arXiv:2601.07840v1 [math.QA] 1 Jan 2026

由 GKO 构造得到的顶点算子代数的唯一性

Yuhan Gu

青岛大学数学与统计学院

Wen Zheng *

青岛大学数学与统计学院

2026年1月14日

摘要

我们通过 GKO 构造构造了一系列顶点算子代数，它们是 3A 代数和 6A代数的推广。我们证明，在编织矩阵的某些元素非零这一假设下，这些顶点算子代数结构是唯一的。此外，我们还证明它们各自都由权二子空间（即 Griess 代数）生成。

目录

1 引言 **3**

2 预备知识 **4**

2.1 基础.4 2.2 量子伽罗瓦理论.7 2.3 Virasoro 顶点算子代数的酉级数.8 2.4 编织矩阵.9 2.5 酉 Virasoro 顶点算子代数的 GKO构造.11 2.6 6A代数的结构.12 2.7 有理顶点算子代数的镜像扩张.15

3 U_k^i 和 $\{\mathcal{U}_k\}$的构造 **15**

*通讯作者电子邮箱： $wzheng14@qdu.edu.cn$作者受到国家自然科学基金项目（编号：12201334）和山东省自然科学基金项目（编号：ZR2022QA023）的资助。

4 $\lambda_{i,}^{k}$

$_{j} \neq 0$ **17**4.1

基本结果.18 4.2 当 m 为奇数时.21 4.3 当 m 为偶数时.22**5 (,** Y) 的唯一性23 6 由 Griess 代数生成 27 7 开放问题 27

1 引言

通过 GKO构造构造一系列顶点算子代数（顶点算子代数） $\mathcal{U}_k$ ，并证明 $\mathcal{U}_k$ 具有唯一的顶点算子代数结构，是本文的主要任务。在介绍任何具体方法之前，我们将简要回顾顶点算子代数结构与分类的发展历程。

自 20 世纪 80 年代以来，顶点（算子）代数便已被引入并得到广泛研究 [B, FLM, FHL]。它的性质展现出与交换代数、结合代数、微分代数和分次代数的类比。凭借这些丰富的结构，顶点算子代数在群论、模形式、李代数、共形网、张量范畴和数学物理等诸多领域之间建立了深刻联系，使其成为最丰富多彩的研究领域之一。

人们已经熟知许多顶点算子代数的例子，例如 Virasoro 顶点算子代数、Heisenberg顶点算子代数、仿射顶点算子代数和格顶点算子代数。除了已有的例子，还可以通过扩张、陪集构造和轨形理论构造新的顶点算子代数。

最重要的顶点算子代数之一是 $V^\natural$ moonshine顶点算子代数，它源于对moonshine猜想的研究。 [DMZ] 中证明了， $V^\natural$ 包含一个子代数 $L(1/2,0)^{\otimes 48}$，其中 $L(1/2,0)$ 是中心荷为 $1/2$ 的单Virasoro顶点算子代数。

Virasoro 顶点算子代数，尤其是Virasoro 顶点算子代数的酉级数，是最简单且研究最充分的顶点算子代数，它们具有许多理想性质，有助于阐明其结构。特别地，我们使用GKO构造得到一系列顶点算子代数 $\mathcal{U}_k$，而酉级数的Virasoro 顶点算子代数的融合规则和编织矩阵 [FFK, H1, H2] 在我们的计算中发挥着至关重要的作用。

我们的动机之一是推广关于3A代数 [M, SY] 以及6A代数 [DJY, JZ]的既有结果。例如，我们构造的顶点算子代数 $\mathcal{U}_k$ 中的 $k=0$ 和 $k=1$ 情形分别对应于3A代数和6A代数。详见第3节。另一个动机是尝试理解 [LY], 中的猜想 A.14，该猜想断言，由若干个与3A代数和2A代数相关的Ising向量生成的顶点算子代数具有唯一的顶点算子代数结构。事实上，由两个Ising向量生成的顶点算子代数结构已经得到广泛研究 [M, SY, LYY, DJY, DZ, JZ, Zheng]。我们希望采用 [DJY, DZ]中关于 Virasoro 顶点算子代数的编织矩阵和融合规则等类似方法，证明 $\mathcal{U}_k$的顶点算子代数结构的唯一性，但困难之处在于要同时证明所有 k 的$\mathcal{U}_k$ 唯一性。我们在编织矩阵的某些元素非零这一假设下给出了该证明。关于 $\mathcal{U}_1$ 和$\mathcal{U}_2$的编织矩阵元素的具体计算，参见例 5.9和5.10。

下面我们简要介绍本文的工作。通过直接应用 GKO 构造，我们可以将其分解为

$$(\mathcal{L}(3,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}(3,3)\otimes\mathcal{L}(1,1)\otimes\mathcal{L}(1,0))\otimes\mathcal{L}(1,0)^{\otimes k}$$

（细节见第 2.5 节）到 $\bigoplus_i \mathcal{U}_{k,i}\otimes\mathcal{L}(k+5,i)$ 中。 $\mathcal{U}:=\mathcal{U}_k:=\mathcal{U}_{k,0}$ 的定义是取 GKO 构造中 $\mathcal{L}(k+5,0)$ 的中心化子。更确切地说，我们有分解 $\mathcal{U}_k=\bigoplus U^i=\bigoplus P^i\otimes Q^i$，其中 P_i 是 $\mathcal{U}_{k-1}$ 模， Q_i 是 Virasoro 顶点算子代数的模。因此，可能的顶点算子由这些模之间的融合规则决定。我们证明了，对于我们而言， Q_i 的融合规则已经足够。由于 Q_i 的融合规则不是 1 就是 0，因此我们可以令 $Y=\sum\lambda_{i,j}^k\mathcal{Y}_{i,j}^k$，其中 $\mathcal{Y}_{i,j}^k$ 是类型为 $\binom{U^k}{U^i\ U^j}$ 的交织算子之基。假设我们固定 Y，使得 $\lambda_{i,j}^k=1$，即 $Y=\sum\mathcal{Y}_{i,j}^k$。对于另一个可能的顶点算子代数结构 $Y=\sum\lambda_{i,j}^k\mathcal{Y}_{i,j}^k$，我们需要证明 $(\mathcal{U},Y)\cong(\mathcal{U},Y)$。利用 Lin 的镜像扩张理论 [，我们证明了对于所有与融合规则相容的 i,j,k，都有 $\lambda_{i,j}^k\neq 0$。在假设编织矩阵中的某些元素非零的情况下，如果 $N_{i,j}^k=1$，我们便可以断言 $\left(\lambda_{i,j}^k\right)^2=1$。然后我们使用 $\lambda_{i,j}^k$，定义一个映射 σ，它连接 $(\mathcal{U},Y)$ 与

$(\mathcal{U}, \overline{Y})$，并证明它恰好是我们所需的同构。此外，我们证明 $\mathcal{U}$ 由 Griess 代数生成。

本文组织如下：第 2 节回顾本文所需的顶点算子代数及相关主题的一些基本事实。第 3 节构造模 $\mathcal{U}_k$。第 4 节证明对于所有与融合规则相容的 i、j、k，$\lambda_{i,j}^{k} \neq 0$、j、k。第 5 节定义同构 σ，并证明本文的主要目标，即 $\mathcal{U}_k$ 上顶点算子代数结构的唯一性。第 6 节证明 $\mathcal{U}_k$ 由 Griess 代数生成。第 7 节基于本文及其引用文献提出一些开放问题。

2 预备知识

本节回顾顶点算子代数的基本知识、 [DJX1], 关于 Virasoro代数酉表示离散级数的陪集实现的量子维数理论、 [GKO], 关于某些 Virasoro顶点算子代数的编织矩阵、 [FFK],关于 $6A$-代数的结构 [DJY], , 以及 [Lin]关于有理顶点算子代数的镜像扩张。

