arXiv:2601.07804v1 [math.DS] 12 Jan 2026

FOU局部迭代函数系统基础

Elismar R. Oliveira 和 Paulo Varandas

Abstract. 本文系统地研究了连续局部迭代函数系统。我们证明局部迭代函数系统存在紧吸引子，并在压缩性假设下构造其编码空间，提出一种描述可容许复合的扩展移位。特别地，局部迭代函数系统可能具有的组合结构与全移位的不变子集空间一一对应。然而，相较于经典框架，这些对象展现出令人意外的特性：我们构造了不由有限型子移位建模的局部迭代函数系统实例，并由此产生非自相似吸引子。我们还证明，所有图定向迭代函数系统的吸引子都可以由扩充的紧致度量空间上的局部迭代函数系统得到。

我们提供了若干类实例来展示结果的适用范围，着重说明它们与迭代函数系统经典理论之间的差异及联系。

Contents

1. 引言 2
2. 主要结果 6
2.1. 局部迭代函数系统 6
2.2. 拓扑方面 7
2.3. 压缩局部迭代函数系统的编码空间 9
2.4. 广义移位空间 10
3. 局部吸引子及其拓扑吸引域的存在性 15
3.1. 定理 A 的证明 19
4. 编码空间 19
4.1. 压缩迭代函数系统的编码空间 19
4.2. 压缩局部迭代函数系统的编码空间 20
4.3. 定理 B 的证明 22
5. 压缩局部迭代函数系统的动力学 22
5.1. 压缩局部迭代函数系统的轨道 23
5.2. 定理 C 的证明 25

日期：2026年1月13日。2020 数学学科分类主要分类号：28A80、37C70、37B10；次要分类号：54H20、37C45。关键词和短语：局部迭代函数系统、局部吸引子、符号动力系统、编码空间、非自相似分形、分形几何。1

6. 局部迭代函数系统的斜动力学结构 266.1. 定理 D 的证明 297. 局部吸引子的吸引域上的指数收敛 308. 示例 32致谢 37参考文献 38

1. Introduction

迭代函数系统（IFS）具有丰富的拓扑性质，这些性质是其数学意义和实际意义的核心。它由紧致度量空间 X上的一组连续自映射（f_i）$_{1\leqslant i\leqslant n}$ 定义，并确定一个自相似集，通常是唯一的非空紧集 Λ ，在 Hutchinson-Barnsley 算子 F 的作用下保持不变：$2^X \to 2^X$，其定义为

$$F(B) = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} f_j(B), \quad \text{for each } B \in 2^X.$$

已知，当映射 f_i 是压缩映射时，Hutchinson-Barnsley 算子也是压缩映射，并且所有集合 $B \subset X$ 都会被吸引至 Λ，而迭代函数系统的吸引子具有分形结构。值得注意的是，对于迭代函数系统，映射 f_j 在迭代过程中的收缩效应确保 Λ 中的每个点都对应一个轨道编码$b = (b_n)_{n\leqslant -1} \in \{1, 2, \ldots, n\}^{-\mathbb{N}}$，该空间称为编码空间。事实上，只要迭代函数系统满足开集条件，这种对应就是双射，即

$$f_i(X) \cap f_j(X) = \emptyset \quad \text{for every distinct } 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{OSC}$$

总体而言，迭代函数系统具有丰富的动力学和几何性质，近几十年来已得到深入研究，并在纯科学和应用科学领域催生了许多重要应用。在 Barnsley 奠定的基础上，当代研究进一步将迭代函数系统理论拓展至概率和多重分形框架、测度刚性以及符号动力系统。

尤其是，与热力学形式的相互作用——通过拓扑压力和 Gibbs 测度等概念——将几何尺度变化与熵和多重分形谱联系起来，为动力系统与几何测度论搭建起桥梁。由此，Barnsley 的分形构造算子理论方法仍是现代分形几何理解的基石，因为它提供了一个形式化框架，将自相似性、迭代和不变性的原理统一在单一数学结构之下。我们的主要目标是扩展 Barnsley 的观点，为局部迭代函数系统提供一个统一的理论框架，下面我们将回顾其相关内容。

局部迭代函数系统（局部迭代函数系统），记作 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j,\ f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 其中 $\mathfrak{X} = (X_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是 X 的某个子集族，具体定义见定义2.1，由 Barnsley 提出 [Bar86] ，其动机来自分形图像压缩和计算数学中的应用。局部迭代函数系统的总体情况与迭代函数系统的经典情境有很大不同。映射 $f_i \circ f_j$ 的某些复合常常无法进行，因此可容许复合的空间依赖于位置。尽管此后数年间已有诸多努力、应用和贡献，局部迭代函数系统的公理化描述似乎仍远未完善。事实上，Fisher [Fis95]强调，划分迭代函数系统（如今称为局部迭代函数系统）的完整理论尚待建立，并指出一般而言无法得到混沌游戏，也无法保证 Hutchinson-Barnsley 算子的压缩映射性质。这促使人们发展满足其他非常严格条件的局部迭代函数系统理论（精确表述见注 2.5 ）。这种方法实际上绕开了 Barnsley、Fisher 及其合作者指出的根本障碍，尤其是缺乏一般不动点原理，以及 Hutchinson-Barnsley 算子的全局压缩性失效。因此，一般理论的基础仍大体悬而未决。

本文建立了局部迭代函数系统一般理论的基本框架，开始在紧致度量空间 $R_{\mathfrak{X}} =$（$X_j,\ f_j$）$_{1\leqslant j\leqslant n}$ 及闭子集 X 上，对连续局部迭代函数系统 $X_j \subset X$的拓扑、组合与几何结构展开分析。乍看之下，人们可能会认为局部迭代函数系统的拓扑性质与经典迭代函数系统的拓扑性质十分相似，相较差异而言相同之处更多。然而事实并非如此。与迭代函数系统的经典理论相比，一个主要缺点是局部 Hutchinson-Barnsley 算子可能不是压缩映射。不过，不难验证，局部 Hutchinson-Barnsley 算子的迭代 $F_{\mathfrak{X}}$ 会在 Hausdorff-Pompeiu 距离下收敛到一个紧且 $F_{\mathfrak{X}}$-不变集 $A_{\mathfrak{X}} \subseteq X$（参见定理 A）。然而，这类局部 Hutchinson-Barnsley 算子 $F_{\mathfrak{X}}$ 与经典算子有着重大差异。事实上，只要映射 f_j，这类算子就可能不是压缩映射；这体现在可能存在某些子集 $B \subsetneq X$ 不会被吸引到 $A_{\mathfrak{X}}$，因此我们为局部迭代函数系统的局部吸引子引入了若干吸引子的拓扑吸引域概念（参见定理 A）。在定理 B 中，我们证明每个局部压缩迭代函数系统都半共轭于移位空间上的一个局部压缩迭代函数系统。这一联系为通过几何实例和符号—组合技术构造局部迭代函数系统的吸引子开辟了道路，也加深了我们对其结构的理解。

经典 IFS 理论与局部 IFS 理论之间第二个显著差异，涉及局部吸引子的存在性：其组成部分可能不属于定义局部 IFS 的映射的定义域之并集，由此引出了端点的概念。更确切地说，存在压缩局部 IFS $R_{\mathfrak{X}} = (X_j,\ f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$，其中$X_i \subset X$ 是压缩 IFS 的映射 f_i 之定义域的紧致限制

$R = (X, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 其吸引子包含不属于集合 $\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} X_j$ 的点（特别是，这些点具有有限轨道，且混沌游戏必然会失败，参见例8.3）。这促使我们定义两个可能不同的吸引子类

$$A_{\mathfrak{x}}^{\infty} \subseteq A_{\mathfrak{x}} \subseteq A_R, \tag{1.1}$$

其中，$A_{\mathfrak{x}}$ 表示该局部迭代函数系统的局部吸引子，$A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$ 表示局部吸引子中不含端点的部分，并具有以下性质：

	编码空间	**轨道**	**传递的**
$A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$	紧移位不变子集	所有点都有无限轨道	No
$A_{\mathfrak{x}}$	紧移位不变子集	可能存在具有有限轨道的点	No
A_R	全移位	所有点都有无限轨道	Yes

事实上，局部压缩迭代函数系统的局部吸引子 $A_{\mathfrak{x}}$ 与迭代函数系统的经典理论相比，呈现出以下特征：

- 存在不会被吸引到 $A_{\mathfrak{x}}$ （参见例8.2）
- $A_{\mathfrak{x}}$ 可能是非传递的，且不满足混沌游戏（参见例8.3）
- $A_{\mathfrak{x}}$ 可能具有长度不同的有限轨道，因此有端点（参见例8.3）；
- $A_{\mathfrak{x}}$ 可能包含位于 $\bigcup_i X_i$ 补集中的点（参见例8.4）
- 紧空间 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$可能被 $A_{\mathfrak{x}} \setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$积聚（参见例8.4）；
- 编码空间 $A_{\mathfrak{x}}$ 可能不是有限型子移位（参见例8.5）；
- $A_{\mathfrak{x}}$ 可能并非自相似（参见例 8.6）。

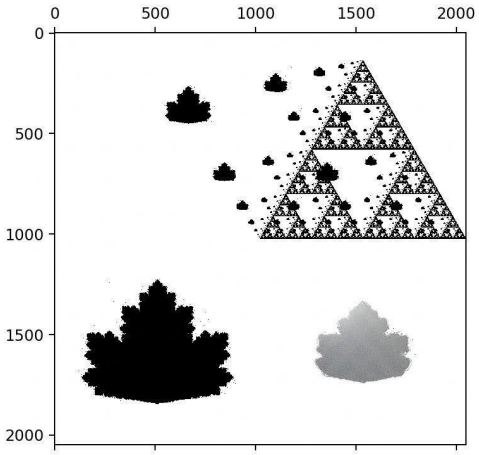

FIGURE 1.1. 局部吸引子 $A_{\mathfrak{x}}$，它是非传递的且非自相似，其中端点以灰色标记，而 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$ 以黑色标记（参见示例8.6）

继续比较迭代函数系统的经典框架与局部迭代函数系统，可以发现第三个根本区别。

在描述编码空间和局部吸引子的动力学特征时，对于压缩迭代函数系统，编码空间是一个全移位，并且任意通过映射的拼接所得到的点都有无限轨道 f_j。特别地，动力学性质可以用斜积来编码（例如参见第 2.4 节）。这不仅在吸引子的拓扑描述中发挥着根本作用，而且更重要的是，它推动了热力学形式的发展，使人们能够描述吸引子的几何性质，包括计算和研究其豪斯多夫维数及平稳测度的正则性（例如参见 [FU09、Fen23a、HK25、MU96] 及其中的参考文献）。

对于压缩局部迭代函数系统，局部迭代函数系统的轨道空间与映射的所有可容许复合空间相对应 f_j。因此，局部迭代函数系统的编码空间可视为移位空间的一个（可能为真）不变子集。对这种对应关系的表述涉及对单边和双边移位的不变子集进行一些复杂构造（参见定理C、定理D以及推论E 中的精确表述）。特别是，先前的刻画使我们能够描述 Hutchinson-Barnsley 分形算子的一个本质部分；在该部分上，仍可得到压缩性以及在豪斯多夫度量下收敛到局部吸引子（精确表述见定理F）。

局部迭代函数系统也可以与迭代函数系统概念的某些推广相比较，即 Mauldin 和 Williams [MW88]以及 Barnsley 和 Demko [BD85], 分别引入的图导向迭代函数系统和非齐次迭代函数系统。对于第一类，我们证明，在某个扩充的紧致度量空间上，每个紧致度量空间上的图导向迭代函数系统 X 都可以实现为一个压缩局部迭代函数系统（参见定理 G 和注 2.10）。

至于第二类，非齐次迭代函数系统对迭代函数系统概念作了推广：它考虑一个额外的固定集合 C（称为凝聚集），并描述吸引子 $A_C \subseteq X$，该吸引子是不动点算子的一个不动点

$$F_C(B) = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(B) \cup C, \quad \text{for each } B \in 2^X.$$

一般而言，对于每个 $B \subset X$，由于 $F_C(B) \supset F(B)$，吸引子 A_C总是包含原迭代函数系统的全局吸引子 A_R。此外，不难验证， $A_C = A_R$ 当且仅当 C 包含于全局吸引子 A_R中。由于局部吸引子总是包含于全局吸引子 A_R中，因此它们无法实现为非平凡的非齐次吸引子。

基于构成局部迭代函数系统理论基础的各项贡献，我们预计这一框架可为进一步拓展相关研究奠定基础，包括研究其遍历性质和维数性质，并有望将 [Klo22、Fen23b、MU96] 扩展至这一更一般的背景。首项进展是研究局部迭代函数系统的拓扑

稳定性与跟踪性质，尤其是确立压缩迭代函数系统的拓扑稳定性。在这一一般框架下，这引出了一个新概念，即组合稳定性。关于精确的定义和陈述，请读者参阅 [OV26]。我们还预期，本文的结果可用于推动放宽压缩性条件的研究、发展局部模糊迭代函数系统理论（模糊局部吸引子的存在性将在 [OSV26]中讨论），并考察更广泛的映射类别，从而扩大该理论在更广泛动力系统中的适用范围，相关研究见 [LKN25、Mic20、OS18、Ste99]（关于迭代函数系统，另请参阅其中的参考文献）；此外，还可将其应用于叶状结构及其相关整体论伪群的研究，这些都是局部迭代函数系统的自然例子（参见[GLW88、Wal04]）。

本文的组织如下。在第2节中，我们定义与局部迭代函数系统的吸引子的拓扑和几何相关的基本概念，并陈述主要结果。连续局部迭代函数系统存在紧吸引子的结论将在第3节中证明。吸引子的编码空间和可容许复合空间的组合描述将在第4节中给出。在第5 节和第6 节中，我们构造扩大的移位空间，用于描述局部吸引子上的局部迭代函数系统的轨道空间和可容许复合空间 $A_{\mathfrak{X}}$，以及由具有无限轨道的点构成的吸引子的（可能是真）分支 $A_{\mathfrak{X}}^{\infty}$。在第7节中，我们证明，通过 Hutchinson-Barnsley 算子的迭代中的某些本质子集，可以对吸引子进行指数逼近。由于本文的主要结果具有广泛的应用范围，我们在第8节讨论了一系列例子。

2. Main results

本节旨在陈述关于局部迭代函数系统的主要结果。在第 2.2 小节中，我们将证明一般局部迭代函数系统存在拓扑吸引子，并研究其吸引域。

2.1. **局部迭代函数系统。** 我们来回顾局部迭代函数系统的概念；这一概念可追溯至 [BH93、Fis95、BHM14]。设 (X, d) 是一个紧致度量空间，并令 2^X 表示 X 的子集超空间。

定义 2.1. 在 X 上的一个局部迭代函数系统 是一个结构 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$，其中 $n \geqslant 2$ 是一个整数，$X_1, \dots, X_n \in 2^X$ 是 X的任意闭子集族，并且对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$，$f_j$: $X_j \to X$都是连续映射。我们将族 $\mathfrak{X} = (X_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 称为该局部迭代函数系统的限制集。

在以下特殊情形中，$X_j = X$ 对于每个 $\leqslant j \leqslant n$ 都对应于通常所说的迭代函数系统（IFS）。特别是，局部迭代函数系统的概念不仅推广了迭代函数系统的概念，还允许出现许多新的现象和吸引子，这些吸引子可能并非自相似（见第8节）。由于度量空间上的连续映射

$_{\sim}f_j\colon\ X_j \to X$ 存在一个连续扩张 $f_j\colon\ X \to X$ 我们将采用这样的观点：局部迭代函数系统的相关不变集是迭代函数系统的某个吸引子的子集。

定义 2.2。局部 局部 *Hutchinson-Barnsley* 算子 $F_{\mathfrak{X}}\colon\ 2^X \to 2^X$ 定义为

$$F_{\mathfrak{X}}(B) = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} f_j(B \cap X_j),$$

对每个 $B \in 2^X$。若集合 $B \subset X$ 满足 $F_{\mathfrak{X}}$-正不变，则称其为 $F_{\mathfrak{X}}(B) \subseteq B$。若$F_{\mathfrak{X}}(B) = B$，则称 B 为一个 $F_{\mathfrak{X}}$-不变集。

我们用下式表示

$$\mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{X}}) = \{B \in 2^X : F_{\mathfrak{X}}(B) = B\} \tag{2.1}$$

所有关于 $R_{\mathfrak{X}}$ 的不变集所构成的集合。根据定义显然可知，局部迭代函数系统原则上可能存在多个不变集，而且并非所有不变集最终都会具有吸引某个点开集的性质。

可以证明，在前述假设下，存在唯一一个 $F_{\mathfrak{X}}$-不变集 $A_{\mathfrak{X}} \subseteq X$，且它关于包含关系是极大的（参见命题 3.1）。我们强调，不能去掉 $\mathfrak{X} = (X_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 中各元素的闭性（参见例 8.1）。

此外，在如此一般的情况下，可能出现 $\mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{X}}) = \{\emptyset\}$ 且$A_{\mathfrak{X}} = \emptyset$ 的情形（例如，在对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$均有 $X_j = \emptyset$ 的平凡情况下）。这引出了以下概念。

定义 2.3. 设 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个局部迭代函数系统。若 $A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$，我们称 $A_{\mathfrak{X}}$ 为对应于 $R_{\mathfrak{X}}$的局部吸引子。

一般而言，等式 $A_{\mathfrak{X}} = \bigcup_{B\in \mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{X}})} B$ （参见命题 3.1的证明）并未揭示集合 $A_{\mathfrak{X}}$的结构和性质。因此，对局部吸引子的几何性质及其对定义域 X_j 和映射 f_j 的依赖关系的研究，将依赖于对后者正则性的进一步假设。

2.2. **拓扑方面**。 我们的第一个结果将在第 3 节给出证明，它确保极大 $F_{\mathfrak{X}}$-不变紧集 $A_{\mathfrak{X}}$的存在性并对其加以刻画。

