不是多项式。事实上，它们的定义需要一个域。尽管如此，比较引理与 [CGG$^+$25b 定理 7.6] 共同推出，方程（1.1）右侧的布鲁哈特数之积是一个关于 z-变量且系数为整数的多项式。

(*ii*) 刻画辫子簇的方程，在 Cerf 理论中直接对应于如下条件：当 x 接近但小于最左侧右尖点的 x-坐标时，f_x 的临界点能够按照右尖点所指定的方式成对消去。这些条件本身也会给出关于柄滑标记的方程，而这些方程与 [CGG$^+$25b 推论 3.7], 中的方程一致；另见 [CGG$^+$25b 定义 3.15 和引理 3.16]。□

2.5. **最后的评论**。 参数化 Morse 理论与 Legendrian 子流形的研究之间存在精确的联系。例如，由 D. Fuchs、P. Pushkar 和 Y. Chekanov 及其合作者引入并研究的正规配对，从组合角度刻画了 Barannikov 配对[Bar94] 的临界点。另一个例子是 Legendrian 子流形的生成族理论及其相关不变量，这一理论由包括 C. Viterbo、D. Th´eret 和 L. Traynor 在内的许多学者发展而来，参见例如 [BST15、EG98、Th´e99] 及其中的参考文献。

从 Cerf 理论的角度来看，如果能够严谨地定义一个行为良好的范畴或空间，其中包含所有具有给定 Cerf 图的单参数族莫尔斯函数，并理解当 Cerf 图发生变化时——例如在前沿同伦、扣结移动和手术下——这些范畴或空间之间的关系，将会很有启发性；参见 [Cer71，第 4] 节以及 [HW73，第 I 章 2]。在当前的科学背景下，给定一个 Legendrian 子流形 $\Lambda\subset(J^1(B)\ \xi_{\mathrm{st}})$，以下步骤似乎既合理，又会为相关文献增添令人兴奋且有价值的内容：

(1) 严谨地构造一个稳定的 ∞-范畴 GF_Λ，其对象由 Λ 的生成族谱给出，即与参数族 $f_x: M\longrightarrow \mathbb{R}, x\in B$ 相关联的子水平集谱；这些参数族的 Cerf 图在自然投影 $J^1(B)\longrightarrow B\times\mathbb{R}$ 下给出 Λ 的前投影，该投影将 j^1f 映为 $(b,\ f(b))$；参见 [TT25，定义 3.1]。态射应自然地构成生成族同调的谱增强；参见例如 [TT25，第 1.4], 节及其中的讨论，以及相关变体。GF_Λ 最好构造成对称幺半且有单位元的范畴。

(2) 证明 GF_Λ 是 Legendrian 不变量，且它在球谱 S 上是光滑的。此外，证明该函子在 Λ 上局部记录由不稳定子流形的标架给出的谱局部系统，并且具有相对左 Calabi-Yau 结构，其定义见 [BR23，第 4.1.10] 节。这一性质应可由用于证明 Sabloff 对偶的非链接副本论证推出；参见 [Sab06，第 4] 节，或 [EES09，命题 4.1],；此时相对基本类属于相应的（相对 S^1-不变量）拓扑 Hochschild 同调。

同理，证明当Λ 和 Λ' 通过 Legendrian 手术或扣结移动相关联时，GF_Λ 和 $\mathrm{GF}_{\Lambda'}$ 之间存在适当的函子，并确立其性质，例如全忠实性的各种形式。

(3) 对于空间 gf_Λ，我建议我们考虑与稳定 ∞-范畴相关联的伪完美对象的谱模空间栈，而不是范畴 GF_Λ；参见 AG14，第 5 节。3] 它通过取 $R=\mathbb{S}$，将 TV07 定理 0 扩展到这一情形。2] 若这些空间非空，可以预期它们 gf_Λ 会具有丰富的几何结构，这些结构源自 Λ的拉格朗日填充的辛拓扑。例如，根据 (2) 的范畴性质，这些模叠应当是谱光滑的，并具有移位辛结构的 ∞-类比，而且 gf_Λ 会

