arXiv:2601.07807v1 [math.CT] 12 Jan 2026

代数量子场论的双范畴方法第一部分：公理化设置

KHYATHI KOMALAN

Abstract. 在算子代数AQFT中，人们通常需要在两类结构之间来回切换：由区域包含映射产生的局部代数包含映射，以及实现用于比较和复合可观测量的标准 L^2基础构造的双模/交织算子。要使这种相互作用真正具有函子性，其障碍在于存在两种彼此独立的复合（沿包含映射的限制，以及沿双模的融合/传输），而且它们必须在交换的时空图表上彼此相容；这正是双范畴所要编码的情形。第一部分通过构造一个时空双范畴和一个受 Orendain 先前工作启发的冯·诺伊曼代数双范畴，并将一个代数量子场论输入打包为伪双函子来解决这一问题；其中，垂直部分是 Haag-Kastler 网，而方形则以由交换性强制的、类型正确的方式记录所需的相容性。我们在这一框架下表述 Haag-Kastler 公理，确立构造所需的相干性，并详细研究若干具有代表性的例子。

Contents

1. 引言 1 2. 代数量子场论的范畴化处理 6 3. 双范畴代数量子场论 12 4. 代数量子场论双函子的结构性质 24 5. 示例 29 6. 结论与第二部分预览 38 参考文献 41

1. Introduction

背景。 Dr. Skeptical 是一位德高望重的物理学家，习惯于质疑形式主义。他在不同地点设有两间实验室。每间实验室都开展自己的实验，仅在有限时段内运行，并记录一个确定的结果。两间实验室相距足够远，因此在实验期间，没有任何物理影响能够从一间实验室传播到另一间。

尽管两间实验室在物理上彼此分隔，但实验设计并非相互独立。一个单一的源制备了一个相关量子系统，并将其两个组成部分分别送往两间实验室。每间实验室都对其接收到的系统进行固定的测量。当 Dr. Skeptical 单独检查任一实验室的数据时，结果看起来都平平无奇，因为这些结果似乎是随机的。

随后，她为每个实验室分别指派一名助手。她要求每名助手仅分析在局域范围内进行的测量，并使用他们认为最合适的任何理论工具来描述实验

。分别询问时，Dr. Skeptical 发现，两名助手都能对各自的发现作出完整且内在一致的说明，从实验室中可用的可观测量到实际发生的结果，无一遗漏。两名助手都同意，另一个实验室的存在性并未影响他们的结果。

然而，当 Dr. Skeptical 将两位助手提供的信息拼凑起来时，她感到十分惊讶。结果之间出现了强关联。尽管两位助手几乎在所有局域事实上都达成一致，但他们在如何形式化该实验的问题上意见不一。尤其令 Dr. Skeptical 感到沮丧的是，每种描述都依赖于全局结构，而这些结构无法从单个实验室内部获取。

对这种状况感到不满的 Dr. Skeptical 采取了更为激进的做法。她用两个与自己完全相同的克隆体替换了助手（克隆是否可行并非本文讨论的主题），分别派驻到两个实验室，并要求每个克隆体只分析在所在区域内可测量的可观测量。然而，结果并未改变。每个克隆体都能对局域实验作出完整且一致的描述，但仍然没有一种首选的、独立于观察者的方式，能够将这些描述合并为一个同时符合量子关联以及实验室之间因果分离的统一说明。

此时，Dr. Skeptical 意识到，问题不在于助手的能力，甚至也不在于她自己的能力，而在于量子理论的本质。尽管实验是在因果分离区域中进行的，量子理论的标准表述往往仍将所有可观测量置于单一的全局结构之中。在非相互作用理论中，这种全局视角或许无伤大雅。然而，在存在相互作用或纠缠的情况下，粒子诠释会变得模糊；不同的场或拉格朗日量选择可能描述相同的可观测行为，而理论的物理内容也不再与任何特定的微观描述相联系。

在所有这些描述中保持稳定的，并非场的选择或全局态，而是各区域中可用的测量结构及其相互关系。在 Dr. Skeptical 的情形下，若以基于区域的可观测量集合构建量子场论的表述，并辅以规范其包含、独立性和相互一致性的原理，便能解决这一难题。

Dr. Skeptical 困境的解决之道是代数量子场论（AQFT）。它将量子场论重新表述为关于时空区域内局域化的可观测量的理论，而非关于全局定义的场或态的理论。其基本思想是，直接在局域测量及其关系的层面编码所有具有物理意义的信息，不受所选具体场论表述的影响 [BF24]。

更具体地说，在代数量子场论中，会为闵可夫斯基时空的每个有界区域 O 关联一个代数 $\mathcal{A}(O)$，其中包含局域化于该区域的可观测量。映射 $O \mapsto \mathcal{A}(O)$ 按照时空上的一个网来组织。若 $O_1 \subset O_2$，则局域化于 O_1 的可观测量包含在局域化于 O_2的可观测量之中，这体现了一种称为单调性的性质。相对论局域性通过代数方式体现为：要求与类空分离区域相关联的可观测量彼此对易。由此，局域性被直接纳入可观测量结构，而远距离区域之间的关联则通过态而非非局域可观测量产生[Haa12]。

这一框架的一个自然推论是，无须采用某种特定的全局描述。不同的场或拉格朗日量选择可能生成相同的局部可观测代数网，因此被视为物理等价。从更数学的角度来看，我们可以采用满足一系列物理

原理的局部代数网——这些原理称为 Haag-Kastler 公理——而非任何特定的计算方案 [HM06]。

范畴论在这一图景中扮演什么角色？从范畴论的角度看，代数量子场论可以描述为一个协变函子：它从一个时空区域范畴——通常由闵可夫斯基时空中的有界开区域及以包含映射为态射构成——映射到一个算子代数范畴。在这种表述中，网结构 $O \mapsto \mathcal{A}(O)$ 以函子方式编码，而 Haag-Kastler 公理则作为附加条件施加于这一赋值之上，用以规定哪些函子在物理上是可接受的 [HM06；Haa12]。

尽管这种 1-函子观点提供了清晰的框架，却未能穷尽代数量子场论的结构内涵。具体而言，局域性、协变性和时间切片性质是通过约束函子的公理来强制实现的，而非由函子性本身决定；量子场论之间的等价也并非范畴结构所固有。正如近期研究所强调的，这限制了 1-范畴表述以结构化方式编码局部到整体行为、因果相容性及同伦等价概念的能力，因此促使人们考虑更丰富的范畴框架[Car23]。

双范畴。 双范畴出现在 Charles Ehresmann 于20世纪60年代初的研究中，彼时他正在探究结构化范畴与内部范畴[Ehr63a][Ehr63b]。在这些著作中，Ehresmann 将双范畴引入为配备复合律的结构化范畴实例，使态射能够沿两个不同方向复合。双范畴的基本数据包括对象、两类态射（水平态射和垂直态射），以及刻画它们彼此相容性的方形。

后续研究进一步发展了 Ehresmann 的框架，阐明了双范畴的内部结构与范畴性质。研究者致力于将 1-范畴论中熟悉的提升构造推广到非平凡的双范畴表述中，避免将水平态射或垂直态射中的任何一类平凡化。这些研究中值得一提的是 Marco Grandis 和 Robert Par´e 对极限、伴随和 Kan 延拓的形式化研究 [GP99；GP04；GP08]。

人们也提出了双范畴的其他表述，区别在于对复合律和单位律施加严格性的程度。在某些情形下，让这些定律在两个方向上都严格成立更为自然；而在另一些情形下，则需要更一般化的处理，即这些性质仅在同构意义下成立。因此，人们引入了严格双范畴、弱双范畴和伪双范畴等概念。

我们回顾双范畴的定义 [nLa25]。（为明确起见，我们先给出严格/内部定义；构造中使用的伪变体将在第 3 节回顾。）

定义 1.1（双范畴）。双范畴 $\mathbb{D}$由两个范畴 $\mathbb{D}_0$ 和$\mathbb{D}_1$组成，并配有源函子和目标函子

$$s, t : \mathbb{D}_1 \rightrightarrows \mathbb{D}_0.$$

$\mathbb{D}_0$ 的对象是 $\mathbb{D}$的对象，其态射是垂直态射。 $\mathbb{D}_1$ 的对象是水平态射，其态射是2-胞（或方形）。

图示如下：

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{h_0} & X_1 \\ {\scriptstyle v_0}\downarrow & \Downarrow{\scriptstyle \phi} & \downarrow{\scriptstyle v_1} \\ Y_0 & \xrightarrow[h_1]{} & Y_1 \end{array}$$

对于对象 X_i， Y_i、水平态射 h_i、垂直态射 v_i 以及一个 2-胞 ϕ。此外，还存在一个恒等函子

$$i : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{D}_1,$$

以及一个水平复合函子

$$\circ_h : \mathbb{D}_1 \times_{\mathbb{D}_0} \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_1,$$

使得这些数据定义了一个内部于 **Cat** 的范畴。

沿着这一思路，双函子 $\mathbb{F}$ ： $\mathbb{D} \to \mathbb{E}$ 在双范畴之间由函子性数据构成，将 $\mathbb{D}$ 的对象、垂直态射、水平态射和 2-胞映射为 $\mathbb{E}$的相应对象、垂直态射、水平态射和 2-胞，并且与源映射与靶映射、恒等态射以及水平复合和垂直复合相容 [Mye24]。

如前文简要提及，代数量子场论也有一种 1-范畴表述，即从带有包含映射的时空区域范畴到算子代数范畴的函子。我们将在第 2 节回到这一表述，以便对其进行更详细的探讨。然而，1-范畴表述只处理区域的包含以及由此诱导的代数同态。其他具有物理意义的关系——例如区域之间的因果相容性，或联系不同区域的关联数据——并未表示为态射，而是通过公理从外部规定它们与包含映射之间的相互作用。

为了直观理解我们构造双范畴代数量子场论背后的想法，让我们回到 Dr. Skeptical 的轶事。

设 $U_0 \subset U_1$ 为实验室一中的区域， $V_0 \subset V_1$ 为实验室二中的区域。考虑一个方形，其中垂直箭头表示各实验室内部的包含映射，而水平箭头则记录相关的“实验室之间”的时空数据：

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\text{causal map}} & V_0 \\ {\scriptstyle \text{inclusion}}\downarrow & \Downarrow{\scriptstyle \phi} & \downarrow{\scriptstyle \text{inclusion}} \\ U_1 & \xrightarrow[\text{causal map}]{} & V_1 \end{array}$$

这里， ϕ 表示在扩展到更大区域（竖直方向）与选定的实验室间时空关系（水平方向）之间的相容性。在 1-范畴框架中，表示时空的定义域范畴只有包含映射作为态射；而双范畴视角则允许我们同时追踪包含映射和另一类具有物理意义的态射，以及它们之间的相容性。

类似地，我们来思考相应的可观测量数据方形。这里我们只是勾勒这一想法，更严格的处理留待第 3 节。我们将第一个实验室中与区域相关联的代数记作 $\mathcal{A}(U_i)$，而将与

第二个实验室中的区域相关联的代数记作 $\mathcal{A}(V_i)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(U_0) & \xrightarrow{h_0} & \mathcal{A}(V_0) \\ {\scriptstyle v_0}\downarrow & \Downarrow{\scriptstyle \phi} & \downarrow{\scriptstyle v_1} \\ \mathcal{A}(U_1) & \xrightarrow[h_1]{} & \mathcal{A}(V_1) \end{array}$$

我们稍后会具体定义 h_i 和 v_i，但现在已可以直观地说明它们的作用。垂直态射 v_i 是 $*$-同态，由每个实验室内部时空区域的包含映射诱导而来，体现了单调性：局域于较小区域的可观测量嵌入到局域于较大区域的可观测量之中。这些正是标准代数量子场论表述中出现的代数映射。

相比之下，水平态射 h_i 并非由包含映射产生，而是表示关联不同实验室中各区域所对应代数的希尔伯特双模。从物理上说，这些双模编码了两个实验室之间的关联数据或共享的态空间结构，同时并不将它们的可观测量等同起来。于是，方形 ϕ 表达了每个实验室内部的单调性与通过此类双模关联两个实验室之间的兼容性。

在我们的设定中，我们将代数量子场论定义为时空双范畴与可观测量双范畴之间的双函子。

在 Dr. Skeptical 的情形中，上述方形形式化地表达了这样一个事实：每个实验室内的局域描述仍然完整且一致，而实验室之间的关联依然存在，必须以同时尊重包含关系与因果分离的方式加以考虑。这种相容性在 1-范畴表述中并不可见，但在双范畴框架下则变得明确。

范围。 本文旨在将代数量子场论表述于一个双范畴框架中，该框架将时空区域的包含关系与关联可观测量的关联数据区分开来。我们构造一个时空区域双范畴和一个相应的算子代数数据双范畴，并定义它们之间的一个双函子，以细化代数量子场论的标准 1-范畴表述。

具体而言，我们构造适用于代数量子场论的双范畴 $\mathbf{Mink}(M)$ 和 $\mathbf{vNA}$，并将本文的核心对象定义为一个双函子

$$\mathbb{F} : \mathbf{Mink}(M) \to \mathbf{vNA}.$$

双范畴 $\mathbf{Mink}(M)$ 以因果凸区域为对象、以包含映射为垂直态射、以因果嵌入为水平态射，并以交换方块为 2-胞。双范畴 $\mathbf{vNA}$ 以冯·诺依曼代数为对象，以正规含幺

$*$-同态作为垂直态射，希尔伯特双模作为水平态射（通过 Connes 融合复合），交织算子作为 2-胞。函子 $\mathbb{F}$ 将区域 U 映射到其代数 $\mathcal{A}(U)$，将包含映射映射为单调性嵌入，并将水平时空数据映射为编码关联或传输的双模。将 $\mathbb{F}$ 限制到垂直方向，可恢复普通的代数量子场论网；而方形层级的相容性则明确展现了单调性如何与目标中的水平对应演算相互作用。

我们展示如何在这一框架中表述 Haag-Kastler 公理，并区分由范畴结构本身所产生的方面与作为附加条件施加的方面。我们尤其着重明确如下兼容性

：单调性与关联数据之间的兼容性由双范畴中的方形编码，而这在 1-范畴框架中并不可见。

本文致力于探讨双重范畴化表述的基础与结构层面，并介绍具有代表性的实例。本研究的后续部分将进一步阐述这一框架的应用：第二部分考察该框架与 I 型及 II 型冯·诺依曼代数的相互作用，第三部分则讨论 III 型冯·诺依曼代数，并引入该构造的歌剧式细化，为 Tomita-Takesaki 模理论提供一个自然的框架。

致谢。作者感谢 Topos Institute Oxford 接纳其为非正式研究附属人员，并提供临时工作空间，使这些想法得以发展；作者也感谢有机会在 Topos Oxford Seminar 上介绍相关研究。

资助情况。本研究得到了 Emergent Venture 慷慨资助。

2. Categorical Treatments of AQFT

本节将简要介绍代数量子场论的其他范畴方法。它们几乎全都在基础层面上采用 1-范畴论：以区域范畴或时空范畴为索引来标记可观测量，再通过附加条件施加物理内容。

固定时空上的局域网。固定一个时空背景 M。代数方法首先选取一类可容许区域（例如满足适当因果正则性条件的有界开集），并将其构造成一个范畴。在最简单的设置中，这个范畴是一个偏序集 $\mathcal{R}(M)$，其态射由包含映射给出。于是，M 上的一个（Haag-Kastler）网可以视为一个协变函子

$$\mathcal{A} : \mathcal{R}(M) \to \mathrm{Alg},$$

其中 Alg 是一个算子代数对象范畴（例如 $*$代数、C^*代数或冯·诺依曼代数），其态射保持结构。实践中，人们常常将态射限制为单射（或单态射），这样对于一个包含映射 $O \subseteq O'$，映射 $\mathcal{A}(O) \to \mathcal{A}(O')$ 就会通过其像将 $\mathcal{A}(O)$ 识别为 $\mathcal{A}(O')$ 的一个子代数。概念上，该网记录了：(i) 每个区域中有哪些可观测量可供利用；(ii) 扩大区域时，这些集合之间如何关联。

主要的物理约束被表述为函子 $\mathcal{A}$所满足的条件。这些条件就是 Haag-Kastler 公理：单调性、局域性和协变性，通常还会辅以可加性；而在整体双曲时空中，还要求满足时间片条件，以表达由柯西数据决定的传播 [HK64]。从范畴论角度看，单调性就是沿包含映射的函子性；此外，如果希望将$\mathcal{A}(O)$ 视为 $\mathcal{A}(O')$ 的子代数，还需要相应的映射是单射的。局域性要求，赋予彼此类空分区域的可观测量在任何包含它们的更大区域的代数中彼此对易。协变性表示其与相关时空对称性（或者在更灵活的框架中，与某一类可容许嵌入）相容。可加性以适当的方式概括了这一思想：更大区域的代数由覆盖它们的较小区域的代数生成。时间片公理特别关注包含柯西曲面的区域，并要求这些区域中的可观测量生成完整代数。

将区域范畴 $\mathcal{R}(M)$ 与目标代数分开，可以让类型标注保持明确，这通常很有帮助。例如，单调性可以通过将 $\mathcal{A}$ 应用于包含链来表示

在 $\mathcal{R}(M)$ 中:

$$\begin{array}{ccccc} O_1 & \subseteq & O_2 & \subseteq & O_3 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}} \\ \mathcal{A}(O_1) & \longrightarrow & \mathcal{A}(O_2) & \longrightarrow & \mathcal{A}(O_3) \end{array}$$

仅凭函子性无法确定的约束是局域性：如果 O_1 和 O_2 是较大区域 O中的类空分离子区域，那么子代数 $\mathcal{A}(O_1)$ 和 $\mathcal{A}(O_2)$ 必须在 $\mathcal{A}(O)$ 内彼此对易。在固定背景的“ M上的网”表述中，这通常作为一条附加公理来规定两个子代数如何置于同一个代数中，而不是仅凭函子性所强制的结果。