回顾一下，给定一个度量空间 (X, d)， $K^*(X)$ 上的 *Hausdorff-Pompeiu* 距离 是度量 $\mathrm{dist}_H\colon\ K^*(X) \times K^*(X) \to \mathbb{R}$，其定义为

$$\mathrm{dist}_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = \max\{\max_{a\in A} d(a, B), \max_{b\in B} d(b, A)\},$$

对所有 $A,\ B \in K^*(X)$（此处 $K^*(X)$ 表示X的非空紧子集族）。在研究过程中，我们自然会考虑迭代函数系统的拓扑吸引域这一经典概念的以下推广。

定义 2.4. 考虑正向不变紧集族

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{inv}} = \Big\{ A_0 \in K^*(X) \ : \ F_{\mathfrak{x}}(A_0) \subseteq A_0 \quad \text{and} \quad A_{\mathfrak{x}} \subseteq A_0 \Big\},$$

的嵌套吸引域定义为

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{out}} = \Big\{ A_0 \in K^*(X) \ : \quad \bigcap_{i \geqslant 0} F_{\mathfrak{x}}^i(A_0) = A_{\mathfrak{x}} \Big\},$$

以及 $A_{\mathfrak{x}}$ 的拓扑吸引域，定义为集合族

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{x}} = \Big\{ A_0 \in K^*(X) \ : \ \lim_{i \to \infty} F_{\mathfrak{x}}^i(A_0) = A_{\mathfrak{x}} \Big\}.$$

下一个定理完整刻画了被压缩局部迭代函数系统的局部吸引子吸引的所有可能紧集。

定理 A. 设 $R_{\mathfrak{x}} = (X_j, f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ 是一个局部迭代函数系统，其局部吸引子为 $A_{\mathfrak{x}}$。以下性质成立：

(1) 若 $A_0 \supseteq A_{\mathfrak{x}}$ 是一个 $F_{\mathfrak{x}}$-正向不变闭集，则

$$A_{\mathfrak{x}} = \bigcap_{i \geqslant 0} F_{\mathfrak{x}}^i(A_0);$$

(2) $A_{\mathfrak{x}}$ 是一个紧集，并且在 *Hausdorff-Pompeiu* 距离下有 $A_{\mathfrak{x}} = \lim_{i \to \infty} F_{\mathfrak{x}}^i(X)$；

(3) $\emptyset \neq \mathcal{B}_{\mathfrak{x}}^{inv} \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{x}}^{out} \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{x}} \subseteq K^*(X)$。

下面给出一些评论。对于迭代函数系统，我们知道 $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}} = K^*(X)$，因此在这种情况下，定理A 第（3）项中的所有包含关系都是严格的。据我们所知，文献中首次讨论了如何定义吸引域这一问题（关于这些概念8.2 不同的一个具体例子，请参见示例 $\mathcal{B}_{\mathrm{inv}\mathfrak{x}}$，$\mathcal{B}_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{out}}$以及 $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}}$）。事实上，下文将证明（参见命题 3.3），每个 $F_{\mathfrak{x}}$-正不变闭子集 $A_0 \supseteq A_{\mathfrak{x}}$ 都包含于 $A_{\mathfrak{x}}$的吸引域中，而如果去掉 $F_{\mathfrak{x}}$-不变性条件，这一结论可能不成立（参见示例8.2）。

特别是在压缩情形下 $A_{\mathfrak{x}}$，A_R，$X \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}}$，因此后者绝非空集。一个不那么显而易见的性质是，如果全局迭代函数系统存在吸引子，那么该吸引子也属于由它得到的任意局部吸引子的吸引域（精确表述见推论7.2 ）。

最后，人们或许会认为 $A_{\mathfrak{x}} \subset \bigcup_{i=1}^n X_i$，但事实并非如此（参见例8.3）。前述结果引出了一个关于局部吸引子连续性的首要自然问题。

定理 A 中的第（2）项保证了

$$A_{\mathfrak{x}} := \lim_{i \to \infty} F_{\mathfrak{x}}^i(X) = \bigcap_{i \geqslant 0} F_{\mathfrak{x}}^i(X).$$

注 2.5。 关于压缩局部迭代函数系统存在局部吸引子的既有结果，其思想与定理 A 一致，但依赖于额外的限制性条件：要么是 $X = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} X_j$ 正如奠基性贡献 [Bar88、Bar06、 Fis95], 中的情形；$f_j\,(X_j) \subset X_j$ 对于每个 $1 \leqslant j \leqslant n$ 正如包括 [BHM14、GE18、Mas14、 Jeb25] 等较新近的研究中的情形。

2.3. 压缩局部迭代函数系统的编码空间。设 (X, d) 是一个完备度量空间，且 $(X_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是 X 的任意一族非空闭子集。为了建立合理的 Hutchinson-Barnsley 理论，我们将重点关注以下情形： $R = (X, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个全局迭代函数系统，而 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是通过将 f_j 限制在每个定义域 X_j 上而得到的相应局部迭代函数系统。

定义 2.6。如果对于每个$1 \leqslant j \leqslant n$，映射 $f_j\colon X_j \to X$ 都是压缩映射，则称 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 为压缩局部迭代函数系统；也就是说，存在 $\lambda_j \in [0, 1)$，使得对于每个 $x, y \in X_j.$，都有$d(f_j(x)\ f_j(y))$ $\leqslant \lambda_j\, d(x, y)$。如果 $f_i(X_i) \cap f_j(X_j) = \emptyset,$ 对所有 $1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j.$ 都成立，则称该局部迭代函数系统满足开集条件（OSC）。

前面的概念推广了压缩迭代函数系统的概念，后者对应于对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$ 都有 $X_j = X$ 的特殊情形。

下一个主要结果描述压缩局部迭代函数系统的编码空间。在迭代函数系统的经典情境中，编码空间是全移位（参见第 4 节）；在这种情况下，这种符号动力系统可以利用此类移位空间的动力学特性，而这些特性早已广为人知。在更一般的局部迭代函数系统框架中，编码空间可能要复杂得多。

为证明分类定理，考虑赋予度量的空间 $\Sigma^- = \{1, 2, \ldots, n\}^{-\mathbb{N}}$

$$d_-(\underline{a}, \underline{b}) = \exp\Big(-\sup\{N \geqslant 1\colon a_j = b_j,\ \text{for every } -N \leqslant j \leqslant -1\}\Big)$$

对每个 $a,_\ \underline{b} \in \Sigma^-$，其中 $\sup \emptyset = 0$。下一个结果表明，每个压缩局部迭代函数系统都半共轭于移位空间上的一个压缩局部（标准）迭代函数系统。

定理 B. 设(X, d) 为一个紧致度量空间，且 $X_j \subset X$，对于 $1 \leqslant j \leqslant n$。若$R_{\mathfrak{X}} = (X_j,$ $f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个压缩局部迭代函数系统，则存在一个 σ^--不变的紧致移位空间 $\Sigma^-_{\mathfrak{X}} \subset \Sigma^-$、一个 *Hölder* 连续满射 $\pi_{\mathfrak{X}}\colon\ \Sigma^-_{\mathfrak{X}} \to A_{\mathfrak{X}}$ 以及子集$B_j = \pi^{-1}_{\mathfrak{X}}\,(X_j) \subset \Sigma^-_{\mathfrak{X}}$，使得：

(1) $\Sigma^-_{\mathfrak{X}} = \{\underline{b} \in \Sigma^-\colon \pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b}) \neq \emptyset\} \subseteq \Sigma^-$;
(2) $f_j \circ \pi(\underline{b}) = \pi_{\mathfrak{X}} \circ \tau_j(\underline{b})$ *for every* $\underline{b} \in B_j.$

特别地， $R_{\mathfrak{X}}$ 是到局部迭代函数系统 $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}} = (B_j, \tau_j)_{\ 1\leqslant j\leqslant n}$ 的半共轭；并且，如果该压缩局部迭代函数系统满足开集条件，那么 $\pi_{\mathfrak{X}}$ 就是一个共轭。

2.4. 广义移位空间。 本节介绍本文的一些核心结果，这些结果刻画了压缩局部迭代函数系统的轨道。回顾一下，压缩迭代函数系统 $R = (X,\ f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 的轨道可以通过斜积来描述

$$\begin{array}{rccc} S: & X\times\Sigma & \to & X\times\Sigma \\ & (x,\underline{a}) & \mapsto & (f_{a_0}(x),\sigma(\underline{a})), \end{array} \tag{2.2}$$

其中，$\Sigma = \{1,2,\dots,n\}^{\mathbb{N}_0}$赋予通常距离，且 $\sigma:\ \Sigma\to\Sigma$ 表示通常移位。此外，其吸引子 A_R 是最大不变集，其含义是，不难证明它可以写成

$$A_R = \Big\{x\in X\colon (f_{a_j}\circ\cdots\circ f_{a_0})(x)\in\bigcup_{i=1}^{n}X_i,\ \text{for every}\,\underline{a}\in\Sigma\ \text{and}\ j\geqslant 1\Big\} \tag{2.3}$$

其中 $X_i = f_i(X)$。接下来的主要结果将在第5节给出证明，并将扩展移位空间作为对先前概念的推广。下面引入一些记号。

给定一个压缩局部迭代函数系统 $R_{\mathfrak{x}} = (X_j,\ f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$，我们先考虑由以下点构成的集合

$$\Omega = \Big\{((x_i,a_i))_{i\geqslant 0}\in(X\times\{1,2,\dots,n\})^{\mathbb{N}}\colon x_{i+1} = f_{a_i}(x_i)\ \text{for every}\ i\geqslant 0\Big\} \tag{2.4}$$

这些点允许存在无限轨道（隐含假设是，对于每个$i\geqslant 0$，$x_i\in X_{a_i}$）。这个集合与（2.3）类似。给定 $k\geqslant 0$，记$\pi_{k,X}:\Omega\to X$ 为如下投影：$\pi_{k,X}(((x_i,a_i))_{i\geqslant 0}) = x_k$。

另请考虑移位映射 $\bar\sigma:\ \Omega\to\Omega$，定义为

$$\bar\sigma(((x_0,a_0),(x_1,a_1),(x_2,a_2),\dots)) = ((x_1,a_1),(x_2,a_2),(x_3,a_3)\dots) \tag{2.5}$$

以及定义为如下形式的吸引子 $A_{\mathfrak{x}}$ 的最大不变子集 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$

$$A_{\mathfrak{x}}^{\infty} = \Big\{x\in A_{\mathfrak{x}}\colon \exists(a_j)_{j\geqslant 0}\ \text{so that}\ (f_{a_j}\circ\cdots\circ f_{a_0})(x)\in\bigcup_{i=1}^{n}X_i,\ \text{for every}\,j\geqslant 0\Big\}. \tag{2.6}$$

集合 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$由吸引子 $A_{\mathfrak{x}}$ 中的点构成，这些点具有无限轨道（如例 8.3所示，该集合可能是局部吸引子的真子集）。此外，由于移位空间的紧性，还可以写成

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{x}}^{\infty} &= \Big\{x\in A_{\mathfrak{x}}\colon \forall\,\ell\geqslant 0,\ \exists(a_j)_{0\leqslant j\leqslant\ell}\ \text{so that}\ (f_{a_\ell}\circ\cdots\circ f_{a_0})(x)\in\bigcup_{i=1}^{n}X_i,\ \Big\} \\ &= \bigcap_{\ell\geqslant 1}\ \bigcup_{(a_0,a_1,\dots,a_\ell)}(f_{a_\ell}\circ\cdots\circ f_{a_0})^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}X_i\Big) \end{aligned}$$

它是由闭集构成的可数嵌套序列，因此也是紧子集序列，且这些子集包含于 X中。尽管 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$具有紧性，集合 $A_{\mathfrak{x}}\setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$仍可能在 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$上聚集（参见例8.4）。

最后值得一提的是，上文定义的集合 $A_{\mathfrak{X}}^{\infty}$ 与全局吸引子 A_R 有着非常相似的性质（回顾其作为式（2.3）中极大不变集的刻画）；区别在于， A_R 中的点在所有可能的映射串接下都具有无限轨道，而 $A_{\mathfrak{X}}^{\infty}$ 中的点至少具有一条无限轨道。

定理 C. 设 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个压缩局部迭代函数系统，其局部吸引子为 $A_{\mathfrak{X}}$. 则 $A_{\mathfrak{X}}^{\infty} \neq \emptyset$. 此外，存在 $\Sigma_{\mathfrak{X}} \subset \Sigma_{\mathfrak{X}}^{-} \times \Sigma^{+}$ 使得

(1) $\pi_{\mathfrak{X}} \circ \pi_{\Sigma^-}(\Sigma_{\mathfrak{X}}) = A_{\mathfrak{X}}^{\infty}$; (2) $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ 在双边移位 $\widehat{\sigma}$ 下是不变的，其中 $\widehat{\sigma}$ 定义为

$$\widehat{\sigma}(\ldots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, \boxed{a_0}, a_1, a_2, a_3, \ldots) = (\ldots, b_{-2}, b_{-1}, a_0, \boxed{a_1}, a_2, a_3, a_4, \ldots);$$

(3) 对于每个 $(b, a) \in \Sigma_{\mathfrak{X}}$，都有

$$\widehat{\sigma}(\underline{b}, \underline{a}) = (\underline{b} * a_0, \sigma(\underline{a})) = (\tau_{a_0}(\underline{b}), \sigma(\underline{a})).$$

注 2.7. 在采用恰当编码后，序列 $(\ldots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ 以下述方式刻画局部迭代函数系统的动力学：给定 $x_0 = \pi_{\mathfrak{X}}(\ldots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}) \in A_{\mathfrak{X}}$，便可依次得到后续迭代 $x_1 = f_{a_0}(x_0)$、$x_2 = f_{a_1}(x_1)$，依此类推。如此便形成轨道 $((x_0, a_0), (x_1, a_1) \ldots)$，它等价于

$$(\ldots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, \boxed{a_0}, a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

接下来，我们将转而采用这一表示。

即使对于局部吸引子中的点，无限轨道的存在也可能成为问题（参见例 8.4）。然而，反之则成立：一旦局部吸引子非空， $A_{\mathfrak{X}}$ 总能找到至少一条无限轨道（见命题 5.2）。

这里需要说明几点。定理 C中得到的抽象约束空间，是因为我们在极为一般的情形下进行研究，既不要求开集条件（因此点可能具有多个编码），也不要求所有转移都是可容许的（例如，当 f_i 的定义域并非整个空间时）。

定理 C 中的压缩性假设，仅用于证明 $\pi_{\mathfrak{X}}$ 是一个函数（一般而言，它会是一个集值函数）。

此外，定理 C 适用于满足以下任一假设 $f_i(X_i) \subset X_i$ 的所有压缩局部迭代函数系统的局部吸引子，其中每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ 或 $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ 均已在文献中有所研究。

定理 D. 设 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个以 $A_{\mathfrak{X}}$ 为局部吸引子的压缩局部迭代函数系统。存在一个子集 $\Omega^e(\mathfrak{X}) \subset (X \times \{0, 1, \ldots, n\})^{\mathbb{Z}}$，使得以下结论成立：

(1) $\pi_{\Sigma^-}\left(\Omega^e(\mathfrak{X})\right) = \Sigma_{\mathfrak{X}}^{-}$; (2) $\pi_{0,X}(\Omega^e(\mathfrak{X})) = A_{\mathfrak{X}}$,

特别是，$\Omega^e(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$; (3) 下一个图表可交换

$$\begin{array}{ccc} \Omega^e(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & \Omega^e(\mathfrak{X}) \\ \pi_{-1,X}\times\pi_{\Sigma^-}\downarrow & & \downarrow \pi_{1,X}\times\pi_{\Sigma^-} \\ X\times\Sigma^- & \xrightarrow{S} & X\times\Sigma^- \end{array}$$

where $S(x,\underline{b}) = (f_{b_{-1}}(x), \sigma^-(\underline{b}))$.

扩展移位空间 $\Omega^e(\mathfrak{X})$ 由关系（6.1）和（6.2）定义。

在定义局部迭代函数系统的映射 f_i 均可逆这一特殊情形下，定理 D可表述得更简单，类似于定理 C的表述，其证明留作读者的一道简单练习。

推论 E。 设 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个压缩局部迭代函数系统，其局部吸引子为 $A_{\mathfrak{X}}$，并设 $\Omega^e(\mathfrak{X}) \subset (X\times\{0,1,\ldots,n\})^{\mathbb{Z}}$ 由定理 *D*给出。如果所有映射 $f_j:\ X_j \to f_j(X_j)$ 均可逆，则下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^e(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & \Omega^e(\mathfrak{X}) \\ \pi_{0,X}\times\pi_{\Sigma^+}\downarrow & & \downarrow \pi_{0,X}\times\pi_{\Sigma^+} \\ X\times\Sigma^+ & \xrightarrow{\hat{S}} & X\times\Sigma^+ \end{array}$$

其中 $\hat{S}(x,\underline{a}) = (f_{b_{-1}}^{-1}(x)\,\tau_{b_{-1}}(a))$ 以及 $\tau_{b_{-1}}(a) = (b_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$。

在压缩局部迭代函数系统的语境下 $R_{\mathfrak{X}}$，人们通常希望证明吸引域中的集合 $A_{\mathfrak{X}}$ 向局部吸引子指数收敛，以此作为定理A中所证明的拓扑描述的补充。然而，这一点一般并不成立；这一事实促使我们在 Hutchinson-Barnsley 算子的迭代中引入以下本质部分的概念。对于每个紧集 $K\subset X$， $k\geqslant 1$ 记作

$$F_{\mathfrak{X}}^k(K) = \bigcup_{\underline{b}\in\Sigma^-} V_{[\underline{b}]_k} \quad \text{where} \quad V_{[\underline{b}]_k} = f_{b_{-1}}\circ f_{b_{-2}}\circ\ldots f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}}),$$

其中，对于每个 $b\in\Sigma^-$ 和 $k\geqslant 1$， $[b]_k := (\underline{b}_{-k},\ \ldots\ldots,\ b_{-2},\ b_{-1})$，并且对每个整数 $-k\leqslant j\leqslant -1$， $f_{b_j}(A) = f_{b_j}(A\cap X_{b_j})$（为避免符号过于繁琐，以下全文中我们将简单地写作 f_j，而不写作 f_j）。

定义 2.8。 $F_{\mathfrak{X}}^k(K)$ 的本质部分，记为 $\mathrm{ess}(\mathrm{F}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{K}))$，定义为

$$\mathrm{ess}(\mathrm{F}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{K})) = \bigcup \mathrm{V}_{[\mathrm{b}]_{\mathrm{k}}} \in \mathrm{K}^*(\mathrm{X}),$$

其中的并集取遍所有序列 $b\in\Sigma_{\mathfrak{X}}$.