等价于 $\mathrm{gf}_{\Lambda'}$ 的一个子栈，若 Λ' 是对 Λ施行 Legendrian 手术所得。

gf_Λ 中的每个（经典）点都应当可以通过将相应对象在 GF_Λ 中的生成谱延拓到辛化来实现；该生成谱本身生成一个可能浸入的（无障碍）拉格朗日填充 Λ。根据构造，参见 [AG14, 命题 5.9],，此类点处的余切复形应与这种延拓的去悬挂生成族谱一致，从而阐明了如下事实：相应 Seidel 同构中出现的拉格朗日填充（或其框架配边类，或相应的谱）的上同调群，应理解为无穷小变形群。[3]

此外，这些模叠 gf_Λ 应当允许簇结构概念的一种推广，其依据与 [CW24, CGG$^+$25b], 中相同的辛几何原理；例如，每个次极大弦分解都对应一个开簇子叠 Λ。特别地，引言中讨论的辫簇 $X(w_0\beta)$在除以某种环面作用后，会得到一个与 gf_Λ 的最简单连通分支同构的叠，前提是 $\Lambda \subset (\mathbb{R}^3, \xi_{\mathrm{st}})$ 是 β 的彩虹闭包。

注释 2.6。 (i) 按照 Floer 理论、生成族和微局部层所给出的通常三分法，应当预期：在这类谱增强的 GF_Λ、适当的 Legendrian dg-代数的谱增强上的完美模（参见 Lipshitz-Ng-Sarkar 关于纽结情形的 ongoing work），以及在 $B \times \mathbb{R}$ 上、奇异支集位于 Λ 的相应谱层范畴之间，存在稳定 ∞-范畴的等价。

(ii) 尽管 (i) 中所预期的等价成立，但在参数化 Morse 理论和生成族的方法与背景下，发展并确立上述 (1)、(2) 和 (3) 仍具有重要意义。这些不同方法各有其优点，而且一旦这一三分法的每个方面都得到各自充分的发展，就能更好地相互比较并彼此补充。如果一条腿摇晃，坐在三脚凳上并不理想：每一条腿都同等重要，希望它们都能得到这样的认可。 □

3. A few examples

设 $\beta = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_l}$ 是一个由 n 股组成的正辫词。为便于读者轻松生成任意示例，请参阅作者网站上提供的文件“BruhatCluster.nb”。在这个 Mathematica 文件中，我实现了一个函数

$$\mathrm{BruhatAndClusterVariables}[\{i_1, \dots, i_l\}, n]$$

该函数输入表示 β 的交叉的指标列表 $\{i_1, \dots, i_l\}$，以及股数 n。对于每个 $k \in [1, l-1]$，此函数都会输出：

（1）莫尔斯数据：第 k 个与第（$k+1$）个交叉之间的微分 ∂_k、其极大弦分解对应的最高维胞腔中的车矩阵，以及对应的布鲁哈特数带符号乘积，如公式（1.1）右侧所示。

（2）簇数据：由前 k 个交叉组成的辫子所对应的辫子矩阵，以及与第 k 个交叉对应的簇变量，如公式（1.1）左侧所示。

特别是，读者可以用它快速验证任何规模合理的例子中比较引理的等式。

3.1. 双股情形。 考虑双股辫子字 $\beta = \sigma_1^l \in \mathrm{Br}_2^+$。在这种 2×2 情形下，SL_2 中的一个矩阵可显式分解为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b - \frac{ad}{c} \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

[3]这与 上链复形 $C^*(L, k)[1]$ 等价于.....处的余切复形这一事实相 e
平凡局部系统 关：在 L 上的 ∞-局部系统范畴的伪完美对象模空间中。

若 $c \neq 0$，则分解为；否则分解为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

由于 $n = 2$，只有一种类型的交叉 σ_{i_j}，其指标为 $i_j = i_j^* = 1$。因此，按照上述对各元素的记号，方程（3.1）和（3.2）表明，当 $c \neq 0$ 时，布鲁哈特数为 c 和 $1/c$；否则为 a 和 $1/a$ 。特别是，在与极大弦分解相关的开拓维图表中，布鲁哈特数均非零，布鲁哈特数唯一非平凡的乘积就是元素 c 本身。简言之，公式（1.1）的右端就是 $\beta_1(f_k)$，它可计算为 $\partial_k = P_1(z_k) \cdots P_1(z_1) w_0$, $k \in [1, l]$ 的左下角元素。该元素与辫子矩阵 $B_{\sigma^k}(z_1, \dots, z_k) = B_1(z_1) \cdots B_1(z_k)$ 的左上角元素一致：根据 [CGG+25b 第 3.7], 节，这个左上角元素为 $A_k(z_1, \dots, z_k)$，因此公式（1.1）得以验证。