由此看来，标准设置已经暗示了更丰富的结构。因果相容性并非区域偏序集中的一个态射；它是关于嵌入共同目标的一对包含映射的额外数据。同样，局部到整体原理（可加性、时间切片及其变体）并非函子 $\mathcal{A}$定义的结果；它们是进一步的约束，规定$\mathcal{A}$在某些包含映射族（覆盖、并集或指定嵌入）上的行为。

局部协变视角。 局部协变框架以时空及可容许嵌入构成的范畴 Loc，取代单一背景时空。在 Brunetti、Fredenhagen 和 Verch 的表述中，Loc 的对象是定向且具时间定向的整体双曲洛伦兹流形，其态射是保持定向、且像为因果凸开集的等距嵌入 [BFV03]。因果凸性确保嵌入可被视为子系统的包含：像中观察到的因果关系，恰好是从定义域继承而来的因果关系。

局部协变量子场论于是是一个协变函子

$$\mathcal{A} : \mathrm{Loc} \to \mathrm{Alg},$$

并满足额外的、基于物理动机的公理，这些公理表述为 $\mathcal{A}$ [BFV03；FV15]的性质。关键在于，协变性被内置于指标几何之中。我们不再固定 M并手动添加对称作用，而是让函子性表达可观测量如何沿时空嵌入传输。

函子性是理论的“运动学”部分：它编码了可观测量在可容许嵌入下的一致传输，而无需预先施加因果性、时间切片或其他物理约束。具体而言，嵌入 $\psi : M \to N$ 将 M 识别为 N中一个因果性质良好的子时空，而函子性则给出相应的可观测量同态

$$\mathcal{A}(\psi) : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(N).$$

因此，若 $\varphi : L \to M$ 和 $\psi : M \to N$ 是 Loc 中的态射，则

$$\mathcal{A}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{A}(\psi) \circ \mathcal{A}(\varphi), \qquad \mathcal{A}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(M)}.$$

为使类型标注清晰明了，可以并列展示 Loc 中的复合及其在 Alg 中的像:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varphi} & M \\ & {\scriptstyle \psi\circ\varphi}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ & & N \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(L) & \xrightarrow{\mathcal{A}(\varphi)} & \mathcal{A}(M) \\ & {\scriptstyle \mathcal{A}(\psi\circ\varphi)}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}(\psi)} \\ & & \mathcal{A}(N) \end{array}$$

如何从 $\mathcal{A} : \mathrm{Loc} \to \mathrm{Alg}$ 中恢复固定时空 M 上的网？固定 $M \in$Loc，并选择一类子区域 $O \subseteq M$ （例如开且相对紧的因果凸

区域），使得限制 $M|_O$是整体双曲的，从而得到（$M|_O \in$Loc）及其诱导包含 ι_O：$M|_O \to M$。沿这些包含映射进行限制即可得到一个网

$$O \longmapsto \mathcal{A}(M|_O), \qquad O \subseteq O' \longmapsto \mathcal{A}(\iota_{O'O}) : \mathcal{A}(M|_O) \to \mathcal{A}(M|_{O'}),$$

其中，$\iota_{O'O}$: $M|_O \to M|_{O'}$是由包含 $O \subseteq O'$在 Loc 中诱导的态射。特别地，单调性的结构由函子性提供；当我们在态射均为单射的目标范畴中工作时，单调性便内置于基本类型之中。

局域性和时间切片作为额外要求引入。因果性约束具有公共余域的态射对：如果 $\varphi_1 : M_1 \to N$ 和 $\varphi_2 : M_2 \to N$ 的像因果不相交，那么子代数 $\mathcal{A}(\varphi_1)(\mathcal{A}(M_1))$ 与 $\mathcal{A}(\varphi_2)(\mathcal{A}(M_2))$在$\mathcal{A}(N)$中对易。时间切片条件通过选取一类 S 柯西态射，并要求对每个 $s \in S$ [BFV03; FV15], $\mathcal{A}(s)$都是同构来施加。这样，局部协变框架就清晰地区分了协变函子赋值与真正的物理约束。

另一种进一步的精化，是通过自然变换来处理场以及理论之间的比较。在局部协变框架中，两个理论之间的映射是相应函子 Loc $\to$ Alg 之间的自然变换，正如 Fewster 和 Verch 在阐述局部协变理论范畴时所强调的 [FV15]。这也清楚地表明，基本的 1-范畴框架无法捕捉什么：在许多情形下，理论之间恰当的“相同性”概念弱于相等，更适合用等价及其相干比较数据来表达，因此需要高范畴的精化和同伦论精化。

正交范畴。范畴代数量子场论中反复出现的一个主题是，关键约束并非针对孤立的单个嵌入，而是针对因果意义上相容的嵌入对及嵌入族。正交范畴的概念将这一点简洁地打包在一起。

正交范畴（C, $\perp$）是一个范畴 C，并配有一个定义在具有公共余域的态射对上的正交关系，该关系要求在前复合和后复合下保持稳定。基本例子取 $C =$ Loc，并规定当两个态射的像因果不相交时，它们彼此正交。此外还有固定时空版本：对于 $M \in$Loc，切片范畴 Loc $/M$ 继承了一个诱导的正交关系，可用于刻画类似于单个时空 M [Ben+21]上的 Haag–Kastler 网络的理论。

在这种方法中，局域性被内置于指标数据之中。我们使用 $(C, \perp)$ 和一个函子 $\mathcal{A} : C \to \mathrm{Alg}_k$，其中 Alg_k 是一个选定的对称幺半范畴，其对象为 k–线性可观测量。关系 $f_1 \perp f_2$ 是为具有公共余域 t的态射对 $f_1 : c_1 \to t$ 和 $f_2 : c_2 \to t$ 定义的。局域性要求，只要 $f_1 \perp f_2$ 成立，子代数 $\mathcal{A}(f_1)(\mathcal{A}(c_1))$ 和 $\mathcal{A}(f_2)(\mathcal{A}(c_2))$ 就在 $\mathcal{A}(t)$ 中彼此对易。等价地，对所有$a_1 \in \mathcal{A}(c_1)$ 和 $a_2 \in \mathcal{A}(c_2)$,

$$[\mathcal{A}(f_1)(a_1), \mathcal{A}(f_2)(a_2)] = 0 \ \text{ in } \mathcal{A}(t).$$

这就是通常的局域性公理，现在以一种将因果输入作为域结构的一部分、通过 $\perp$ 表述的方式给出。

这一观点直接与旋子相衔接，旋子编码多输入复合。由 $(C, \perp)$ 可构造着色旋子 P_C，其运算是有限个两两正交且具有共同目标的态射组成的元组 $(f_1, \ldots, f_n)$。P_C 上的代数给出了理论的标准旋子表示，这些理论配备了相应的多区域结构映射，且与正交性相容。在基本几何实例 $C =$ Open(M) 中，

$U \perp V$当 $U \cap V = \varnothing$时，可从因子化代数理论中恢复预因子化歌剧 [Ben+21]。

在这种表述中，代数量子场论可以表示为某个选定的对称幺半目标范畴上的代数 P_C。在这种表示中， $\perp$-交换性要求被内置于歌剧关系中，而非另行施加。这种歌剧化重构在代数量子场论的同伦处理和导出处理中尤其有用，因为歌剧代数范畴上的模型结构为理论的弱等价及导出构造提供了系统的语言 [Car23]。其优势在于，局域性不再是附加于 1-函子上的额外公理，而成为理论代数数据的一部分，并且在标准范畴运算下表现良好，包括时间片局部化、沿正交范畴嵌入的延拓，以及同伦不变替换[Car23][Ben+21]。

Kan 延拓。 范畴代数量子场论中自然会出现两种不同的 Kan 延拓构造，因为从局域数据过渡到全局数据有两种不同的方式。

首先，在正交歌剧框架中，通常存在正交范畴的全嵌入

$$J : C \hookrightarrow D.$$

给定一个理论 $\mathcal{A} \in$AQFT(C)，可以用一种典范方式将其扩张到 D：沿着由此诱导的带色歌剧态射 $P_C \to P_D$，取幺半群左Kan延拓。这将产生一个理论 $J_!\mathcal{A} \in$AQFT(D)，并构成一个伴随

$$J_! \dashv J^*,$$

其中 J^*是沿着 J的限制。粗略地说， $J_!\mathcal{A}$是 $\mathcal{A}$到更大的指标范畴 D的泛扩张，它通过自由添加恰由旋子的局域性结构和正交关系所迫使的复合而得到。在熟悉的几何情形中，这种泛扩张还原为通常所称的 Fredenhagen 泛代数 [Ben+21]。

其次，在规范理论和结构化时空框架中，起点是一个位于 Loc 上、以群胚为纤维的范畴 Str，其投影为

$$\pi : \mathrm{Str} \to \mathrm{Loc}$$

它遗忘了额外的背景结构（例如自旋结构或带联络的主丛）。结构化时空上的理论是一个函子 $\mathcal{A} : \mathrm{Str} \to \mathrm{Alg}$。接下来，我们希望得到一个 Loc 上的理论，以受控的方式打包描述 $\mathcal{A}$ 对附加结构的依赖。一个典范的候选者是右 Kan 扩张

$$\mathrm{Ran}_\pi \mathcal{A} : \mathrm{Loc} \to \mathrm{Alg},$$

配备其泛自然变换

$$\epsilon : (\mathrm{Ran}_\pi \mathcal{A}) \circ \pi \Rightarrow \mathcal{A}.$$

图示如下：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Str} & \xrightarrow{\ \mathcal{A}\ } & \mathrm{Alg} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ \mathrm{Loc} & \xrightarrow[\mathrm{Ran}_\pi \mathcal{A}]{} & \mathrm{Alg} \end{array} \qquad \epsilon : (\mathrm{Ran}_\pi \mathcal{A}) \circ \pi \Rightarrow \mathcal{A}$$

其泛性质是通常的：$(\mathrm{Ran}_\pi \mathcal{A}) \circ \pi \Rightarrow \mathcal{A}$ 在所有配备自然变换 $\mathcal{B} \circ \pi \Rightarrow \mathcal{A}$ 的对 $\mathcal{B} : \mathrm{Loc} \to \mathrm{Alg}$ 中是终对象。在具体模型中，$\mathrm{Ran}_\pi \mathcal{A}(M)$ 可以

通常可计算为对 M 上的 π-结构所成群胚取极限，这一机制将对背景结构的依赖封装进单个 Loc-理论中。

这种逐点描述也解释了为何在遗忘结构后，严格等距性可能失效。态射 $f\colon M \to N$在 Loc 中诱导出一个比较映射 $\mathrm{Ran}_\pi\mathcal{A}(f)\colon \mathrm{Ran}_\pi\mathcal{A}(M) \to \mathrm{Ran}_\pi\mathcal{A}(N)$，它连接两个极限，这两个极限分别取自上述 M和 N上的结构群胚。若不对 π附加延拓假设，则沿 f 限制结构可能不足以保证良好性质，从而无法确保该比较映射是单射的。具体而言，在 M 上非平凡的元素，传输到 N时可能被迫变为零。这正是结构化情形和规范理论情形中所展示的等距性违反背后的逻辑 [BS17]。

总之，这些 Kan 延拓构造将两种互补的局部到整体过程形式化：沿指标几何的包含映射进行延拓（幺半群左 Kan 延拓），以及将依赖结构的可观测量下降为底层时空上的理论（右 Kan 延拓）。

2AQFT。幺半群重述已自然地揭示出一种范畴化。在代数值情形中，每个区域都对应一个代数，而相容的区域族则通过乘法映射组合起来。在许多情境下，尤其是在涉及对称性和下降时，我们希望赋予某个区域的结构并非单个代数，而是一个由 k-线性范畴组成的对象范畴，其限制与组合由函子实现。这便引出了 2-范畴代数量子场论。

固定一个正交范畴（C，$\perp$）及其关联的预因子化歌剧 P_C。C 上的 2-范畴代数量子场论保留同一个歌剧 P_C，但将目标从代数改为局域可呈现的 k-线性范畴所组成的 2-范畴 Pr_k。具体而言，定义

$$2\mathrm{AQFT}(C) := \mathrm{Alg}_{P_C}(\mathrm{Pr}_k).$$

因此，一个理论 $\mathcal{A} \in 2\mathbf{AQFT}(C)$ 为每个对象 $c \in C$ 赋予一个局域可呈现的 k-线性范畴 $\mathcal{A}(c)$。对于一组有限的、两两正交且具有公共余域的态射

$$f_1 : c_1 \to t, \ldots, f_n : c_n \to t,$$

它赋予一个因子化乘积函子

$$\mathcal{A}(f_1, \ldots, f_n) \;:\; \prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}(c_i) \longrightarrow \mathcal{A}(t),$$

它是 k-线性函子，并且关于每个变量都是余连续的。零元运算为 $\mathcal{A}(t)$ 提供一个特选对象，充当单位。这样，由 P_C 所编码的相同多区域局域性，便通过范畴之间的多线性函子发挥作用，而不是通过代数中的乘法来实现 [Ben+21]。

有两点结构性内容值得强调。第一，Pr_k 通过张量积构成对称幺半范畴，因此多输入运算可以直接在目标中实现。第二，高阶比较数据是内在的：理论态射是赋予的k-线性范畴之间的函子，而 2-态射是自然变换。这非常适合这样的情形：我们所期待的只是直到等价的识别，以及相应的相干比较数据；在存在规范对称性或下降时，通常正是如此 [Ben+21]。

同伦。代数量子场论的正交–运算子呈示具有自然的同伦强化。若选择一个可观测量的对称幺半模型范畴（例如链复形），那么代数量子场论便可表示为该模型范畴中的 P_C 上的一个代数。随后可以在由此得到的理论范畴上赋予模型结构，其中弱等价通常逐对象检测（或依据针对具体应用制定的判据检测）。

指导原则是：导出构造（导出量子化、导出扩张、导出局部到整体过程）应仅依赖于理论的弱等价类，而不应依赖于某种特定的严格呈现 [Car23]。

一个关键点是，时间片条件可以表述为对指标几何的局部化。固定一个特定类 S 的正交范畴态射 C，例如柯西态射。构造局部化范畴 $C[S^{-1}]$。随后，可以将时间片理论与相应局部化旋子上的歌剧代数进行比较。在这一表述中，时间片并不是附加在函子上的额外公理；它表明该理论经过一个范畴分解，而在该范畴中，S 中的态射都已被求逆。这与同伦方法十分契合：局部化和 Quillen 等价为比较呈现相同物理内容的不同模型提供了有原则的方法 [Car23]。

即使最终处理的是算子代数而非链复形，这一概念信息仍然成立。正交范畴及其旋子分离出多区域的因果输入，并使其能够用于标准的范畴构造。同伦视角提供了一种在这些构造下保持稳定的等价概念。二者共同说明，严格的 1-范畴表述可能会遗漏某些结构：场论中的许多比较天然只能在带有相容性数据的等价意义下表述，而许多局部到整体过程则受普适性质（Kan 延拓、局部化）支配；一旦允许高阶范畴特征出现，这些性质就会变得更加透明。

迈向双范畴。以上观点可以理解为：我们对形式体系需要承载什么的要求在逐步转变——我们不再把主要的物理要求视为对可观测量的基础赋值所施加的附加条件，而是不断丰富范畴设置，直到这些要求开始显现为结构。

在固定时空网图景和局部协变代数量子场论中，基本做法仍然是使用一个 1-函子，将可观测量赋给区域或时空。局域性和时间切片性质则作为该函子的附加条件引入：这些条件借助共同目标中一对嵌入之间的因果不交关系，以及一类指定的柯西态射来表述，并要求函子将其映为同构 [BFV03；FV15]。正交范畴及其运算子编码进一步凸显了这一点：因果输入直接记录在定义域中，通过 $\perp$实现；而局域性则由运算子结构加以保证，使得来自两两 $\perp$相容区域的可观测量在共同目标中组合时彼此对易 [Car23；Ben+21]。

Kan 延拓增添了第二项指导原则。它们提供了沿包含映射扩展理论、以及从结构化时空下降到非结构化时空的规范方式，也阐明了为何单调性等严格性质会在纳入不变性和下降后失效 [BS17]。

最后，2AQFT 将目标从代数提升为线性范畴，使理论之间的比较及其所携带的相干数据成为基础语言的一部分，并使泛扩张过程能够得到范畴化精化 [Ben+21]。

即使经过这些改进，仍有一个问题有待解决：如何清晰地区分两种不同的结构，同时又允许它们相互作用。代数量子场论通过区域包含来表达可观测量的限制与扩张，这些包含自然地编码为区域范畴或 Loc 中的态射。与此同时，代数量子场论反复涉及并非包含映射的关系，例如因果独立性以及更一般的关联数据。在 1-范畴框架中，这些关系通常表现为较大代数内部的对易要求；而在算子代数实践中，它们往往通过双模或耦合来中介

这些双模或耦合将代数联系起来，却不将它们视为同一对象。正交性刻画了这第二类关系中的一个重要部分，但它仅适用于具有公共余域的箭头对上的关系。同样，2AQFT 丰富了目标范畴，但其定义域仍是一个配备了 $\perp$ 的 1-范畴，因此，非包含关系仍通过交换约束、扩张过程和下降间接引入。

这促使我们构建一个框架，使包含映射和关联型关系形成两个复合方向，并配备明确的相干数据来表达它们之间的相容性。双范畴恰好提供了这种区分。一个方向记录区域的包含，因此单调性在该方向上成为函子性的。另一个方向记录我们希望追踪的其他关系，而方形则表达了沿包含映射的限制与沿这些非包含态射的传输相容。

在下一节中，我们将具体实现这一想法。我们构造双范畴$\mathbf{Mink}(M)$和$\mathbf{vNA}$，并定义一个双函子

$$\mathbb{F} : \mathbf{Mink}(M) \to \mathbf{vNA},$$

将区域 U 映射到其代数 $\mathcal{A}(U)$，将包含映射映射为通常的 $*$-同态，并将水平因果数据映射为通过 Connes 融合复合的希尔伯特双模。由此得到的方形将相容性条件打包在一起；在 1- 范畴表述中，这些条件是作为公理从外部施加的。