粗略地说，本质部分由在构造局部吸引子的过程中永远不会消失的柱集组成。更准确地说，如果 $V_{[b]_k}\subset \mathrm{ess}(\mathrm{F}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{K}))$，那么 $V_{[b]_n}\neq\emptyset$对每个 $n\geqslant k$ 都成立。在迭代函数系统的特殊情形下，显然，对每个$k\geqslant 1$， $\mathrm{ess}(\mathrm{F}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{K})) = \mathrm{F}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{K})$。

现在我们可以陈述本文的最终结果，即 Hutchinson-Barnsley 吸引子下的迭代的本质部分以指数速度收敛到局部吸引子。

定理 F。 假设 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个压缩局部迭代函数系统，并且假设$A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$。则以下性质成立：

(1)

$$A_{\mathfrak{X}} = \bigcap_{i\geqslant 0} F^i_{\mathfrak{X}}(A_R) = \lim_{i\to\infty} F^i_{\mathfrak{X}}(A_R);$$

(2) 存在 $\lambda \in (0,1)$，使得对于任意 $A_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ 和任意 $i \geqslant 1$,

$$dist_H(\mathrm{ess}(\mathrm{F}^{\mathrm{i}}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{A}_0)), \mathrm{A}_{\mathfrak{X}}) \leqslant \lambda^{\mathrm{i}} diam(\mathrm{X}).$$

其中，$dist_H(\cdot,\cdot)$ 表示豪斯多夫距离。

注 2.9。 全局迭代函数系统 R 的一个基本性质是，其唯一的分形吸引子$A_R \in K^*(X)$ 满足 $F(A_R) = A_R$且 $\lim_{k\to\infty} F^k(A) = A_R$对于任意 $A \in K^*(X)$（参见例如[Hut81、Bar86]）。特别地，这保证了可以从任意初始紧集（包括单点集）通过 Hutchinson-Barnsley 算子的迭代来逼近全局吸引子。我们注意到，定理 F 是最优的，因为上述基本性质可能不成立，例 8.2对此作了说明。

值得一提的是，上述第 (2) 项中出现的常数 λ 为 $\lambda = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j$，其中 λ_j 表示每个映射 f_j的压缩常数。

最后，为了说明局部迭代函数系统的广泛应用范围，我们将展示，后者包含图定向迭代函数系统这一类特例；也就是说，每个图导向迭代函数系统都可以实现为一个局部迭代函数系统。下面回顾图定向迭代函数系统的概念，并约定相关记号。

设 $G = (V, E, i, t)$ 是一个有限有向图，其中 $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ 是顶点集合，$E \subset V^2$ 是有向边集合，函数 $i : E \to V$ 和 $t : E \to V$ 分别表示一条边的起始顶点和终止顶点。换言之，若存在一条从 v_i 到 v_j的有向边，则 $e = (v_i, v_j) \in E$，此时 $i((v_i, v_j)) = v_i$且 $t((v_i, v_j)) = v_j$.

紧致度量空间 (X, d) 上的图定向迭代函数系统 $(,(X_v)_{v\in V},(f_e)_{e\in E})$由一个有限有向图 $G = (V, E, i, t)$、X 的一个紧致子集族 $(X_v)_{v\in V}$，以及一族压缩映射 $f_e : X_{t(e)} \to X_{i(e)}, e \in E$.组成

对于上述图定向迭代函数系统，可以关联以下空间

$$\mathcal{K} := \left\{ (B_v)_{v\in V} \mid B_v \subseteq K^*(X_v),\ \forall v \in V \right\} \tag{2.7}$$

并考虑分形算子 $F_G : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$，其定义为

$$(F_G((B_v)_{v\in V}))_u := \bigcup_{e\in E,\ i(e)=u} f_e(B_{t(e)}),$$

对于每个 $u \in V$ 和 $B = (B_v)_{v\in V} \in \mathcal{K}$。满足$F_G(A) = A.$的元素 $A := (A_v)_{v\in V} \in \mathcal{K}$ 称为图定向迭代函数系统 $(G, (X_v)_{v\in V}, (f_e)_{e\in E})$ 的不变集。众所周知，每个压缩图定向迭代函数系统都有唯一的不变集，该集合相对于算子 F_G 是吸引的，因此是一个吸引子，并满足

$$A_v = \bigcup_{e\in E,\, i(e)=v} f_e(A_{t(e)}). \tag{2.8}$$

(参见 [DV24，命题 3。4] 及其中的参考文献）。

我们称度量空间 Y 是度量空间 X 的一个增强版本，如果存在等距嵌入 $X \to Y$。设 (X, d) 是一个紧致度量空间，且 $(G, (X_v)_{v\in V}, (f_e)_{e\in E})$ 是定义在 X 上的压缩图定向迭代函数系统。考虑空间$Y := X \times V$，并赋予度量

$$d_Y\big((x, v), (y, w)\big) = d(x, y) + \mathbf{1}_{\{v\neq w\}},$$

其中，当 $v \neq w$ 时 $\mathbf{1}_{\{v\neq w\}} = 1$，否则等于 0。由于 V 是有限的，因此 (Y, d_Y) 是一个紧致度量空间。

接下来，我们在 Y 上定义一个合适的压缩局部迭代函数系统。对每个 $e \in E$，考虑映射

$$g_e : Y \to Y \quad \text{given by} \quad g_e(x, v) = \big(f_e(x), i(e)\big)$$

容易证明，每个映射 g_e 都是 Y 上的压缩映射：由于 f_e 是利普希茨常数为 $0 \leqslant \lambda_e < 1$ 的压缩映射，因此对于任意 (x, v)，$(y, w) \in D_e$，

$$d_Y\big(g_e(x, v), g_e(y, w)\big) = d\big(f_e(x), f_e(y)\big) \leqslant \lambda_e\, d(x, y) \leqslant \lambda_e\, d_Y\big((x, v), (y, w)\big).$$

现在，对每个 $e \in E$，取集合 $D_e = X_{t(e)} \times \{t(e)\} \subset Y$。

考虑压缩局部迭代函数系统 $R_D = (D_e, g_e)_{e\in V}$，并用 $B \subset Y$ 表示其局部吸引子。特别地

$$B = \bigcup_{e\in E} g_e(B \cap D_e). \tag{2.9}$$

由于 $B \subset Y$ 它由此诱导出一个元素 $(B_v)_{v\in V}$ 属于 $\mathcal{K}$（回顾（2.7））由

$$B_v = \pi_1(B \cap (X \times \{v\})) \quad \text{for each } v \in V.$$

我们断言 $(B_v)_{v\in V}$ 是分形算子 F_G的不动点。事实上，由（2.9）以及 $D_e \subset X \times \{t(e)\}$，$f_e(X_{t(e)}) \subset X_{i(e)}$和 $g_e(B \cap D_e) \subset X_{i(e)} \times \{i(e)\}$这一事实可推出

$$B \subset \bigcup_{e\in E} X_{i(e)} \times \{i(e)\}$$

因此

$$B_v = \pi_1(B \cap (X \times \{v\}) = \pi_1\Big(B \cap (X_v \times \{v\})\Big)$$

对每个 $v \in V$ 都成立。此外，

$$B = \bigcup_{e\in E} g_e(B \cap D_e) = \bigcup_{v\in V} \left(\bigcup_{e:\, i(e)=v} g_e(B \cap D_e) \right) = \bigcup_{v\in V} \left(\bigcup_{e:\, i(e)=v} f_e(\pi_1(B \cap D_e)) \right) \times \{v\}$$

其中 $\pi_1 \colon Y \to X$ 表示在第一个坐标上的投影。由于 $B = \bigcup_{v\in V} B_v \times \{v\}$，我们得出

$$B_v = \bigcup_{e:\, i(e)=v} f_e(\pi_1(B \cap D_e)) = \bigcup_{e:\, i(e)=v} f_e(B_{t(e)})$$

这证明了（2.8）。由于分形算子 F_G 有唯一的不动点，我们推知 $(B_v)_{v\in V}$ 是该压缩图定向迭代函数系统的吸引子。综上，证明了以下定理。

定理 G。紧致度量空间 $(G, (X_v)_{v\in V}, (f_e)_{e\in E})$ 上的每个压缩图定向迭代函数系统 (X, d) 的吸引子，都可由扩充的紧致度量空间 Y 的一个紧子集上的压缩局部迭代函数系统得到。

注2.10。显然，存在并非图定向的局部迭代函数系统。事实上，只要局部迭代函数系统的吸引子有端点，或者定义域的像不满足集合方程组（2.8），就足够了。

3. Existence of a local attractor and its topological basin

本节证明由连续映射生成的局部迭代函数系统的相关结果，这些结果陈述于定理 A中。首先证明极大不变集的存在性。

命题 3.1。 设 $R_{\mathfrak{x}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个局部迭代函数系统。集合 $(\mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}}) \subseteq)$ 是一个非空有向集。特别地，存在唯一的极大不变集 $A_{\mathfrak{x}} \subseteq \mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}})$，且它满足 $A_{\mathfrak{x}} = \bigcup_{B\in \mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}})} B$。

证明。 显然，$(\mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}}) \subseteq)$ 是一个非空偏序集。事实上，为了说明 $\mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}}) \neq \emptyset$，我们注意到 $\emptyset \in 2^X$ 和

$$F_{\mathfrak{x}}(\emptyset) = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} f_j(\emptyset \cap X_j) = \emptyset$$

因此 $\emptyset \in \mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}})$。现在，给定 $\mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}})$ 中的一个全序列 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots$，我们断言集合 $B = \bigcup_{i\geqslant 1} A_i$ 属于 $\mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}})$，因为

$$F_{\mathfrak{x}}\Big(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\Big) = \bigcup_{i\geqslant 1} F_{\mathfrak{x}}(A_i) = \bigcup_{i\geqslant 1} A_i$$

（因为对于所有 $i \geqslant 1$， $A_i \in \mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}})$），因此它是该序列的一个上界。根据佐恩引理，存在至少一个极大元 $A_{\mathfrak{x}}$ in $(\mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{x}}) \subseteq)$。接下来

证明这个极大元是唯一的。注意，(Fix($F_{\mathfrak{X}}$) $\subseteq$) 是一个有向集：如果M， $N \in$ Fix($F_{\mathfrak{X}}$)，那么 $B = M \cup N \in$ Fix($F_{\mathfrak{X}}$)，因为

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{X}}(M \cup N) &= \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j((M \cup N) \cap X_j) \\ &= \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(M \cap X_j) \cup \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(N \cap X_j) = M \cup N. \end{aligned}$$

这意味着局部吸引子 $A_{\mathfrak{X}}$的唯一性。事实上，否则就会存在两个不同的极大集合 A, A'位于 (Fix($F_{\mathfrak{X}}$) $\subseteq$) 中，由此可以构造出一个严格更大的极大元 $A \cup A'$，从而产生矛盾。最后，我们注意到必然有等式 $A_{\mathfrak{X}} = \bigcup_{B \in \mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{X}})} B$，因为集合$\bigcup_{B \in \mathrm{Fix}(F_{\mathfrak{X}})} B$ 包含所有 $F_{\mathfrak{X}}$-不变子集。□

接下来我们研究局部迭代函数系统的吸引集，这一事实促使我们引入以下概念。

定义 3.2。 假设对于某个 $A_0 \in K^*(X)$，性质 $A_{i+1} \subseteq A_i$， $i \geqslant 0$ 成立，其中对于每个 $i \geqslant 0$， $A_i = F^i_{\mathfrak{X}}(A_0)$。那么， $A' = \bigcap_{i \geqslant 0} A_i \subseteq A_0$ 称为 $R_{\mathfrak{X}}$的序列局部吸引子 。

在下一个命题中，我们证明局部 Hutchinson-Barnsley 算子的一些其他性质 $F_{\mathfrak{X}}$; 这些性质并非显而易见，因为该算子甚至可能不是半连续的。不过，下文命题 3.3 中的第 (2) 项保证，每个$F_{\mathfrak{X}}$-正不变子集 $A_0 \in K^*(X$都会导出如上所述的嵌套序列，从而产生一个序列局部吸引子，而它可能是 $A_{\mathfrak{X}}$ (参见例 8.2) 的真子集。

命题 3.3。 设 $R_{\mathfrak{X}} = (X, f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ 是一个局部迭代函数系统。

(1) 若 $A \subseteq B$，则对任意 $A, B \in 2^X$，有 $F_{\mathfrak{X}}(A) \subseteq F_{\mathfrak{X}}(B)$。 *(2)* 若 $A_0 \in 2^X$ 是 $F_{\mathfrak{X}}$-正不变的，且 $A_i = F^i_{\mathfrak{X}}(A_0)$，则 $A_{i+1} \subseteq A_i$, $i \geqslant 0$。 *(3)* 设 $A_0 \in K^*(X)$ 是 $F_{\mathfrak{X}}$-正不变的，且 $A' = \bigcap_{i \geqslant 0} F^i_{\mathfrak{X}}(A_0)$ 是其序列吸引子。若对每个 $i \geqslant 0$ 都有 $F^i_{\mathfrak{X}}(A_0) \neq \emptyset$，则 $A' \in K^*(X)$，且 $F_{\mathfrak{X}}(A') = A'$。 *(4)* 若该局部迭代函数系统有一个局部吸引子 $A_{\mathfrak{X}}$，且 A_0 是一个包含 $A_{\mathfrak{X}}$ 的闭 $F_{\mathfrak{X}}$-正不变子集，则 $A' = A_{\mathfrak{X}}$。特别是

$$A_{\mathfrak{X}} = \bigcap_{i \geqslant 0} F^i_{\mathfrak{X}}(A_0)$$

是一个紧集。

(5) 如果 $A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$，那么

$$A_{\mathfrak{X}} = \bigcap_{i \geqslant 0} F^i_{\mathfrak{X}}(X) = \lim_{i \to \infty} F^i_{\mathfrak{X}}(X),$$

关于 *Hausdorff-Pompeiu* 距离。

证明。我们分别证明各项。第 (1) 项中所述的局部 Hutchinson-Barnsley 算子的单调性可由以下事实得出：由于 $A \subseteq B$ 我们得到 $A \cap X_j \subseteq B \cap X_j$对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$均成立。因此，对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$， $f_j(A \cap X_j) \subseteq f_j(B \cap X_j)$，这就证明了

第（2）项的证明采用归纳法。注意，显然 $A_1 = F_{\mathfrak{X}}(A_0) \subseteq A_0$。现在，假设 $A_i \subseteq A_{i-1}$，根据局部 Hutchinson-Barnsley 算子的单调性以及序列 A_i 的定义，可以得出

$$A_{i+1} = F_{\mathfrak{X}}(A_i) \subseteq F_{\mathfrak{X}}(A_{i-1}) = A_i, \quad \text{for every } i \geqslant 0.$$

现在证明第（3）项。利用第（2）项，给定任意 $F_{\mathfrak{X}}$-正不变集 $A_0 \in K^*(X)$，可以考虑其序列吸引子 $A' = \bigcap_{i \geqslant 0} A_i \subseteq A_0$。根据 Cantor 交集定理，我们断言 A' 非空。事实上， A' 是紧嵌套集的可数交集，因为根据假设，对于每个 $i \geqslant 0$， $F_{\mathfrak{X}}$ 保持紧集，且 $F^i_{\mathfrak{X}}(A_0) \neq \emptyset$ 。剩下要证明 $F_{\mathfrak{X}}(A') = A'$。由于 $F_{\mathfrak{X}}$ 可能不连续，因此我们无法将算子分配到无限交集中，故将直接证明该恒等式。

给定 $x \in F_{\mathfrak{X}}(A')$，存在 $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ 和 $y \in A' \cap X_{j_0}$ 使得 $x = f_{j_0}(y)$。由于$y \in \bigcap_{i \geqslant 0} A_i$，我们得到 $x \in \bigcap_{i \geqslant 1} A_i = A'$，这证明了 $F_{\mathfrak{X}}(A') \subseteq A'$。反过来，任取一点 $x \in A' = \bigcap_{i \geqslant 1} A_i$。注意，对于每个 $i \geqslant 1$

$$F^i_{\mathfrak{X}}(A_0) = \bigcup f_{j_1} \circ f_{j_2} \circ \ldots f_{j_i}(X_{j_i}),$$

其中，集合的并集遍历所有可能的 $1 \leqslant j_1$、.....、 $j_i \leqslant n$。因此，对于每个 $i \geqslant 1$，都可以写成

$$x = f_{j_{i,1}} \circ f_{j_{i,2}} \circ \ldots f_{j_{i,i}}(y_i)$$

对于某个 $y_i \in X_{j_{i,\,i}}$。由于序列 $(j_{i,\,1})_{i \geqslant 1}$ 取值于有限集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$，鸽巢原理保证存在一个子序列，使得沿该子序列该序列恒等于某个 $1 \leqslant j_* \leqslant n$ （为简洁起见，我们滥用记号，仍将该子序列记为 $(j_{i,\,1})_{i \geqslant 1}$）。这样，对于每个 $i \geqslant 1$,

$$x = f_{j_*}(z_i), \quad \text{where} \quad z_i = f_{j_{i,2}} \circ \ldots f_{j_{i,i}}(y_i) \in X_{j_*}$$