2.1 基础知识

设 $V=(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ 是一个顶点算子代数。设 $Y(v, z)=\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$ 表示 V 对于 $v \in V$ 的顶点算子，其中 $v_n \in \mathrm{End}(V)$。我们首先回顾一些基本概念，参见 [FLM、Zhu、DLM1、DLM3]。

定义 2.1。 V_2 称为Griess 代数。若向量 $v \in V_2$ 满足 $v_1 v=2 v$ 和 $v_3 v=\frac{c_v}{2} \mathbf{1}$，则称其为中心荷为 c_v 的Virasoro向量。此时，算子 $L_n^v:=v_{n+1}^{-}, n \in \mathbb{Z}$ 满足*Virasoro*交换关系

$$
\left[L_m^v, L_n^v\right]=(m-n) L_{m+n}^v+\delta_{m+n, 0} \frac{m^3-m}{12} c_v
$$

对于 $m, n \in \mathbb{Z}.$ ，中心荷为 $1/2$ 的 *Virasoro*向量 $v \in V_2$ 若满足 v 生成*Virasoro*顶点算子代数 $L(1/2, 0)$，则称其为Ising向量。

定义 2.2. 顶点算代数的自同构 g 是 V 的线性同构，满足 $g(\mathbf{1})=\mathbf{1}, g(\omega)=\omega$ 以及 $gY(v, z) g^{-1}=Y(gv, z)$，对任意 $v \in V$均成立。我们用 *Aut* (V)表示 V的全体自同构所构成的群。

对于子群 $G \leq \mathrm{Aut}(V)$，不动点集 $V^G=\{v \in V | g(v)=v, \forall g \in G\}$ 具有顶点算子代数结构。

设 g 是阶为 T的顶点算子代数 V的一个自同构。将 V 分解为 g 的特征子空间，记为:

$$
V=\oplus_{r \in \mathbb{Z} / T \mathbb{Z}} V^r
$$

其中 $V^r=\left\{v \in V | g v=e^{2 \pi i r / T} v\right\}$。

定义 2.3。 *A*弱 g-扭曲 V-模 M 是一个配备线性映射的向量空间

$$
\begin{aligned}
Y_M: & V \rightarrow (End M)\{z\} \\
& v \mapsto Y_M(v, z)=\sum_{n \in \mathbb{Q}} v_n z^{-n-1} \quad (v_n \in End M)
\end{aligned}
$$

满足以下条件：对于所有 $0 \leq r \leq T-1$、 $u \in V^r$、 $v \in V$、 $w \in M$,

$$Y_M(u,z) = \sum_{n \in -\frac{r}{T}+\mathbb{Z}} u_n z^{-n-1},$$

$$u_l w = 0 \ for \ l \gg 0,$$

$$Y_M(\mathbf{1},z) = Id_M,$$

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right) Y_M(u,z_1) Y_M(v,z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right) Y_M(v,z_2) Y_M(u,z_1)$$

$$= z_2^{-1}\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)^{-r/T} \delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right) Y_M(Y(u,z_0)v,z_2), \quad (1)$$

其中 $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$。

定义 2.4。 g-扭曲 V-模 是一个弱 g-扭曲 V-模 M，它带有由 $L(0)$ 的谱所诱导的 $\mathbb{C}$-分次，其中 $L(0)$ 是 $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}$. 的分量算子。也就是说，我们有 $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda$，其中 $M_\lambda = \{w \in M | L(0)w = \lambda w\}$。此外，维数 M_λ 有限，且对于固定的 λ、 $M_{\frac{n}{T}+\lambda} = 0$，当整数 n.足够小时

定义 2.5。 一个容许的 g-扭曲 V-模 $M = \oplus_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}_+} M(n)$ 是一个 $\frac{1}{T}\mathbb{Z}_+$-分次弱g-扭曲模，满足 $u_m M(n) \subset M(wtu - m - 1 + n)$，其中 $u \in V$ 是齐次的，且 m、 $n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$.

若 $g = Id_V$我们有弱、普通和可容许的 V-模的概念 [DLM2].

定义 2.6。 若一个顶点算子代数 V 的可容许 g-扭模范畴是半单的，则称其为 g-有理的 。若 V 是1-有理的，则称其为有理的。

文献 [DLM2] 证明，若 V是有理的，则在同构意义下只有有限多个不可约可容许V-模，并且每个不可约可容许 V-模都是普通的。令 $M^0, M^1, \cdots, M^d$为在同构意义下满足 $M^0 = V$的所有不可约模。则存在 $h_i \in \mathbb{C}$，使得对 $i = 0, \cdots, d$，有

$$M^i = \oplus_{n=0}^{\infty} M^i_{h_i+n}$$

其中 $M^i_{h_i} \neq 0$和 $L(0)|_{M^i_{h_i+n}} = h_i + n, \forall n \in \mathbb{Z}_+$。 h_i称为 M^i的共形权 。记 $M^i(n) = M^i_{h_i+n}$.

设 $M = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda$ 为一个 V-模。 M 的受限对偶定义为 $M' = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M^*_\lambda$，其中 $M^*_\lambda = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_\lambda, \mathbb{C})$ 。 FHL] 中证明了， $M' = (M', Y_{M'})$ 自然地构成一个 V-模，使得

$$\langle Y_{M'}(v,z)f, u\rangle = \left\langle f, Y_M\left(e^{zL(1)}\left(-z^{-2}\right)^{L(0)} v, z^{-1}\right) u\right\rangle,$$

对于 $v \in V, f \in M'$ 和 $u \in M$，且 $(M')' \cong M$。此外，若 M 不可约，则 M' 也不可约。若 V-模 M 满足 $M \cong M'$，则称其为自对偶 。

定义 2.7。 若 V是一个顶点算子代数，则称其为 C_2-余有限的，如果 $V/C_2(V)$ 是有限维的，其中 $C_2(V) = \langle v_{-2}u | v, u \in V\rangle$。

定义 2.8。若 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ 是一个顶点算子代数，则称其为 CFT 型，如果对于负的 n 和 $V_0=\mathbb{C}1$, $V_n=0$ 。

定义 2.9. 设 (V,Y) 是一个顶点算子代数，且 $\left(M^i,Y^i\right)$，$\left(M^j,Y^j\right)$ 和 $\left(M^k,Y^k\right)$ 是三个 V-模。类型为 $\binom{M^k}{M^i\ M^j}$ 的交织算子是一个线性映射

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(\cdot,z):\ M^i&\to Hom\left(M^j,\ M^k\right)\{z\}\\ u&\mapsto\mathcal{Y}(u,z)=\sum_{n\in\mathbb{Q}}u_nz^{-n-1}\end{aligned}$$

满足：

(1) 对任意 $u\in M^i$ 和 $v\in M^j$, $u_nv=0$，当 n 充分 大时；

(2) $\mathcal{Y}(L_{-1}v,\ z)=\left(\frac{d}{dz}\right)\mathcal{Y}(v,z)$ 对于 $v\in M^i$;

(3)（雅可比恒等式）对于任意 $u\in V$，$v\in M^i$,

$$\begin{aligned}&z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y^k(u,z_1)\mathcal{Y}(v,z_2)-z_0^{-1}\delta\left(\frac{-z_2+z_1}{z_0}\right)\mathcal{Y}(v,z_2)Y^j(u,z_1)\\&=z_2^{-1}\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)\mathcal{Y}\left(Y^i(u,z_0)v,z_2\right).\end{aligned}$$

类型为 $\binom{M^k}{M^i\ M^j}$ 的所有交织算子的空间记作 $I_V\binom{M^k}{M^i\ M^j}$。为避免混淆，我们也将其记作 $I^k_{i,j}\cdot$。设 $N^k_{i,\ j}=$维数 $I^k_{i,j}$。这些整数 $N^k_{i,j}$称为融合规则。

设 V^1和 V^2是顶点算子代数。设 M^i，$i=1,2,3$ 是 V^1-模，且 N^i,$i=1,2,3$ 是 V^2-模。根据 [FHL]， $M^i\otimes N^i$，$i=1,2,3$ 是 $V^1\otimes V^2$-模。以下性质见于 [ADL]:

命题 2.10。若 $N^{M^3}_{M^1,M^2}<\infty$ 或 $N^{N^3}_{N^1,N^2}<\infty$, 则

$$N^{M^3\otimes N^3}_{M^1\otimes N^1,M^2\otimes N^2}=N^{M^3}_{M^1,M^2}N^{N^3}_{N^1,N^2}.$$

设 M^1和 M^2是 V-模。有序对 $\left(M^1,M^2\right)$的融合积是一个由 $(M,F(\cdot,z))$ 构成的二元组，其中 M是一个 V-模， $F(\cdot,z)$ 是一个类型为 $\binom{M}{M^1,M^2}$的交织算子，并且满足以下泛性质：对于任意 V-模 W 以及任意类型为 $\binom{W}{M^1,M^2}$ 的交织算子 $I(\cdot,z)$，存在唯一的 V-同态 ϕ，从 M 映射到 W，使得 $I(\cdot,z)=\phi\circ F(\cdot,z)$。由定义可知，若 M^1和 M^2的张量积存在，则它在同构意义下唯一。在这种情况下，我们用 $M^1\boxtimes_V M^2$. 表示该融合积

基本结论是，如果 V 是有理的，则融合积存在。设 M， N 是不可约 V-模，我们将经常考虑融合积

$$M\boxtimes_V N=\sum_W N^W_{M,\ N}W$$

其中， W 遍历不可约 V-模的等价类集合。

定义 2.11。 设 V 是一个简单顶点算子代数。若简单 V-模 M 满足：对任意不可约 V-模 W， $M \boxtimes_V W$ 都存在且也是一个简单 V-模，则称其为简单流 。

以下命题引自 [FHL]:

命题 2.12. 设 V 是一个顶点算子代数， V' 是其受限对偶。对于 u、 v、 $w \in V$和 $t \in V'$，有以下有理函数等式

$$\iota_{12}^{-1} \langle t, Y(u, z_1) Y(v, z_2) w \rangle = \iota_{21}^{-1} \langle t, Y(v, z_2) Y(u, z_1) w \rangle \tag{2}$$

$$\iota_{12}^{-1} \langle t, Y(u, z_1) Y(v, z_2) w \rangle = \left(\iota_{20}^{-1} \langle t, Y(Y(u, z_0) v, z_2) w \rangle \right) |_{z_0 = z_1 - z_2} \tag{3}$$

其中 $\iota_{12}^{-1} f(z_1, z_2)$ 表示解析函数 $f(z_1, z_2)$ 在区域 $|z_1| > |z_2|$ 内的形式幂级数展开。

以下关于 V 上的双线性型的结果引自 [Li2]:

定理 2.13. V 上的不变双线性形式空间与该空间同构

$$(V_0 / L(1) V_1)^* = Hom_{\mathbb{C}}(V_0 / L(1) V_1, \mathbb{C}).$$

2.2 量子伽罗瓦理论

现在我们回顾来自 [DM] 和 [DJX1]的量子伽罗瓦理论和量子维数。设 V 为一个简单顶点算子代数， G 为 V的一个有限忠实自同构群。令 Irr (*G*) 为 G的简单特征 χ 的集合。作为 $\mathbb{C}G$-模， V 的每个齐次空间 V_n 都是有限维的，并且 V 可以分解为分次子空间的直和

$$V = \oplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} V^{\chi},$$

其中 V^{χ} 是 V的子空间， G 在该子空间上的作用由特征 χ给出。以下定理出自 [DM, DLM4]。

定理 2.14. 设 V 是一个简单顶点算子代数，且 G 是 V的一个有限忠实可解自同构群。则有以下结论:

(i) 每个 V^{χ} 都非零;
(ii) 对于 $\chi \in Irr(G)$，每个 V^{χ} 都是如下形式的 G-分次顶点算子代数$\mathbb{C}G \otimes V^G$ 的简单模:

$$V^{\chi} = M_{\chi} \otimes V_{\chi},$$

其中 M_{χ} 是赋予 χ 的简单 $\mathbb{C}G$-模，而 V_{χ} 是一个简单 V^G-模。
(iii) 映射 $M_{\chi} \mapsto V_{\chi}$ 是从简单 $\mathbb{C}G$-模集合到包含于 V 中的（不等价）简单 V^G-模集合的双射。

现在我们回顾 [DJX1]中的量子维数概念。设 V 是一个 CFT 型顶点算子代数， M 是一个 V-模， $M = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} M_{\lambda+n}$ 的形式特征定义为

$$Ch_q M = \mathrm{tr}_q M = \mathrm{tr} q^{L(0) - c/24} = q^{\lambda - c/24} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (\dim M_{\lambda+n}) q^n$$

where λ 是 M的共形权。 M 关于 V 的量子维数定义为:

$$q\dim_V M = \lim_{q\to 1^-} \frac{Ch_q M}{Ch_q V}.$$

以下结果出自 [DJX1]中的定理 6.3:

定理 2.15. 设 V 是一个有理且 C_2-余有限的简单顶点算子代数。假设 V 是g-有理的，并且对于所有 $g \in G$，任意不可约 g-扭曲 V-模的共形权均为正，唯有 V自身例外。那么

$$q\dim_{V^G} V_\chi = \dim W_\chi.$$

为方便起见，从现在起，若顶点算子代数 V 满足以下条件，我们就称其为"良好"： V 是一个 CFT 型的有理且 C_2-余有限的简单顶点算子代数，并且具有 $V \cong V'$。设 M^0、 M^1、 $\cdots$、 M^d是所有互不等价且满足 $M^0 \cong V$的不可约 V-模。相应的共形权 λ_i 满足 $\lambda_i > 0$ ，其中 $0 < i \leq d$。

量子维数的以下性质出自 [DJX1]:

命题 2.16. 设 V 是一个"良好"的顶点算子代数。那么
(i) q维数$_V\left(M^i \boxtimes M^j\right) = q$维数$_V M^i \cdot q$维数$_V M^j, \forall i, j$。*(ii)* V-模 M^i是简单流当且仅当 q维数$_V M^i = 1$。*(iii)* q维数$_V M^i \in \{2\text{余弦}(\pi/n)$ $|n \geq 3\} \cup \{a|2 \leq a < \infty, a\ is\ algebraic\}$.

定义 2.17。 设 V 是一个顶点算子代数，具有有限多个两两不等价的不可约模 $M^0, \cdots, M^d$。 V的整体维数 定义为

$$glob\,(V) = \sum_{i=0}^{d} \left(q\dim_V M^i\right)^2.$$

注 2.18。 设 U 和 V 是"良好"的顶点算子代数， M 是一个 U-模， N 是一个V-模。那么， [ADJR] 的引理 *2.10*给出

$$q\dim_{U\otimes V} M \otimes N = q\dim_U M \cdot q\dim_V N,$$
$$\text{glob}\,(U \otimes V) = \text{glob}\,(U) \cdot \text{glob}\,(V).$$

设 V 是一个顶点算子代数，回忆一下，包含 V的简单顶点算子代数称为 V的扩张 U 。现在我们有如下定理 [ABD, HKL, ADJR]:

定理 2.19。 设 V 是一个"良好"的顶点算子代数。设 U 是 V 的一个简单顶点算子代数扩张。那么 U 也是"良好"的，并且

$$glob\,(V) = glob\,(U) \cdot \left(q\dim_V (U)\right)^2.$$

2.3 Virasoro 顶点算子代数的酉级数

现在我们回顾 [FFK] 中关于 Virasoro代数 幺正极小模型的记号。这些模型由一个复数 α_-^2 参数化，它与 Virasoro代数 的中心荷之间的关系为 $c = 13 - 6\alpha_-^2 - 6\alpha_-^{-2}$其中 $\alpha_-^2 = \frac{p}{p'}$ 且 $|p - p'| = 1$. 不失一般性，我们记作

$p'=p+1$并记$c_p=1-\frac{6}{p(p+1)}$，其中 $p=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$。标签 I表示一对正整数$(i',\ i)$，相应的最高权为

$$h_I=h^{(p)}_{(i',\ i)}=\frac{1}{4}\left(i'^2-1\right)\alpha_-^2-\frac{1}{2}\left(i'i-1\right)+\frac{1}{4}\left(i^2-1\right)\alpha_-^{-2}=\frac{\left(pi'-(p+1)\,i\right)^2-1}{4p\,(p+1)}. \tag{4}$$

对于 $1\leq i'\leq p,\quad 1\leq i\leq p-1$. 我们将这类Virasoro代数的幺正极小模型记为$L\left(c_p,h^{(p)}_{i'\ (,\ i)}\right)$.