3. 双范畴 AQFT

记号与工具。 在本节中，每个双范畴都是一个伪 双范畴：即一个内范畴对象，取值于$\mathbf{Cat}$，其中水平方向是弱的（仅在相干同构意义下满足结合律和单位律），而垂直复合是严格的。直观而言：垂直箭头像普通范畴中的正经态射那样运作，而水平箭头的复合则类似于双范畴中的 1-胞腔。

定义 3.1（伪双范畴）。 伪双范畴 $\mathbb{D}$ 由以下部分组成：

a) 一个范畴 $\mathbb{D}_0$（对象和垂直态射），b) 一个范畴 $\mathbb{D}_1$（对象是水平态射，态射是方形），c) 函子

$$s, t : \mathbb{D}_1 \rightrightarrows \mathbb{D}_0$$

（水平源/目标），

d) 一个函子

$$U : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{D}_1$$

（水平恒等指派），

e) 以及一个水平复合函子

$$\odot : \mathbb{D}_1 \times_{\mathbb{D}_0} \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_1,$$

定义在 t 和 s 的拉回上（因此，当且仅当 $t(H) = s(K)$ 时，(H, K) 可复合）。

这些数据使得

$$(\mathbb{D}_0, \mathbb{D}_1, s, t, U, \odot)$$

一个内范畴，内部于$\mathbf{Cat}$，但仅在指定的相干自然同构意义下成立（包括满足五边形恒等式和三角形恒等式的水平结合子与左右单位子）。垂直复合严格地等于 $\mathbb{D}_0$ 和 $\mathbb{D}_1$中的范畴复合。

$\mathbb{D}_1$ 的一个对象是一个水平态射。若 $H \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D}_1)$，我们记作

$$H : A \Rightarrow B$$

表示

$$s(H) = A, \quad t(H) = B,$$

其中 s 和 t 表示 $\mathbb{D}_0$中的水平源与靶。

$\mathbb{D}_1$ 中的态射是一个方形。具体而言，一个方形是一个态射

$$\alpha : H \longrightarrow K$$

在范畴 $\mathbb{D}_1$中，其中 H，$K \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D}_1)$ 是水平态射。因此，若

$$H : A \Rightarrow B, \quad K : A' \Rightarrow B',$$

那么将函子 s，$t : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_0$ 作用于态射 $\alpha : H \to K$，会得到垂直边界映射

$$s(\alpha) : A = s(H) \longrightarrow s(K) = A', \qquad t(\alpha) : B = t(H) \longrightarrow t(K) = B'$$

在 $\mathbb{D}_0$ 中。我们通常将这些边界映射记为

$$f := s(\alpha) : A \to A', \qquad g := t(\alpha) : B \to B'.$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A' & \xrightarrow[K]{} & B' \end{array}$$

在上面的图示中，H 是顶部水平箭头，K 是底部水平箭头，而（f，g）是由方形 α 确定的左右垂直箭头。

回顾函子

$$U : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{D}_1$$

赋予水平恒等态射及其单位方形。它有两种不同的类型，务必将二者区分清楚：

a）对于每个对象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D}_0)$，对象 $U(A) \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D}_1)$ 是 A处的水平恒等态射。我们记为

$$U(A) =: U_A : A \Rightarrow A,$$

因此

$$s(U_A) = A = t(U_A).$$

b) 对于每个垂直态射 f: $A \to A'$in $\mathbb{D}_0$，态射 $U(f) : U_A \to U_{A'}$in $\mathbb{D}_1$是一个方形，其垂直边界为 (f，f)，即

$$s\big(U(f)\big) = f, \qquad t\big(U(f)\big) = f.$$

我们将这个单位方形记为

$$\iota_f := U(f).$$

等价地，ι_f 可以表示为：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{U_A} & A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A' & \xrightarrow{U_{A'}} & A' \end{array}$$

对于 $\mathbb{D}_0$ 中的任意垂直态射 φ， $U(\varphi)$ 是一个方形，其垂直边界为 (φ, φ)，其水平源与靶均为水平恒等态射。特别地，除非 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$，否则 $U(\varphi)$ 的垂直边界不能指定为 (φ_1, φ_2)。

在整个构造过程中，我们使用 Juan Orendain 的自由球状生成双范畴构造，详见 [Ore19][Ore21]。为此，我们回顾一下 Orendain 的设定中稍后实际会用到的部分。

定义 3.2（球状方形）。一个方形

$$\alpha : H \longrightarrow K$$

若其垂直边界映射均为恒等态射，则称其为球状；等价地，若

$$s(H) = s(K), \quad t(H) = t(K), \quad s(\alpha) = \mathrm{id}_{s(H)}, \quad t(\alpha) = \mathrm{id}_{t(H)}.$$

等价地，它是如下形式的方形：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & B \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ A & \xrightarrow[K]{} & B \end{array}$$

固定一个伪双范畴 $\mathbb{C}$。用 $G(\mathbb{C})$ 表示其球状方形的集合。对于每个垂直态射 $f \in \mathbf{Mor}(\mathbb{C}_0)$，用 $\iota_f := U(f)$ 表示相应的单位方形。

定义 3.3（0-标记方块）。设 $\mathbb{C}$ 是一个伪双范畴。$\mathbb{C}$ 中 0-标记方块的集合为

$$G_{\mathbb{C}} := G(\mathbb{C}) \cup \{\iota_f \mid f \in \mathrm{Mor}(\mathbb{C}_0)\},$$

其中，$G(\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}$ 中球状方块的集合，而 $\iota_f := U(f)$ 是与垂直态射 f 相关联的单位方形。

定义 3.4（球状生成双范畴）。按照 Orendain 的说法，若伪双范畴 $\mathbb{C}$ 的每个方形都属于包含 $G_{\mathbb{C}}$ 且在垂直复合与水平复合下封闭的最小方形类，则称 $\mathbb{C}$ 为球状生成的。等价地，$G_{\mathbb{C}}$ 在双范畴运算下的闭包是 $\mathbf{Mor}(\mathbb{C}_1)$ 的全部。

定义 3.5（γ-构造）。定义 $\gamma\mathbb{C}$ 为 $\mathbb{C}$ 的最小子双范畴，它满足：

a）具有与 $\mathbb{C}$ 相同的对象和垂直态射，b）具有与 $\mathbb{C}$ 相同的水平态射，c）其方形包含 $G_{\mathbb{C}}$，并且在垂直复合和水平复合下封闭（因而在伴随运算下也封闭）。

根据构造，$\gamma\mathbb{C}$ 是球状生成的。

定义 3.6（装饰水平化 H^*）。设 $\mathbb{C}$ 是一个伪双范畴。装饰水平化 $H^*(\mathbb{C})$ 是一个带装饰双范畴，其组成如下：

a) 对象 Ob($\mathbb{C}_0$)；b) 装饰由垂直范畴 $\mathbb{C}_0$给出；c) 水平 1-胞腔 $A \to B$ 由水平态射 $H \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C}_1)$ 给出，其中 $s(H) = A$且 $t(H) = B$；d) 2-胞由球状方块 $\alpha : H \Rightarrow K$给出，即 $\mathbb{C}_1$ 中的态射 $\alpha : H \to K$，其垂直边界为恒等；e) 水平复合和单位由 $\odot$ 和 U诱导，其结合子和单位子继承自伪双范畴结构。

因此， $H^*(\mathbb{C})$保留水平复合及球面 2-胞腔，并保留作为装饰的 $\mathbb{C}_0$，但舍弃非球面方块数据。

定理3.1 （固定 H^*时 $\gamma\mathbb{C}$的极小性）。证明如下：

$$H^*(\gamma\mathbb{C}) = H^*(\mathbb{C}),$$

并且， $\gamma\mathbb{C}$ 包含于每个满足以下条件的子双范畴 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 中：

$$H^*(\mathbb{D}) = H^*(\mathbb{C}).$$

特别是， $\gamma\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 中具有相同装饰化水平化 *[Ore21]*的极小子双范畴。

令$\mathbf{bCat}^*$ 表示 Orendain 的装饰双范畴及装饰伪函子范畴，并令$\mathbf{gCat}$ 表示球面生成的伪双范畴及双函子范畴。

定理3.2 （在球面生成双范畴上的伴随 $Q \dashv H^*$ 。 我们可以构造一个左伴随

$$Q : \mathbf{bCat}^* \rightleftarrows \mathbf{gCat} : H^*\restriction_{\mathbf{gCat}},$$

其单位为

$$j_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \longrightarrow H^*Q(\mathbb{B}),$$

余单位为

$$\pi_{\mathbb{C}} : QH^*(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

对于球面生成的 $\mathbb{C}$ *[Ore21]*。

单位的方向具有实质意义： Q 是自由的，因此在自由生成之后应用 H^*，可能会扩张起初给定的带装饰双范畴。

备注。 单位 $j_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to H^*Q(\mathbb{B})$ 将 $\mathbb{B}$ 与其在 $H^*Q(\mathbb{B})$ 中的像等同起来。一般而言，不存在规范映射 $H^*Q(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$，这反映出自由生成可能会在 $H^*Q(\mathbb{B})$ [Ore19][Ore21]中引入新的复合，进而产生额外球状方块。

定义 3.7 （饱和化）。 带装饰双范畴 $\mathbb{B}$ 的饱和化是 $H^*Q(\mathbb{B})$。称 $\mathbb{B}$ 为饱和的，当且仅当

$$\mathbb{B} = H^*Q(\mathbb{B}),$$

等价地，若单位 $j_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to H^*Q$（$\mathbb{B}$）是同构 [Ore19]。

备注。 饱和化并非自动成立。若没有饱和化， $Q(\mathbb{B})$ 中的自由复合可能会在 $H^*Q(\mathbb{B})$ 中导出 $\mathbb{B}$ 中不存在的球面 2- 胞腔，因此 $Q(\mathbb{B})$ 未必能将 $\mathbb{B}$ 内化。相比之下， $Q\big(H^*Q(\mathbb{B})\big)$ 总能将饱和化 [Ore19] 内化。

时空双范畴。 现在我们定义 AQFT 双函子的定义域：固定时空 M 上的区域双范畴，记作 **Mink(**M**)**。其理念很简单：垂直箭头是包含映射（单调性方向），水平箭头是可容许嵌入（协变性／传输方向），而方形只是嵌入之间的交换方块。

固定一个 时空 M。设 $\mathcal{R}(M)$ 为一类（或一个集合）可容许区域。

定义 3.8 （嵌入范畴）。设 **Emb(**M**)** 是一个范畴，其对象为区域 $U \in \mathcal{R}(M)$，态射 h：$U \hookrightarrow V$ 为可容许嵌入。恒等态射均为可容许的，且可容许嵌入在复合下封闭，因此 **Emb(**M**)** 定义良好。

记 **Inc(**M**)** $\subseteq$**Emb(**M**)** 为由包含映射构成的宽子范畴，记 **Iso(**M**)** $\subseteq$**Emb(**M**)** 为可容许同构构成的子群胚。

Emb(M**)** 中一个基本的几何结构是交换方块，

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ U' & \xrightarrow[h']{} & V' \end{array} \quad \text{meaning} \quad j \circ h = h' \circ i.$$

定义 3.9 （时空双范畴 **Mink(**M**)**）。 定义（严格）双范畴**Mink(**M**)**如下：

a) $\mathbf{Mink}(M)_0 := \mathbf{Inc}(M)$。因此，对象是区域，垂直态射是包含映射。b) 水平态射 $U \Rightarrow V$ 是可容许嵌入 $h : U \hookrightarrow V$，即 **Emb(**M**)**中的态射。c) **Mink(**M**)**中从 h：$U \hookrightarrow V$到 h'：$U' \hookrightarrow V'$、垂直边界为i：$U \hookrightarrow U'$和 j：$V \hookrightarrow V'$的方形，是**Emb(**M**)**中的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ U' & \xrightarrow[h']{} & V' \end{array} \quad (j \circ h = h' \circ i)$$

其中 i, j 为包含映射。

d) 水平复合是**Emb(**M**)**中的复合；垂直复合是**Inc(**M**)**中的复合；方形通过粘合交换方块进行复合。e) 水平恒等态射是恒等嵌入 $\mathrm{id}_U : U \hookrightarrow U$。包含映射 $i : U \hookrightarrow U'$ 上的单位方形是恒等嵌入之间的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ U' & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & U' \end{array}$$

引理 3.3. Mink(M) 是一个严格双范畴。

证明。 水平复合是严格结合且有单位元的，因为它是在 1-范畴 **Emb(**M**)** 中的复合。垂直复合是严格结合且有单位元的，因为它

是在 1-范畴 $\mathbf{Inc}(M)$ 中的复合。方形通过粘合 $\mathbf{Emb}(M)$ 中的交换方块进行复合，而互换律严格成立，因为两种迭代复合都表示 1-范畴中同一个外部矩形的交换性。□

备注。 $\mathbf{Mink}(M)$ 中的球状方形在其两条垂直边上具有恒等包含：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & V \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ U & \xrightarrow[h']{} & V \end{array}$$

这迫使 $h = h'$。因此， $G(\mathbf{Mink}(M))$ 本质上由水平态射上的恒等方块构成。特别是， $\gamma(\mathbf{Mink}(M))$ 可能远小于 $\mathbf{Mink}(M)$；它有助于处理极小性／唯一性问题，但不能替代时空几何本身。

可观测量双范畴。 现在我们定义 AQFT 双函子的余域：一个冯·诺依曼代数的伪双范畴，记作**vNA**。在垂直方向上，我们保留通常的网方向（正规幺正 $*$-同态）。在水平方向上，我们使用对应，使得复合即为 Connes 融合。方形于是成为双模交织算子，而交换时空方块则成为类型良好的对应方块。

定义 3.10 （垂直态射类 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$）。 固定一类 V 冯·诺依曼代数，以及一个子范畴 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，满足 $\mathrm{Ob}(\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}) = V$，其态射为那些正规幺正 $*$-同态 $\varphi : A \to B$，对于这些同态，下文使用的算子代数框架提供了函子性标准形赋值

$$L^2(\varphi) : L^2(A) \longrightarrow L^2(B)$$

与对应结构和 Connes 融合相容 [Ore21]。

定义 3.11 （对应）。 对于冯·诺依曼代数 A， B，一个 A-B 对应

$$H : A \rightsquigarrow B$$

是一个希尔伯特空间 H，其配备了相互对易的正规含单位 $*$-表示

$$\lambda_H : A \to B(H), \quad \rho_H : B^{\mathrm{op}} \to B(H).$$

等价地， H 带有一个正规左 A-作用和一个正规右 B-作用，且二者相互对易，即

$$\lambda_H(a)\,\rho_H(b^{\mathrm{op}}) = \rho_H(b^{\mathrm{op}})\,\lambda_H(a) \qquad (a \in A,\ b \in B).$$

等价地， $\lambda_H(A)$ 和 $\rho_H(B^{\mathrm{op}})$ 是 $B(H)$ 的相互对易的冯·诺依曼子代数。

定义 3.12 （交织算子）。 若 $H, H' : A \rightsquigarrow B$ 是对应，则交织算子 $T : H \to H'$ 是一个有界线性映射，使得对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，下列图表均可交换：

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & H' \\ {\scriptstyle \lambda_H(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{H'}(a)} \\ H & \xrightarrow[T]{} & H' \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & H' \\ {\scriptstyle \rho_H(b^{\mathrm{op}})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{H'}(b^{\mathrm{op}})} \\ H & \xrightarrow[T]{} & H' \end{array}$$

等价地， $T(a \cdot \xi \cdot b) = a \cdot T(\xi) \cdot b (a \in A,\ b \in B)$。 交织算子构成复向量空间。

定义 3.13 （标准形式与 $L^2(A)$）。 对每个 $A \in V$，选取其 Haagerup 标准形（H_A, λ_A, J_A, P_A）。定义 A-A 对应

$$L^2(A) := H_A$$

其左作用为 $\lambda_{L^2(A)} := \lambda_A$ ，右作用定义为

$$\rho_{L^2(A)}(a^{\mathrm{op}}) := J_A \, \lambda_A(a^*) \, J_A \qquad (a \in A).$$

左作用与右作用彼此交换，且 $L^2(A)$ 是 A 处的水平恒等对应。

将这两个彼此交换的作用以边界图的形式呈现出来很有用：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda_A} & B(L^2(A)) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ A & \xrightarrow[\rho_{L^2(A)}]{} & B(L^2(A)) \end{array} \qquad \text{with} \quad \lambda_A(a)\,\rho_{L^2(A)}(b^{\mathrm{op}}) = \rho_{L^2(A)}(b^{\mathrm{op}})\,\lambda_A(a).$$

定义 3.14 （Connes 融合）。 若 $H\colon A \rightsquigarrow B$ 且 $K\colon B \rightsquigarrow C$，它们的水平复合为 Connes 融合

$$H \boxtimes_B K : A \rightsquigarrow C,$$

对应之间的标准相对张量积。Connes 融合在典范同构意义下满足结合律和单位律，单位为 $L^2(B)$。这就是水平方向上伪相干性的来源。

备注。 我们并未假设 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 自身具有线性结构。下文所用的线性结构是指方形（交织算子）的空间为复向量空间，且双范畴运算在这些空间上是线性的或双线性的。

记 Q_{lin} 为适用于对应和交织算子的线性／富化设定中的自由球状生成构造 [Ore21]。

Now, 我们已经具备定义目标（伪）双范畴的所有要素 ：

定义 3.15。 设 $\mathbb{W}^*$ 是算子代数框架中的一个饱和装饰双范畴，其装饰水平化编码了：

a) 对象 V，b) 垂直态射$\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，c) 水平态射为对应，d) 水平恒等态射 $A \mapsto L^2(A)$，e) 水平复合为 Connes 融合。

定义

$$\mathbf{vNA} := Q_{\mathrm{lin}}\big(\widetilde{\mathbb{W}^*}\big).$$

那么$\mathbf{vNA}$是一个球面生成伪双范畴，其垂直范畴为$\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，水平态射由对应给出，而方形由交织算子给出。