X_{j_*} 的闭性（因而紧性）以及 f_{j_*} 的连续性保证了序列（z_i）$_{i \geqslant 1}$ 存在一个聚点 $z \in A' \cap X_{j_*}$，使得 $x = f_{j_*}$（z） $\in F_{\mathfrak{X}}$（A'）。这证明了第（3）项。

下面证明第（4）项。现在，设 $A_0 \supseteq A_{\mathfrak{X}}$ 是一个 $F_{\mathfrak{X}}$-正不变子集。由算子的单调性可知，对于每个 $i \geqslant 0$，都有 $F^i_{\mathfrak{X}}$（A_0） $\supseteq F^i_{\mathfrak{X}}$（$A_{\mathfrak{X}}$） $= A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$，因此 $\bigcap_{i \geqslant 0} F^i_{\mathfrak{X}}$（$A_0$） $\supseteq A_{\mathfrak{X}}$.。然后，由 $A_{\mathfrak{X}}$的极大性可得 $A' = A_{\mathfrak{X}}$。因此，根据第（3）项可得 $A_{\mathfrak{X}} \in K^*$（X）。

最后，第（5）项中的第一个等式直接由第（4）项得出，因为 $A_0 = X$ 显然是 $F_{\mathfrak{X}}$-正不变的，且包含 $A_{\mathfrak{X}}$。第（5）项中的第二个等式依赖于局部 Hutchinson-Barnsley 算子的描述。事实上，假设确保局部 Hutchinson-Barnsley 算子满足 $F_{\mathfrak{X}}(K^*(X)) \subseteq K^*(X)$

因为，对于 $A_{i-1} \in K^*(X)$ 且 X_j 闭集意味着 $A_{i-1} \cap X_j$ 要么为空，要么是紧集。由于 A_i 对于所有 $i \geqslant 1$ 都必须非空，并且每个 f_j 都是连续的，因此有$f_j(A_{i-1} \cap X_j) \in K^*(X)$ 对某些指标 j成立，而对其他指标则可能为空。因此，A_i 对于所有 i都是非空紧集，故由第（3）项可知，局部吸引子非空。根据$K^*(X)$ [Le03第（vii）项]中豪斯多夫-庞皮厄度量的已知性质，可得收敛性。至此，命题得证。□

注 3.4。假设 $F_{\mathfrak{X}}$不变性，是命题 3.3中的关键条件。对于任意集合 $A_0 \subsetneq X$，由 $A_i)_{i\geqslant 0}$ 给出的序列 $A_i = F^i_{\mathfrak{X}}(A_0)$ 不一定是递减的（例如，当 $X_0 = \{x\}$ 满足 $f_j(x) \neq x$ 对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$都成立时）。

注 3.5。如果去掉命题 A_0 3.3 中紧集包含局部吸引子这一假设，3.3 就可能得到真包含于 A' 中的真不变集 $A_{\mathfrak{X}}$ （参见例 8.2）。因此，我们将得出结论：即使在一般度量空间的背景下，也不能指望映射 $F_{\mathfrak{X}}$ 相对于豪斯多夫-庞皮厄度量是压缩映射，除非施加某些强条件，例如所有限制都等于整个空间（全局迭代函数系统）。此外，我们还将给出一些局部吸引子的例子，它们既不是传递的，也不随限制连续变化。

局部吸引子一个非常有趣的特点是，它取决于每个映射的定义域，而经典迭代函数系统并不存在这一特点。下面的命题将其刻画为一种侧向上半连续性。

命题3.6。设 $R = (X, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个全局迭代函数系统，$(T, \leqslant)$ 是一个全序集，且 $T \ni t \mapsto \mathfrak{X}^t \in (K^*(X)^n)$ 是一个非递减的限制族，也就是说，若 $t \leqslant s$，则对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$都有 $X^t_j \subseteq X^s_j$。那么：

(1) 对任意紧集 K，若 $t \leqslant s$，则 $F_{\mathfrak{X}^t}(K) \subseteq F_{\mathfrak{X}^s}(K)$；(2) 函数 $T \ni t \mapsto A_{\mathfrak{X}^t}$ （由 $\mathfrak{X}^t$定义的局部迭代函数系统的局部吸引子）是非递减的。

证明。对于 第一项，考虑任意紧集 K。由于 $K \cap X^t_j \subseteq K \cap X^s_j$我们得到

$$F_{\mathfrak{X}^t}(K) = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} f_j(K \cap X^t_j) \subseteq \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} f_j(K \cap X^s_j) = F_{\mathfrak{X}^s}(K).$$

对于第二项，我们回顾命题3.3，

$$A_{\mathfrak{X}^t} = \bigcap_{i\geqslant 0} F^i_{\mathfrak{X}^t}(X) \subseteq \bigcap_{i\geqslant 0} F^i_{\mathfrak{X}^s}(X) = A_{\mathfrak{X}^s}.$$

□

局部吸引子的单调性自然出现在局部迭代函数系统的分岔中，即当我们用限制的非递增族来参数化由迭代函数系统得到的局部迭代函数系统时。

3.1. **定理 A 的证明**。定理 A 的第（1）项和第（2）项已在上文得到证明。下面只需证明第（3）项。根据命题 3.3，这可直接得到。事实上，由命题 3.3 可知 $X \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{inv}}$，因此 $\mathcal{B}_{\mathrm{inv}_{\mathfrak{X}}} \neq \emptyset$。此外，根据定义 2.4，包含关系$\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \subset K^*(X)$ 成立。现在我们证明其余的包含关系。

断言 1： $\mathcal{B}_{\mathrm{inv}_{\mathfrak{X}}} \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{out}}$

考虑 $A_0 \in K^*(X)$，使得 $F_{\mathfrak{X}}(A_0) \subseteq A_0$ 且 $A_{\mathfrak{X}} \subseteq A_0$。根据命题 3.3中的第（2）—（4）项，序列 $(F_{\mathfrak{X}}^i(A_0))_{i\geqslant 0}$ 单调递减至局部吸引子 $A_{\mathfrak{X}}$。因此，$A_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{out}}$。

断言 2： $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{out}} \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$。

考虑 $A_0 \in K^*(X)$，使得 $\bigcap_{i\geqslant 0} F_{\mathfrak{X}}^i(A_0) = A_{\mathfrak{X}}$。然后，根据 [Le03，第（vii）项]$\lim_{i\to\infty} F_{\mathfrak{X}}^i(A_0) = A_{\mathfrak{X}}$。因此，$A_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$。至此，定理得证。□

4. Code spaces

本节描述压缩局部迭代函数系统的编码空间，从而证明定理 B。为与经典框架进行比较，我们先考察迭代函数系统的编码空间。

4.1. **压缩迭代函数系统的编码空间**。设 $R = (X, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是紧致度量空间 (X, d) 上的压缩迭代函数系统，并令 $\Sigma = \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}}$ 表示全移位空间。固定任意一点 $x \in X$。一方面，对于每个序列 $a = (a_0, a_1, \ldots) \in \Sigma$，可将由该序列生成的 X 中点序列的轨道与之对应

$$x, f_{a_0}(x), f_{a_1}(f_{a_0}(x)), \ldots \tag{4.1}$$

映射 f_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 的压缩性保证集合$f_{a_k}(\ldots f_{a_1}(f_{a_0}(X)))$ 的直径随着 k 趋于无穷而趋于零；特别地，序列（4.1）的渐近行为不依赖于点 x。

另一方面，自然可以按以下方式引入一个编码空间。给定$b = (\ldots, b_{-2}, b_{-1}) \in \Sigma^-$:
$= \{1, \ldots, n\}^{-\mathbb{N}}$，考虑由以下方式定义的编码映射

$$\pi(\underline{b}) = \lim_{k\to\infty} f_{b_{-1}}(\cdots(f_{b_{-k}}(X)). \tag{4.2}$$

回顾 Σ^- 中带符号元素的连接，其定义如下：

$$\underline{b} * j := (\ldots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}) * j = (\ldots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, j)$$

对于任意 $b = (\ldots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}) \in \Sigma^-$ 以及 $j \in \{1, \ldots, n\}$。不难验证，π 是原始迭代函数系统与Σ^-上的标准压缩迭代函数系统之间的连续半共轭：$S = (\Sigma^-, \tau_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$，由映射 $\tau_j(b) = b * j$ 给出。事实上，很容易验证下图可交换

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^- & \xrightarrow{\tau_j} & \Sigma^- \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f_j} & X \end{array}$$

也就是说，对于每个 $1 \leqslant j \leqslant n$, $b \in \Sigma^-$, $f_j(\pi(b)) = \pi(\tau_j(b))$，且 $\pi(\Sigma^-) = A_R$。因此，空间 Σ 称为 R的编码空间 。

4.2. **压缩局部 IFS 的编码空间**。本小节旨在通过定理 B描述压缩局部迭代函数系统的编码空间。

设 $R = (X, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$是一个压缩迭代函数系统， $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$是将该压缩迭代函数系统限制在闭子集上所得到的相关局部迭代函数系统 $X_j \subset X\,(1 \leqslant j \leqslant n)$。一个关键难点在于，正如 Barnsley [Bar06，第389], 页所指出的，作用于局部迭代函数系统编码空间上的移位变换可能并不对应任何有限阶马尔可夫链。

受迭代函数系统编码空间定义的启发，人们试图通过考察以点 $x \in A_{\mathfrak{X}}$ 结尾的连续轨道，来定义编码映射和编码空间，并检查其 ω-极限点。这将通过递归使用 $F_{\mathfrak{X}}$-不变性条件 $A_{\mathfrak{X}} = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} f_i(A_{\mathfrak{X}} \cap X_i)$ 来实现。事实上，给定 $x \in A_{\mathfrak{X}}$，存在 $x_{-1} \in A_{\mathfrak{X}} \cap X_{b_{-1}}$ 和 $1 \leqslant b_{-1} \leqslant n$，使得 $x = f_{b_{-1}}(x_{-1})$。类似地，对于每个 $k \geqslant 1$，可以写出

$$x = f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \ldots f_{b_{-k}}(x_{-k}) \tag{4.3}$$

其中 $1 \leqslant b_{-k} \leqslant n$ 和 $x_{-k} \in X_{-b_k}$。

注意，由于所有映射 f_i 都是压缩映射，每个点 $x \in A_{\mathfrak{X}}$ 都可以通过（4.3）中的过程构造，而不依赖于点 $(x_{-k})_{k\geqslant 1}$。事实上，对于每个 $b \in \Sigma^-$ 和$k \geqslant 1$，由于序列 $(V_{[b]_k})_{k\geqslant 1}$ 是递减的，且集合 $V_{[b]_k}$ 的直径随着 $k \to \infty$ 趋于零（回想一下，这些映射都是压缩映射），因此取极限时，我们得到的要么是空集，要么是单点集。这使我们可以如下定义局部编码映射。

定义 4.1。给定一个局部迭代函数系统，我们将局部编码映射 $\pi_{\mathfrak{X}} : \Sigma^- \to 2^X$ 定义为如下集合函数

$$\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b}) = \bigcap_{k\geqslant 1} V_{[\underline{b}]_k} = \lim_{k\to\infty} V_{[\underline{b}]_k}.$$

我们将局部编码空间 定义为集合

$$\Sigma^-_{\mathfrak{X}} := \{\underline{b} \in \Sigma^- : \pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b}) \neq \emptyset\} \subseteq \Sigma^-. \tag{4.4}$$

根据构造，对于每个 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{X}}$， $\pi_{\mathfrak{X}}(b)$都是一个单点集。

引理 4.2. 设 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个局部迭代函数系统，且假设 $A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$。那么空间 $\Sigma^-_{\mathfrak{X}}$ 是一个非空紧集。

证明。 考虑一个关于环境空间度量收敛到 $b^* \in \Sigma^-$ 的 $b^m \in \Sigma^-_{\mathfrak{X}}$ 序列。我们声称 $b^* \in \Sigma^-_{\mathfrak{X}}$。要证明这一点，只需证明 $\pi_{\mathfrak{X}}(b)$ –

是一个非空集合。我们知道，如果 $d(b^m, \underline{b}^*) \leq e^{-N}$，那么 $b^m_{-i} = b^*_{-i}$ 对于 $-N \leqslant -i \leqslant -1$ 成立。这意味着

$$V_{[\underline{b}^*]_N} = V_{[\underline{b}^m]_N} \neq \emptyset.$$

由于任意嵌套的紧集序列的交集都非空，因此已证明 $\pi_{\mathfrak{x}}(b^*) = \bigcap_{k\geqslant 1} V_{[b^*]_k} \neq \emptyset$。这意味着 $b^* \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$。这证明 $\Sigma^-_{\mathfrak{x}}$ 是紧集 Σ^- 的闭子集，因此是紧的，并且 $\Sigma^-_{\mathfrak{x}} \neq \emptyset$，如所需。□

现在，我们来考虑由下式给出的地址映射 $\Psi\colon X \to 2^{\{1,\dots,n\}}$

$$\Psi(x) = \{1 \leqslant j \leqslant n \colon x \in X_j\}.$$

不难验证，在迭代函数系统（即对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$，$X_j = X$）这一特殊情形下，编码空间 $\Sigma^-_{\mathfrak{x}} = \Sigma^-$ 就是全移位，因为对每个 $x \in X$，都有 $\Psi(x) = \{1, 2, \dots, n\}$。

命题 4.3。以下性质成立：

(1) 对每个 $x \in A_{\mathfrak{x}}$，都存在 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$，使得 $\pi_{\mathfrak{x}}(b) = \{x\}$；*(2)* 若 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$ 且 $j \in \Psi(\pi_{\mathfrak{x}}(b))$，则 $b * j \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$ 且 $\pi_{\mathfrak{x}}(b * j) = f_j(\pi_{\mathfrak{x}}(b))$；*(3)* $A_{\mathfrak{x}} = \pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}})$；*(4)* 由 $\sigma^-((b_k)_{k\leqslant -1}) = (b_{k-1})_{k\leqslant -1}$ 定义的移位 $\sigma^- \colon \Sigma^- \to \Sigma^-$ 满足 $\sigma^-(\Sigma^-_{\mathfrak{x}}) = \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$。

证明。性质 (1) 由 $\Sigma^-_{\mathfrak{x}}$ 的定义可得，并且它保证 $A_{\mathfrak{x}} \subseteq \pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}})$。事实上，如同在 (4.3) 中那样，递归地利用 $F_{\mathfrak{x}}$-不变性条件 $A_{\mathfrak{x}} = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} f_i(A_{\mathfrak{x}} \cap X_i)$，对于每个 $x \in A_{\mathfrak{x}}$ 及每个 $k \geqslant 1$，都存在 $(b_{-j})_{1\leqslant j\leqslant k}$ 和 $x_{-k} \in X_{-b_k}$，使得 $x = f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \dots f_{b_{-k}}(x_{-k})$。因此，$b = (\dots, b_{-k}, \dots, b_{-2}, b_{-1}) \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$ 且 $\pi_{\mathfrak{x}}(b) = x$。

为了证明第 (2) 项，固定 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$ 并写作 $x = \pi_{\mathfrak{x}}(b) \in A_{\mathfrak{x}}$。由于 $A_{\mathfrak{x}}$ 是 $F_{\mathfrak{x}}$-不变的，若 $j \in \Psi(x)$，则 $x \in X_j$，并且根据映射 f_j 的连续性，

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_j(\lim_{k\to\infty} V_{[\underline{b}]_k}) = f_j(\lim_{k\to\infty} f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \dots \circ f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}})) \\ &= \lim_{k\to\infty} f_j \circ f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \dots \circ f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}}) = \lim_{k\to\infty} V_{[\underline{b}*j]_k} = \pi_{\mathfrak{x}}(\underline{b} * j). \end{aligned}$$

由于极限定义良好，且 $f_j(x) \in \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} f_i(A_{\mathfrak{x}}) = A_{\mathfrak{x}}$，这就证明了 $b*j \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$，并且 $\pi_{\mathfrak{x}}(b * j) = f_j(x)$，如所需。

现在证明第（3）项。我们声称 $\pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}})$ 是 $F_{\mathfrak{x}}$-不变的。给定 $y \in F_{\mathfrak{x}}(\pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}}))$，存在 $x \in \pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}})$ 和 $j \in \{1, \dots, n\}$，使得对于某个 $x \in X_j$，$y = f_j(x)$。因此，根据第（2）项，可以写成 $y = \pi_{\mathfrak{x}}(b * j)$，其中对于某个 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$，$x = \pi_{\mathfrak{x}}(\underline{b})$。于是，$y \in \pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}})$，从而证明 $F_{\mathfrak{x}}(\pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}})) \subset \pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}})$。反过来，如果 $y \in \pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}})$，那么存在

存在 $\underline{b}=(\ldots,b_{-3},b_{-2},b_{-1})\in\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-}$，使得

$$\begin{aligned} y=\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b}) &= \lim_{k\to\infty} f_{b_{-1}}\circ f_{b_{-2}}\circ\ldots f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}}) \\ &= f_{b_{-1}}(\lim_{k\to\infty} f_{b_{-2}}\circ\ldots f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}})) \\ &= f_{b_{-1}}(\pi_{\mathfrak{X}}((\ldots,b_{-4},b_{-3},b_{-2}))) \end{aligned}$$

（这里我们用到了映射的连续性 $f_{b_{-1}}$）。这就证明了该断言。现在，由于 $A_{\mathfrak{X}}\subseteq\pi_{\mathfrak{X}}(\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-})$（根据第 (1) 项），并且 $A_{\mathfrak{X}}$ 在此性质下是极大的（回顾定理 A），于是$A_{\mathfrak{X}}=\pi_{\mathfrak{X}}(\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-})$。