注 3.1。 在这个双股情形中，所得的关于 z 变量的函数与欧拉连分式有关，例如参见 [Hug23,Section 2.2.5] 或 [Boa18, Section 5]。 □

3.2. **一个三股示例**。 考虑 3 股辫子字 $\beta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1$。我们来考察莫尔斯函数 f_x ，其中 x 坐标紧接在第七个交叉的 x 坐标之后。这个交叉是 σ_2 ，因此 $i_7 = 2$ 和 $i_7^* = n - i_7 = 1$ ，如 $n = 3$ 所示。根据第 2.3 节中的讨论，相应的莫尔斯微分可以写成

$$\partial_7 = P_2(z_7)P_1(z_6)P_1(z_5)P_2(z_4)P_1(z_3)P_2(z_2)P_1(z_1)w_0 : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$$

也就是

$$\partial_7 = \begin{pmatrix} z_2z_5 - 1 & z_1z_5 & z_5 \\ z_2z_4 - z_3 & z_1z_4 - 1 & z_4 \\ z_2 - (z_2z_5 - 1)\, z_6 + (z_2z_4 - z_3)\, z_7 & -z_5z_6z_1 + z_1 - (1 - z_1z_4)\, z_7 & -z_5z_6 + z_4z_7 + 1 \end{pmatrix}.$$

在多项式 $\delta := -z_5z_6z_2 + z_4z_7z_2 + z_2 + z_6 - z_3z_7$ 非零的轨迹上， ∂_7 可以因式分解为 $\partial_7 = U_1RU_2$ 其中

$$U_1 := \delta^{-1} \begin{pmatrix} 1 & (z_2z_5 - 1)\, z_7 + z_1\,(z_4z_7 - z_3z_5z_7 + 1) & z_2z_5 - 1 \\ 0 & 1 & z_3 - z_2z_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R := \delta^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & z_5z_6z_2 - z_2 + z_1z_3 + z_1z_4z_6 - z_1z_3z_5z_6 - z_6 & 0 \\ \delta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_2 := \delta^{-1} \begin{pmatrix} 1 & z_7 + z_1\,(z_5z_6 - z_4z_7 - 1) & -z_5z_6 + z_4z_7 + 1 \\ 0 & 1 & z_4z_6 + z_3\,(1 - z_5z_6) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

公式（1.1）的右侧，在此例中就是第一个 Bruhat 数 $\beta_1(f_x)$（其中$i_7^* = 1$是车矩阵 R的左下角元素，因此它等于 $\beta_1(f_x) = \delta$。公式（1.1）的左侧是簇变量 $A_7(z_1, \dots, z_7)$，它是辫子矩阵 B 的第二个顺序主子式：$= B_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2}(z_1, \dots, z_7)$，其中 $i_7 = 2$。该辫子矩阵写作

$$B = \begin{pmatrix} z_2 - z_1z_3 + (-z_2z_5 + z_1\,(z_3z_5 - z_4) + 1)\, z_6 & z_1 + (z_2z_5 + z_1\,(z_4 - z_3z_5) - 1)\, z_7 & -z_2z_5 + z_1\,(z_3z_5 - z_4) + 1 \\ z_3\,(z_5z_6 - 1) - z_4z_6 & (z_4 - z_3z_5)\, z_7 + 1 & z_3z_5 - z_4 \\ z_5z_6 - 1 & -z_5z_7 & z_5 \end{pmatrix}.$$

因此 $A_7(z_1, \dots, z_7) = \delta$，公式（1.1）成立。

3.3. **一个4股示例**。考虑3股辫子字 $\beta = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2^2\sigma_1$。考虑莫尔斯函数 f_x ，其 x 坐标紧接在 β 第七个交叉的 x 坐标之后。这个交叉是一个 σ_1 ，因此 $i_7 = 1$ 和 $i_7^* = n - i_7 = 3$ ，如 $n = 4$。根据第2.3节，相应的莫尔斯微分为

$$\partial_7 = P_1(z_7)P_2(z_6)P_3(z_5)P_1(z_4)P_3(z_3)P_2(z_2)P_1(z_1)w_0 : \mathbb{Z}^4 \longrightarrow \mathbb{Z}^4$$