对于每个垂直态射 $\varphi\colon A \to B$ ，在 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 中，水平恒等函子 $U_{\mathbf{vNA}} : \mathbf{vNA}_0 \to \mathbf{vNA}_1$ 给出一个规范的单位方形

$$\iota_\varphi := U_{\mathbf{vNA}}(\varphi) : L^2(A) \longrightarrow L^2(B),$$

其垂直边界为（φ,φ），水平源与靶为恒等对应L^2（A）和 L^2（B）。其底层交织算子是标准形映射

$$L^2(\varphi) : L^2(A) \longrightarrow L^2(B).$$

从图示上看，单位方形是 $\mathbf{vNA}_1$ 中的一个方形

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{L^2(A)} & A \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ B & \xrightarrow[L^2(B)]{} & B \end{array} \quad \text{with interior} \quad \iota_\varphi : L^2(A) \Rightarrow L^2(B).$$

而内部条件是，双模性图表相对于诱导的 A-作用和 B-作用交换。

单位方形构造总会产生一个方形，其垂直边界为 (φ,φ)，水平边则为恒等对应。在 AQFT 双函子中，一个交换时空方块

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ U' & \xrightarrow[h']{} & V' \end{array} \quad (j \circ h = h' \circ i)$$

给出垂直映射 $\mathcal{A}(i) : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(U')$ 和 $\mathcal{A}(j) : \mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{A}(V'),$以及由 $L^2(\mathcal{A}(V))$ 和 $L^2(\mathcal{A}(V'))$ 构成的水平边，其左作用沿着 $\mathcal{A}(h)$ 和 $\mathcal{A}(h')$ 限制。所赋予的方形使用算子 $L^2(\mathcal{A}(j))$，其边界由 $\mathcal{A}(j) \circ \mathcal{A}(h) = \mathcal{A}(h') \circ \mathcal{A}(i),$确定；这正是使 $L^2(\mathcal{A}(j))$ 对限制作用具有双模性的关键（下文将给出明确证明）。

AQFT 双函子。 代数量子场论输入是一个定义在可容许嵌入上的函子，其取值落在垂直态射 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 中。双函子 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 通过为每个嵌入赋予一个由标准形式构造的对应，并为每个交换时空方块赋予一个交织算子来对其加以细化；该交织算子的源／靶对应及垂直边界映射均由该方块诱导。

固定一个函子 $\mathcal{A} : \mathbf{Emb}(M) \longrightarrow \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，使得：

a) 对每个包含 $i : U \hookrightarrow V$（属于 $\mathbf{Inc}(M)$），态射

$$\mathcal{A}(i) : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(V)$$

是单射的,

b) $\mathcal{A}$ 保持可容许嵌入上的恒等态射和复合。

条件 $\mathcal{A}(\mathbf{Emb}(M)) \subseteq \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 确保对于每个可容许嵌入 $j : V \hookrightarrow V'$，标准形映射

$$L^2\big(\mathcal{A}(j)\big) : L^2\big(\mathcal{A}(V)\big) \longrightarrow L^2\big(\mathcal{A}(V')\big)$$

在目标双范畴中以函子方式可得。

定义 3.16（AQFT 双函子 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$）。 定义一个双函子

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} : \mathbf{Mink}(M) \longrightarrow \mathbf{vNA}$$

通过以下赋值。

（a）对象。对于区域 U，令

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(U) := \mathcal{A}(U).$$

(b) 垂直态射。对于包含 $i : U \hookrightarrow V$，令

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(i) := \mathcal{A}(i) : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V).$$

(c) 水平态射。对于可容许嵌入 $h : U \hookrightarrow V$，定义 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)$ 为对应

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h) : \mathcal{A}(U) \rightsquigarrow \mathcal{A}(V)$$

其底层希尔伯特空间为 $L^2(\mathcal{A}(V))$，右 $\mathcal{A}(V)$-作用为 $L^2(\mathcal{A}(V))$ 上的标准右作用，左 $\mathcal{A}(U)$-作用则由沿着.....进行标量限制给出

$$\mathcal{A}(h) : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V).$$

具体而言，如果

$$\lambda_V : \mathcal{A}(V) \to B\big(L^2(\mathcal{A}(V))\big)$$

表示 标准左表示，那么 $\mathcal{A}(U)$ 在 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)$ 上的左作用 i s

$$\lambda_h := \lambda_V \circ \mathcal{A}(h) : \mathcal{A}(U) \to B\big(L^2(\mathcal{A}(V))\big).$$

(d) 方形。给定 $\mathbf{Mink}(M)$ 中的一个方形，即 $\mathbf{Emb}(M)$ 中垂直边为包含的交换图，

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ h\ } & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ U' & \xrightarrow[\ h'\ ]{} & V' \end{array} \quad \text{with} \quad j \circ h = h' \circ i$$

将此类方形上的 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 定义为 **vNA** 中的方形

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\square) : \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h) \Longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h')$$

其垂直边界为 $\big(\mathcal{A}(i)\ \mathcal{A}(j)\big)$，底层交织算子为标准形算子

$$L^2\big(\mathcal{A}(j)\big) : L^2\big(\mathcal{A}(V)\big) \longrightarrow L^2\big(\mathcal{A}(V')\big).$$

等价地，所赋予的方形可表示为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(U) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)} & \mathcal{A}(V) \\ {\scriptstyle \mathcal{A}(i)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}(j)} \\ \mathcal{A}(U') & \xrightarrow[\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h')]{} & \mathcal{A}(V') \end{array}$$

其内部映射为 $L^2(\mathcal{A}(j))$.

受限左作用的双模性由函子性推出，$\mathcal{A}(j)\circ\mathcal{A}(h) = \mathcal{A}(h') \circ \mathcal{A}(i)$，并在方形类型检查中得到明确验证。

备注。 算子 $L^2(\mathcal{A}(j))$ 由**vNA**中的单位方形机制函子性地产生，但 (d) 中的方形并非单位方形 $U_{\mathbf{vNA}}(\mathcal{A}(j))$。单位方形的垂直边界为 $\big(\mathcal{A}(j)\ \mathcal{A}(j)\big)$，水平边则是恒等对应 $L^2(\mathcal{A}(V))$ 和$L^2(\mathcal{A}(V'))$；而 (d) 中的方形的垂直边界为 $\big(\mathcal{A}(i)\ \mathcal{A}(j)\big)$，水平

边则是受限对应 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)$ 和 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h')$。底层算子相同 $L^2(\mathcal{A}(j))$，但它被视为不同模结构之间的交织算子。

函子性。 在方形上定义 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 是唯一非平凡的类型检查点：交换时空方块必须确定一个**vNA**中的方形，也就是一个与水平对应的双模结构相容的交织算子。这里，内部算子必定为 $T = L^2(\mathcal{A}(j))$，而交换性 $\mathcal{A}(j) \circ \mathcal{A}(h) = \mathcal{A}(h') \circ \mathcal{A}(i)$恰好保证了 T 关于受限左作用是双模的。现在我们将其明确写出。

在$\mathbf{Mink}(M)$中取一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ h\ } & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ U' & \xrightarrow[\ h'\ ]{} & V' \end{array} \quad \text{so that} \quad j \circ h = h' \circ i.$$

应用 $\mathcal{A}$： **嵌入**$(M) \to \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 得到一个正规含单位 $*$-同态的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(U) & \xrightarrow{\mathcal{A}(h)} & \mathcal{A}(V) \\ {\scriptstyle \mathcal{A}(i)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}(j)} \\ \mathcal{A}(U') & \xrightarrow[\mathcal{A}(h')]{} & \mathcal{A}(V') \end{array} \quad \text{so that} \quad \mathcal{A}(j) \circ \mathcal{A}(h) = \mathcal{A}(h') \circ \mathcal{A}(i).$$

Set

$$H := \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h) : \mathcal{A}(U) \rightsquigarrow \mathcal{A}(V), \quad H' := \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h') : \mathcal{A}(U') \rightsquigarrow \mathcal{A}(V').$$

那么底层的希尔伯特空间为

$$H = L^2\big(\mathcal{A}(V)\big), \quad H' = L^2\big(\mathcal{A}(V')\big).$$

用 λ_V, ρ_V表示 $\mathcal{A}(V)$在 $L^2(\mathcal{A}(V))$上的标准左作用与右作用；类似地，用 $\lambda_{V'}, \rho_{V'}$表示 $\mathcal{A}(V')$上的标准作用。右作用是标准的，

$$\xi \cdot_H b := \rho_V(b)\xi, \quad \eta \cdot_{H'} b' := \rho_{V'}(b')\eta,$$

而左作用则通过沿嵌入映射进行标量限制得到，

$$a \cdot_H \xi := \lambda_V\big(\mathcal{A}(h)(a)\big)\xi \quad (a \in \mathcal{A}(U)), \quad a' \cdot_{H'} \eta := \lambda_{V'}\big(\mathcal{A}(h')(a')\big)\eta \quad (a' \in \mathcal{A}(U')).$$

方形 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\square)$ 被定义为具有内部算子

$$T := L^2\big(\mathcal{A}(j)\big) : L^2\big(\mathcal{A}(V)\big) \longrightarrow L^2\big(\mathcal{A}(V')\big).$$

这是有定义的，因为 $\mathcal{A}(j) \in \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，且标准形赋值在 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 上是函子性的。特别地，对于所有 $x, b \in \mathcal{A}(V)$ 和 $\xi \in L^2\big(\mathcal{A}(V)\big)$，

$$T\big(\lambda_V(x)\xi\big) = \lambda_{V'}\big(\mathcal{A}(j)(x)\big)\, T(\xi), \quad T(\xi \cdot b) = T(\xi) \cdot \mathcal{A}(j)(b).$$

我们将再次使用这些算子代数恒等式。

在此阶段，数据已经固定。还需验证，这些标准交织恒等式蕴含关于 T 的双模性恒等式，其中模结构由 限制后的 模结构定义 H 和 H'。

设 $b \in \mathcal{A}(V)$ 和 $\xi \in L^2\big(\mathcal{A}(V)\big)$。由于 H 和 H' 上的右作用是标准的，右交织恒等式给出

$$T(\xi \cdot_H b) = T(\xi \cdot b) = T(\xi) \cdot \mathcal{A}(j)(b) = T(\xi) \cdot_{H'} \mathcal{A}(j)(b).$$

因此 T 具有右边界映射 $\mathcal{A}(j)$。

设 $a \in$ 根据对.....上的受限左作用的定义，$\mathcal{A}(U)$ 和 $\xi \in L^2\big(\mathcal{A}(V)\big)$。 H,

$$T(a \cdot_H \xi) = T\big(\lambda_V(\mathcal{A}(h)(a))\,\xi\big).$$

应用左交织恒等式可得

$$T\big(\lambda_V(\mathcal{A}(h)(a))\,\xi\big) = \lambda_{V'}\big(\mathcal{A}(j)(\mathcal{A}(h)(a))\big)\,T(\xi).$$

利用交换性 $\mathcal{A}(j) \circ \mathcal{A}(h) = \mathcal{A}(h') \circ \mathcal{A}(i)$，可得

$$T(a \cdot_H \xi) = \lambda_{V'}\big(\mathcal{A}(h')(\mathcal{A}(i)(a))\big)\,T(\xi).$$

识别出 H' 上的受限左作用，我们得到

$$T(a \cdot_H \xi) = \mathcal{A}(i)(a) \cdot_{H'} T(\xi),$$

which 即为关于左边界映射 $\mathcal{A}(i$ 的所需左模相容性).

前述恒等式表明，将 $T = L^2(\mathcal{A}(j))$ 视为从算子 $H = \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)$ 到 $\to H' = \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h')$ 的算子时，它对于诱导边界映射是双模的，即左边界为 $\mathcal{A}(i)$，右边界为 $\mathcal{A}(j)$。等价地，该赋值将每个交换时空方块映射为 **vNA** 中一个类型良好的方块，因此 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 在方形上定义良好。

命题 3.1。 因此， $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 定义了一个伪双函子

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} : \mathbf{Mink}(M) \longrightarrow \mathbf{vNA}.$$

证明。 在对象和垂直态射上， $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 与 $\mathcal{A}$ （限制在包含映射上）一致，因此由 $\mathcal{A}$ 的函子性保持垂直恒等态射和复合。

对于每个区域 U，水平恒等态射被映射为 **vNA** 中的水平单位，

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_U) = L^2\big(\mathcal{A}(U)\big) : \mathcal{A}(U) \rightsquigarrow \mathcal{A}(U).$$

对于可复合的可容许嵌入 $U \overset{h}{\hookrightarrow} V \overset{k}{\hookrightarrow} W$，对应 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)$ 和 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(k)$ 分别由 $L^2\big(\mathcal{A}(V)\big)$ 和 $L^2\big(\mathcal{A}(W)\big)$ 给出，其左作用分别沿 $\mathcal{A}(h)$ 和 $\mathcal{A}(k)$ 进行限制。根据 **vNA** 的定义性结构（以 $L^2(\mathcal{A}(V))$ 为单位的 Connes 融合，以及与标量限制的相容性），存在一个典范的酉同构

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h) \boxtimes_{\mathcal{A}(V)} \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(k) \cong \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(k \circ h),$$

其中，右侧的左作用沿着 $\mathcal{A}(k \circ h) = \mathcal{A}(k) \circ \mathcal{A}(h)$ 进行限制。

对于方形，类型匹配性成立：对于右侧为 j 的交换时空方块，所赋予的算子为 $L^2\big(\mathcal{A}(j)\big)$，并且相对于诱导的边界作用是双模的。与垂直粘贴的相容性由 L^2 的函子性推出，

$$L^2\big(\mathcal{A}(j_2)\big) \circ L^2\big(\mathcal{A}(j_1)\big) = L^2\big(\mathcal{A}(j_2 \circ j_1)\big).$$

与水平粘贴的相容性正是内置于 **vNA** （以及$\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 的选择）中的融合相容性。因此，伪双函子公理得到满足。□

由此，我们从代数量子场论输入 $\mathcal{A}$ 构造出了 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$。接下来，我们提取其底层网 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}$，并用这种语言陈述 Haag–Kastler 公理。

现在，我们通过将 $\mathcal{A}$限制到包含映射，从双函子数据转向局部代数的底层网。这个受限函子就是我们据以陈述公理的 Haag–Kastler 网：

定义 **定义 3.17**（Haag–Kastler 网）。 将 $\mathcal{A}$限制到包含映射，以得到一个函子 r

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}} : \mathbf{Inc}(M) \longrightarrow \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}, \quad \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(U) = \mathcal{A}(U), \quad \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i) = \mathcal{A}(i).$$

这是应用 Haag–Kastler 公理的网。

Haag-Kastler 公理。 我们以双函子表述陈述 Haag–Kastler 公理：单调性、局域性、协变性和时间切片。

Axiom 3.1 (HK1（单调性）)。 对于每个包含 $i : U \hookrightarrow V$，态射

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i) : \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(U) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(V)$$

是一个单射的正规幺正 $*$-同态。

命题 3.4。 若对每个包含映射 i， $\mathcal{A}(i)$ 都是单射的，则 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}$ 满足 *HK1*。

证明。 根据抽取网络的定义，

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i) = \mathcal{A}(i), \quad \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(U) = \mathcal{A}(U).$$

因此，只要 $\mathcal{A}(i)$ 是单射的， $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i)$ 就是单射的。 □

引理 3.5（函子性各向同性）。 若 $U \subseteq V \subseteq W$，则

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(U \hookrightarrow W) = \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(V \hookrightarrow W) \circ \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(U \hookrightarrow V).$$

证明。 在 $\mathbf{Inc}(M)$ 中，记 i_{UV}: $U \hookrightarrow V$、 i_{VW}: $V \hookrightarrow W$ 和 i_{UW}: $U \hookrightarrow W$，使得 $i_{UW} = i_{VW} \circ i_{UV}$。 由于 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}$: $\mathbf{Inc}(M) \to \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$是一个函子，

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i_{UW}) = \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i_{VW} \circ i_{UV}) = \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i_{VW}) \circ \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i_{UV}).$$

□

现在我们转向局域性。局域性通过公共区域内包含映射上的正交性（因果不相交）关系来表述。由于 $\mathbf{Mink}(M)$ 并未通过额外的生成方块来编码独立性，因此局域性被作为一条公理施加于抽取网络。

固定一个定义在具有公共余域的包含映射对上的对称关系 $\perp$，并且该关系在后复合下保持不变。

公理 3.2 (HK2（局域性）)。 若 i_U: $U \hookrightarrow T$ 和 i_V: $V \hookrightarrow T$ 满足 $i_U \perp i_V$，则表示的子代数在 $B\big(L^2(\mathcal{A}(T))\big)$中彼此对易：对于所有 $a \in \mathcal{A}(U)$ 和 $b \in \mathcal{A}(V)$，

$$\big[\lambda_T\big(\mathcal{A}(i_U)(a)\big),\ \lambda_T\big(\mathcal{A}(i_V)(b)\big)\big] = 0,$$

其中 λ_T: $\mathcal{A}(T) \to B\big(L^2(\mathcal{A}(T))\big)$ 是忠实的标准形左表示。

断言 3.6。 在 *HK2* 下，网 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}$是局域的：若 $i_U \perp i_V$，则子代数 $\mathcal{A}(i_U)\big(\mathcal{A}(U)\big)$和 $\mathcal{A}(i_V)\big(\mathcal{A}(V)\big)$ 在 $\mathcal{A}(T)$内彼此对易。

证明。 取 $x \in \mathcal{A}(i_U)\big(\mathcal{A}(U)\big)$ 和 $y \in \mathcal{A}(i_V)\big(\mathcal{A}(V)\big)$。由 HK2 可得

$$[\lambda_T(x), \lambda_T(y)] = 0,$$

因此

$$\lambda_T([x, y]) = 0.$$

由于 λ_T是忠实的， $[x, y] = 0$ 属于 $\mathcal{A}(T)$。 □

现在我们定义协变性。令 **Iso(**M**)** $\subseteq$**嵌入(**M**)** 表示可容许同构构成的群胚，并将 $\mathcal{A}$ 限制为 **Iso(**M**)**。