最后，第 (4) 项是由第 (2) 项和第 (3) 项，再结合映射 f_j 的连续性得出的，其中 $1\leqslant j\leqslant n$。这就完成了引理的证明。□

4.3. **定理 B 的证明**。上文已描述 $\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-}$ 和 $\pi_{\mathfrak{X}}$ 的构造及性质。因此，剩下要证明定理中的第 (2) 项，即压缩局部迭代函数系统 $R_{\mathfrak{X}}$ 半共轭于一个定义在移位空间上的局部迭代函数系统，该系统由通常的迭代函数系统的定义域约束给出。

对每个 $1\leqslant j\leqslant n$，定义集合

$$B_j:=\{\underline{b}\in\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-}:j\in\Psi(\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b}))\}\subseteq\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-} \tag{4.5}$$

并考虑由 $\tau_j(b)=b*j$ 对每个 $b\in B_j$ 给出的局部迭代函数系统 $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}=(B_j,\ \tau_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$。

命题 4.3 中的第 (2) 项保证

$$f_j(\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b}))=\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b}*j)=\pi_{\mathfrak{X}}(\tau_j(\underline{b}))$$

对于每个满足约束 $\pi_{\mathfrak{X}}(b)\in X_j$ 的 $b\in\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-}$，研究满射 $\pi_{\mathfrak{X}}$ 的正则性仍有待完成。根据定义，对每个 $b\in\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-}$，

$$\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b})=\lim_{k\to\infty} f_{b_{-1}}\circ f_{b_{-2}}\circ\cdots\circ f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}})$$

特别地，给定 $a,\ b\in\Sigma_{\mathfrak{X}}^{-}$，可以将 $d_{-}(a,\ b)=e^{-N}$ 写成某个 $N=N(a,\ b)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。这意味着对每个 $-N\leqslant j\leqslant -1$，都有 $a_j=b_j$。因此，

$$d(\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{a}),\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b}))\leqslant\operatorname{diam}\left(f_{b_{-1}}\circ f_{b_{-2}}\circ\cdots\circ f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}})\right)\leqslant\lambda^{N}\operatorname{diam}(X)=Cd_{-}(\underline{a},\underline{b})^{\alpha}$$

其中 $C=\operatorname{diam}(X)$ 且 $\alpha=-\log\lambda>0$。这证明了 $\pi_{\mathfrak{X}}$ 是 α-Hölder 连续的，并完成了该定理的证明。□

5. Dynamics of contractive local IFSs

本节将描述压缩局部 IFS 的轨道空间。该空间与编码空间共同刻画局部吸引子的动力学行为。这将证明定理 C。

5.1. 压缩局部迭代函数系统的轨道。 为了便于表示点 $x \in X$ 的轨道，我们引入由符号序列指导的复合运算记号，如下：

$$f_{a,0}(x) := x, \quad f_{a,k+1}(x) := f_{a_k} \circ f_{a,k}(x), \quad k \geqslant 0,$$

其中 $a = (a_n)_{n\geqslant 0} \in \Sigma$。此外，即使对于 $y = f_{a,k}(x) \in \bigcup_{i=1,\dots,n} X_i$ 未来的迭代 $f_{a,k+1}(x) = f_j(y)$，也可能仅对符号集合 j 的某个子集有定义。这表明有必要引入一种更一般的结构，它既包含有限轨道，也包含依赖于先前点的映射选择。下面给出更精确的说明。由局部迭代函数系统 $R_{\mathfrak{x}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 产生的迭代过程由以下内容决定：

(1) 连续映射 $f_j : X_j \to X$，其中 $X_j \subset X$；(2) 一个映射 $\Psi : X \to 2^{\{1,\dots,n\}}$，它为每个 $x \in X$ 关联所有可用的后续迭代选择，即 $\Psi(x) = \{1 \leqslant j \leqslant n : x \in X_j\}$。

特别地，对于每个序列 $a \in \Sigma$，容许迭代有两种可能：

(i) $\mathcal{O}_a(x_0) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$，其中对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $x_i = f_{a,i}(x_0)$，但有一个例外，此时有 $a_{n+1} \notin \Psi(x_n)$（在这种情况下，我们称 x_n 为 x_0 的 a-轨道的终点）；
(ii) $\mathcal{O}_a(x_0) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$，其中对于每个 $i \geqslant 1$，都有 $x_i = f_{a,i}(x_0)$。

下一个命题表明，吸引子 $A_{\mathfrak{x}}$ 中的所有点都可以表征为任意长轨道的极限。由此可以得出这样的结论：与吸引子不相交的有限柱集，在局部算子的迭代作用下最终会消失。更准确地说：

命题 *5.1.* </style>点 x 属于局部吸引子 $A_{\mathfrak{x}}$，当且仅当它是任意长轨道序列的聚点。此外，若序列 $a \in \Sigma$ 满足 $V_{[a]_k} \cap A_{\mathfrak{x}} = \emptyset$，则 $V_{[a]_k}$ 中的每个点都有有限轨道，且是一个端点。

证明. 命题 4.3 中的第（3）项保证 $\pi_{\mathfrak{x}}(\Sigma^-_{\mathfrak{x}}) = A_{\mathfrak{x}}$。因此，若 $x \in A_{\mathfrak{x}}$，则存在 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{x}}$，使得 $x = \lim_{k\to\infty} f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \dots f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}})$。特别地，对于每个 $k \geqslant 1$，都存在 $y_k \in X_{b_{-k}}$ 及一个可容许迭代 $(y_k, f_{b_{-k}}(y_k) \dots, f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \dots f_{b_{-k}}(y_k))$，使得 $x_k := f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \dots f_{b_{-k}}(y_k)$ 在 k 趋于无穷时趋于 x。反过来，假设 $x = \lim_{k\to\infty} x_k$，其中，对每个 $k \geqslant 1$，都存在一个块 $(a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_k^{(k)})$，使得 $x_k = f_{a_k^{(k)}} \circ \dots f_{a_0^{(k)}}(y_k) \in F^k_{\mathfrak{x}}(X)$。由于 $A_{\mathfrak{x}} = \lim_{k\to\infty} F^k_{\mathfrak{x}}(X)$（参见定理 A），立即可得 $x \in A_{\mathfrak{x}}$。第二个结论是前一结论的直接推论。□

下一个命题表明，吸引子中至少存在一个具有无限轨道的点，因此它属于 $A^\infty_{\mathfrak{x}}$（请记住，吸引子中可能存在不具备此性质的点，参见例8.4）。

命题 5.2。 考虑一个局部迭代函数系统 $R_{\mathfrak{x}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$。以下性质等价：

(1) 集合 $A_{\mathfrak{X}}$ 非空；(2) 存在一个点 $x \in X$ 具有无限轨道。

特别地，如果任一条件成立，则 $A_{\mathfrak{X}}^{\infty} \neq \emptyset$。

证明。 首先证明二者等价。

(1) $\Rightarrow$ (2)

对于每个 $x \in A_{\mathfrak{X}}$，定义

$$\Gamma(x) = \bigcup_{k \geqslant 1} \{((x_0, a_0), (x_1, a_1), \ldots, (x_{k-1}, a_{k-1})) | x_0 = x,\ a_j \in \Psi(x_j),\ 0 \leqslant j \leqslant k-1\},$$

从 $x_0 = x$ 开始的有限轨道集合。另设 $\Gamma = \bigcup_{x \in A_{\mathfrak{X}}} \Gamma(x)$。

我们断言，必然存在点 $x \in A_{\mathfrak{X}}$，使得 $\Gamma(x)$ 包含长度任意大的轨道。事实上，由于 $A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$，可以选取一个点 $z \in A_{\mathfrak{X}} = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(A_{\mathfrak{X}} \cap X_j)$，使得存在 $x_0 \in A_{\mathfrak{X}}$ 和 $b_0 \in \{1, \ldots, n\}$，满足 $f_{b_0}(x_0) = z$。重复这一过程，存在 $x_1 \in A_{\mathfrak{X}}$ 和 $b_1 \in \{1, \ldots, n\}$，满足 $f_{b_1}(x_1) = x_0$。递归地，对于每个 $m \geqslant 1$，都可以找到 $1 \leqslant b_0,\ b_1,\ \ldots\ldots,\ b_{m-1} \leqslant n$，使得

$$f_{b_0}(f_{b_1}(\cdots(f_{b_{m-1}}(x_{m-1})))) = z, \text{ where } x_{m-1} \in A_{\mathfrak{X}}$$

也就是说，$((x_{m-1},\ b_{m-1}) \ldots,\ (x_1,\ b_1),\ (x_0,\ b_0)) \in \Gamma(x_{m-1})$。

利用这一性质，可以选取一个序列 $(w_i)_{i \geqslant 1}$ in Γ，其中每个 w_i 都是有限轨道，且其长度对应于一个递增序列 $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$。记作

$$w_1 := ((x_0^1, a_0^1), (x_1^1, a_1^1), \ldots, (x_{k_1}^1, a_{k_1}^1)) \in \Gamma(x_0^1);$$

$$w_2 := ((x_0^2, a_0^2), (x_1^2, a_1^2), \ldots, (x_{k_2}^2, a_{k_2}^2)) \in \Gamma(x_0^2);$$

依此类推。这将用于构造一个序列 $a := (a_0^*,\ a_1^*,\ \ldots) \in \Sigma$。这是通过归纳法完成的。对于 $j = 0$，我们注意到 (a_0^i) 是一个只取有限多个值的序列，因此根据鸽巢原理，其中至少有一个值会无限次重复。取 a_0^* 为这样的一个指标。考虑 $(w_i)_{i \geqslant 1}$ 的一个子序列后，可以假设对每个 $i \geqslant 1$，都有 $a_0^i = a_0^*$。按照这一对角过程，我们将通过归纳法找到 $(w_i)_{i \geqslant 1}$ 的一个子序列（为方便记号，仍记为 $(w_i)_{i \geqslant 1}$），使得对每个 i，都有 $a_j^i = a_j^*$。

现在，由于局部吸引子 $A_{\mathfrak{X}}$ 是紧集，因此可以找到一点 $x_* \in A_{\mathfrak{X}}$，使其成为 $(x_0^i)_{i \geqslant 1}$的聚点。此外，利用每个函数 $f_{a_j^*}$ 都是连续的，且每个 $X_{a_j^*}$ 都是闭集，我们得到 $a_j^* \in \Psi(x_j^*)$，其中 $x_{j+1}^* = f_{a_j^*}(x_j^*)\ \ j \geqslant 0$。综上

$$((x_0^*, a_0^*), (x_1^*, a_1^*), (x_2^*, a_2^*), \ldots) \in \Omega$$

和 $x_0^* \in A_{\mathfrak{X}}^{\infty} \subset A_{\mathfrak{X}}$。

(2) $\Rightarrow$ (1)

假设 $x \in X$ 满足以下条件：对于 $i \geqslant 1$， $x_0 = x$ 且 $x_i = f_{a_i}(x_{i-1})$。我们注意到，$F^0_{\mathfrak{x}}(X) = X$，并且

$$x_i = f_{a_i}(f_{a_{i-1}}(\cdots(f_{a_1}(x)))) \in F^i_{\mathfrak{x}}(X), \quad i \geqslant 1.$$

由于对每个 $k \geqslant 0$， $F^k_{\mathfrak{x}}(X)$ 始终是一个非空紧集，因此根据 Cantor 交集定理，$A_{\mathfrak{x}} = \bigcap_{k\geqslant 0} F^k_{\mathfrak{x}}(X) \neq \emptyset$。

这证明了命题中（1）与（2）的等价性。命题中的第二个陈述可由证明（1）$\Rightarrow$（2）得出，因为存在一个具有无限轨道的点，从而构造出了 $A^\infty_{\mathfrak{x}}$ 中的一个点。至此，命题得证。

□

5.2. **定理 C的证明**。 定理中的第一个结论由命题 5.2得出。根据 Ω 的构造，$\pi_{0,\,X}$ 中的所有点都可以通过压缩局部迭代函数系统无限次迭代，且 $\lim_{i\to\infty} 距离_H(x_i,\ A_{\mathfrak{x}}) = 0$ 对每个 $((x_i,\ a_i))_{i\geqslant 0} \in \Omega$ 都成立。现在，考虑扩展移位映射 $\bar{\sigma} : \Omega \to \Omega$，它由（2.5）定义，以及通常的移位 $\sigma :\ \Sigma^+ \to \Sigma^+$。容易验证，图表

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \Omega \\ {\scriptstyle \pi_{\Sigma^+}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\Sigma^+}} \\ \Sigma^+ & \underset{\sigma}{\to} & \Sigma^+ \end{array} \tag{5.1}$$

可交换 （也就是说， $\pi \circ \bar{\sigma} = \sigma \circ \pi$），其中投影 $\pi_{k,\,\Sigma^+}(((x_i,\ a_i))_{i\geqslant 0}) = a_k$ 和

$$\pi_{\Sigma^+} = (\pi_{0,\Sigma^+}, \pi_{1,\Sigma^+}, \pi_{2,\Sigma^+}, \dots).$$

我们使用以下辅助结果：

引理 5.3. 设 $R_{\mathfrak{x}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个收缩局部迭代函数系统，并假设 $A_{\mathfrak{x}} \neq \emptyset$。以下性质成立：

(1) $\Omega_\infty := \bigcap_{k\geqslant 0} \bar{\sigma}^k(\Omega)$ 是 $\bar{\sigma}$-不变子集，属于$(X \times \{1, 2, \dots, n\})^{\mathbb{N}}$;(2)
$\Sigma_\infty := \pi_{\Sigma^+}(\Omega_\infty)$ 是 σ-不变子集，属于 Σ^+。

此外，若Ω 是紧的，则两个集合Ω_∞ 和 Σ_∞ 都是紧的。

证明。 根据构造， $\bar{\sigma}(\Omega) \subset \Omega$。特别地，序列 $(\bar{\sigma}^k(\Omega))_{k\geqslant 0}$ 是嵌套的，并且由 $\bar{\sigma}$ 的连续性可知，

$$\bar{\sigma}\Big(\bigcap_{k\geqslant 0} \bar{\sigma}^k(\Omega)\Big) = \bar{\sigma}\Big(\lim_{k\to\infty} \bar{\sigma}^k(\Omega)\Big) = \lim_{k\to\infty} \bar{\sigma}^{k+1}(\Omega) = \bigcap_{k\geqslant 0} \bar{\sigma}^k(\Omega).$$

这证明了 $\Omega_\infty := \bigcap_{k\geqslant 0} \bar{\sigma}^k(\Omega)$ 是一个 $\bar{\sigma}$-不变子集。

集合 σ的不变性 Σ_∞ 由交换图（5.1）可得。最后，若 Ω 是一个紧集，则 Ω_∞ 是紧集的嵌套非空交集（参见命题 5.2），因此是紧的，而 Σ_∞ 是在连续映射 π_{Σ^+}下该紧集的像。这就完成了引理的证明。 □

给定 $x \in X$，考虑空间

$$\Omega_\infty^x = \pi_{0,X}^{-1}(\{x\}) = \left\{((x_i, a_i))_{i\geqslant 0} \in \Omega_\infty \colon \pi_{0,X}(((x_i, a_i))_{i\geqslant 0}) = x\right\}$$

它表示点 x 的所有可能轨道 $(f_{a_k} \circ \dots f_{a_1} \circ f_{a_0}(x))_{k\geqslant 0}$，其中路径 $a \in \Sigma^+$ 可以有任意选择。

现在我们来定义 $\Sigma_{\mathfrak{X}}^- \times \Sigma_\infty$ 中双向序列的空间，使得由过去坐标（编码空间）确定的点 $x \in X$ 具有可容许的未来坐标。更准确地说，定义集合

$$\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{X}} = \left\{(\underline{b}, \underline{a}) \in \Sigma_{\mathfrak{X}}^- \times \Sigma_\infty \colon \underline{a} \in \pi_{\Sigma^+}(\Omega_\infty^x) \text{ where } x = \pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b})\right\}. \tag{5.2}$$

$\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{X}}$ 根据构造 $\pi_{\mathfrak{X}} \circ \pi_{\Sigma^-}(\Sigma_{\mathfrak{X}}) = A_{\mathfrak{X}}^\infty$，因此 $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ 非空，因为 $A_{\mathfrak{X}}^\infty \neq \emptyset$。为了完成定理 C的证明，尚需证明以下命题：

命题 5.4. 移位 $\widehat{\sigma} \colon \Sigma_{\mathfrak{X}} \to \Sigma_{\mathfrak{X}}$ 定义为

$$\widehat{\sigma}(\dots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, \boxed{a_0}, a_1, a_2, a_3, \dots) = (\dots, b_{-2}, b_{-1}, a_0, \boxed{a_1}, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

$\widehat{\sigma}$ 是良定义的。此外，对于每个 $(\underline{b}, \underline{a}) \in \Sigma_{\mathfrak{X}}$，

$$\widehat{\sigma}(\underline{b}, \underline{a}) = (\underline{b} * a_0, \sigma(\underline{a})) = (\tau_{a_0}(\underline{b}), \sigma(\underline{a})).$$

$\widehat{\sigma}$ 证明。只需证明，对于每个双向序列 $(\underline{b}, \underline{a})$，序列 $\widehat{\sigma}(\underline{b} * a_0, \sigma(\underline{a}))$ 也属于 $\Sigma_{\mathfrak{X}}$。事实上，任取 $(\underline{b}, \underline{a})$，$\in \Sigma_{\mathfrak{X}}$ 并记 $x = \pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b})$。根据定义（回顾 (5.2)），由于 $a \in \pi_{\Sigma^+}(\Omega_\infty^x)$，有 $a_0 \in \Psi(x)$。此外，利用命题 4.3 中的 (2)，

$$f_{a_0}(x) = f_{a_0}(\pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b})) = \pi_{\mathfrak{X}}(\underline{b} * a_0)$$