即

$$\partial_7 = \begin{pmatrix} -z_3 & -z_2 & -z_1 & -1 \\ -z_3z_7 & -z_2z_7-1 & -z_1z_7 & -z_7 \\ -z_3z_6 & -z_4-z_2z_6 & -z_1z_6-1 & -z_6 \\ 1-z_3z_5 & -z_2z_5 & -z_1z_5 & -z_5 \end{pmatrix}.$$

在.....的轨迹上

$$\delta_1 := 1 - z_3z_5, \quad \delta_2 := z_4\left(1-z_3z_5\right) + z_2z_6, \quad \delta_3 := z_3z_5 - z_2z_7 + z_1\left(z_4z_7 - z_6\right) - 1,$$

均非零时， ∂_7 我们可以将其分解为 $\partial_7 = U_1RU_2$ ，其中

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_3^{-1} \\ 0 & 0 & \frac{-z_3z_5+z_2z_7+z_1z_6-z_1z_4z_7+1}{z_4(1-z_3z_5)+z_2z_6} & 0 \\ 0 & \frac{-z_3z_5z_4+z_4+z_2z_6}{z_3z_5-1} & 0 & 0 \\ 1-z_3z_5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

关于 U_1 和 U_2，请参见上方代码。因此，已知 $i_7^* = 3$ 以及上面的车矩阵 R ，此时公式（1.1）右侧为

$$\beta_1(f_x)\beta_2(f_x)\beta_3(f_x) = \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \frac{\delta_3}{\delta_2} = \delta_3.$$

即 R 左下角起的前三个元素的乘积。公式（1.1）的左侧，即簇变量 $A_7(z_1, \ldots\ldots, z_7)$，是辫子矩阵 $B := B_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1}(z_1, \ldots\ldots, z_7)$ 的第一个顺序主子式，因为 $i_7 = 1$。这个辫子矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} z_3z_5 - z_2z_7 + z_1\left(z_4z_7 - z_6\right) - 1 & z_2 - z_1z_4 & z_1 & -z_3 \\ z_4z_7 - z_6 & -z_4 & 1 & 0 \\ z_7 & -1 & 0 & 0 \\ z_5 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

因此， $A_7(z_1, \ldots\ldots, z_7) = \delta_3$ 同样如此，这说明了公式（1.1）。

References

[AG14] Benjamin Antieau 和 David Gepner。导出代数几何中的 Brauer 群与 ´étale 上同调。*Geom. Topol.*，18(2):1149–1244，2014年。[Bar94] Serguei Barannikov。框架化 Morse 复形及其不变量。 *Advances in Soviet Mathematics*，21 93 1994 : –116，4月。[BFZ05] Arkady Berenstein、Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数。III. 上界与双 Bruhat 胞腔。 *Duke Math. J.*，126(1):1–52，2005。[Boa18] Philip Boalch。野特征簇、黎曼球面上的点与 Calabi 例子。载于*sentation theory special functions and Painlevé equations—RIMS 2015* 76 *Repre-* ，

Adv. Stud. Pure 第 卷，页码 –。 *Math.* 67 94 2018

日本数学会，东京，。[BR23] Christopher Brav 和 Nick Rozenblyum。循环 Deligne 猜想与 Calabi–Yau 结构，2023年。[BST15] Fr´ed´eric Bourgeois、Joshua M. Sabloff 和 Lisa Traynor。通过生成族构造拉格朗日协边：构造与分布。 *Algebr. Geom. Topol.*，15(4):2439–2477，2015年。[Cer70] Jean Cerf。实可微函数空间的自然分层与伪同痕定理。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，(39):5–173，1970年。[Cer71] Jean Cerf。单连通可微流形的伪同痕定理。载于 *sterdam 1970* 76 1971 *Manifolds - Am-* ，第 –82 页，