公理 3.3 (HK3（协变性）)。 限制 $\mathcal{A}\restriction_{\mathbf{Iso}(M)}$ 落在 $*$-同构中，并且在群胚上是函子性的。

命题 3.7。 在 *HK3* 下，抽取网络是协变的：对于每个同构 $g : U \to V$ *in***Iso**(M)，映射

$$r_g := \mathcal{A}(g) : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(V)$$

is 一个 $*$-同构，并且对于可复合的 $g_1 : U \to V$ 和 $g_2 : V \to W$，有 s

$$r_{g_2 \circ g_1} = r_{g_2} \circ r_{g_1}.$$

证明。 $\mathcal{A}$ 在群胚 **Iso(**M**)** 上的函子性给出 $\mathcal{A}(g_2 \circ g_1) = \mathcal{A}(g_2) \circ \mathcal{A}(g_1)$， </style}这恰好就是所展示的相干恒等式。□

由于 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}$ 由包含映射作指标，时间切片公理是针对选定的一类柯西包含来表述的。设 S 为一类指定的包含映射 $i : U \hookrightarrow V$，使得 U 包含 V的一条柯西曲面。

公理 3.4 （H K4（时间切片））。 如果 $i \in S$，则 $\mathcal{A}(i) : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ 是同构。

命题 3.8。 在 *HK4* 下，抽取网络满足时间切片性质：如果 i: $U \hookrightarrow V$ 属于 S，则$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}$（$U$）$\cong \mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}$（$V$）。

证明。 根据抽取网络的定义， $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i) = \mathcal{A}(i)$。因此，只要 $\mathcal{A}(i)$ 是同构， $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}}(i)$ 就是同构。□

公理 3.5 （HK5（可加性））。 对于一个由容许子区域 $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ 覆盖、且带有包含映射 i_α 的覆盖： $U_\alpha \hookrightarrow U$，

$$\mathcal{A}(U) = \bigvee \mathcal{A}(i_\alpha)\big(\mathcal{A}(U_\alpha)\big),$$

其中 $\bigvee$ 表示在 $\mathcal{A}(U)$ 内由所指示的子代数生成的冯·诺依曼代数。

现在我们转而讨论双函子及其底层网的结构性质。

4. Structural Properties of the AQFT Double Functor

本节将证明若干结构性结论，其简洁表述需要使用

$$\mathcal{F}_\mathcal{A} : \mathbf{Mink}(M) \longrightarrow \mathbf{vNA},$$

的方形层级数据，以及提取出的 Haag-Kastler 网 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_\mathcal{A}} = \mathcal{A}\restriction_{\mathbf{Inc}(M)}$. 的基本性质。全文中，**Mink(**M**)**、**vNA**、代数量子场论输入 $\mathcal{A}$：**嵌入(**M**)** $\to \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$， 以及$\mathcal{F}_\mathcal{A}$ 的构造均与第 3 节相同：水平态射由 L^2 上的标量限制给出，而右侧竖直映射为 j 的时空方块则由算子 $L^2\big(\mathcal{A}(j)\big)$映射得到；该算子被视为诱导边界作用的交织算子。

由 γ-生成的唯一性。 正如前面所指出的，**Mink(**M**)** 通常并非以几何上有意义的方式由球状方形生成：事实上 $G\big(\mathbf{Mink}(M)\big)$ 本质上只是水平态射上的恒等方形。不过， γ-构造是整理关于方形的生成元唯一性陈述的一种便捷工具。

Set

$$\mathbf{Mink}_\gamma(M) := \gamma\big(\mathbf{Mink}(M)\big).$$

具体而言，$\mathbf{Mink}_\gamma(M)$ 与 $\mathbf{Mink}(M)$ 具有相同的对象、垂直态射和水平态射；其方形构成包含所有球状方块和所有单位方块，并且在水平复合和垂直复合下封闭（因而在伴随运算下也封闭）的最小方形类。

回顾：对于伪双范畴 $\mathbb{C}$，用 $G(\mathbb{C})$ 表示其球状方块类；对于每个垂直态射 $f \in \mathrm{Mor}(\mathbb{C}_0)$，用 $\iota_f := U(f)$ 表示单位方块。那么，0-标记方块为

$$G_{\mathbb{C}} := G(\mathbb{C}) \cup \{\iota_f \mid f \in \mathrm{Mor}(\mathbb{C}_0)\}.$$

伴随运算就是与恒等方块复合，因此只要在水平复合下封闭，它就会自动存在。具体而言，若 $\alpha : H \Rightarrow K$ 是一个垂直边界为 (f, g) 的方形，且 R 可在右侧进行水平复合，那么右伴随方形 $\alpha \odot R$ 就是将 α 与 R 上的恒等方块进行水平复合后得到的拼接方形（左侧情形类似）。

命题 4.1（由 $\mathbf{Mink}_\gamma(M)$ 上的生成元确定唯一性）。设 $F, G\colon \mathbf{Mink}_\gamma(M) \to \mathbf{vNA}$ 是双函子。假设：

a) F 和 G 在对象、垂直态射和水平态射上相同；且 b) 对每个生成方块 $\sigma \in G_{\mathbf{Mink}(M)}$（球状方块和单位方块），$F(\sigma) = G(\sigma)$。

于是，$F = G$ 在所有方形上都成立，因而 $F = G$ 作为双函子也成立。

证明。令 S 为 $\mathbf{Mink}_\gamma(M)$ 中满足 $F(\alpha) = G(\alpha)$ 的方形 α 所构成的类。根据假设，S 包含 $G_{\mathbf{Mink}(M)}$。

由于 F 和 G 是双函子，它们保持方形的垂直复合和水平复合。因此，S 在垂直复合和水平复合下都封闭：若 $\alpha, \beta \in S$ 可垂直（分别地，水平）复合，则

$$F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha) = G(\beta) \circ G(\alpha) = G(\beta \circ \alpha),$$

$$F(\beta \odot \alpha) = F(\beta) \odot F(\alpha) = G(\beta) \odot G(\alpha) = G(\beta \odot \alpha).$$

根据 $\gamma\big(\mathbf{Mink}(M)\big)$ 的定义，$\mathbf{Mink}_\gamma(M)$ 中的每个方形都属于 $G_{\mathbf{Mink}(M)}$ 在垂直复合和水平复合下的闭包。因此，每个方形都属于 S，也就是说，F 和 G 在所有方形上的取值一致。□

备注。命题4.1仅是一个关于方形赋值的由生成元确定唯一性的陈述。我们将其用作记账工具（尤其是在某个构造在球形方形／单位方形上被唯一确定、随后再通过粘合扩展时），而不是声称$\mathbf{Mink}_\gamma(M)$刻画了时空几何。

环境代数中的（余）极限：可加性下以并作为并。在实际应用中，人们很少在$\mathbf{vN}$中取范畴论推出或拉回。相反，人们会在固定环境代数的冯·诺依曼子代数格中进行操作。函子 $\mathcal{A}$ 为每个区域 T 提供一个典范环境代数 $\mathcal{A}(T)$，因此，将“在$\mathcal{A}(T)$内粘合”表述为子代数偏序集中的一个命题是很自然的。

固定 $T \in \mathcal{R}(M)$。令 $\mathbf{vSub}\big(\mathcal{A}(T)\big)$ 表示 $\mathcal{A}(T)$ 的冯·诺依曼子代数所构成的瘦范畴（偏序集）；当且仅当 $B \subseteq C$ 时，存在唯一的态射 $B \to C$。

令 $\mathbf{Inc}(M)_{\leq T}$ 为瘦范畴，其对象是包含映射 $i_{U,T}\colon U \hookrightarrow T$，且当且仅当 $U \subseteq V \subseteq T$ 时，存在唯一的态射 $i_{U,T} \to i_{V,T}$。定义一个函子

$$\widetilde{\mathcal{A}}_T : \mathbf{Inc}(M)_{\leq T} \longrightarrow \mathbf{vSub}\big(\mathcal{A}(T)\big), \qquad \widetilde{\mathcal{A}}_T(U) := \mathcal{A}(i_{U,T})\big(\mathcal{A}(U)\big) \subseteq \mathcal{A}(T).$$

假设满足 HK5（可加性）：对于任意容许覆盖 $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$ 及包含映射 $i_\alpha : W_\alpha \hookrightarrow W$，有

$$\mathcal{A}(W) = \bigvee_\alpha \mathcal{A}(i_\alpha)\big(\mathcal{A}(W_\alpha)\big),$$

其中 $\vee$ 表示在 $\mathcal{A}(W)$ 内生成的冯·诺依曼代数。

引理 4.1（在 HK5 下，二元并成为并）。设 U，V，$U \cup V \in \mathcal{R}(M)$ 且U，$V \subseteq T$。那么，在 $\mathcal{A}(T)$ 内，

$$\widetilde{\mathcal{A}}_T(U \cup V) = \widetilde{\mathcal{A}}_T(U) \vee \widetilde{\mathcal{A}}_T(V).$$

证明。考虑包含映射的分解

$$U \xrightarrow{i_{U,U\cup V}} U \cup V \xrightarrow{i_{U\cup V,T}} T, \qquad V \xrightarrow{i_{V,U\cup V}} U \cup V \xrightarrow{i_{U\cup V,T}} T.$$

$\mathcal{A}$的函子性给出

$$\mathcal{A}(i_{U,T}) = \mathcal{A}(i_{U\cup V,T}) \circ \mathcal{A}(i_{U,U\cup V}), \qquad \mathcal{A}(i_{V,T}) = \mathcal{A}(i_{U\cup V,T}) \circ \mathcal{A}(i_{V,U\cup V}).$$

将 HK5 应用于覆盖 $U \cup V = U \cup V$（由 U 和 V 构成的二元覆盖）。于是，$\mathcal{A}(U \cup V)$ 由 $\mathcal{A}(U)$ 和 $\mathcal{A}(V)$ 在 $\mathcal{A}(U \cup V)$ 中的像生成，这些像分别由 $\mathcal{A}(i_{U,\,U\cup V})$ 和 $\mathcal{A}(i_{V,\,U\cup V})$ 给出。应用 $\mathcal{A}(i_{U\cup V,\,T})$，并利用所展示的两个分解，得到

$$\mathcal{A}(i_{U\cup V,T})\big(\mathcal{A}(U \cup V)\big) = \mathcal{A}(i_{U,T})\big(\mathcal{A}(U)\big) \vee \mathcal{A}(i_{V,T})\big(\mathcal{A}(V)\big) \subseteq \mathcal{A}(T).$$

根据 $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ 的定义，这正是所声称的恒等式。 □

包含与截断。代数量子场论中的一种标准做法是扩大区域类，使时间切片性质成为“局域的”（或更容易施加），然后再限制回一个优选的区域类。我们在此给出一套简洁的形式化框架。

Fix:

a) 一个区域类 $\mathcal{R}(M)$ 和一个更大的区域类 $\mathcal{R}_{\mathrm{cau}}(M)$；

b) 一个严格包含函子，作用于包含范畴

$$\iota : \mathbf{Inc}(M) \hookrightarrow \mathbf{Inc}_{\mathrm{cau}}(M);$$

c) 一个函子（“截断”）

$$\tau : \mathbf{Inc}_{\mathrm{cau}}(M) \longrightarrow \mathbf{Inc}(M) \quad \text{with} \quad \tau \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbf{Inc}(M)};$$

d) 对每个 $U \in \mathcal{R}_{\mathrm{cau}}(M)$，一个指定的包含

$$c_U : \tau(U) \hookrightarrow U$$

它属于 HK4 中所用的那一类选定的柯西包含。

备注。如果 ι和 τ 能够相容地扩展到嵌入范畴（使得可容许嵌入映射为可容许嵌入，且交换图得以保持），那么它们会诱导出双函子

$$\iota_* : \mathbf{Mink}(M) \hookrightarrow \mathbf{Mink}_{\mathrm{cau}}(M), \qquad \tau_* : \mathbf{Mink}_{\mathrm{cau}}(M) \longrightarrow \mathbf{Mink}(M),$$

其中 $\tau_* \circ \iota_* = \mathsf{i}$ 严格地说。在下文中，我们只会使用这个故事的垂直部分。

引理 4.2（薄范畴中的伴随判据）。 假设$\mathbf{Inc}(M)$和$\mathbf{Inc}_{\mathrm{cau}}(M)$是薄范畴。那么，当且仅当对所有 $U \in \mathcal{R}_{\mathrm{cau}}(M)$ 和 $V \in \mathcal{R}(M)$， $\tau \dashv \iota$

$$\tau(U) \subseteq V \quad \Longleftrightarrow \quad U \subseteq \iota(V).$$

证明。 在瘦范畴中，$\mathbf{Hom}(X, Y)$要么为空，要么是单元素集，且当且仅当 $X \leq Y$时非空。伴随 $\tau \dashv \iota$ 等价于自然双射

$$\mathrm{Hom}\big(\tau(U), V\big) \cong \mathrm{Hom}\big(U, \iota(V)\big).$$

当且仅当这两个 Hom 集同时为空或同时非空时，这样的双射才存在，即 $\tau(U) \leq V$当且仅当 $U \leq \iota(V)$。□

函子的态射上的函子性。 $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$**令** $\mathcal{A}, \mathcal{B}$**: 嵌入(**M**)** $\to \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$为代数量子场论输入，并令 $\eta : \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ 为一个自然变换。定义其分量

a) 在每个区域 U上，

$$(\mathcal{F}_\eta)_U := \eta_U : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U);$$

b) 在每个可容许嵌入 h 上： $U \hookrightarrow V$（**Mink(**M**)**中的一个水平箭头），

$$(\mathcal{F}_\eta)_h := L^2(\eta_V) : L^2\big(\mathcal{A}(V)\big) \longrightarrow L^2\big(\mathcal{B}(V)\big).$$

命题 4.2（1-态射上的函子性）。 数据 $\mathcal{F}_\eta$ 定义了一个垂直变换

$$\mathcal{F}_\eta : \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$$

具体而言：

a) 对每个水平箭头 $h : U \hookrightarrow V$，映射 $L^2(\eta_V)$ 是一个交织算子

$$(\mathcal{F}_\eta)_h : \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h) \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(h)$$

其左、右边界映射分别为 $(\eta_U,\ \eta_V)$；并且

b) 这些分量对于 $\mathbf{Mink}(M)$ 中的每个交换方块都满足自然性。此外， $\eta \mapsto \mathcal{F}_\eta$ 保持恒等态射和复合：

$$\mathcal{F}_{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}, \qquad \mathcal{F}_{\theta \circ \eta} = \mathcal{F}_\theta \circ \mathcal{F}_\eta.$$

证明。设 $\eta : \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ 是自然的。因此，对每个可容许嵌入 $h : U \hookrightarrow V$，其中 $U \hookrightarrow V$ 属于**嵌入(**M**)**，相应的自然性方形交换：

$$\eta_V \circ \mathcal{A}(h) = \mathcal{B}(h) \circ \eta_U.$$

取一个水平箭头 $h : U \hookrightarrow V$ in $\mathbf{Mink}(M)$。根据定义， $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)$ 是对应 $\mathcal{A}(U) \rightsquigarrow \mathcal{A}(V)$，其底层希尔伯特空间为 $L^2\big(\mathcal{A}(V)\big)$，带有 $\mathcal{A}(V)$ 的标准右作用，以及沿 $\mathcal{A}(h)$ 限制的 $\mathcal{A}(U)$ 的左作用。类似地， $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(h)$ 的底层希尔伯特空间为 $L^2\big(\mathcal{B}(V)\big)$，其左作用沿 $\mathcal{B}(h)$ 限制。

定义 $(\mathcal{F}_\eta)_h := L^2(\eta_V)$。这一定义是成立的，因为 η_V 属于 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，而 $L^2(-)$ 是 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 上的函子，并且与标准左作用和右作用相互交织。

右作用。对于 $b \in \mathcal{A}(V)$，标准形式的函子性给出

$$L^2(\eta_V)\big(\xi \cdot b\big) = L^2(\eta_V)(\xi) \cdot \eta_V(b),$$

等价地，交换图为

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathcal{A}(V)) & \xrightarrow{L^2(\eta_V)} & L^2(\mathcal{B}(V)) \\ {\scriptstyle \rho_{\mathcal{A}(V)}(b)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{B}(V)}(\eta_V(b))} \\ L^2(\mathcal{A}(V)) & \xrightarrow[L^2(\eta_V)]{} & L^2(\mathcal{B}(V)) \end{array}$$

这正是右边界映射 η_V 的交织条件 .