注 2.20. 使用上述记号可知，模型 $L\left(\frac{25}{28},0\right)$ 的中心荷对应于参数 $\alpha_-^2=\frac{7}{8}$，其中 $p=7,\ p'=8$。不可约 $L\left(\frac{25}{28},0\right)$-模的最高权为

$$\left\{0,\frac{5}{32},\frac{3}{4},\frac{57}{32},\frac{13}{4},\frac{165}{32},\frac{15}{2},\frac{5}{14},\frac{3}{224},\frac{3}{28},\frac{143}{224},\frac{45}{28},\frac{675}{224},\frac{34}{7},\frac{9}{7},\frac{99}{224},\frac{1}{28},\frac{15}{224},\frac{25}{28},\frac{323}{224},\frac{39}{14}\right\}. \tag{5}$$

特别地，数对 $(1,1)$、$(1,5)$ 和$(1,3)$ 分别对应最高权 0、$\frac{3}{4}$ 和$\frac{9}{7}$。

另请注意，不可约 $L(c_p,\ 0)$-模的融合规则如下 [W]:

定义 2.21。 若整数对的有序三元组 $((i',i)$、(j',j)、$(k',k))$ 满足 $1\leq i',j',k'\leq p+1, 1\leq i,j,k\leq p,\ i'+j'+k'<2(p+1)\quad i+j+k<2p,\ i'<j'+k',\ j'<i'+k', k'<i'+j',\ i<j+k,\ j<i+k,\ k<i+j,$ 且和 $i'+j'+k',\ i+j+k$ 为奇数，则称其为可容许的。

命题 2.22。 $L\,(c_p$、$0)$-模 $L\left(c_p,h^{(p)}_{i'\ (,i)}\right)$，$L\left(c_p,h^{(p)}_{j'\ (,j)}\right)$ 之间的融合规则为

$$L\left(c_p,h^{(p)}_{(i',i)}\right)\boxtimes L\left(c_p,h^{(p)}_{(j',j)}\right)=\sum_{(k',k)}N^{(k',k)}_{(i',i),(j',j)}L\left(c_p,h^{(p)}_{(k',k)}\right),$$

其中 $N\ (k',\ k)\ \ (i',\ i)\ ,\ \ (j',\ j)$ 当且仅当$1((i',i)$，(j',j)，$(k',k))$ 是一个由有序对组成的容许三元组，否则为0 $e.$

2.4 编织矩阵

现在我们回顾四点函数。设 V 是一个 CFT 型的有理且 C_2-余有限的顶点算子代数，并且 $V\cong V'$。设 M^{a_1}，M^{a_2}，M^{a_3}，M^{a_4}是四个不可约的 V-模。根据[H1] 中的引理 4.1，我们知道对于 $u_{a_i}\in M^{a_i}$，

$$\left\langle u_{a_4'},\mathcal{Y}^{a_4}_{a_1,a_5}\left(u_{a_1},z_1\right)\mathcal{Y}^{a_5}_{a_2,a_3}\left(u_{a_2},z_2\right)u_{a_3}\right\rangle,$$

$$\left\langle u_{a_4'},\mathcal{Y}^{a_4}_{a_2,a_6}\left(u_{a_1},z_2\right)\mathcal{Y}^{a_6}_{a_1,a_3}\left(u_{a_1},z_1\right)u_{a_3}\right\rangle$$

分别在 $|z_1|>|z_2|>0$ 和 $|z_2|>|z_1|>0$上解析，并且都可以解析延拓为定义在.....上的多值解析函数

$$R=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2|z_1,z_2\neq 0,z_1\neq z_2\right\}.$$

˜如 [H1]所示，可以将 R 上的多值函数提升为定义在通用覆盖空间 R到 R 上的单值函数。我们使用

$$E\left\langle u_{a_4'}, \mathcal{Y}_{a_1,a_5}^{a_4}\left(u_{a_1}, z_1\right) \mathcal{Y}_{a_2,a_3}^{a_5}\left(u_{a_2}, z_2\right) u_{a_3}\right\rangle$$

and

$$E\left\langle u_{a_4'}, \mathcal{Y}_{a_2,a_6}^{a_4}\left(u_{a_1}, z_2\right) \mathcal{Y}_{a_1,a_3}^{a_6}\left(u_{a_1}, z_1\right) u_{a_3}\right\rangle$$

用来表示那些解析函数。

设 $\left\{\mathcal{Y}_{a',\ b;i}^{c} | i=1, \cdots, N_{a,\ b}^{c}\right\}$ 是 $I_{a,\ b}^{c}$的一组基。根据 [H2],

$$\left\{E\left\langle u_{a_4'}, \mathcal{Y}_{a_1,a_5;i}^{a_4}\left(u_{a_1}, z_1\right) \mathcal{Y}_{a_2,a_3;j}^{a_5}\left(u_{a_2}, z_2\right) u_{a_3}\right\rangle | i=1, \cdots, N_{a_1,a_5}^{a_4}, j=1, \cdots, N_{a_2,a_3}^{a_5}, \forall a_5\right\}$$

是线性　无关集。固定一组交织算子的基。 [KZ, TK] th 中已证明　　at

$$\begin{aligned} & span\left\{E\left\langle u_{a_4'}, \mathcal{Y}_{a_3,\mu;i}^{a_4}\left(u_{a_3}, z_1\right) \mathcal{Y}_{a_2,a_1;j}^{\mu}\left(u_{a_2}, z_2\right) u_{a_1}\right\rangle | i, j, \mu\right\} \\ & = span\left\{E\left\langle u_{a_4'}, \mathcal{Y}_{a_2,\gamma;k}^{a_4}\left(u_{a_2}, z_2\right) \mathcal{Y}_{a_3,a_1;l}^{\gamma}\left(u_{a_3}, z_1\right) u_{a_1}\right\rangle | k, l, \gamma\right\}, \end{aligned}$$

其中 $u_{a_i} \in M^{a_i}$。那么存在 $\left(B_{a_4,\ a_1}^{a_3,a_2}\right)_{\mu}^{i}{}_{,\ j;k\ l,\ ,\ \gamma} \in \mathbb{C}$ 使得

$$\begin{aligned} & E\left\langle u_{a_4'}, \mathcal{Y}_{a_3,\mu;i}^{a_4}\left(u_{a_3}, z_1\right) \mathcal{Y}_{a_2,a_1;j}^{\mu}\left(u_{a_2}, z_2\right) u_{a_1}\right\rangle \\ & = \sum_{k,l,\gamma}\left(B_{a_4,a_1}^{a_3,a_2}\right)_{\mu,\gamma}^{i,j;k,l} E\left\langle u_{a_4'}, \mathcal{Y}_{a_2,\gamma;k}^{a_4}\left(u_{a_2}, z_1\right) \mathcal{Y}_{a_3,a_1;l}^{\gamma}\left(u_{a_3}, z_2\right) u_{a_1}\right\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