柏林、海德堡，。Springer Berlin Heidelberg。[CG24] Roger Casals 和 Honghao Gao。每个簇种子都有一个拉格朗日填充。 *Invent. Math.*，237 868，2024 2 809( ): –。[CGG+25a] Roger Casals、Pavel Galashin、Mikhail Gorsky、Linhui Shen、Melissa Sherman-Bennett 和 Jos´e Simental。比较辫子簇上的簇代数，2025年。arXiv 2508.03816。[CGG+25b] Roger Casals、Eugene Gorsky、Mikhail Gorsky、Ian Le、Linhui Shen 和 Jos´e Simental。辫子簇上的簇结构。 *J. Amer. Math. Soc.*，38(2):369–479，2025年。[CGGS24] Roger Casals、Eugene Gorsky、Mikhail Gorsky 和 Jos´e Simental。代数编织与辫簇。*Amer. J. Math.*，146(6):1469–1576，2024年。[CW24] Roger Casals 和 Daping Weng。Legendrian 链环与簇代数的微局部理论。 *Geom. Topol.*，28 2 901( ): –1000，2024年。[CZ22] Roger Casals 和 Eric Zaslow。Legendrian 编织： *N* *Geom.* -图演算、旗 *Topol.* 26 8 3589 3745, 2022

簇模空间及其应用。，( ): –。[EES09] Tobias Ekholm、John B. Etnyre 和 Joshua M. Sabloff。Legendrian 接触同调的对偶正合列。 *Duke Math. J.*，150(1):1–75，2009年。

[EG98] Yasha Eliashberg 和 Misha Gromov。拉格朗日交叉理论：有限维方法。载于*Geometry of differential equations*, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*第186卷，页码27–118。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998年。[GHKK18] Mark Gross、Paul Hacking、Sean Keel 和 Maxim Kontsevich。簇代数的典范基。

J.，( ): –608，2018年。

Amer. Math. Soc. 31 2 497

[Hen09] M.B. Henry. *Connections between Floer-type invariants and Morse-type invariants of Legendrian knots.invariants of Legendrian knots* 2009 。学位论文（博士）——

圣路易斯华盛顿大学。[HR15a] Michael B Henry 和 Dan Rutherford。Legendrian 结的增广等价类与 Morse 复形序列。*Algebraic & Geometric Topology*，15(6):3323–3353，2015年12月。[HR15b] Michael B. Henry 和 Dan Rutherford。有限域上的支配多项式与增广。 *J. Topol.*，8 1 1( ): –37，2015年。[Hug23] James Hughes。A 型中的拉格朗日填充及其 K

Revista Matemática Iberoamer- alman 环轨道。，

icana 39 5 1681 1723, 2023

( ): – 7月。[HW73] Allen Hatcher 和 John Wagoner。 *Pseudo-isotopies of compact manifolds*，第6卷， *Astérisque*第6号。法国数学会，巴黎，1973年。附英文和法文序言。[KS14] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。Donaldson–Thomas 不变量、可积系统与镜像对称中的墙穿越结构。载于 *Homological mirror symmetry and tropical geometry*, *Lect. Notes Unione Mat. Ital.* 第15卷，页码197–308。施普林格，沙姆，2014年。[Lau15] Francois Laudenbach。关于 S. A. Barannikov 的一篇文章。arXiv:1509.03490，2015年。[LPNV13] Dorian Le Peutrec、Francis Nier 和 Claude Viterbo。 *p*-形式的精确阿伦尼乌斯定律：Witten 拉普拉斯算子与 Morse–Barannikov 复形。 *Ann. Henri Poincaré*，14(3):567–610，2013年。[Nei14] Andrew Neitzke。超对称量子场论中的簇类坐标。

Proc. Natl. Acad. Sci.，( ): –。[PT23]

USA 111 27 9717 9724, 2014

Petya Pushkar 和 Misha Temkin。增强布鲁哈特分解与 Morse 理论。

Int. Math. Res.，( ): –16903,

Not. IMRN 19 16837

2023年。[Sab06] Joshua M. Sabloff。Legendrian 接触同调的对偶性。 *Geom. Topol.*，10:2351–2381（电子版），2006年。[Th´e99] David Th´eret。关于生成函数的 Viterbo 唯一性定理的完整证明。 *Topology Appl.*，96 3 249( ): –266，1999年。[TT25] Hiro Lee Tanaka 和 Lisa Traynor。带生成族的 Legendrian 的稳定同伦不变量，2025年。[TV07] Bertrand To¨en 和 Michel Vaqui´e。dg-范畴中的对象模空间。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*，40 3 387 444，2007年( ): –。

University of California Davis, Dept. of Mathematics, USA
Email address: casals@ucdavis.edu