受限左作用。对于 $a \in \mathcal{A}(U)$，在 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)$ 上的左作用为 $\lambda_{\mathcal{A}(V)}\big(\mathcal{A}(h)(a)\big)$。利用标准形左交织恒等式以及 $x = \mathcal{A}(h)(a) \in \mathcal{A}(V)$，可得

$$L^2(\eta_V)\,\lambda_{\mathcal{A}(V)}\big(\mathcal{A}(h)(a)\big) = \lambda_{\mathcal{B}(V)}\big(\eta_V(\mathcal{A}(h)(a))\big)\,L^2(\eta_V).$$

由自然性，$\eta_V(\mathcal{A}(h)(a)) = \mathcal{B}(h)(\eta_U(a))$，因此右侧恰为 $\lambda_{\mathcal{B}(V)}\big(\mathcal{B}(h)(\eta_U(a))\big)\,L^2(\eta_V)$，这正是与左边界映射 η_U 对应的受限左作用。等价地，图表

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathcal{A}(V)) & \xrightarrow{L^2(\eta_V)} & L^2(\mathcal{B}(V)) \\ {\scriptstyle \lambda_{\mathcal{A}(V)}(\mathcal{A}(h)(a))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{\mathcal{B}(V)}(\mathcal{B}(h)(\eta_U(a)))} \\ L^2(\mathcal{A}(V)) & \xrightarrow[L^2(\eta_V)]{} & L^2(\mathcal{B}(V)) \end{array}$$

是交换的。这就是左边界映射为 η_U 的受限左作用的交织条件。

因此，$(\mathcal{F}_\eta)_h$ 是**vNA**中的一个类型良好的方块，其起点为 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(h)$，终点为 $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(h)$，垂直边界为 (η_U, η_V)。

关于时空方块的自然性。设 $\mathbf{Mink}(M)$ 中给定一个方形，其对应的交换图为

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ h\ } & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ U' & \xrightarrow[\ h'\ ]{} & V' \end{array} \qquad (j \circ h = h' \circ i).$$

根据定义，$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 将此方形映射为 $L^2\big(\mathcal{A}(j)\big)$，而 $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ 将其映射为 $L^2\big(\mathcal{B}(j)\big)$。我们必须检查以下交换性

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathcal{A}(V)) & \xrightarrow{L^2(\mathcal{A}(j))} & L^2(\mathcal{A}(V')) \\ {\scriptstyle L^2(\eta_V)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L^2(\eta_{V'})} \\ L^2(\mathcal{B}(V)) & \xrightarrow[L^2(\mathcal{B}(j))]{} & L^2(\mathcal{B}(V')) \end{array}$$

这是交换的，因为 η 在 j 处具有自然性：$V \hookrightarrow V'$：

$$\eta_{V'} \circ \mathcal{A}(j) = \mathcal{B}(j) \circ \eta_V,$$

对其应用函子 $L^2(-)$ 得到

$$L^2(\eta_{V'}) \circ L^2\big(\mathcal{A}(j)\big) = L^2\big(\mathcal{B}(j)\big) \circ L^2(\eta_V).$$

这正是所要求的方块自然性。

恒等态射与复合。若 $\eta = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$，则 $(\mathcal{F}_\eta)_U = \mathrm{id}^{\mathcal{A}(U)}$ 且 $(\mathcal{F}_\eta)_h = L^2\big(\mathrm{id}_{\mathcal{A}(V)}\big) = \mathrm{id}_{L^2(\mathcal{A}(V))}$，因此 $\mathcal{F}_{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}} = \mathrm{id}^{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}$。若 $\mathcal{A} \overset{\eta}{\Rightarrow} \mathcal{B} \overset{\theta}{\Rightarrow} \mathcal{C}$，则对每个 $h:\ U \hookrightarrow V$，

$$(\mathcal{F}_{\theta\circ\eta})_h = L^2\big((\theta\circ\eta)_V\big) = L^2(\theta_V \circ \eta_V) = L^2(\theta_V)\circ L^2(\eta_V) = (\mathcal{F}_\theta)_h \circ (\mathcal{F}_\eta)_h,$$

对象上也类似。因此 $\mathcal{F}_{\theta\circ\eta} = \mathcal{F}_\theta \circ \mathcal{F}_\eta$。

这就证明了所有断言。 □

现在我们转向一些示例，说明这些结构性陈述如何体现在具体的代数量子场论输入中。

5. Examples

本节中，定义域双范畴为 **Mink(**M**)**（圆周示例中则为 **Mink(**S^1**)**）。其对象是区域 U，垂直箭头是包含映射 $i\colon U \hookrightarrow U'$，水平箭头是可容许嵌入 $h\colon U \hookrightarrow V$（具体定义见各示例）。方形是一个交换边界图：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ h\ } & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ U' & \xrightarrow[\ h'\ ]{} & V' \end{array} \qquad \text{meaning } j\circ h = h'\circ i \text{ as maps.}$$

输入落在$\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$中：其对象是冯·诺依曼代数，态射是正规含单位的 $*$-同态（属于使 $\phi \mapsto L^2(\phi)$ 具有函子性的那一类）。给定一个输入 $\mathcal{A}$，相应的双函子 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 通过固定的标准形/对应构造得到，并利用 $\phi \mapsto L^2(\phi)$ 在$\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$上的函子性。

我们假设读者对算子代数AQFT（冯·诺依曼代数和共形网，包括 Diff+(S^1)-协变性）以及自由场的 Weyl/正则对易关系构造已有基本了解。

定义在 S^1 上的微分同胚协变共形网。 设 $(\mathcal{B}, U, \Omega)$ 是定义在 S^1 上、满足通常定义的 Diff+(S^1)-协变共形网：对每个非空且不稠密的开弧$I \subset S^1$，都有一个冯·诺依曼代数 $\mathcal{B}(I) \subset B(\mathcal{H})$，它关于 I 单调，对不相交的弧满足局域性，并通过（可能是射影的）酉表示 U 在 Diff+(S^1) 的作用下协变。我们只用到由此诱导的映射 $\mathrm{Ad}^{U(F)}\colon x \longmapsto U(F)\, x\, U(F)^*$在代数上定义了一个真正的作用（射影相位在 Ad 下相消）。

定义准局域代数（在此表示形式下）为

$$\mathcal{B}(S^1) := \Big(\bigcup_{I\subset S^1 \text{ arc}} \mathcal{B}(I) \Big)'' \subset B(\mathcal{H}).$$

因此， $\mathcal{B}(S^1)$ 是由局部弧代数生成的冯·诺依曼代数。

我们通过要求指定一个全局延拓，将可容许嵌入纳入数据之中。

- 对象。非空、非稠密的开弧 $I \subset S^1$ 连同环境对象S^1。
- 垂直箭头。弧的包含 $i\colon\ I \hookrightarrow I'$ 以及结构包含 $I \hookrightarrow S^1$。
- 水平箭头。水平箭头 $h\colon I \to J$ 是一对

$$h = (F, I),$$

其中 $F \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ 满足 $F(I) \subseteq J$。其底层光滑嵌入是限制 $F|_I \colon I \to J$。

- 水平复合。若 $h_1 = (F_1,\ I_1) \colon I_1 \to I_2$ 且 $h_2 = (F_2,\ I_2) \colon I_2 \to I_3$，定义
$$h_2 \circ h_1 := (F_2F_1, I_1),$$
其底层映射为 $(F_2F_1)|_{I_1}$。结合律继承自 $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ 中的复合。

- 方形。方形是 **嵌入**(S^1) 中的一个交换方块，即一个边界图，其中垂直包含映射 $i \colon I \hookrightarrow I'$ 和 $j \colon J \hookrightarrow J'$，水平映射为 $h = (F,\ I)$ 和$h' = (F',\ I')$，满足
$$j \circ h = h' \circ i$$
作为 **嵌入**(S^1) 中的态射。具体而言，这要求 $F' = F$ 和底层嵌入相交换：
$$j \circ (F|_I) = (F|_{I'}) \circ i.$$

定义
$$\mathcal{A} : \mathbf{Emb}(S^1) \longrightarrow \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$$
如下：

- 对象。对于一条弧 $I \subset S^1$，设 $\mathcal{A}(I) := \mathcal{B}(I)$，并设
$$\mathcal{A}(S^1) := \mathcal{B}(S^1).$$
- 垂直 箭头。对于弧的一个包含 $i \colon I \hookrightarrow I'$，定义 $\mathcal{A}(i)$为该包含 n
$$\mathcal{A}(i) : \mathcal{B}(I) \hookrightarrow \mathcal{B}(I').$$
这是一个正规的单射幺元 $*$-同态。
- 水平箭头。对于一个水平箭头 $h = (F,\ I) \colon I \to J$ (因此 $F \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$且$F(I) \subseteq J$)，定义
$$\mathcal{A}(h) \ := \ \mathrm{Ad}_{U(F)}\big|_{\mathcal{B}(I)} : \mathcal{B}(I) \longrightarrow \mathcal{B}(F(I)) \subseteq \mathcal{B}(J).$$
这是一个正规含幺 $*$-同态，因为 $\mathrm{Ad}^{U(F)}$ 是 $*(\mathcal{H})$ 的 B-自同构，而协变性给出 $\mathrm{Ad}_{U(F)}\big(\mathcal{B}(I)\big) = \mathcal{B}(F(I))$。

函子性 在水平箭头上，函子性在代数层面成立：对于 $F_1,\ F_2 \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ ，
$$\mathrm{Ad}_{U(F_2)} \circ \mathrm{Ad}_{U(F_1)} = \mathrm{Ad}_{U(F_2)U(F_1)} = \mathrm{Ad}_{U(F_2F_1)},$$
其中，最后一个相等关系用到了 $U(F_2)U(F_1)$ 中任意射影标量在 Ad 作用下都是平凡的。

现在我们来验证 $\mathcal{A}$ 的每条 Haag–Kastler 公理。

- **HK1（单调性）**。如果 $i : I \hookrightarrow I'$ 是弧的一个垂直包含，那么根据构造
$$\mathcal{A}(i) : \mathcal{A}(I) = \mathcal{B}(I) \longrightarrow \mathcal{A}(I') = \mathcal{B}(I')$$
字面上就是包含 $\mathcal{B}(I) \subseteq \mathcal{B}(\{v4)$。
- **HK2（局域性）**。设 $I,\ J \subset S^1$ 为互不相交的弧。共形网的局域性给出
$$[\mathcal{B}(I), \mathcal{B}(J)] = 0 \qquad \text{inside } B(\mathcal{H}).$$
由于 $\mathcal{A}(S^1) = \mathcal{B}(S^1) \subseteq B(\mathcal{H})$ 同时包含 $\mathcal{B}(I)$ 和 $\mathcal{B}(J)$ 作为冯·诺依曼子代数，因此同一交换子恒等式在环境代数 $\mathcal{A}(S^1)$ 中也成立。

• **HK3（协变性）**。在此设定中，**HK3** 恰好表示 $\mathcal{A}$在嵌入范畴上是函子。对于水平箭头 $h_1 = (F_1, I_1) : I_1 \to I_2$ 和$h_2 = (F_2, I_2) : I_2 \to I_3$,

$$\mathcal{A}(h_2) \circ \mathcal{A}(h_1) = \mathrm{Ad}_{U(F_2)} \circ \mathrm{Ad}_{U(F_1)} = \mathrm{Ad}_{U(F_2F_1)} = \mathcal{A}\big((F_2F_1, I_1)\big),$$

使用 $\mathrm{Ad}_{U(F_2)} \circ \mathrm{Ad}_{U(F_1)} = \mathrm{Ad}_{U(F_2)U(F_1)}$，并且 $U(F_2)U(F_1)$ 中的任何射影标量都会在 Ad 下消失。垂直函子性显然成立，因为垂直箭头是包含映射，而 $\mathcal{A}$ 会将它们映为包含映射。

• **HK4（时间片）**。在此处采用的圆设置中，我们将指定的柯西包含类取为空，因此对于这个例子，**HK4**是平凡成立的。

• **HK5（可加性）**。我们采用所选共形网的标准可加性公理：若一条弧 I 被子弧 $\{I_\alpha\}$ 覆盖，则

$$\mathcal{B}(I) = \Big(\bigcup_\alpha \mathcal{B}(I_\alpha)\Big)''.$$

由于在对象上 $\mathcal{A}(I) = \mathcal{B}(I)$，且 $\mathcal{A}$ 会将子弧的包含映为相应代数的包含，这正是抽取网络 $\mathcal{A}|_{\mathbf{Inc}(S^1)}$ 的**HK5** 。

现在我们验证方形相容性。设 $\mathbf{MinkMink}(S^1)$ 中的一个方形由垂直包含映射 $i : I \hookrightarrow I'$ 和 $j : J \hookrightarrow J'$，以及水平箭头

$$h = (F, I) : I \to J, \quad h' = (F', I') : I' \to J',$$

使得 $j \circ h = h' \circ i$ 属于 $\mathbf{Emb}(S^1)$。特别地， $F' = F$，且底层嵌入满足交换性：

$$j \circ (F|_I) \;=\; (F|_{I'}) \circ i.$$

那么两个复合

$$\mathcal{A}(j) \circ \mathcal{A}(h), \quad \mathcal{A}(h') \circ \mathcal{A}(i)$$

作为正规的含单位 $*$-同态 $\mathcal{B}(I) \to \mathcal{B}(J')$ 相等。事实上，根据 **HK1**， $\mathcal{A}(i)$ 和 $\mathcal{A}(j)$ 是包含映射，而

$$\mathcal{A}(h) = \mathrm{Ad}_{U(F)}\big|_{\mathcal{B}(I)} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}(h') = \mathrm{Ad}_{U(F)}\big|_{\mathcal{B}(I')}.$$

因此，对于 $x \in \mathcal{B}(I)$，两个复合都将 x映射到 $\mathrm{Ad}_{U(F)}(x)$，并通过单调性将其视为 $\mathcal{B}(J')$ 的子对象。这正是输入函子 $\mathcal{A}$ 所要求的方形相容条件。

上的有质量克莱因–戈尔登网 $\mathbb{R}^{1,\,3}$。 在此例中，令 M 为闵可夫斯基时空，并令 $R(M)$ 表示双锥（菱形区域）的类，同时将 M 自身作为环境对象。水平态射取为保定向、正时间定向的庞加莱等距变换的限制（即保持时间定向），从而保留推迟/超前结构。

令 $P_M := \Box_M + m^2$ 作用于 $C^\infty(M, \mathbb{R})$。相对于闵可夫斯基体积形式，该算子是形式自伴的。由于 M 是整体双曲的（特别是闵可夫斯基空间），存在唯一的超前与推迟格林算子

$$E_M^{\pm} : C_c^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

with 它们具有通常的支集性质和逆性质。定义因果传播子为

$$E_M := E_M^- - E_M^+.$$

在下文中，我们仅使用这些标准的存在性、唯一性和支集性质[BGP08]。

对于每个菱形区域 $T \subset M$，定义实向量空间

$$V(T) \;:=\; C_c^\infty(T,\mathbb{R}) \,/\, P_T C_c^\infty(T,\mathbb{R}),$$

其中 P_T 表示将 P_M 限制在支集包含于 T的测试函数上。

若 $i : T \hookrightarrow T'$ 是一个垂直包含，则定义

$$V(i) : V(T) \longrightarrow V(T'), \quad V(i)[f] \;:=\; [f_{\mathrm{ext},T'}],$$

其中 $f_{\mathrm{ext},\,T'} \in C_c^\infty(T')$ 是将 f在 T之外作零延拓得到的延拓。

引理 5.1（延拓与 P可交换）。 对于每个 $u \in C_c^\infty(T)$ 都有

$$(P_T u)_{\mathrm{ext},T'} \;=\; P_{T'}(u_{\mathrm{ext},T'}).$$

证明。 由于 $\mathrm{supp}(u) \Subset T$且 $T \subset T'$是开集，延拓 $u_{\mathrm{ext},\,T'}$在 T'上光滑，并且在 $\mathrm{supp}(u)$ 的一个邻域内与 u 一致。由于 P是微分算子，它是局域的；因此，$P_{T'}(u_{\mathrm{ext},\,T'})$在 $\mathrm{supp}(u)$ 的一个邻域内与 $P_T u$一致，并且在 T之外为零。因此，$P_{T'}(u_{\mathrm{ext},\,T'})$恰好是 $P_T u$的零延拓，即 $(P_T u)_{\mathrm{ext},\,T'} = P_{T'}(u_{\mathrm{ext},\,T'})$。□

因此， $V(i)$在商空间上定义良好：若 $f = P_T u$，则

$$f_{\mathrm{ext},T'} \;=\; (P_T u)_{\mathrm{ext},T'} \;=\; P_{T'}(u_{\mathrm{ext},T'}) \;\in\; P_{T'} C_c^\infty(T').$$

对于每个菱形区域 $T \subset M$，定义一个双线性形式

$$\sigma_T([f],[g]) \;:=\; \int_M f_{\mathrm{ext},M}\, E_M\big(g_{\mathrm{ext},M}\big)\, d\mathrm{vol}_M.$$

（我们总是将其扩展到环境时空 M，因此该公式是在固定的定义域中计算的。）

引理 5.2（在商空间上定义良好）。 双线性形式 σ_T 可下降为上的一个定义良好的反对称双线性形式

$$V(T) \;=\; C_c^\infty(T) \,/\, P_T C_c^\infty(T).$$

证明。 代表元的独立性（第一个变量）。设 $f = P_T u$对某个 $u \in C_c^\infty(T)$成立。由引理 5.1（取 $T' = M$），

$$f_{\mathrm{ext},M} = (P_T u)_{\mathrm{ext},M} = P_M(u_{\mathrm{ext},M}).$$

因此，对于任意 $g \in C_c^\infty(T)$，

$$\sigma_T([P_T u],[g]) = \int_M P_M(u_{\mathrm{ext},M})\, E_M(g_{\mathrm{ext},M})\, d\mathrm{vol}_M.$$

利用 P_M 在紧支集测试函数上的形式自伴性，我们可以分部积分：

$$\int_M P_M(u_{\mathrm{ext},M})\, v\, d\mathrm{vol}_M = \int_M u_{\mathrm{ext},M}\, P_M(v)\, d\mathrm{vol}_M \quad (v \in C^\infty(M)).$$

取 $v = E_M(g_{\mathrm{ext},M})$ 并使用 $P_M E_M = 0$，我们得到 $\sigma_T([P_T u],[g]) = 0$.