（见 [H1]）。 $B^{a_3,\ a_4\ a_1\ .}{}^{a_2}$ 称为编织矩阵。

回顾一下，我们已在第 2.3 节见过 $q=\exp\left(2\pi i\alpha_-^2\right)$, $\alpha_-^2=\frac{p}{p'}$。现在令 $\alpha_+^2=-\frac{p'}{p}$, $x=\exp\left(2\pi i\alpha_+^2\right)$, $y=\exp\left(2\pi i\alpha_-^2\right)$, $[l]=x^{l/2}-x^{-l/2}$, $[l']=y^{l'/2}-y^{-l'/2}$. 。现在固定中心荷 c_p, 将 $L\left(c_p, h_{i'}^{(p)}, i\right)$ 记为（i', i）。设（a', a）、（m', m）、（n', n）、（c', c）、（b', b）、（d', d）为不可约 L（c_p, 0）-模，则屏蔽顶点算子的编织矩阵具有几乎因子化的形式（参见 [FFK]中的（2.19））：

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{B}_{(m',m),(n',n)}^{(a',a),(c',c)}\right)_{(b',b),(d',d)} \\ & = i^{-\left(m'-1\right)(n-1)-\left(n'-1\right)(m-1)}(-1)^{1/2(a-b+c-d)\left(n'+m\right)+1/2\left(a'-b'+c'-d'\right)(n+m)} \\ & \cdot r\left(a', m', n', c'\right)_{b',d'} \cdot r\left(a, m, n, c\right)_{b,d}, \end{aligned} \tag{7}$$

其中， r-矩阵的非零矩阵元为

$$\begin{aligned} r\left(a, 1, n, c\right)_{a,c} &= r\left(a, m, 1, c\right)_{c,a} = 1, \\ r\left(l \pm 2, 2, 2, l\right)_{l\pm1,l\pm1} &= x^{1/4}, \\ r\left(l, 2, 2, l\right)_{l\pm1,l\pm1} &= \mp x^{-1/4\mp l/2}\frac{[1]}{[l]}, \\ r\left(l, 2, 2, l\right)_{l\pm1,l\mp1} &= x^{-1/4}\frac{[l\pm1]}{[l]}, \end{aligned} \tag{8}$$

而其他 r-矩阵则由递归关系给出

$$r\left(a,m+1,n,c\right)_{b,d}=\sum_{d_1\geq 1}r\left(a,2,n,d_1\right)_{a_1,d}\cdot r\left(a_1,m,n,c\right)_{b,d_1},$$
$$r\left(a,m,n+1,c\right)_{b,d}=\sum_{d_1\geq 1}r\left(a,m,2,c_1\right)_{b,d_1}\cdot r\left(d_1,m,n,c\right)_{c_1,d},\tag{9}$$

对于任意一组符合融合规则的 a_1 和 c_1。r' 矩阵由相同公式给出，只需将 $x\to x'$, $[\quad]\to[\quad]'$. 替换为

2.5 酉 Virasoro 顶点算子代数的 GKO 构造

设 e,f 和 h 是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$的生成元，使得

$$[e,f]=h,\ [h,e]=2e,\ [h,f]=-2f.$$

设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$上的标准不变双线性形式，定义为

$$\langle h,h\rangle=2,\ \langle e,f\rangle=1,\ \langle e,e\rangle=\langle f,f\rangle=\langle h,e\rangle=\langle h,f\rangle=0.$$

设 $\hat{}\,\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 是类型为 $A_1^{(1)}$ 的相应仿射代数， $\lambda_0,\ \lambda_1$ 是 $\hat{}\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$的基本权。记

$$\mathcal{L}(m,k)=\mathcal{L}\left((m-k)\,\lambda_0+k\lambda_1\right)$$

$\hat{}\ \mathfrak{sl}_2\left(\mathbb{C}\right)$-模中最高权为 $(m-k)\,\lambda_0+k\lambda_1$的不可约最高权模。FZ] 证明了，对于 $m\in\mathbb{Z}_+$， $\mathcal{L}($ $m,0)$具有自然的顶点算子代数结构。 $\mathcal{L}(m,0)$的 Virasoro向量 ω^m 由下式给出

$$\omega^m=\frac{1}{2\left(m+2\right)}\left(\frac{1}{2}h_{-1}h+e_{-1}f+f_{-1}e\right)$$

中心荷为 $\frac{3m}{m+2}$。令 $m\in\mathbb{Z}_+$，则 $\mathcal{L}\left(m,\ 0\right)$ 是一个有理顶点算子代数，并且

$$\left\{\mathcal{L}\left(m,\ k\right)|k=0,1,\cdots,m\right\}$$

是所有不可约 $\mathcal{L}(m,\ 0)$-模的集合。此外，融合规则由下式给出

$$\mathcal{L}\left(m,j\right)\boxtimes\mathcal{L}\left(m,k\right)=\sum_{i=\max\{0,j+k-m\}}^{\min\{j,k\}}\mathcal{L}\left(m,j+k-2i\right).$$

设 $\mathcal{L}\left(m,0\right)_1$ 是 $\mathcal{L}(m,0)$ 的权1子空间。那么，在 $[a,b]=a_0b$、 $\forall a$、 $b\in\mathcal{L}(m,0)$ 下， $\mathcal{L}(m,0)_1$ 具有与 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 同构的李代数结构。设 h^m、 e^m、 f^m 是 $\mathcal{L}(m,0)_1$ 中 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的生成元。于是， h^{m+1}: $=h^1\otimes 1+1\otimes h^m$、 $e^{m+1}:=e^1\otimes 1+1\otimes e^m$ 以及 $f^{m+1}:=f^1\otimes 1+1\otimes f^m$ 在 $\mathcal{L}\left(m,1\right)\otimes\mathcal{L}(m,0)$ 中生成一个与 $\mathcal{L}\left(m+1,0\right)$ 同构的顶点算子子代数。文献 [DL] 和 [KR] 已证明，Ω^m : $=\omega^1\otimes 1+1\otimes\omega^m-\omega^{m+1}$ 也给出了一个中心荷为 $c_{m+2}=1-6/(m+2)$（$m+3$）的 Virasoro向量。此外， ω^{m+1} 与 Ω^m 彼此可交换，并且 Ω^m 生成一个简单的 Virasoro顶点算子代数 $L\left(c_{m+2},0\right)$。因此， $\mathcal{L}\left(1,0\right)\otimes\mathcal{L}\left(m,0\right)$ 包含一个与 $L(c_{m+2},0)\otimes\mathcal{L}\left(m+1,0\right)$ 同构的顶点算子子代数。注意，两者

$L\left(c_{m+2},\ 0\right)$ 和 $\mathcal{L}(m+1,\ 0)$ 都是有理的，并且每个 $\mathcal{L}(1,\ 0)\otimes\mathcal{L}(m,\ 0)$-模都可以分解为不可约的 $L\left(c_{m+2},\ 0\right)\otimes\mathcal{L}(m+1,\ 0)$-子模。我们有如下 GKO 分解 [GKO]:

$$\mathcal{L}(1,\epsilon)\otimes\mathcal{L}(m,n)=\bigoplus_{0\leq s\leq m+3,s\equiv n+\epsilon \bmod 2} L\left(c_{m+2},h^{(m+2)}_{(s+1,n+1)}\right)\otimes\mathcal{L}(m+1,s) \tag{10}$$

其中 $\epsilon=0,\ 1$ 和 $0\leq n\leq m$。这就是酉Virasoro顶点算子代数的 GKO 构造。

2.6 6A代数的结构

$6A$-代数 $\mathcal{U}_{6A}$ 是一个月光型顶点算子代数，由两个内积为 $5/2^{10}$.的伊辛向量生成

若向量 $v\in V_2$ 满足 $v_1v=2v$ 和$v_3v=\frac{c_v}{2}\mathbf{1}$，则称其为中心荷为 c_v 的Virasoro向量。于是，算子 $L_n^v\coloneqq v_{n+1},\ \ n\in\mathbb{Z}$满足Virasoro交换关系

$$[L_m^v,\ L_n^v]=(m-n)\,L_{m+n}^v+\delta_{m+n,\ 0}\frac{m^3-m}{12}c_v$$

对于 $m,\ \ n\in\mathbb{Z}.$ ，中心荷为 $1/2$ 的Virasoro向量 $v\in V_2$ 若满足 v生成Virasoro顶点算子代数 $L(1/2,\ 0)$，则称其为伊辛向量 。