因此 $\underline{b} * a_0 \in \Sigma_{\mathfrak{X}}^-$。此外，由于 $a \in \pi(\Omega_\infty^x)$，那么轨道

$$x_i = f_{a_i}(x_{i-1})$$

对每个 $i \geqslant 1$ 都有定义，因此立即可得 $\sigma(a) \in \Omega^{f_{a_0}(x)}{}_\infty$。最后一个断言显然成立，故命题得证。□

6. On a skew dynamical structure for local IFS

本节致力于证明定理 D。设有一个紧致度量空间（X，d、有限个闭子集 $\mathfrak{X} = (X_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$，它们属于 X，以及一个压缩局部迭代函数系统 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$。

出于形式上的考虑，可以考虑一个略有不同的动力系统，写作 $R_{\mathfrak{X}^e} := (X_j, f_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$，其子集族如下：$\mathfrak{X}^e = (X_j^e)_{0\leqslant j\leqslant n}$，其中 X，且 $X_j^e := X_j$，$1 \leqslant j \leqslant n$，以及 $X_0^e := X \setminus \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} X_j$ 和 $f_0(x) := x$，$\forall x \in X_0^e$。将局部迭代函数系统 $R_{\mathfrak{X}^e}$ 称为 $R_{\mathfrak{X}}$ 的自然扩张。

注6.1。注意，局部迭代函数系统 $\mathfrak{X}^e$ 不是压缩的，因为 f_0 是恒等映射，而且 X_0^e 可能不是闭集。特别是，与$\mathfrak{X}^e$ 相关联的局部分形算子可能无法保持紧集。这并不是问题，因为我们并不关心它的动力学。我们只将其用作一种工具，以便以有用的方式表示原局部迭代函数系统的全部轨道。

自然扩张的主要性质是 $\bigcup_{0\leqslant j\leqslant n} X_j^e = X$，因此 $R_{\mathfrak{X}^e}$ 的所有正向半轨道都是无限的。更确切地说，新的地址函数定义如下：

$$\Psi^e(x) = \begin{cases} \Psi(x) & , \text{ for } x \in \bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} X_j \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}.$$

这样，如果

$$((x_0,a_0),(x_1,a_1),\ldots,(x_{k-1},a_{k-1}))$$

是 $R_{\mathfrak{X}}$ 的有限轨道，即 $\Psi(x_k) = \emptyset$，或者等价地，$x_k = f_{a_{k-1}}(x_{k-1}) \in X/\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n} X_j = X_0^e$ 是一个端点，那么，$\Psi^e(x_{k-1}) = 0$，且轨道将继续 $R_{\mathfrak{X}^e}$，定义如下：

$$((x_0,a_0),(x_1,a_1),\ldots,(x_{k-1},a_{k-1}),(x_k,0),(x_k,0),(x_k,0),(x_k,0),(x_k,0),\ldots).$$

现在我们考虑一个足够大的空间，它包含 $R_{\mathfrak{X}}$ 的所有有限轨道和无限轨道，同时也包含编码空间；该空间称为扩展移位空间

$$\Omega^e := (X\times\{0,1,\ldots,n\})^{\mathbb{Z}}$$

通常分别分解为过去序列和未来序列，

$$\Omega_-^e := (X\times\{0,1,\ldots,n\})^{-\mathbb{N}} \text{ and } \Omega_+^e := (X\times\{0,1,\ldots,n\})^{\mathbb{N}_0}.$$

非扩展版本也可以用同样的方式定义

$$\Omega_- := (X\times\{1,\ldots,n\})^{-\mathbb{N}} \text{ and } \Omega_+ := (X\times\{1,\ldots,n\})^{\mathbb{N}_0}.$$

将这些空间表示为直和很有用

$$\Omega^e = \Omega_-^e \oplus \Omega_+^e := \{(z|w)\colon z\in\Omega_-^e \text{ and } w\in\Omega_+^e\}$$

并定义自然投影 $\pi^-:\Omega^e\to\Omega_-^e$ 和 $\pi^+:\Omega^e\to\Omega_+^e$，其定义为 $\pi^-(z|w)=z$ 和 $\pi^+(z|w)=w$，对所有 $(z|w)\in\Omega^e$均成立。

定义 $\Sigma_e^- = \{0,1,\ldots,n\}^{-\mathbb{N}}$，并赋予其度量

$$d_-(\underline{a},\underline{b}) = \exp\Big(-\sup\{N\geqslant 1\colon a_j = b_j, \text{ for every } -N\leqslant j\leqslant -1\}\Big)$$

对每个 a，$\underline{b}\in\Sigma^-$，其中 $\sup\emptyset = 0$。类似地，我们以相同的度量结构定义 $\Sigma^- = \{1,2,\ldots,n\}^{-\mathbb{N}}$。那么，自然地，$\Sigma^-\subset\Sigma_e^-$。

定义一些额外的投影也很重要

$$\pi_{k,\Sigma^-}(z|w) := a_{-k}\in\{0,1,\ldots,n\},\ k\leqslant -1;$$
$$\pi_{\Sigma^-}(z|w) := (\ldots,a_{-2},a_{-1})\in\Sigma_e^-;$$

$$\pi_{k,X}(z|w) := x_k \in X,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$\pi_X(z|w) := (x_0, x_1, x_2 \ldots) \in X^{\mathbb{N}_0},$$

其中 $(z|w) := ((\ldots,(x_{-2},a_{-2}),(x_{-1},a_{-1}))|((x_0,a_0),(x_1,a_1),(x_2,a_2)\ldots)) \in \Omega^e$。注意，$\pi_{k,X}(z|w) = \pi_{0,X}(\sigma^k(z|w))$，因此 $\pi_{0,X}$ 是 X 上唯一必要的投影。

最后，我们定义双边移位映射 $\sigma: \Omega^e \to \Omega^e$ 如下

$$\sigma(z|w) := ((\ldots,(x_{-2},a_{-2}),(x_{-1},a_{-1}),(x_0,a_0))|((x_1,a_1),(x_2,a_2),\ldots))$$

对于 $(z|w) := ((\ldots,(x_{-2},a_{-2}),(x_{-1},a_{-1}))|(x_0,a_0),(x_1,a_1),(x_2,a_2)\ldots)) \in \Omega^e$。未来坐标中的单边移位由相同符号定义

$$\sigma(w) := ((x_1,a_1),(x_2,a_2),\ldots)$$

拼接的过去记作

$$\tau_w(z) := (\ldots,(x_{-2},a_{-2}),(x_{-1},a_{-1}),(x_0,a_0)).$$

这些空间和投影没有考虑局部迭代函数系统 $R_{\mathfrak{X}^e}$（特别是 $R_{\mathfrak{X}}$）的动力学。为此，需要考虑 Ω^e 的一个由动力学定义的子集，其作用是构造一个自主动力学，其中包含迭代函数系统的轨道以及定义该系统的指标序列。这个集合称为正向半轨道扩展空间 $\Omega^e_+(\mathfrak{X}) \subseteq \Omega^e_+$，其定义如下

$$\Omega^e_+(\mathfrak{X}) := \{((x_0,a_0),(x_1,a_1),(x_2,a_2),\ldots) \in \Omega^e_+ \mid a_i \in \Psi^e(x_i), i \geqslant 0\}. \tag{6.1}$$

我们注意到，原局部迭代函数系统的所有无限轨道构成的集合 $\Omega_+(\mathfrak{X}) := \{((x_0,\ a_0),(x_1,\ a_1),(x_2,\ a_2)\ldots\ldots) \mid a_i \in \Psi(x_i)\ i \geqslant 0\}$ 在压缩情形下总是非空的（见命题5.2），但遗憾的是，它不包含端点，因此可能不适合表示整个局部吸引子 $A_{\mathfrak{X}}$。

我们用 $\ell: \Omega^e_+(\mathfrak{X}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 表示一个元素的长度

$$w = ((x_0,a_0),(x_1,a_1),(x_2,a_2),\ldots) \in \Omega^e_+(\mathfrak{X})$$

作为满足 $a_i = 0,\ \forall i \geqslant k$ 的最小指标 k。

我们注意到 $\ell(w) = 0$ 意味着

$$w = ((x_0,0),(x_0,0),(x_0,0),\ldots).$$

另一方面，$1 \leqslant \ell(w) = k < \infty$ 意味着

$$w = ((x_0,a_0),\ldots,(x_{k-1},a_{k-1}),(x_k,0),(x_k,0),\ldots)$$

其中 $a_0, \ldots\ldots, a_{k-1} \neq 0$。最后，如果 $\ell(w) = \infty$，那么我们得到 $a_k \neq 0,\ \forall k \geqslant 0$，也就是说，$w \in \Omega_+(\mathfrak{X})$。

从一开始，我们并不要求 $a_i \in \Psi^e(x_i)\ i \leqslant -1$，但经过 σ的 k 次迭代后，我们得到 $a_i \in \Psi^e(x_i)$ $-k \leqslant i \leqslant -1$。

因此，我们所关注的空间是

$$\Omega^e_- \oplus \Omega^e_+(\mathfrak{X}) = (\pi^+)^{-1}(\Omega^e_+(\mathfrak{X})) \subseteq \Omega^e.$$

定义 6.2. 我们称 $(z|w) \in \Omega^e_- \oplus \Omega^e_+(\mathfrak{X})$ 是 k-可容许的，对于 $k \geqslant 0$，如果 $\pi^+(\sigma^{-k}((z|w))) \in \Omega^e_+(\mathfrak{X})$，并且 $\pi_{1,\ \Sigma^-_e}(z|w) \neq 0$。

我们注意到，$\Omega^e_- \oplus \Omega^e_+(\mathfrak{X})$ 中除 $((\ldots,(x_0,\ 0))\ |\ w)$ 之外的所有元素都是 0-可容许的。

注意，$\pi_{\Sigma^-_e}(z|w) := (\ldots, a_{-2},\ a_{-1}) \in \Sigma^-$ 当且仅当 $a_{-i} \neq 0,\ \forall i$。

然而，由局部迭代函数系统生成的动力系统，用集合 $\Omega^e(\mathfrak{X}) \subset \Omega^e_- \oplus \Omega^e_+(\mathfrak{X})$ 表示会更合适，该集合定义如下：

$$\Omega^e(\mathfrak{X}) := \bigcap_{k\geqslant 1}\{(z|w)\colon \text{is } k\text{-admissible}\}. \tag{6.2}$$

6.1. **定理 D的证明**。

证明。我们分别证明各项。

(1) 我们声称 $\pi_{\Sigma^-}\left(\Omega^e(\mathfrak{X})\right) \subset \Sigma^-_{\mathfrak{X}}$。根据 $\Omega^e(\mathfrak{X})$ 的构造，有 $\pi_{\Sigma^-_e}(z|w) = (\ldots, b_{-2}, b_{-1}) \in \Sigma^-$，因此对于任意 $(z|w) \in \Omega^e(\mathfrak{X})$，$\pi_{\Sigma^-_e}(z|w) = \pi_{\Sigma^-}(z|w)$。此外，若 $(z|w) \in \Omega^e(\mathfrak{X})$，则对于任意 $k \geqslant 1$，有

$\pi^+(\sigma^{-k}((z|w))) = ((x_{-k}, b_{-k}) \ldots, (x_{-1}, b_{-1}), (x_0, a_0) \ldots, (x_{i-1}, a_{i-1}), (x_i, 0)\ldots) \in \Omega^e_+(\mathfrak{X})$，这意味着对于 $b := \pi_{\Sigma^-}(\underline{(z|w)})$，有 $x_0 \in V_{[b]_k} = f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \ldots f_{b_{-k}}(X_{b_{-k}}) \neq \emptyset$。因此 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{X}}$。

反过来，为了证明 $\Sigma^-_{\mathfrak{X}} \subset \pi_{\Sigma^-}\left(\Omega^e(\mathfrak{X})\right)$，给定 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{X}}$ and $x_0 = \pi_{\mathfrak{X}}(b) \in A_{\mathfrak{X}}$，可以考虑从 x_0出发的正向轨道；如果我们有一个端点，那么 x_0 的正向轨道或者是

$$w := ((x_0, a_0), \ldots, (x_{i-1}, a_{i-1}), (x_i, 0), (x_i, 0), \ldots) \in \Omega^e_+(\mathfrak{X})$$

with a_0，.....，$a_{i-1} \neq 0$，或者是一个没有端点的 x_0的无限正向轨道 w（$\Psi^e(x_i) \neq 0$，$i \geqslant 0$）。无论哪种情况（$z|w$），$\in \Omega^e(\mathfrak{X})$ 且 $\pi_{\Sigma^-}(\underline{(z|w)}) = b$。

（2）根据假设 $A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$。我们断言，$\pi_{0,X}(\Omega^e(\mathfrak{X})) \supseteq A_{\mathfrak{X}}$。如上所述，给定任意 $x_0 \in A_{\mathfrak{X}}$，都可以找到一个满足 $b_{-k} \in \Psi(x_{-k})\ \ k \geqslant 1$ 的无限序列 $z =$（.....，(x_{-k}, b_{-k}) .....，(x_{-1}, b_{-1})）以及一个无限正向轨道 $w \in \Omega^e_+(\mathfrak{X})$。显然，对于所有 $k \geqslant 0$，$\pi^+(\sigma^{-k}((z|w))) \in \Omega^e_+(\mathfrak{X})$，也就是说，$(z|w) \in \Omega^e(\mathfrak{X})$。根据构造，$\pi_{0,X}((z|w)) = x_0$，从而证明了该断言。包含关系 $\pi_{0,X}(\Omega^e(\mathfrak{X})) \subseteq A_{\mathfrak{X}}$ 是条目（1）的直接推论。

(3) 接下来我们证明该图表

$$\begin{array}{ccc} \Omega^e(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & \Omega^e(\mathfrak{X}) \\ \pi_{-1,X} \times \pi_{\Sigma^-} \downarrow & & \downarrow \pi_{1,X} \times \pi_{\Sigma^-} \\ X \times \Sigma^- & \xrightarrow{S} & X \times \Sigma^- \end{array}$$

可交换，其中 $S(x,b) = (f_{b_{-1}}(x)\ \sigma^{-}(b))$。任取一个

$$(z|w) := (\ldots,(x_{-2},b_{-2}),(x_{-1},b_{-1})|(x_0,a_0),(x_1,a_1),\ldots) \in \Omega^e(\mathfrak{X}).$$

Then

$$S((\pi_{-1,X}\times\pi_{\Sigma^-})(z|w)) = S(x_{-1},\underline{b}) = (f_{b_{-1}}(x_{-1}),\sigma^-(\underline{b})) = (x_0,(\ldots,b_{-3},b_{-2}))$$

and

$$\begin{aligned}(\pi_{1,X}\times\pi_{\Sigma^-})(\sigma^{-1}(z|w)) &= (\pi_{1,X}\times\pi_{\Sigma^-})(\ldots,(x_{-2},b_{-2})|(x_{-1},b_{-1}),(x_0,a_0),(x_1,a_1),\ldots)\\ &= (x_0,(\ldots,b_{-3},b_{-2})),\end{aligned}$$

证明其交换性。 □

7. Exponential convergence on the basin of the local attractor

本节旨在证明定理F，该定理涉及压缩局部迭代函数系统的局部吸引子。第一步是以下结果（对于稍有限制性的情形，请参阅 [BHM14，命题 2。4] ）：

引理 7.1。设 $R = (X, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 为一个吸引子为 A_R的全局迭代函数系统。假设对于每个 $1 \leqslant j \leqslant n$ 都有$X_j \subset X$，且 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是相应的局部迭代函数系统。那么， $A_{\mathfrak{X}} \subseteq A_R$。

证明。证明采用归纳法。取 $A_0 = X$ 和 $B_0 = X$，注意到 $A_0 = B_0$。假设对于某个 $k \geqslant 1$，有 $A_k \subseteq B_k$、$F(B_k) = B_{k+1}$ 以及 $A_{k+1} = F_{\mathfrak{X}}(A_k)$。利用按构造可知，对于任意 $B \subset X$，$F_{\mathfrak{X}}(B) \subseteq F(B)$，于是

$$A_{k+1} = F_{\mathfrak{X}}(A_k) \leqslant F_{\mathfrak{X}}(B_k) \leqslant F(B_k) = B_{k+1}.$$

这证明了，对于每个 $A_n \subset B_n$ $n \geqslant 1$，因此，

$$A_{\mathfrak{X}} = \lim_{n\to\infty} A_n \subseteq \lim_{n\to\infty} B_n = A_R.$$

□

下一个推论表明，对于完备度量空间中的压缩迭代函数系统，我们可以将分析范围限制在一个紧致度量空间——全局吸引子——内，并通过在该空间中迭代获得局部吸引子。这说明了为何总是假设底空间 X 是一个紧致度量空间。

推论 7.2。假设 $A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$。那么，

$$A_{\mathfrak{X}} = \bigcap_{k\geqslant 0} F_{\mathfrak{X}}^k(A_R) = \lim_{k\to\infty} F_{\mathfrak{X}}^k(A_R),$$

也就是说， $A_R \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{inv}$。

证明。由引理 7.1 可得包含关系 $A_{\mathfrak{X}} \subseteq A_R$。

另一方面， $A_0 = A_R$ 是 $F_{\mathfrak{X}}$-正不变的，因为 $A_1 = F_{\mathfrak{X}}(A_0) \subseteq F(A_0) = F(A_R) = A_R = A_0$.