代表元的独立性（第二个槽位）。同样的论证表明，对于 $v \in C_c^\infty(T)$，有 $\sigma_T([f],[P_T v]) = 0$，使用 $E_M P_M = 0$。

反对称性。因果传播子满足 $E_M^* = -E_M$，等价地

$$\int_M f\, E_M(g)\, d\mathrm{vol}_M \;=\; -\int_M g\, E_M(f)\, d\mathrm{vol}_M \quad (f,g \in C_c^\infty(M)).$$

将此应用于 $f_{\mathrm{ext},\,M}$，$g_{\mathrm{ext},\,M}$，得到 $\sigma_T([f],\,[g]) = -\sigma_T([g],\,[f])$。

因此，σ_T 在 $V(T)$ 上定义良好且是反对称的。 □

备注。 非退化性是标准结果，且除 Weyl/正则对易关系构造外并无其他用途。若希望避免正则对易关系表示层面的任何退化问题，可以在全文中用辛商 $V(T)/\mathrm{rad}(\sigma_T)$ 替代 $V(T)$；为简洁起见，我们在记号中省略这一点。

设 $h\colon T \to T'$ 是一个水平箭头，它由限制一个保持时间定向且保定向的庞加莱等距映射 κ 得到，其中 $\kappa(T) \subset T'$，即

$$h = \kappa|_T : T \longrightarrow T'.$$

定义测试函数上的推前为

$$(\kappa_* f)(x) \;:=\; f(\kappa^{-1}x),$$

于是

$$\kappa_* : C_c^\infty(T) \longrightarrow C_c^\infty(\kappa(T)).$$

定义

$$V(h) : V(T) \longrightarrow V(T'), \quad V(h)[f] \;:=\; \big[(\kappa_* f)_{\mathrm{ext},T'}\big].$$

这在商空间上定义良好：若 $f = P_T u$，则由 P 的等距不变性可得 $\kappa_* f = P_{\kappa(T)}(\kappa_* u)$，因此 $(\kappa_* f)_{\mathrm{ext},\,T'} \in P_{T'} C_c^\infty(T')$。

引理 5.3（推前与延拓可交换）。 对于任意微分同胚 κ 和 $f \in C_c^\infty(T)$，

$$\kappa_*(f_{\mathrm{ext},M}) \;=\; (\kappa_* f)_{\mathrm{ext},M}.$$

证明。 两边都是定义在 M 上的测试函数，在 $\kappa(T)$ 上由 $x \mapsto f(\kappa^{-1}x)$ 给出，在 $M \setminus \kappa(T)$ 上为 0。□

Le引理 5.4（辛性）。 对于每个水平箭头 $h = \kappa|_T\colon\ T \to T'$，

$$\sigma_{T'}\big(V(h)[f],\, V(h)[g]\big) \;=\; \sigma_T([f],[g]) \qquad \textit{for all } [f],[g] \in V(T).$$

证明。 根据 $V(h)$ 和 $\sigma_{T'}$ 的定义，

$$\sigma_{T'}\big(V(h)[f], V(h)[g]\big) = \int_M (\kappa_* f)_{\mathrm{ext},M}\, E_M\big((\kappa_* g)_{\mathrm{ext},M}\big)\, d\mathrm{vol}_M.$$

根据引理 5.3（推前与延拓可交换），

$$= \int_M \kappa_*(f_{\mathrm{ext},M})\, E_M\big(\kappa_*(g_{\mathrm{ext},M})\big)\, d\mathrm{vol}_M.$$

由于 κ 是保时间定向等距变换，超前/推迟格林算子的唯一性意味着 $E_M^{\pm} \circ \kappa_* = \kappa_* \circ E_M^{\pm}$，因此 $E_M \circ \kappa_* = \kappa_* \circ E_M$。所以

$$= \int_M \kappa_*(f_{\mathrm{ext},M})\, \kappa_*\big(E_M(g_{\mathrm{ext},M})\big)\, d\mathrm{vol}_M.$$

由于 κ 保持 $d\mathrm{vol}_M$，由变量替换可得

$$= \int_M f_{\mathrm{ext},M}\, E_M(g_{\mathrm{ext},M})\, d\mathrm{vol}_M = \sigma_T([f],[g]).$$

□

引理 5.5 （$V(h)$ 的函子性）。 若 $h_1 = \kappa_1|_{T_1} : T_1 \to T_2$ 且 $h_2 = \kappa_2|_{T_2} : T_2 \to T_3$，则

$$V(h_2 \circ h_1) \;=\; V(h_2) \circ V(h_1).$$

证明。 推前可复合：$(\kappa_2\kappa_1)_* = \kappa_{2*} \circ \kappa_{1*}$。 因此，对于 $f \in C_c^\infty(T_1)$ ，

$$V(h_2)\big(V(h_1)[f]\big) = V(h_2)\big[(\kappa_{1*}f)_{\mathrm{ext},T_2}\big] = \big[(\kappa_{2*}(\kappa_{1*}f)_{\mathrm{ext},T_2})_{\mathrm{ext},T_3}\big].$$

但是，$(\kappa_{1*}f)_{\mathrm{ext},\,T_2}$ 在 $\kappa_1(T_1)$ 上与 $\kappa_{1*}f$ 一致，并且在 $T_2 \setminus \kappa_1(T_1)$ 上为 0，因此， $\kappa_{2*}(\kappa_{1*}f)_{\mathrm{ext},\,T_2}$ 在 $\kappa_2\kappa_1(T_1)$ 上与 $(\kappa_2\kappa_1)_*f$ 一致，并且在 $\kappa_2\kappa_1(T_1)$ 之外、 $\kappa_2(T_2)$ 之内为 0。由于 $\kappa_2\kappa_1(T_1) \subset T_3$，将其零延拓到 T_3 可得

$$\big[(\kappa_{2*}(\kappa_{1*}f)_{\mathrm{ext},T_2})_{\mathrm{ext},T_3}\big] = \big[((\kappa_2\kappa_1)_*f)_{\mathrm{ext},T_3}\big] = V(h_2 \circ h_1)[f],$$

因此，相等关系在代表元上成立，进而在 $V(T_1)$ 上成立。 □

对于每个菱形区域 T，令 $W(T)$ 表示由酉元 $W_T(v)$（其中 $v \in V(T)$）生成的 Weyl C^*-代数，并满足正则对易关系

$$W_T(v)\,W_T(w) \;=\; e^{-\frac{i}{2}\sigma_T(v,w)}\,W_T(v+w), \qquad W_T(v)^* \;=\; W_T(-v).$$

根据引理 5.4，每个水平映射 $V(h) : V(T) \to V(T')$ 都唯一确定一个 $*$-同态$\alpha_h : W(T) \to W(T')$，其在生成元上的取值为

$$\alpha_h\big(W_T(v)\big) \;=\; W_{T'}\big(V(h)v\big).$$

同样，每个垂直包含 $i : T \hookrightarrow T'$ 都通过 $V(i)$ 诱导出 $\alpha_i : W(T) \to W(T')$。

令 $W(M)$ 表示辛空间 $V(M) = C_c^\infty(M)/P_MC_c^\infty(M)$ 的 Weyl 代数，其辛形式为 σ_M。对于每个 T，零延拓定义一个线性映射 $V(T) \to V(M)$，从而得到一个典范的 $*$-同态

$$\iota_T : W(T) \longrightarrow W(M).$$

Set

$$W_{\mathrm{ql}} \;:=\; \varinjlim_{T \in R(M)} W(T),$$

并记 $\jmath_T : W(T) \to W_{\mathrm{ql}}$ 为到归纳极限的典范结构映射。令$\pi_{\mathrm{univ}} : W_{\mathrm{ql}} \to B(H_{\mathrm{univ}})$ 为泛表示。对于每个 T，定义

$$A(T) \;:=\; \pi_{\mathrm{univ}}\big(\jmath_T(W(T))\big)'' \;\subset\; B(H_{\mathrm{univ}}).$$

由于 π_{univ} 是忠实的，归纳系统中的结构映射 $W(T) \to W(T')$ 在应用 $\pi_{\mathrm{univ}}(\,\cdot\,)''$ 后可实现为单射；而对于 $T \subset T'$，我们在 $B(H_{\mathrm{univ}})$ 内有字面上的包含 $A(T) \subset A(T')$。

现在，我们定义什么是 $\mathcal{A} : \textbf{嵌入}(M) \to \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，并验证它们满足 Haag–Kastler 公理。

我们如下定义一个代数量子场论输入 $A : \textbf{嵌入}(M) \to \mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$。

- 对象。对于每个菱形区域 $T \subset M$，按前面的构造设定 $A(T)$，并纳入环境对象 $M \mapsto A(M)$。
- 垂直箭头。对于垂直包含 $i : T \hookrightarrow T'$，定义 $A(i) : A(T) \to A(T')$ 为正规包含 $A(T) \subset A(T')$。
- 水平箭头。设 $h : T \to T'$ 是一个水平箭头，由适当正时的庞加莱等距变换 κ 在 $\kappa(T) \subset T'$ 上的限制$h = \kappa|_T$给出。令

$$\alpha_h : W(T) \to W(T')$$

为诱导的 Weyl 代数上的 $*$-同态。定义 $A(h)\colon A(T)\to A(T')$ 为唯一的正规 $*$-同态，使得对每个 $v\in V(T)$，

$$A(h)\Big(\pi_{\mathrm{univ}}\big(\jmath_T(W_T(v))\big)\Big) \;:=\; \pi_{\mathrm{univ}}\big(\jmath_{T'}(\alpha_h(W_T(v)))\big),$$

并通过正规性延拓到 $A(T)=\pi_{\mathrm{univ}}(\jmath_T(W(T)))''$。这一定义良好，因为 α_h是一个 $*$-同态，而且 $\pi_{\mathrm{univ}}(\jmath_{T'}(W(T')))$ 作为双交换子生成 $A(T')$。

抽取网络的 Haag–Kastler 公理验证如下：

- **HK1（单调性）**。对于 $i\colon T\hookrightarrow T'$ 映射 $A(i)$ 按照构造就是字面上的包含 $A(T)\subset A(T')$（使用忠实的泛表示）。
- **HK2（局域性，通过环境区域 M）**。设 T_1，T_2 为类空分离的菱形区域。对于 $f\in C_c^\infty(T_1)$ 和 $g\in C_c^\infty(T_2)$，令 $v_1:=[f_{\mathrm{ext}\,M}]$ 以及 $v_2:=[g_{\mathrm{ext}\,M}]$ 取自$V(M)$。于是

$$\sigma_M(v_1,v_2)=\int_M f_{\mathrm{ext},M}\,E_M(g_{\mathrm{ext},M})\,\mathrm{dvol}_M=0$$

因为

$$\mathrm{supp}\big(E_M(g_{\mathrm{ext},M})\big)\subset J(\mathrm{supp}(g))$$

在类空分离下，与 supp(f) 不相交 [BGP08]。因此，Weyl 关系给出

$$W_M(v_1)W_M(v_2)=W_M(v_2)W_M(v_1)$$

在 $W(M)$ 中。通过映射 $\jmath_M\colon W(M)\to W_{\mathrm{ql}}$和 π_{univ}，相同的交换关系也成立于 $A(M)=\pi_{\mathrm{univ}}(\jmath_M(W(M)))''$ 内。由于包含 $T_k\hookrightarrow M$诱导出 $*$-同态 $\iota_{T_k}\colon W(T_k)\to W(M)$，元素 $W_M(v_k)$ 是 $W_{T_k}([f])$ 和 $W_{T_k}([g])$ 在 ι_{T_k} 下的像。因此，$W(T_1)$ 和 $W(T_2)$ 的像在 $W(M)$ 中交换，故它们的双交换子在 $A(M)$ 中交换。这正是采用包含映射到公共余域的正交性表述的 HK2。

- **HK3（作为函子性的协变性）**。赋值 $T\mapsto(V(T)\ \sigma_T)$ 对包含映射和所选的 Poincar´e 限制具有函子性，而 Weyl函子将辛映射发送为 $*$-同态。取 $\pi_{\mathrm{univ}}(\,\cdot\,)''$ 得到一个函子$A\colon$ **嵌入**$(M)\to\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，这就是此处所采用的函子性意义下的 HK3。

- **HK4（时间片）**。在仅以包含作为竖直态射的双锥区域范畴中，我们取时间片类为空集 $S=\varnothing$，因此在此设定下，HK4 是平凡成立的。
- **HK5（可加性）**。设 $T=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}T_\lambda$ 是由菱形区域构成的开覆盖，并令$f\in C_c^\infty(T)$。选取 supp(f) 的一个有限子覆盖，以及一个从属于它的单位分解 $\{\chi_k\}$，于是 $f=\sum_k\chi_k f$，其中每个 $\chi_k f\in C_c^\infty(T_{\lambda_k})$。因此，在 $V(T)$ 中，

$$[f]=\sum_k[\chi_k f]$$

，Weyl关系将 $W_T([f])$ 表示为一个相位因子乘以生成元 $W_T([\chi_k f])$ 的乘积。因此，$W(T)$ 作为一个 C^*-代数，由包含映射下子代数 $W(T_{\lambda_k})$ 的像生成。应用 $\pi_{\mathrm{univ}}(\,\cdot\,)''$ 得到

$$A(T)\;=\;\bigvee_{\lambda\in\Lambda}A(i_{T_\lambda,T})\big(A(T_\lambda)\big)$$

在 $A(T)$ 内，即 HK5。

现在，我们检查 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. 中的方形级双模性
Let

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\ h\ } & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ T' & \xrightarrow[\ h'\ ]{} & V' \end{array}$$

在**Mink(**M**)**中构成一个方形，因此 $j \circ h = h' \circ i$ 是映射。于是，在输入中，我们有正规 $*$-同态之间的相等

$$A(j) \circ A(h) \;=\; A(h') \circ A(i).$$

在代数量子场论双函子 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$中，水平箭头 $h : T \to V$ 被映为对应$_{A(T)}L^2\big(A(V)\big)_{A(V)}$，其左作用为 $\lambda_V \circ A(h)$，右作用为 ρ_V（标准形式）。该方形被映为标准形映射

$$L^2(A(j)) :\; L^2(A(V)) \longrightarrow L^2(A(V')).$$

左双模性。对于 $a \in A(T)$和 $\xi \in L^2\big(A(V)\big)$,

$$\begin{aligned} L^2(A(j))\big(\lambda_V(A(h)(a))\,\xi\big) &= \lambda_{V'}\big(A(j)(A(h)(a))\big)\, L^2(A(j))(\xi) \\ &= \lambda_{V'}\big(A(h')(A(i)(a))\big)\, L^2(A(j))(\xi), \end{aligned}$$

其中，第一个相等是 $L^2(-)$的标准形式交织恒等式，第二个用到了 $A(j) \circ A(h) \;= A(h') \circ A(i)$。

右双模性。对于 $b \in A(V)$,

$$L^2(A(j))\big(\xi\,\rho_V(b)\big) \;=\; L^2(A(j))(\xi)\,\rho_{V'}\big(A(j)(b)\big),$$

再次由标准形式交织恒等式可得。

这些恰好是 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 的方形赋值所要求的双模交织子恒等式。

有限群作用下的不动点子网。设 $(\mathcal{B},\ U,\ \Omega)$ 是定义在 S^1 上的强可加共形网。设 G 是一个有限群，通过保持真空的内部对称性作用；也就是说，对每个 $g \in G$，都有一个自同构 $\beta_g \in \mathrm{Aut}\big(\mathcal{B}(S^1)\big)$，使得对每条弧 $I \subset S^1$,

$$\beta_g\big(\mathcal{B}(I)\big) = \mathcal{B}(I).$$

进一步假设每个 β_g 都由 $\mathcal{H}$ 上的酉算子 $V_g \in U(\mathcal{H})$ 实现，且 $V_g\,\Omega = \Omega$，并且

$$\beta_g = \mathrm{Ad}_{V_g} \quad \text{on } \mathcal{B}(S^1)$$

（因而在每个 $\mathcal{B}(I) \subset B(\mathcal{H})$ 上也是如此。）[1] 进一步假设以下交换假设（用于 **HK3**）：对所有 $F \in$**Diff**$_+(S^1)$ 和 $g \in G$,

$$\beta_g \circ \mathrm{Ad}_{U(F)} \;=\; \mathrm{Ad}_{U(F)} \circ \beta_g.$$

等价地 地，几何协变性与 G-作用在每个局部代数上可交换 .

定义不动点子网如下

$$\mathcal{A}^G(I) \;:=\; \mathcal{B}(I)^G \;=\; \{\, x \in \mathcal{B}(I) \mid \beta_g(x) = x \text{ for all } g \in G \,\},$$

并令

$$\mathcal{A}^G(S^1) \;:=\; \mathcal{B}(S^1)^G.$$

[1]等价地，每个 β_g 都限制为每个局部代数 $\mathcal{B}(I) \subset B(\mathcal{H})$ 的自同构，且实现该自同构的酉算子固定真空向量。

对于垂直包含 $i: I \hookrightarrow I'$，将 $\mathcal{A}^G(i)$ 定义为（字面意义上的）包含

$$\mathcal{B}(I)^G \hookrightarrow \mathcal{B}(I')^G.$$

对于水平箭头 $h=(F,I): I \to F(I)$，定义

$$\mathcal{A}^G(h) := \mathrm{Ad}_{U(F)}\big|_{\mathcal{B}(I)^G} : \mathcal{B}(I)^G \longrightarrow \mathcal{B}(F(I))^G.$$

这是定义良好的，因为 $\mathrm{Ad}^{U(F)}$ 与 G-作用可交换：若 $x \in \mathcal{B}(I)^G$，则对每个 $g \in G$，

$$\beta_g\big(\mathrm{Ad}_{U(F)}(x)\big) = \mathrm{Ad}_{U(F)}\big(\beta_g(x)\big) = \mathrm{Ad}_{U(F)}(x),$$

因此 $\mathrm{Ad}^{U(F)}(x) \in \mathcal{B}(F(I))^G$。

现在我们证明 Haag-Kastler 公理。

- **HK1（单调性）和 HK2（局域性）**。两者都继承自 $\mathcal{B}$：对于每条弧 I，我们有 $\mathcal{A}^G(I) = \mathcal{B}(I)^G \subseteq \mathcal{B}(I)$，且包含映射就是实际的包含。因此单调性成立。若 I 和 J 是互不相交的弧，则由 $\mathcal{B}$的局域性可得 $[\mathcal{B}(I)\ \mathcal{B}(J)] = 0$，因而也有 $[\mathcal{A}^G(I)\ \mathcal{A}^G(J)] = 0$。

- HK3（函子协变性）。对于水平箭头 $h = (F,I)$，我们定义了$\mathcal{A}^G(h) = \mathrm{Ad}_{U(F)}|_{\mathcal{B}(I)^G}$。交换假设 $\beta_g \circ \mathrm{Ad}_{U(F)} = \mathrm{Ad}_{U(F)} \circ \beta_g$意味着 $\mathrm{Ad}_{U(F)}$ 保持不动点，因此 $\mathcal{A}^G(h)$ 的取值落在 $\mathcal{B}(F(I))^G$ 中。与复合的相容性与未扭曲的网中的计算相同：若 $h_1 = (F_1, I_1): I_1 \to F_1(I_1)$ 且 $h_2 = (F_2, F_1(I_1)): F_1(I_1) \to F_2F_1(I_1)$，则

$$\mathcal{A}^G(h_2) \circ \mathcal{A}^G(h_1) = \mathrm{Ad}_{U(F_2)} \circ \mathrm{Ad}_{U(F_1)} = \mathrm{Ad}_{U(F_2F_1)} = \mathcal{A}^G(F_2F_1, I_1),$$