文献 [C] 表明，代数 $V_2^\natural$中由两个伊辛向量 e 和 f 生成的子代数的结构仅取决于 $\tau_e\tau_f$的共轭类，而内积 $\langle e,\ f\rangle$由下表给出:

$\langle\tau_e\tau_f\rangle^{\mathbb{M}}$	$1A$	$2A$	$3A$	$4A$	$5A$	$6A$	$3C$	$4B$	$2B$
$\langle e,f\rangle$	$1/4$	$1/2^5$	$13/2^{10}$	$1/2^7$	$3/2^9$	$5/2^{10}$	$1/2^8$	$1/2^8$	0

在 [LYY]中，通过从扩展的 E_8-图中去掉一个节点，构造了与该图相关的某个 $V_{\sqrt{2}E_8}$ 余集子代数。在每种情况下，该余集子代数都包含若干个Ising向量，并由两个内积等于上表所给数值的Ising向量生成。特别地，构造了对应于$6A$ 情形的余集子代数 $\mathcal{U}_{6A}$ ，即内积为 $\frac{5}{2^{10}}$. 的情形。令 $\mathcal{V}$ 为 $3A$-代数，也就是由两个Ising向量生成的顶点算子代数,__其中它们的 τ-对合生成 S_3 ，且内积为$\frac{13}{2^{10}}$。 $\mathcal{V}$ 的候选对象由 [M] 给出，并且在 [SY] 中证明，这些候选对象中只有一个实际存在，且其上存在唯一的顶点算子代数结构。

现在我们回顾 [SY] 中关于 $3A$-代数 $\mathcal{V}$ 的以下结果。

引理2.23。 $3A$-代数 $\mathcal{V}$ 是有理的。

引理2.24。 所有不可约的 $\mathcal{V}$模如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}=\mathcal{V}(0)=&\left(\left(L\left(\frac{4}{5},0\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},3\right)\right)\otimes\left(L\left(\frac{6}{7},0\right)\oplus L\left(\frac{6}{7},5\right)\right)\right)\\&\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)^+\otimes L\left(\frac{6}{7},\frac{4}{3}\right)^+\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)^-\otimes L\left(\frac{6}{7},\frac{4}{3}\right)^-,\end{aligned}$$

$$\mathcal{V}\left(\frac{1}{7}\right)=\left(L\left(\frac{4}{5},0\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},3\right)\right)\otimes\left((L\left(\frac{6}{7},\frac{1}{7}\right)\oplus L\left(\frac{6}{7},\frac{22}{7}\right)\right)$$
$$\oplus L(\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)^{+}\otimes L\left(\frac{6}{7},\frac{10}{21}\right)^{+}\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)^{-}\otimes L\left(\frac{6}{7},\frac{10}{21}\right)^{-},$$

$$\mathcal{V}\left(\frac{5}{7}\right)=\left(L\left(\frac{4}{5},0\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},3\right)\right)\otimes\left(L\left(\frac{6}{7},\frac{5}{7}\right)\oplus L\left(\frac{6}{7},\frac{12}{7}\right)\right)$$
$$\oplus L(\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)^{+}\otimes L\left(\frac{6}{7},\frac{1}{21}\right)^{+}\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)^{-}\otimes L\left(\frac{6}{7},\frac{1}{21}\right)^{-},$$

$$\mathcal{V}\left(\frac{2}{5}\right)=\left(L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)\right)\otimes\left(L\left(\frac{6}{7},0\right)\oplus L\left(\frac{6}{7},5\right)\right)$$
$$\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)^{+}\otimes L(\left(\frac{6}{7},\frac{4}{3}\right)^{+}\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)^{-}\otimes L\left(\frac{6}{7},\frac{4}{3}\right)^{-},$$

$$\mathcal{V}\left(\frac{19}{35}\right)=\left(L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)\right)\otimes\left(L\left(\frac{6}{7},\frac{1}{7}\right)\oplus L\left(\frac{6}{7},\frac{22}{7}\right)\right)$$
$$\oplus L(\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)^{+}\otimes L(\left(\frac{6}{7},\frac{10}{21}\right)^{+}\oplus L(\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)^{-}\otimes L(\left(\frac{6}{7},\frac{10}{21}\right)^{-},$$

$$\mathcal{V}\left(\frac{39}{35}\right)=\left(L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)\right)\otimes\left(L\left(\frac{6}{7},\frac{5}{7}\right)\oplus L\left(\frac{6}{7},\frac{12}{7}\right)\right)$$
$$\oplus L(\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)^{+}\otimes L(\left(\frac{6}{7},\frac{1}{21}\right)^{+}\oplus L(\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)^{-}\otimes L\left(\frac{6}{7},\frac{1}{21}\right)^{-}.$$

在 [LYY] 中已证明， $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$以及作为 $\mathcal{V}\otimes L\left(\frac{25}{28},0\right)$的模，

$$\mathcal{U}_{6A}\cong\mathcal{V}\otimes L\left(\frac{25}{28},0\right)\oplus\mathcal{V}\left(\frac{1}{7}\right)\otimes L\left(\frac{25}{28},\frac{34}{7}\right)\oplus\mathcal{V}\left(\frac{5}{7}\right)\otimes L\left(\frac{25}{28},\frac{9}{7}\right).$$

从这里开始，我们记

$$P_1=\mathcal{V},\ P_2=\mathcal{V}\left(\frac{1}{7}\right),\ P_3=\mathcal{V}\left(\frac{5}{7}\right),$$
$$Q_1=L\left(\frac{25}{28},0\right),\ Q_2=L\left(\frac{25}{28},\frac{34}{7}\right),\ Q_3=L\left(\frac{25}{28},\frac{9}{7}\right),\tag{11}$$

以及 $U^i=P_i\otimes Q_i$, $i=1,\ 2,\ 3$。则

$$\mathcal{U}_{6A}\cong P_1\otimes Q_1\oplus P_2\otimes Q_2\oplus P_3\otimes Q_3=U^1\oplus U^2\oplus U^3.$$

注 2.25. 由于 $\mathcal{V}\otimes L\left(\frac{25}{28},0\right)$ 是一个有理且 C_2-余有限的顶点算子代数，因此不难根据 [ABD,HKL]。看出， $\mathcal{U}$ 也是有理且 C_2-余有限的。

注 2.26. 由于根据定理 *2.13*， $\mathcal{U}_1=0$ 且维数$\mathcal{U}_0=1$ ，因此$\mathcal{U}$ 上存在唯一的双线性型，从而 $\mathcal{U}'\cong\mathcal{U}$。不失一般性，我们可以将 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{U}'$等同。

现在我们回顾 [DJY]中的以下结果。

定理 2.27. $\mathbb{C}$ 上的 $6A$-代数 $\mathcal{U}_{6A}$ 的顶点算子代数结构是唯一的。

For 为简单起见，本节中我们用 $[h_1,\ h_2]$ 表示模 $\mathcal{V}(h_1)\otimes L(\frac{25}{28},\ h_2)$— n.