因此，由命题 3.3 可得 $A_{\mathfrak{X}} = \bigcap_{k\geqslant 0} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k$。 □

下一个结果将证明，每个被局部吸引子吸引的正不变集，实际上都以指数速度被吸引。特别是，从计算角度来看，这对于逼近局部吸引子极为有用。

命题 7.3. 设 $R_{\mathfrak{X}} = (X_j, f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是一个具有局部吸引子 $A_{\mathfrak{X}}$的局部迭代函数系统。存在 $\lambda \in (0,1)$，使得对于任意 $A_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ 和任意 $k \geqslant 1$,

$$dist_H(\mathrm{ess}(\mathrm{F}^{\mathrm{k}}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{A}_0)), \mathrm{A}_{\mathfrak{X}}) \leqslant \lambda^{\mathrm{k}} diam(\mathrm{X}).$$

证明。由于 $A_{\mathfrak{X}} \subset A_0$，我们得到$V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}) \subset V_{[b]_k}(A_0)$，对每个$b \in \Sigma^-$和 $k \geqslant 1$均成立，其中对每个紧集 $K \subseteq X$，记 $V_{[b]_k}(K) = f_{b_{-1}} \circ f_{b_{-2}} \circ \ldots f_{b_{-k}}(K)$。因此，$A_{\mathfrak{X}} = F^i_{\mathfrak{X}}(A_{\mathfrak{X}}) \subseteq F^i_{\mathfrak{X}}(A_0)$。我们断言

$$\mathrm{dist}_H(V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}), V_{[b]_k}(A_0)) \leqslant \lambda^k \mathrm{diam}(X)$$

对每个 $b \in \Sigma^-_{\mathfrak{X}}$ 和每个 $k \geqslant 1$ 都成立。由包含关系 $V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}) \subset V_{[b]_k}(A_0)$ 可知，只需证明：对于每个 $x \in V_{[b]_k}(A_0)$，都存在 $z \in V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})$，使得 $\mathrm{dist}(x,z) \leqslant \lambda^k \mathrm{diam}(X)$。事实上，由于 $V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}) \neq \emptyset$，可以选取 $z \in V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})$。由于 $F_{\mathfrak{X}}(A_{\mathfrak{X}}) = A_{\mathfrak{X}}$，可知 $z \in A_{\mathfrak{X}}$，并且对于某个 $z' \in A_{\mathfrak{X}}$，有 $z = f_{b_{-1}}(\cdots(f_{b_{-k}}(z')))$。类似地，对于某个 $x' \in A_0$，有 $x = f_{b_{-1}}(\cdots(f_{b_{-k}}(x')))$。因此，利用共同压缩率 λ，得到 $d(x,z) < \lambda^k d(x',z') \leqslant \lambda^k \mathrm{diam}(X)$。这表明 $V_{[b]_k}(A_0)$ 包含于集合 $V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})$ 的 $\lambda^k \mathrm{diam}(X)$ 邻域中。现在注意到，$F^k_{\mathfrak{X}}(A_0)$ 可以写成若干这样的柱集的并，形式如下

$$\begin{aligned} F^k_{\mathfrak{X}}(A_0) &= \bigcup_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})=\emptyset} V_{[b]_k}(A_0) \cup \bigcup_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})\neq\emptyset} V_{[b]_k}(A_0) \\ &= \bigcup_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})=\emptyset} V_{j_{-i},\ldots,j_{-1}}(A_0) \cup \mathrm{ess}(\mathrm{F}^{\mathrm{i}}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{A}_0)) \end{aligned} \tag{7.1}$$

而

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{X}} = F^i_{\mathfrak{X}}(A_{\mathfrak{X}}) &= \bigcup_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})=\emptyset} V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}) \cup \bigcup_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})\neq\emptyset} V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}) \\ &= \bigcup_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}))\neq\emptyset} V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}). \end{aligned}$$

此外，由于 $\mathrm{dist}_H(\bigcup_{m=1}^n A_m, \bigcup_{m=1}^n B_m) \leqslant \max_{1\leqslant m\leqslant n} \mathrm{dist}_H(A_m, B_m)$（例如参见 [Fal03]），则

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_H(A_{\mathfrak{X}}, \mathrm{ess}(\mathrm{F}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{A}_0))) &= \mathrm{dist}_H\left(\bigcup_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})\neq\emptyset} V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}), \bigcup_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})\neq\emptyset} V_{[b]_k}(A_0)\right)\\ &\leqslant \max_{V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}})\neq\emptyset} \mathrm{dist}_H(V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}), V_{[b]_k}(A_0))\\ &\leqslant \lambda^k \mathrm{diam}(X)\end{aligned}$$

对于每个 $k \geqslant 1$，从而证明该命题。 □

注 7.4。 前文证明了本质部分 $\mathrm{ess}(\mathrm{F}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{A}_0))$ 以指数速度收敛到局部吸引子。集合 $V_{[b]_k}(A_0) \neq \emptyset$ 满足 $V_{[b]_k}(A_{\mathfrak{X}}) = \emptyset$ 并出现在（7.1）中的集合将随着 $k \to \infty$ 而消失，但其消失的速度将很大程度上取决于限制与压缩率之间的相互作用。

8. Examples

本节将提供大量例子，用于说明本文的主要结果，并突出局部吸引子与经典情境下迭代函数系统吸引子之间的关键差异。我们首先介绍下面这个由 F. Strobin 给出的例子，它说明定理 A中关于映射定义域的闭性假设实际上是必不可少的。

例 8.1。 **(闭限制的必要性)** 设单位区间为 $X = [0, 1]$，以及子集 $X_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 和 $X_2 = [0, 1]$。设 $f_1 \colon X_1 \to X$ 是一个连续映射，使得

$$f_1\left(\left(0, \frac{1}{2^n}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

对每个 $n \geqslant 1$ 和 $f_2 \colon X_2 \to X$ 是常值映射 $f_2(x) = 1$ 对每个 $x \in X_2$都成立。注意，

$$F_{\mathfrak{X}}([0, 1]) = f_1\left(\left(0, \frac{1}{2}\right]\right) \cup f_2([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \{1\}$$

and

$$F_{\mathfrak{X}}^2([0, 1]) = f_1\left(\left(0, \frac{1}{4}\right]\right) \cup f_2\left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \{1\}\right) = \left[0, \frac{1}{8}\right] \cup \{1\}.$$

通过归纳法可得 $F_{\mathfrak{X}}^n([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right] \cup \{1\}$ 对每个 $n \geqslant 1$都成立，因此

$$\bigcap_{n\geqslant 1} F_{\mathfrak{X}}^n([0, 1]) = \{0, 1\}. \tag{8.1}$$

然而，由此 $F_{\mathfrak{X}}(\{0, 1\}) = f_1(\emptyset) \cup f_2(\{0, 1\}) = \{1\}$ 可得，由 (8.1) 定义的吸引子并非 $F_{\mathfrak{X}}$-不变。

例 8.2. **(吸引域的严格包含关系)** 考虑 $X = [0,4]$、限制族 $X_1 = X_2 = X_3 = [0,1]$, $X_4 = \{3\}$ 以及映射 $f_1(x) = \frac{1}{3}x, x \in X_1$,$f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in X_2$, $f_3(x) = 2, \forall x \in X_3$ 和 $f_4(x) = 4, \forall x \in X_4$。

利用命题 3.3 不难验证 $A_{\mathfrak{x}} = \bigcap_{i\geqslant 0} F^i_{\mathfrak{x}}(X) = \mathcal{C} \cup \{2\}$ 其中$\mathcal{C} \subset [0,1]$ 是中三分 Cantor 集。此外，根据定理 A，

$$\emptyset \neq \mathcal{B}^{\text{inv}}_{\mathfrak{x}} \subseteq \mathcal{B}^{\text{out}}_{\mathfrak{x}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{x}} \subseteq K^*(X).$$

我们断言，前面所有的包含关系都是严格的。为证明这一点，考虑以下集合

$$A'_0 := \mathcal{C} \cup \{2,3\}, \quad A''_0 := \{0,2\} \quad \text{and} \quad A'''_0 := \{3\}.$$

首先注意到 $A'_0 \in \mathcal{B}\text{out}_{\mathfrak{x}} \setminus \mathcal{B}\text{inv}_{\mathfrak{x}}$。事实上，对于每个 $i \geqslant 2$, $F_{\mathfrak{x}}(A'_0) = \mathcal{C} \cup \{2,4\}$ 且 $F^i_{\mathfrak{x}}(A'_0) = \mathcal{C} \cup \{2\} = A_{\mathfrak{x}}$，因此 $A'_0 \in \mathcal{B}^{\text{out}}_{\mathfrak{x}}$。然而， $F_{\mathfrak{x}}(A'_0) \not\subseteq A'_0$，所以 $A'_0 \notin \mathcal{B}\text{inv}_{\mathfrak{x}}$。现在我们观察到 $A''_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}} \setminus \mathcal{B}\text{out}_{\mathfrak{x}}$。实际上， $F_{\mathfrak{x}}(A''_0) = \tilde{F}(\{0\}) \cup \{2\}$ 且 $F^i_{\mathfrak{x}}(A''_0) = \tilde{F}^i(\{0\}) \cup \{2\}$, $i \geqslant 2$ 其中 $\tilde{F}$ 是与经典压缩迭代函数系统相关联的 Hutchinson-Barnsley 分形算子，该系统由 $\{f_1, f_2\}$ 在 $[0,1]$ 中构成，其吸引子为 $\mathcal{C}$。特别地，$\text{dist}_H(\tilde{F}^i(\{0\}), \mathcal{C}) \to 0$，当 $i \to \infty$时趋于.....。因此

$$\text{dist}_H(F^i_{\mathfrak{x}}(A''_0), A_{\mathfrak{x}}) = \text{dist}_H(\tilde{F}^i(\{0\}) \cup \{2\}, \mathcal{C} \cup \{2\}) \leqslant \max\left(\text{dist}_H(\tilde{F}^i(\{0\}), \mathcal{C}), \text{dist}_H(\{2\}, \{2\})\right),$$

因此，$\lim_{i\to\infty} F^i_{\mathfrak{x}}(A''_0) = A_{\mathfrak{x}}$ 这表明 $A''_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{x}}$，显然 $A''_0 \notin \mathcal{B}_{\text{外}\mathfrak{x}}$。最后，我们注意到 $A'''_0 \in K^*(X) \setminus \mathcal{B}_{\mathfrak{x}}$，因为 $F_{\mathfrak{x}}(A'''_0) = \{4\}$ 且 $F^i_{\mathfrak{x}}(A'''_0) = \emptyset$, $i \geqslant 2$，因此 $A'''_0 \notin \mathcal{B}_{\mathfrak{x}}$。

接下来，我们将构造压缩局部迭代函数系统，使其局部吸引子中存在具有有限正向轨道的端点，并完整描述与该局部吸引子相关的编码空间和扩展移位空间。

例 8.3。 **(使得** $A^{\infty}_{\mathfrak{x}} \subsetneq A_{\mathfrak{x}}$ 的压缩局部迭代函数系统的编码空间）考虑赋予欧几里得度量的正方形 $X = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ 。首先，考虑 X 中由 $f_1(x, y) = (x/3, 0)$ 和 $f_2(x, y) = (x/3 + 2/3, 0)$ 给出的局部迭代函数系统 IFS_1 ，其定义域分别为 $X_1 = [0,1/3] \times \{0\}$ 和 $X_2 = [2/3,1] \times \{0\}$。这是三进制康托集 $\mathcal{C}$ 在 X 上的一个嵌入，其局部吸引子为集合 $A_1 = \mathcal{C} \times \{0\}$。显然，编码空间为集合 $\Sigma_1 = \{1,2\}^{-\mathbb{N}}$。其次，考虑局部迭代函数系统，记为 IFS_2, ，它由前一个系统添加第三个映射 $f_3(x, y) = q = (1, 1)$ 得到，该映射定义在定义域 $X_3 = X_1 \cup X_2$ 上。不难验证，这两个局部迭代函数系统的分形算子之间满足关系

$$F^n_2(X) = F^n_1(X) \cup \{q\}$$

对于每个 $n \geqslant 1$。令 n 趋于无穷大，取极限，可得 IFS_2 的局部吸引子 A_2 为

$$A_2 = A_1 \cup \{q\} = \mathcal{C} \cup \{q\}.$$

特别是，局部吸引子不包含在 $\bigcup_{i=1}^3 X_i$ 中。 A_2 的编码空间是 $\{1,2,3\}^{-\mathbb{N}}$ 的真子集。事实上，仔细考察可知，如果 $(x, y) \in \mathcal{C}$，那么

它将通过对 Σ_1 中一个序列进行局部投影而得到，而 q 只能作为序列 $b = (\ldots\ldots\ b_{-2},\ b_{-1})$ 的投影而到达，其中 $b_{-1} = 3$，并且 $(\ldots\ldots\ b_{-3},\ b_{-2}) \in \Sigma_1$。因此，

$$\Sigma_2 = \{1,2\}^{-\mathbb{N}} \cup (\{1,2\}^{-\mathbb{N}} * 3).$$

最后，我们定义第三个局部迭代函数系统，记为 IFS_3，它由前一个局部迭代函数系统添加映射 f_4 $(x,y) = p = (0,1)$ 得到，该映射定义在集合 $X_4 = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \{q\} = X_1 \cup X_2 \cup \{q\}$ 上。IFS_2 和 IFS_2 的分形算子之间满足关系 $F_3^n(X) = F_2^n(X) \cup \{p\}$，对每个 $n \geqslant 1$ 均成立，因此局部迭代函数系统 IFS_3 的局部吸引子 A_3 可表征为

$$A_3 = A_2 \cup \{p\} = \mathcal{C} \cup \{q,p\}.$$

A_3 的新编码空间是 $\{1,2,3,4\}^{-\mathbb{N}}$ 的真子集。事实上：

- 每个 $(x,y) \in \mathcal{C}$ 只能通过对 Σ_1 中的一个序列进行局部投影而得到；
- q 只能由一个序列 $(\ldots, b_{-2}, b_{-1})$ 得到，其中 $b_{-1} = 3$，且 $(\ldots, b_{-3}, b_{-2}) \in \Sigma_1$，这意味着 $q = \lim_n f_3(f_{b_{-3}}(f_{b_{-4}}(\cdots)))$；
- p可通过两种方式得到：
  - 序列 $(\ldots, b_{-2}, b_{-1})$ 的投影，其中 $b_{-1} = 4, (\ldots, b_{-3}, b_{-2}) \in \Sigma_1$ and$p = \lim_n f_4(f_{b_{-2}}(f_{b_{-3}}(f_{b_{-4}}(\cdots))))$；
  - 序列 $(\ldots, b_{-2}, b_{-1})$ 的投影，其中 $b_{-2} = 3$ and $b_{-1} = 4$ and $(\ldots, b_{-4}, b_{-3}) \in \Sigma_1$，也就是 $p = \lim_n f_4(f_3(f_{b_{-3}}(f_{b_{-4}}(\cdots))))$。

这表明

$$\Sigma_3 = \{1,2\}^{-\mathbb{N}} \cup (\{1,2\}^{-\mathbb{N}} * 3) \cup (\{1,2\}^{-\mathbb{N}} * 4) \cup (\{1,2\}^{-\mathbb{N}} * 3 * 4).$$

此外 更重要的是，扩展轨道空间 $\Omega^e(\mathfrak{X})$ 由四种类型的轨道构成 :

(I) 无限轨道（（..., (x_{-2}, a_{-2}), (x_{-1}, a_{-1})）|（(x_0, a_0), (x_1, a_1), (x_2, a_2) ...））, 其中（..., a_{-2}, a_{-1}） $\in \{1,2\}^{-\mathbb{N}}$; (II) 端点长度为一的轨道（（..., (x_{-2}, a_{-2}), $(x_{-1}, 4)$）|（$(p, 0)$, $(p, 0)$, $(p, 0)$ ...））, 当（..., a_{-2}, a_{-1}） $\in \{1,2\}^{-\mathbb{N}} * 4$ 时。(III) 端点长度为一的轨道（（..., (x_{-3}, a_{-3}), $(x_{-2}, 3)$, $(q, 4)$）|（$(p, 0)$, $(p, 0)$, $(p, 0)$ ...））, 当（..., $a_{-3}, 3, 4$） $\in \{1,2\}^{-\mathbb{N}} * 3 * 4$ 时。(IV) 端点长度为二的轨道（（..., (x_{-2}, a_{-2}), $(x_{-1}, 3)$）|（$(q, 4)$, $(p, 0)$, $(p, 0)$, $(p, 0)$ ...））, 当（..., a_{-2}, a_{-1}） $\in \{1,2\}^{-\mathbb{N}} * 3$ 时。

在本例中，由始终处于各映射定义域并集中的轨道构成的集合 Ω f_i （回顾（2.4）和定理 C）与所有类型（I）轨道的 π^+ 投影相同。

我们注意到，对于例 8.3 中的局部吸引子，有 $A_{\mathfrak{X}}^{\infty} = \mathcal{C}$ 是中三分 Cantor 集，且 $A_{\mathfrak{X}} \setminus A_{\mathfrak{X}}^{\infty} = \{q,p\}$，并且 $\mathrm{dist}_H(A_{\mathfrak{X}} \setminus A_{\mathfrak{X}}^{\infty},\ A_{\mathfrak{X}}^{\infty}) > 0$。下一个例子表明，一般而言，我们不能指望将局部吸引子中具有无限轨道的点集 $A_{\mathfrak{X}}^{\infty}$ 与吸引子的端点集 $A_{\mathfrak{X}} \setminus A_{\mathfrak{X}}^{\infty}$ 分离开来。

例 8.4。**(一个满足 $A_{\mathfrak{x}} \setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$ 在 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$ 上累积的压缩局部迭代函数系统)** 考虑赋予乘积拓扑的度量空间 $X = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$。定义以下映射及其对应的定义域:

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= (0, x_1, x_2, \ldots), & X_0 &:= \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \\ f_1(x) &:= (1, x_1, x_2, \ldots), & X_1 &:= \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \\ f_2(x) &:= (0, 0, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots), & X_2 &:= X_0 \cup X_1 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

根据定义显然可知，$\mathrm{Lip}(f_0) = \mathrm{Lip}(f_1) = 1/2$，并且

$$f_0(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \cup f_1(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}. \tag{8.2}$$