而对于包含映射，垂直函子性显然成立。

- **HK4（时间切片）**。与圆设置中一样，在此例中我们取空的时间切片类，因此**HK4** 是平凡成立的。

- **HK5（强可加性；以及内部连续性下的可加性）**。根据 Xu[Xu03], 若 $\mathcal{B}$ 具有强可加性，且紧群 G 通过保持真空的内部对称性作用，则不动点子网 $\mathcal{B}^G$ 具有强可加性。由于有限群是紧群，$\mathcal{A}^G$ 具有强可加性。

此外，若假设共形网 N 满足标准的内部连续性性质，即对每条弧 I，

$$N(I) = \bigvee_{J \Subset I} N(J), \qquad (J \Subset I \text{ meaning } \overline{J} \subset I),$$

那么强可加性便蕴含通常的开覆盖可加性：

引理 5.6. 强可加性 $+$ 内部连续性 $\Longrightarrow$ 开覆盖可加性 设 N 是定义在 S^1 上的共形网，且具有强可加性和内部连续性。那么对每条弧 I 以及由弧构成的每个开覆盖 $I = \bigcup_\lambda I_\lambda$，

$$N(I) = \bigvee_\lambda N(I_\lambda).$$

证明。设 $J, L \subset S^1$ 为弧，且 $J \cap L \neq \varnothing$，$J \cup L$ 为一条弧。选取保向参数化 $\varphi: J \cup L \to (a,d) \subset \mathbb{R}$，并写作 $\varphi(J) = (a,b)$ 和 $\varphi(L) = (c,d)$，其中 $a < c < b < d$。取 $p \in (c,b)$，并令 $I_0 := J \cup L$，$I_1 := \varphi^{-1}((a,p))$，以及 $I_2 := \varphi^{-1}((p,d))$。那么 $I_0 \setminus \{\varphi^{-1}(p)\} = I_1 \cup I_2$ 是分解为两个连通分支，因此由强可加性得 $N(I_0) = N(I_1) \vee N(I_2)$。

由于 $I_1 \subset J$ 且 $I_2 \subset L$，单调性给出 $N(I_1) \subset N(J)$ 和 $N(I_2) \subset N(L)$，因此 $N(I_0) \subset N(J) \vee N(L)$。反向包含 $N(J) \vee N(L) \subset N(I_0)$ 是单调性。这证明了 $N(J \cup L) = N(J) \vee N(L)$。

设 $J_1, \dots, J_n$ 为弧，使得 $J := \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ 是一条弧。选取一个保向参数化 $\psi\colon J \to (u, v) \subset \mathbb{R}$，并记 $\psi(J_k) = (\ell_k, r_k)$。重新编号后，假设 $\ell_1 \le \cdots \le \ell_n$，并定义 $J^{(1)} := J_1$ 和 $J^{(m+1)} := J^{(m)} \cup J_{m+1}$，其中 $1 \le m \le n-1$。由于 $\bigcup_{k=1}^{n} (\ell_k, r_k)$ 是一个区间，因此对每个 m，都有 $J^{(m)} \cap J_{m+1} \neq \varnothing$；否则就会存在一个非空的间隙，导致并集不连通。因此，每个 $J^{(m+1)}$ 都是一条弧，而双弧情形给出

$$N(J^{(m+1)}) = N(J^{(m)}) \vee N(J_{m+1}) \qquad (1 \le m \le n-1).$$

迭代可得 $N(J) = \bigvee_{k=1}^{n} N(J_k)$。

设 I 为一条弧，且 $\{I_\lambda\}_\lambda$ 是 I 的一个开覆盖。固定 $J \Subset I$。由 J 的紧致性可得一个有限子覆盖 $J \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_{\lambda_k}$。选取一个保向参数化 $\theta\colon J \to (s, t) \subset \mathbb{R}$。于是 $\{\theta(I_{\lambda_k} \cap J)\}_{k=1}^{n}$ 是紧区间 $\theta(J) = [s', t']$ 的一个有限开覆盖。从这个有限覆盖中可以抽取一个有限子族 $K_1, \dots, K_m$，它仍覆盖 $[s', t']$，且满足对所有 j 都有 $K_j \cap K_{j+1} \neq \varnothing$。沿 θ^{-1} 拉回可得弧 $J_1, \dots, J_m \subset J$，使得 $\bigcup_{j=1}^{m} J_j = J$，每个 $J_j \subset I_{\lambda_{k(j)}}$ 都对应某个 $k(j)$，并且 $J_j \cap J_{j+1} \neq \varnothing$。因此

$$N(J) = \bigvee_{j=1}^{m} N(J_j) \subset \bigvee_{k=1}^{n} N(I_{\lambda_k}) \subset \bigvee_{\lambda} N(I_\lambda).$$

利用内部连续性，

$$N(I) = \bigvee_{J \Subset I} N(J) \subset \bigvee_{\lambda} N(I_\lambda).$$

反向包含关系来自单调性，因此 $N(I) = \bigvee_{\lambda} N(I_\lambda)$。 □

如果内部连续性属于既定网假设之一，那么此引理适用于 $N = \mathcal{A}^G$，并得出 **HK5** 的开覆盖可加性形式。若没有内部连续性，则对这个例子，**HK5** 采用 Xu 给出的强可加性形式。

6. Conclusion and Preview of Part II

总结。第一部分将一个代数量子场论输入 $\mathcal{A}$ 封装为伪双函子

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}\colon \mathbf{Mink}(M) \longrightarrow \mathbf{vNA},$$

其垂直部分是通常的 Haag-Kastler 网 $U \mapsto \mathcal{A}(U)$，而水平层和方形层的赋值经过设计，使对应演算具有函子性，而非临时拼凑。具体而言，目标伪双范畴 **vNA** 的选取使其垂直态射构成一个指定类 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$，由正规含幺 $*$-同态组成；其水平 1-胞腔是 von Neumann 对应（双模），其方形是双模交织算子。

关键的算子代数输入是标准形式恒等对应。对于每个冯·诺依曼代数 A，我们固定一个 Haagerup 标准形 $(H_A,\ \lambda_A,\ J_A,\ P_A)$，并定义

$$L^2(A) := H_A$$

作为一个 A-A c 对应，左作用由 $\lambda_A\colon A \to B(H_A)$ 给出，右作用

$$\rho_{L^2(A)}(a) \coloneqq J_A\,\lambda_A(a^*)\,J_A, \quad a \in A.$$

第一部分中有两项不可妥协的原则值得强调，因为它们正是使这一构造足够稳健、能够支撑第二部分的关键。

首先，垂直态射的类$\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 由函子性要求定义：它由那些正规含单位的 $*$-同态 $\varphi\colon A \to B$ 组成，对于这些同态，算子代数框架提供了一个典范标准形映射

$$L^2(\varphi)\colon L^2(A) \longrightarrow L^2(B),$$

该映射在 φ 中具有函子性，并且与对应演算（尤其是 Connes 融合及相关双模结构）相容。这样， L^2 的函子性就作为$\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$上的一项显式假设予以记录，而非被视为隐含假设。

其次，方形赋值以一种真正利用时空交换性的方式进行定型：一个交换边界

$$j \circ h = h' \circ i$$

in $\mathbf{M}$**墨迹**(M) 在 $\mathbf{vNA}$ 中生成一个方形，其内部是标准形映射

$$L^2\big(\mathcal{A}(j)\big)\colon L^2\big(\mathcal{A}(\mathrm{dom}(j))\big) \longrightarrow L^2\big(\mathcal{A}(\mathrm{cod}(j))\big),$$

以及由此导出的交换性

$$\mathcal{A}(j) \circ \mathcal{A}(h) \;=\; \mathcal{A}(h') \circ \mathcal{A}(i)$$

这恰恰保证了 $L^2(\mathcal{A}(j))$ 对由水平赋值产生的受限左右作用是双模的。这正是 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 比抽取网络表达更多内容、同时又符合标准算子代数恒等式的方式。

此时，不妨问一句：双范畴包装是否只是装饰性的，也就是说，它只是重新表述了这个网，却没有在 Haag-Kastler 公理层面产生新的内在推论?

第二部分将重点转向别处：我们不再把 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 视为一种本身应当施加额外网论约束的工具，而是将 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 用作与冯·诺依曼代数内部理论相接的结构化接口。

第二部分预览。 对于 I 型和 II 型冯·诺依曼代数，许多标准结构运算由双模和双模映射实现； $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 中方形层面的数据，恰好以函子性的方式记录了这些实现。

第二部分借鉴了 Penneys 的迹性 2-范畴框架，首先必须明确的一点是迹依赖性 [Pen17]。在第一部分中， $L^2(A)$ 是根据选定的 Haagerup 标准形定义的，不需要任何迹。

相比之下，在 Penneys 的框架中，基本对象是对 (A,tr_A)，标准表示是 GNS 希尔伯特空间 $L^2(A,\mathrm{tr}_A)$，它由 A 关于以下内积完备化得到

$$\langle a, b\rangle := \mathrm{tr}_A(b^*a).$$

右作用和模共轭 J 是利用迹性定义的，而改变迹会改变对象。

因此，第二部分旨在将迹 AQFT 作为第一部分目标的深化，而不是符号的改变来处理。当我们在 Penneys 的迹框架中工作时 [Pen17], 对象是成对的（A, τ），并且

$$L^2 \;\text{ means }\; L^2(A,\tau).$$

当我们引入垂直方向时，我们将垂直 $*$-同态限制为那些保持选定的迹（以及在半有限情形下保持选定的迹权）的同态，就像第一部分限制为 $\mathbf{vN}_{\mathrm{vert}}$ 一样，以确保函子映射 $L^2(\varphi)$。

这是两个框架可能产生混淆的唯一之处，我们将这一点纳入目标结构，以避免歧义。

更确切地说，本文既不将 Penneys 的 2-范畴作为额外的环境结构，也不依赖任何外部的 W^*-2-范畴形式体系作为输入。相反，[Pen17] 为我们提供指引，告诉我们哪些迹敏感机制应当内化到自己的双范畴框架中，以及在存在迹的情况下如何最好地组织这些机制。

因此，第二部分构造了第一部分余域的一个带迹装饰的细化，记作

$$\mathbf{vNA}_{\tau},$$

其对象是形如 (A,τ) 的有序对，其中 τ 是一个固定的忠实正规迹（有限情形）或一个固定的忠实正规半有限迹权（半有限情形）；其垂直态射是与所选迹数据相容的正规含幺 $*$-同态，其水平 1-胞腔是在这种带迹/半有限框架下表述的对应，而其方形是双模交织算子。存在一个遗忘伪双函子

$$\mathbf{vNA}_{\tau} \longrightarrow \mathbf{vNA}$$

它舍弃迹装饰，并恢复第一部分的对应演算。

引入$\mathbf{vNA}_{\tau}$ 的目的并不是向代数化量子场论网施加新的公理，而是使标准的 I 型/II 型运算能够在 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$中已经具备的同一函子性层次上表达。特别是，第二部分将 II 型因子结构理论中无处不在的基本角和放大运算纳入$\mathbf{vNA}_{\tau}$，并将它们组织为与方形的伴随运算和粘合相容的典范构造。

在既定的迹相容性假设下，带迹 AQFT 输入于是成为一种 AQFT 输入 $\mathcal{A}$，并且在每个局部代数 $\mathcal{A}(U)$上选取迹数据 τ_U，使得与可容许嵌入相关联的态射（在有限情形下）保持所选的迹数据，或（在半有限情形下）保持所选的迹权。由此类输入出发，第二部分构造了一个精化的伪双函子

$$\mathcal{F}_{(\mathcal{A},\tau)}\colon \mathbf{Mink}(M) \longrightarrow \mathbf{vNA}_{\tau}$$

其与遗忘函子$\mathbf{vNA}_{\tau} \to\mathbf{vNA}$ 的复合与原始的 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$典范同构。因此，抽取网络仍然是 $U \mapsto \mathcal{A}(U)$，而水平和方形层面的赋值则落入一个余域，在那里，对迹敏感的构造在设计上具有函子性。

我们所内化的这类机制，一个典型例子是 Roberts 的 2×2 技巧：它将双模映射空间识别为直和自同态代数中的角，从而使角运算与复合相容 [Pen17]。在当前框架中，这一原则旨在为将直和和角运算纳入$\mathbf{vNA}_{\tau}$的方形层级演算提供动机与依据，从而可以用伴随运算和粘合来表达标准的放大与角论证，而不必将其视为外部的代数操作。

最后，第二部分将运用这一经过完善的余域来阐述并通过具有代表性的例类检验：熟悉的 II 型主题如何用函子性 AQFT 语言表达。重点在于建立技术上正确的术语对照表并发展函子性构造，

而非仅凭 Haag-Kastler 公理断言分类结果：McDuff 型稳定性、Cartan 型结构、素性以及 $\mathrm{II}_1/\mathrm{II}_\infty$ 半有限性之间的对比等性质，都被视为局部代数及其对应演算中对迹敏感的条件；第二部分将发展所需的形式体系，以便沿着 $\mathbf{Mink}(M)$ 中编码的时空结构，一致地表述并传输这些条件。

References

[Ehr63a] Charles Ehresmann。《Cat´egories doubles et cat´egories structur´ees》。法文。载于：《巴黎科学院院报》256（1963），第1198–1201页。[Ehr63b] Charles Ehresmann。《Cat´egories structur´ees》。法文。载于：《高等师范学校科学年鉴》，第4辑，80.4（1963），第349–426页。 URL： https://eudml.org/doc/81794。[HK64] Rudolf Haag 和 Daniel Kastler。《量子场论的代数方法》。载于：《数学物理学杂志》5.7（1964），第848–861页。 DOI：10.1063/1.1704187.[GP99] Marco Grandis 和 Robert Par´e。《双范畴中的极限》。载于：《范畴拓扑学与微分几何札记》40（1999），第162–220页。[BFV03] Romeo Brunetti、Klaus Fredenhagen 和 Rainer Verch。《一般协变局域性原理——局域量子场论的新范式》。载于：《数学物理通讯》237.1（2003年6月），第31–68页。 ISSN：1432-0916。 DOI： 10.1007/s00220-003-0815-7。 URL： http://dx.doi.org/10.1007/s00220-003-0815-7。[Xu03] Feng Xu。强可加性与共形网。2003年。arXiv： math/0303266[math.QA]。 URL： https://arxiv.org/abs/math/0303266。[GP04] Marco Grandis 和 Robert Par´e。《双范畴的伴随》。载于：《范畴拓扑学与微分几何札记》45（2004），第193–240页。[HM06] Hans Halvorson 和 Michael Mueger。代数量子场论。2006年。arXiv： math-ph/0602036 [math-ph]。 URL： https://arxiv.org/abs/math-ph/0602036。[BGP08] Christian Baer、NicolasGinoux 和 FrankPfaeffle。洛伦兹流形上的波动方程与量子化。2008年。arXiv： 0806.1036 [math.DG]。 URL： https://arxiv.org/abs/0806.1036。[GP08] Marco Grandis 和 Robert Par´e。《双范畴中的 Kan 延拓》。载于：《理论与范畴应用》20.8（2008），第152–185页。[Haa12] R. Haag。《局域量子物理：场、粒子、代数》。理论与数理物理。Springer Berlin Heidelberg，2012年。 ISBN：9783642614583。URL： https://books.google.com/books?id=OlLmCAAAQBAJ。[FV15] Christopher J. Fewster 和 Rainer Verch。弯曲时空中的代数量子场论。2015年。arXiv： 1504.00586 [math-ph]。 URL： https://arxiv.org/abs/1504.00586。[BS17] Marco Benini 和 Alexander Schenkel。《群胚纤维化范畴上的量子场论》。载于：《数学物理通讯》356.1（2017年8月），第19–64页。 ISSN：1432-0916。 DOI： 10.1007/s00220-017-2986-7。 URL： http://dx.doi.org/10.1007/s00220-017-2986-7。

[Pen17] David Penneys。迹冯·诺依曼代数的2-范畴。艾萨克·牛顿研究所短期课程讲义（2017年1月11–13日及16日）。2017年1月。URL: https://people.math.osu.edu/penneys.2/talks/PenneysINI2017.pdf（访问于2025年12月31日）。[Ore19] Juan Orendain。自由球状生成双范畴。2019年。arXiv: 1610.05145 [math.CT]。URL: https://arxiv.org/abs/1610.05145。[Ben+21] Marco Benini 等。《代数量子场论的范畴化》。载于：《数学物理通讯》111.2（2021年3月）。ISSN: 1573-0530。DOI: 10.1007/s11005-021-01371-8。URL: http://dx.doi.org/10.1007/s11005-021-01371-8。[Ore21] Juan Orendain。自由球状生成双范畴II：规范双投影。2021年。arXiv: 1905.02888 [math.CT]。URL: https://arxiv.org/abs/1905.02888。[Car23] Victor Carmona。代数量子场论的新模型结构。2023年。arXiv: 2107.14176 [math-ph]。URL: https://arxiv.org/abs/2107.14176。[BF24] Detlev Buchholz 和 Klaus Fredenhagen。代数量子场论：目标、方法与成果。2024年。arXiv: 2305.12923 [math-ph]。URL: https://arxiv.org/abs/2305.12923。[Mye24] David Jaz Myers。范畴系统理论。https://github.com/jaz303/categorical-systems-theory。正在编写中的书籍。2024年。[nLa25] nLab 作者。双范畴。https://ncatlab.org/nlab/show/double+category。第101次修订。2025年12月。

Department of Physics, Mathematics and Astronomy, California Institute of Technology电子邮箱地址: kkomalan@caltech.edu