引理 2.28. 我们有以下分解:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(3,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\oplus\mathcal{L}(3,3)\otimes\mathcal{L}(1,1)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\\
&\cong\left\{[0,\ 0]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{34}{7}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{9}{7}\right]\right\}\otimes\mathcal{L}(6,0)\\
&\oplus\left\{\left[0,\frac{3}{4}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{1}{28}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{45}{28}\right]\right\}\otimes\mathcal{L}(6,2)\\
&\oplus\left\{\left[0,\frac{13}{4}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{3}{28}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{15}{28}\right]\right\}\otimes\mathcal{L}(6,4)\\
&\oplus\left\{\left[0,\frac{15}{2}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{5}{14}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{39}{14}\right]\right\}\otimes\mathcal{L}(6,6)
\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{L}(3,\ 0)\otimes\mathcal{L}(1,\ 0)\otimes\mathcal{L}(1,\ 0)\otimes\mathcal{L}(1,\ 0)\oplus\mathcal{L}(3,\ 3)\otimes\mathcal{L}(1,\ 1)\otimes\mathcal{L}(1,\ 0)\otimes\mathcal{L}(1,\ 0)$和 V_L 包含一个同构于以下代数的顶点算子子代数

$$[0,\ 0]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{34}{7}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{9}{7}\right]$$

根据 $\mathcal{U}_{6A}$的唯一性，它与 $\mathcal{U}_{6A}$ 同构。

引理 2.29. 以下列表给出了 *14* 个不可约 $\mathcal{U}_{6A}$-模。

$$\begin{aligned}
M^0&=[0,0]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{34}{7}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{9}{7}\right], & M^1&=\left[0,\frac{3}{4}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{45}{28}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{1}{28}\right],\\
M^2&=\left[0,\frac{13}{4}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{3}{28}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{15}{28}\right], & M^3&=\left[0,\frac{15}{2}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{5}{14}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{39}{14}\right],\\
M^4&=\left[0,\frac{165}{32}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{3}{224}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{323}{224}\right], & M^5&=\left[0,\frac{5}{32}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{675}{224}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{99}{224}\right],\\
M^6&=\left[0,\frac{57}{32}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{143}{224}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{15}{224}\right], & M^7&=\left[\frac{2}{5},0\right]\oplus\left[\frac{19}{35},\frac{34}{7}\right]\oplus\left[\frac{39}{35},\frac{9}{7}\right],\\
M^8&=\left[\frac{2}{5},\frac{3}{4}\right]\oplus\left[\frac{19}{35},\frac{45}{28}\right]\oplus\left[\frac{39}{35},\frac{1}{28}\right], & M^9&=\left[\frac{2}{5},\frac{13}{4}\right]\oplus\left[\frac{19}{35},\frac{3}{28}\right]\oplus\left[\frac{39}{35},\frac{15}{28}\right],\\
M^{10}&=\left[\frac{2}{5},\frac{15}{2}\right]\oplus\left[\frac{19}{35},\frac{5}{14}\right]\oplus\left[\frac{39}{35},\frac{39}{14}\right], & M^{11}&=\left[\frac{2}{5},\frac{5}{32}\right]\oplus\left[\frac{19}{35},\frac{675}{224}\right]\oplus\left[\frac{39}{35},\frac{99}{224}\right],\\
M^{12}&=\left[\frac{2}{5},\frac{57}{32}\right]\oplus\left[\frac{19}{35},\frac{143}{224}\right]\oplus\left[\frac{39}{35},\frac{15}{224}\right], & M^{13}&=\left[\frac{2}{5},\frac{165}{32}\right]\oplus\left[\frac{19}{35},\frac{3}{224}\right]\oplus\left[\frac{39}{35},\frac{323}{224}\right].
\end{aligned}$$

2.7 有理顶点算子代数的镜像扩张

如果任意弱 V-模 M 都是不可约 V-模的直和，则称顶点算子代数 V 是正则 的。

现在假设 V 是满足以下条件的顶点算子代数 ns:
(1) V 是简单的 CFT 型顶点算子代数，且是自对偶的；(2) V 是正则的。以下结果由 [ABD], [Li1]得到。

定理 2.30. 设 V 是一个 CFT 型顶点算子代数。当且仅当 V 是有理的且是 V-余有限时， V 才是正则的。

以下结果已在 [FHL], [DMZ] 以及 [ABD]中证明。

定理 2.31. 设 V^1、 $\cdots$、 V^p 为顶点算子代数。若 V^1、 $\cdots$、 V^p 是有理的，则$V^1\otimes\cdots\otimes V^p$是有理的，且任意不可约的 $V^1\otimes\cdots\otimes V^p$-模都是张量积 $M^1\otimes\cdots\otimes M^p$，其中 M^1、 $\cdots$、 M^p分别是顶点算子代数 V^1、 $\cdots$、 V^p的某些不可约模。若 V^1、 $\cdots$、 V^p 是 C_2-余有限的，则 $V^1\otimes\cdots\otimes V^p$ 是 C_2-余有限的。特别地，若V^1、 $\cdots$、 V^p 是满足条件(1) 和(2)的顶点算子代数，则 $V^1\otimes\cdots\otimes V^p$ 满足条件(1)和(2)。

我们使用 [Lin] 中的以下定理来证明许多重要结果。

设 V^1、 V^2 是满足条件 (1) 和 (2) 的顶点算子代数。分别将 V^1、 V^2 的模范畴记为 $\mathcal{C}_{V^1}$、 $\mathcal{C}_{V^2}$。若 V 是 $V^1\otimes V^2$ 的扩张顶点算子代数，则由 [FHL], [DMZ] 和 [ABD], 可知， $V^1\otimes V^2$ 是有理的，且 V 具有如下 $V^1\otimes V^2$- 模分解:

$$V=\oplus_{i\in I,j\in J}Z_{i,j}M^i\otimes N^j,$$

其中 $Z_{i,\ j}$、($i\in I,\ j\in J$) 是非负整数，而 $\{M^i|i\in I\}$（分别为 $\{N^j|j\in J\}$）是两两不等价的不可约 V^1-模（分别为 V^2-模），满足 $Z_{i,\ j}\neq 0$，其中某个 ($i,\ j$) 满足 $\in I\times J$。下文假设 V 是 $V^1\otimes V^2$ 的扩张顶点算子代数，且 V 是简单、自对偶的，并且当且仅当 $N^j=V^2$（分别为 $M^i=V^1$）时，$\hom_{V^1\otimes V^2}(V^1\otimes N^j,\ V)=\mathbb{C}$（分别为 $\hom_{V^1\otimes V^2}(M^i\otimes V^2,\ V)=\mathbb{C}$）。于是有

定理 2.32。 *(i)* $Z_{i,\ j}=1$ 若 $Z_{i,\ j}\neq 0$。此外，这会导出一个双射 τ，从 I 到 J，使得$\tau(i)=j$ 当且仅当 $Z_{i,\ j}=1$。*(ii)* 集合 $\{M^i|i\in I\}$(分别为 $\{N^j|j\in J\}$) 在范畴 $\mathcal{C}_{V^1}$(分别为$\mathcal{C}_{V^2}$)的张量积下封闭。

(iii) 对任意 $i_1,i_2,i_3\in I$, $N^{M^{i_3}}_{M^{i_1},\ M^{i_2}}=N^{(N^{\tau(i_3)}}_{)'(N^{\tau(i_1)})',\ (N^{\tau(i_2)})'}$。

3 U^i_k 和 $\{\mathcal{U}_k\}$的构造

设 $\mathcal{U}_0=\mathcal{V}$ 为 $3A$代数且 $\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_{6\mathrm{A}}$。根据 GKO 构造和引理（2.28），我们可以写成

$$(\mathcal{L}(3,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}(3,3)\otimes\mathcal{L}(1,1)\otimes\mathcal{L}(1,0))\otimes\mathcal{L}(1,0)\cong\bigoplus_{i=0,\mathrm{even}}^{6}\mathcal{U}_{1,i}\otimes\mathcal{L}(6,i),$$

其中 $\mathcal{U}_{1,\ i}$ 由 $\mathcal{L}(6,\ i)$ 前面的直和项定义；特别地，$\mathcal{U}_{1,\ 0}=\mathcal{U}_1$ 是 $\mathcal{L}(6,\ 0)$ 的中心化子。

例3.1。引理（*2.28*）表明

$$\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_{1,0}=U_0^1\oplus U_0^3\oplus U_0^5=\mathcal{V}\otimes L(\frac{25}{28},0)\oplus\mathcal{V}(\frac{5}{7})\otimes L(\frac{25}{28},\frac{9}{7})\oplus\mathcal{V}(\frac{1}{7})\otimes L(\frac{25}{28},\frac{34}{7}),$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{1,2}&=\left[0,\frac{3}{4}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{1}{28}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{45}{28}\right],\\ \mathcal{U}_{1,4}&=\left[0,\frac{13}{4}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{3}{28}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{15}{28}\right],\\ \mathcal{U}_{1,6}&=\left[0,\frac{15}{2}\right]\oplus\left[\frac{1}{7},\frac{5}{14}\right]\oplus\left[\frac{5}{7},\frac{39}{14}\right].\end{aligned}$$