我们断言 $\mathrm{Lip}(f_2) \leqslant 1/2$。事实上，对于 $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 满足 $d(x, y) = e^{-N}$ 的情形，可以写成

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_N, x_{N+1}, \ldots), \quad y = (a_1, a_2, \ldots, a_N, y_{N+1}, \ldots), \quad x_{N+1} \neq y_{N+1}$$

并注意到

$$\begin{aligned} d(f_2(x), f_2(y)) &= d\big((0,0,a_1+a_2,\ldots,a_N+x_{N+1},\ldots),(0,0,a_1+a_2,\ldots,a_N+y_{N+1},\ldots)\big) \\ &\leqslant e^{-N-1} = \frac{1}{2} d(x,y), \end{aligned}$$

由于 $a_N + x_{N+1} \neq a_N + y_{N+1}$。此外，由于 $f_2(0, 1, 1, \ldots\ldots) = (0, 0, 1, 2, \ldots\ldots) \notin \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.，可得到

$$f_2(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \not\subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

特别地，$R_{\mathfrak{x}} = (X_j, f_j)_{1 \leqslant j \leqslant 3}$ 是一个压缩局部迭代函数系统。

令 $A_{\mathfrak{x}}$ 表示 $R_{\mathfrak{x}}$ 的局部吸引子，并令 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$ 如（2.6）中所定义。我们断言

$$A_{\mathfrak{x}} \setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty} \neq \emptyset \quad \text{and} \quad \mathrm{dist}_H(A_{\mathfrak{x}} \setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty}, A_{\mathfrak{x}}^{\infty}) = 0.$$

我们首先注意到

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset A_{\mathfrak{x}}^{\infty} \quad \text{and} \quad A_{\mathfrak{x}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cup Q, \tag{8.3}$$

其中 $Q := f_2(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$。事实上，$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset A_{\mathfrak{x}}$ 由（8.2）可知。此外，由于每个点 $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 都有无限轨道，可得 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$，从而证明了（8.3）中的包含关系。现在，取集合 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cup Q$ 在 Hutchinson-Barnsley 算子作用下的像，得到

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{x}}(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cup Q) &= \bigcup_{j=0}^{2} f_j\big((\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cup Q) \cap X_j\big) \\ &= \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cup f_2(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cup Q. \end{aligned}$$

这证明了 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cup Q$ 是正向 $F_{\mathfrak{x}}$不变的。根据局部吸引子的极大性（回顾定理 A），我们得出 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cup Q \subseteq A_{\mathfrak{x}}$。反向包含关系源于这样一个事实：$Q$中的每一点都是任意长度轨道的极限点，其中轨道由以下映射构成:

由形如 $f_2 \circ f_{j_k} \circ \cdots \circ f_{j_1}$ 且满足 $j_\ell \in \{0,1\}$ 对每个 $1 \leqslant \ell \leqslant k$ 的映射复合而成（回顾命题 5.1）。这就完成了对（8.3）中断言的证明。

进一步考察映射 f_2 的作用可知，存在一个分划 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \Sigma_M \sqcup (\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Sigma_M)$，其中 $\Sigma_M \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是由禁词 11 确定的有限型子移位，使得 $f_2(\Sigma_M) \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 且 $f_2(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Sigma_M) = Q \setminus \{0,1\}^{\mathbb{N}}$。因此，

$$A_{\mathfrak{x}} \setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty} = f_2(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Sigma_M) \quad \text{and} \quad A_{\mathfrak{x}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sqcup f_2(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Sigma_M). \tag{8.4}$$

接下来证明 $A_{\mathfrak{x}} \setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$ 在 $A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$ 上聚积。对每个 $n \geqslant 1$，考虑序列

$$\underline{b}^n := (0,\ldots,0,1,1,0,0,\ldots) = (0^n,1,1,0^{\infty}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

显然，$b^n \in A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$ 以及

$$f_2(\underline{b}^n) = (0^{n+1},1,2,1,0^{\infty}) \in Q \subset A_{\mathfrak{x}}, \quad f_2(\underline{b}^n) \notin X_0 \cup X_1 \cup X_2,$$

因此 $f_2(b^n) \in A_{\mathfrak{x}} \setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty}$。然而，由于当 n 趋于无穷时，$d(b^n,\ f_2(b^n)) = e^{-n}$ 趋于零，这证明了 $\mathrm{dist}_H(A_{\mathfrak{x}} \setminus A_{\mathfrak{x}}^{\infty},\ A_{\mathfrak{x}}^{\infty}) = 0$。

例 8.5. (**编码空间不是有限型子移位的压缩局部迭代函数系统**) 设 $R_{\mathfrak{x}} = (X_j, f_j)_{0 \leqslant j \leqslant 2}$ 为例 8.4中所描述的压缩局部迭代函数系统，其吸引子 $A_{\mathfrak{x}}$已在（8.4）中描述。我们声称，编码空间 $\Sigma_{\mathfrak{x}} \subset \{0,1,2\}^{-\mathbb{N}}$ 具有更复杂的结构，并且不是有限型子移位。已知 $\Sigma_{\mathfrak{x}} \subset \{0,1,2\}^{-\mathbb{N}}$ 是有限型子移位，当且仅当 $\sigma^- : \Sigma_{\mathfrak{x}} \to \Sigma_{\mathfrak{x}}$ 是开映射（例如参见 [Kur03，定理 3。35]）。

给定 开集 $U := [2] = \{b \in \Sigma_{\mathfrak{x}} : b_{-1} = 2\} \subset \Sigma_{\mathfrak{x}}$ 我们声称其像

$$V := \sigma^-(U) = \{\underline{c} \in \Sigma_{\mathfrak{x}} | \underline{c} * 2 \in \Sigma_{\mathfrak{x}}\} \subset \Sigma_{\mathfrak{x}}$$

不是开集。为证明这一点，考虑序列 $b = (\ldots,1,0\ldots,1,0,2,2)$，该序列由无限多个 1,0 块组成，并以 2,2 结尾，并注意到 $b \in U$ 如

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{x}}(\underline{b}) &= \lim_{k\to\infty} f_2^2 \circ (f_0 \circ f_1)^k(X) = f_2^2(\lim_{k\to\infty}(f_0 \circ f_1)^k(X)) = f_2^2(0,1,0,1,0,1,\ldots) \\ &= f_2(0,0,1,1,1,1,1,\ldots) = (0,0,0,1,2,2,2,2,\ldots.) \in A_{\mathfrak{x}}.\end{aligned}$$

由 $\Sigma_{\mathfrak{x}}$ 的不变性可知，$c = \sigma^-(b) = (\ldots\ldots, 1, 0\ldots\ldots, 1, 0, 2) \in V \subset \Sigma_{\mathfrak{x}}$。我们声称，$c$ 不是 V 的内点。事实上，对每个 $n \geqslant 1$，取序列

$$\underline{c}^m := (\ldots,0,1,0,1,0,1,1,\boxed{1,0\ldots,1,0},2) \in \{0,1,2\}^{-\mathbb{N}},$$

其中，$m \geqslant 1$ 表示在区块 1，0 与最终符号 2 之间、位于区块 1，1 和最终符号 2 之间的形如 1，0 的区块数量。显然，当 $m \to \infty$ 时，$d(c^m,\ c) = e^{-(2m+1)}$ 趋于零，但是 c^m

不属于 V，因为

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{x}}(\underline{c}^m) &= f_2 \circ (f_0 \circ f_1)^m \circ f_1^2(\lim_{k\to\infty}(f_0 \circ f_1)^k(X)) \\ &= f_2 \circ (f_0 \circ f_1)^m(1,1,0,1,0,1,0,1,\ldots) \\ &= (0,0,1,1,\ldots,1,2,1,1,1,1,\ldots) \in \Sigma_{\mathfrak{x}}\end{aligned}$$

不属于 V，因为无法将 f_2 应用于该点。

例 8.6. **(具有非恒定局部维数的局部吸引子)** 考虑压缩局部迭代函数系统 $R_{\mathfrak{x}} = (X_i, f_i)_{1\leqslant i\leqslant 9}$，其中映射定义如下：

$$\begin{cases} f_1(x,y) = (0.8x + 0.1, 0.8y + 0.04) \\ f_2(x,y) = (0.5x + 0.25, 0.5y + 0.4) \\ f_3(x,y) = (0.355x - 0.355y + 0.266, 0.355x + 0.355y + 0.078) \\ f_4(x,y) = (0.355x + 0.355y + 0.378, -0.355x + 0.355y + 0.434) \\ f_5(x,y) = (1 + ((x-1)+0)/2, 1 + ((y-1)+0)/2) \\ f_6(x,y) = (1 + ((x-1)+1)/2, 1 + ((y-1)+0)/2) \\ f_7(x,y) = (1 + ((x-1)+1/2)/2, 1 + ((y-1)+(\sqrt{(}3)/2))/2) \\ f_8(x,y) = (\gamma x + p_1, \gamma y + p_2) \\ f_9(x,y) = (\beta x + q_1, \beta y + q_2), \end{cases}$$

其中 $p_1 = 0.5, p_2 = 1.5, q_1 = 1.2, q_2 = 0.2, \gamma = 0.3,\ \beta = 0.6$，集合 $X_i \subset [0,2]^2$ 由 $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = [0,1]^2$、$X_5 = X_6 = X_7 = [0,2] \times [1,2]$ 和 $X_8 = X_9 = [0,1]^2$ 给出。

注意，局部迭代函数系统 $(X_i, f_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ 在 $[0,1]^2$ 中生成经典的梅普尔叶分形，而局部迭代函数系统 $(X_i, f_i)_{5\leqslant i\leqslant 7}$ 则在 $[1,2]^2$ 的右上角生成经典的谢尔宾斯基三角形。由于 $[0,2]\times[1,2] \supset [0,1]^2$，梅普尔叶的若干副本会通过映射 f_8 聚集到谢尔宾斯基三角形处，因为该映射是以点 $p = (p_1, p_2)$ = (0.5,1.5) 为中心的相似变换。映射 f_9 是以点 $q = (q_1, q_2)$ = (1.2,0.2) 为中心的相似变换，它在左下角生成一个小比例的梅普尔叶副本（灰色），该副本完全由端点构成（因为没有定义域会与它相交）。

局部吸引子的数值近似 $A_{\mathfrak{x}}$ 如图所示8.1。该局部吸引子高度非自相似，因为枫叶和谢尔宾斯基具有不同的局部结构和不同的局部豪斯多夫维数。最后，吸引子$A_{\mathfrak{x}}$ 是非传递的，因为存在一组端点，它们与局部吸引子的其余部分相距正距离。

致谢。 我们感谢 F. Strobin 对文本初稿提出的意见，并提供了示例8.1。本研究始于

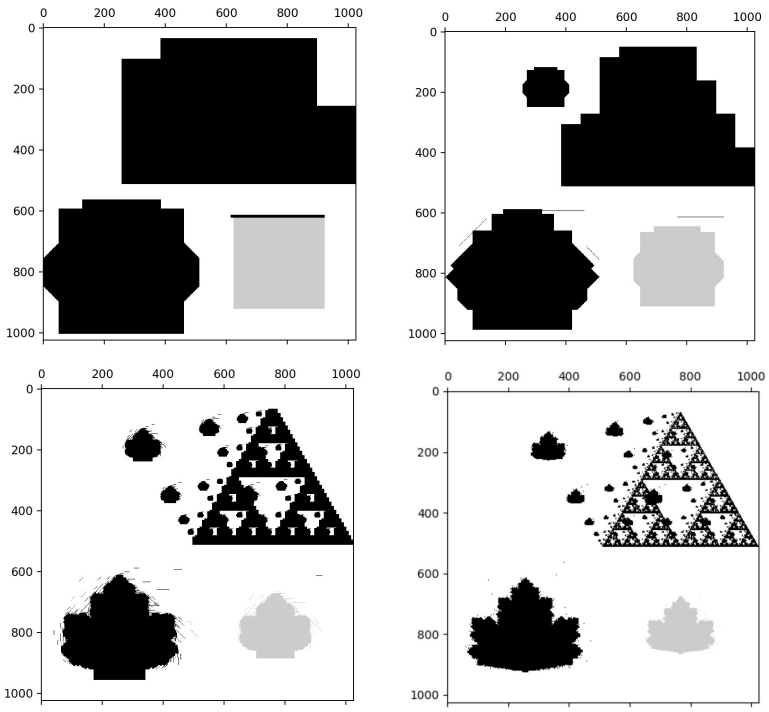

FIGURE 8.1. 迭代 $F^1_{\mathfrak{X}}(X)$ $F^2_{\mathfrak{X}}(X)$ $F^5_{\mathfrak{X}}(X)$ 和 $F^{15}_{\mathfrak{X}}(X)$（从左到右、从上到下）。

第一作者访问阿威罗大学期间。ERO 部分获得了 MATH- AMSUD 项目 GSA/CAPES（资助编号 88881.694479/2022-01）以及 CNPq（资助编号 408180/2023-4）的支持。

PV 的部分经费由 CIDMA 通过葡萄牙科学技术基金会（FCT，https://ror.org/00snfqn58）的研发单位多年期资助计划提供，资助编号为 UID/4106/2025 和 UID/PRR/4106/2025。

REFERENCES

[Bar86] M. F. Barnsley，《分形函数与插值》，Constr. Approx.，2（1986），303–329。[Bar88] M. F. Barnsley。《无处不在的分形》。Academic Press，1988。[Bar06] M. F. Barnsley。《超分形》。Cambridge University Press，2006。[BD85] M. F. Barnsley 和 S. Demko，迭代函数系统与分形的全局构造，*Proc. Roy. Soc. A*399:1817（1985）243–275。[BHM14] M.F. Barnsley、M. Hegland 和 P. R. Massopust，《数值计算与分形》。Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) 2014，9(3)，389430。[DV24] S. Dubey 和 S. Verma，非齐次图定向吸引子与分形测度，J. Anal. 32（2024）157–170。[BH93] M. F. Barnsley 和 L. P. Hurd，《分形图像压缩》，AK Peters Ltd.，Wellesly，马萨诸塞州，1993。

[Fal03] K. Falconer。《分形几何：数学基础与应用》。John Wiley & Sons, Inc.，霍博肯，新泽西州，第二版，2003年。[Fen23a] D.-J. Feng，仿射迭代函数系统中不变测度的维数，Duke Math. J. 172（2023年），第4期，701–774。[Fen23b] D.-J. Feng， C^1 迭代函数系统与排斥子的维数估计。第一部分，Ergodic Theory Dynam. Systems（2023年），在线发表。[FU09] D.-J. Feng 和 H. Hu，迭代函数系统的维数理论，Comm. Pure Appl. Math. 62（2009），第11期，1435–1500。[Fis95] Y Fisher。《分形图像压缩：理论与应用》。纽约。Springer Verlag，1995。[GLW88] E. Ghys、R. Langevin 和 P. Walczak，叶层的几何熵，Acta Math. 160（1988）105–142。[GE18] A. Gowrisankar 和 D. Easwaramoorthy，局部可数迭代函数系统。载于：《代数与分析进展》。数学趋势。Birkh¨auser，2018。[Hut81] J. Hutchinson。分形与自相似性。Indiana Univ. Math. J. 30（1981），第5期，713–747。[HK25] A.J. Homburg 和 C. Kalle，单位区间上的仿射扩张映射与收缩映射的迭代函数系统，Adv. Math. 482，B部分，2025年，110605。[Jeb25] H. Jebali，关于新型局部分形函数的研究。J. Anal.（2025年）。doi://10.1007/s41478-025-00917-6[Klo22] B. Kloeckner，迭代函数系统的最优传输与平稳测度，Math. Proc. Camb. Phil. Soc.，173: 1（2022）163–187。[Kur03] P. Kurka，《拓扑动力系统与符号动力系统》，SMF丛书，第11卷，法国数学学会，2003年[Le03] K. Le´sniak，多值迭代函数系统的稳定性与不变性，《斯洛伐克数学》，53（2003），第4期，393–405。[LKN25] K. Le´sniak、M. Kwieci´nski 和 P. Niemiec，欧氏空间上的高度非收缩迭代函数系统可以具有吸引子，J. Dyn. Diff. Equat.（2024年），2025年在线发表。[Mas14] P. Massopust，Besov空间和Triebel-Lizorkin空间中的局部分形函数，J. Math. Anal. Appl. 436（2016）393–407。[MU96] R. D. Mauldin 和 M. Urba´nski，无限迭代函数系统中的维数与测度，Proc. London Math. Soc. (3) 73（1996），第1期，105–154。[MW88] R. D. Mauldin 和 S. C. Williams，图定向构造中的豪斯多夫维数，Trans. Amer. Math. Soc. 309:2（1988）811–829[Mic20] R. Miculescu，收缩仿射广义迭代函数系统，Appl. Math. Lett. 112（2020），106709。[OS18] E. R. Oliveira 和 F. Strobin，由GIFZS产生的模糊吸引子。《模糊集合与系统》331（2018），131–156。[OSV26] E. R. Oliveira、F. Strobin 和 P. Varandas，局部模糊迭代函数系统中吸引子的存在性（编写中）[OV26] E. R. Oliveira 和 P. Varandas，局部迭代函数系统的拓扑稳定性与组合稳定性，预印本，2026年。[Ste99] D. Steinsaltz，局部收缩迭代函数系统，Ann. Probab. 27（1999），第4期，1952–1979。[Wal04] P. Walzak，叶层动力学、群与伪群，Springer BaselAG，2004年。

Elismar R. Oliveira, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre, Brazil
电子邮箱地址: elismar.oliveira@ufrgs.br

Paulo Varandas, Center for Research and Development in Mathematics and Appli-cations (CIDMA), Department of Mathematics, University of Aveiro, 3810-193 Aveiro,
Portugal & Departamento de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Av. Ademarde Barros s/n, 40170-110 Salvador, Brazil
电子邮箱地址: paulo.varandas@ua.pt