对于 $k\geq 2$、$\mathcal{U}_k=\mathcal{U}_{k,\ 0}$，$\mathcal{L}(k+5,\ 0)$ 的中心化子顶点算子代数在 GKO 构造中定义了 $k\geq 2$、$\mathcal{U}_k=\mathcal{U}_{k,\ 0}$，其模 $\mathcal{U}_{k,\ i}$ 由与 $\mathcal{L}(k+5,\ i)$ 配对的直和项定义。也就是说，我们将 GKO 构造写为

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}(3,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}(3,3)\otimes\mathcal{L}(1,1)\otimes\mathcal{L}(1,0))\otimes\mathcal{L}(1,0)^{\otimes k}\\ \cong&\bigoplus_i\mathcal{U}_{k,i}\otimes\mathcal{L}(k+5,i).\end{aligned}$$

为简便起见，对于奇数 i，我们定义 $[i-1,h]_k:=\mathcal{U}_{k,\ i-1}\otimes L(c_{k+7},\ h)$。

具体而言，我们有

$$\mathcal{U}_{k,0}=\bigoplus_i U_{k-1}^i$$

其中

$$U_k^i=\left[i-1,h_{(1,i)}^{(k+7)}\right]_k=\mathcal{U}_{k,i-1}\otimes L\left(c_{k+7},h_{(1,i)}^{(k+7)}\right).$$

例3.2. 我们给出 $\mathcal{U}_2$ 的精确构造。取 $\mathcal{L}(7,0)$ 的中心化子，我们得到$L(\frac{11}{12},0)$、$L(\frac{11}{12},\frac{5}{4})$、$L(\frac{11}{12},\frac{19}{4})$和 $L(\frac{11}{12},\frac{21}{2})$，其中 $(m,n)=(6,0)$、$(6,2)$、$(6,4)$和 $(6,6)$。与引理（*2.28*）类似，我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(3,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\\ &\oplus\mathcal{L}(3,3)\otimes\mathcal{L}(1,1)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\\ \cong&\left\{[0,0]_1\oplus\left[2,\frac{5}{4}\right]_1\oplus\left[4,\frac{19}{4}\right]_1\oplus\left[6,\frac{21}{2}\right]_1\right\}\otimes\mathcal{L}(7,0)\\ &\oplus\left\{\left[0,\frac{7}{9}\right]_1\oplus\left[2,\frac{1}{36}\right]_1\oplus\left[4,\frac{55}{36}\right]_1\oplus\left[6,\frac{95}{18}\right]_1\right\}\otimes\mathcal{L}(7,2)\\ &\oplus\left\{\left[0,\frac{10}{3}\right]_1\oplus\left[2,\frac{7}{12}\right]_1\oplus\left[4,\frac{1}{12}\right]_1\oplus\left[6,\frac{11}{6}\right]_1\right\}\otimes\mathcal{L}(7,4)\\ &\oplus\left\{\left[0,\frac{23}{3}\right]_1\oplus\left[2,\frac{35}{12}\right]_1\oplus\left[4,\frac{5}{12}\right]_1\oplus\left[6,\frac{1}{6}\right]_1\right\}\otimes\mathcal{L}(7,6).\end{aligned}$$

So

$$U_1^i = \left[i-1, h_{(1,i)}^{(8)}\right]_1 = \mathcal{U}_{1,i-1} \otimes L\left(\frac{11}{12}, h_{(1,i)}^{(8)}\right)$$

并且我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_2 =& \mathcal{U}_{2,0} = U_1^1 \oplus U_1^3 \oplus U_1^5 \oplus U_1^7 \\
=& [0,0]_1 \oplus \left[2, \frac{5}{4}\right]_1 \oplus \left[4, \frac{19}{4}\right]_1 \oplus \left[6, \frac{21}{2}\right]_1, \\
\mathcal{U}_{2,2} =& \left[0, \frac{7}{9}\right]_1 \oplus \left[2, \frac{1}{36}\right]_1 \oplus \left[4, \frac{55}{36}\right]_1 \oplus \left[6, \frac{95}{18}\right]_1, \\
\mathcal{U}_{2,4} =& \left[0, \frac{10}{3}\right]_1 \oplus \left[2, \frac{7}{12}\right]_1 \oplus \left[4, \frac{1}{12}\right]_1 \oplus \left[6, \frac{11}{6}\right]_1, \\
\mathcal{U}_{2,6} =& \left[0, \frac{23}{3}\right]_1 \oplus \left[2, \frac{35}{12}\right]_1 \oplus \left[4, \frac{5}{12}\right]_1 \oplus \left[6, \frac{1}{6}\right]_1.
\end{aligned}$$

由定理（2.27）可知， $\mathcal{U}_1$ 具有唯一的顶点算子代数结构，且满足条件（1）和（2）。对于 $k \geq 2$，假设 $\mathcal{U}_{k-1}$ 具有唯一的顶点算子代数结构，且满足条件（1）和（2）。我们将证明， $\mathcal{U}_k$ 上存在唯一满足这些条件的顶点算子代数结构。

注记3.3。 除非另有说明，从现在起，我们分别用 $\mathcal{U}$、 P^i、 Q^i和 U^i 简写 $\mathcal{U}_k$、 $\mathcal{U}_{k-1,i}$、 $L\left(c_{k+7}, h^{(k+7)}{}_{(,)}^{1\ i}\right)$和 U_{k-1}^i。

若不会引起歧义，我们将用 u^a，或简称 a，表示模 U^a中的元素。$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$我们用 $N, B, \mathcal{Y}$（以及 $N, B, \mathcal{Y}$）分别表示P^i （以及 Q^i）的融合规则、编织矩阵和交织算子基。

$\tilde{}$**定理3.4**。$N_{b,\ c}^a = N_{b,\ c}^a$。

证明。 回顾定理（2.32）中的记号。令 $M^i = P^{i/2}$、 $N^{i'} = Q^{2i-1}$、 $V_1 = \bigoplus_i M^i$、 $V_2 = \bigoplus_i N^i$、 $V = \mathcal{U} = \bigoplus_i P^i \otimes Q^i$。由于 $Q^{i'} = Q^i$，我们有 $\tau = \mathrm{Id}$，因此 $N_{b,\ c}^a = \tilde{N}_{b,\ c}^a$。 □

由此定理， P^i 和 Q^i 具有相同的融合规则。固定基 $\mathcal{Y}_{b,\ c}^a$ 和$\tilde{\mathcal{Y}}_{b,\ c}^a$，则 $\mathcal{I}_{b,\ c}^a = \mathcal{Y}_{b,\ c}^a \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{b,\ c}^a$ 是 $I_{U^1}\binom{U^a}{U^b\ U^c}$的一组基。因此，存在常数 $\lambda_{b,\ c}^a$ 使得

$$Y(b \otimes \tilde{b}, z) = \sum_{c,a} \lambda_{b,c}^a \mathcal{I}_{b,c}^a (b \otimes \tilde{b}, z) = \sum_{c,a} \lambda_{b,c}^a \mathcal{Y}_{b,c}^a (b, z) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{b,c}^a (\tilde{b}, z).$$

我们将在下一节中证明，对于所有与融合规则相容的 a， b，，$_c \neq 0$ c。

4 $\lambda_{i,j}^k \neq 0$

当两个常数 λ 和 μ 要么都非零，要么都为零时，我们将这种关系记作$\lambda \sim \mu$。本节的目标是证明，对于所有与融合规则相容的 i, j, k， $\lambda_{i,j}^k \sim 1$ 成立；也就是说，若 $N_{i,j}^k = 1$，则 $\lambda_{i,j}^k \neq 0$ 。

我们将元组 (i, j, k, l) 记为

$$\left\langle u^{i'}, Y(u^j, z_1) Y(u^k, z_2) u^l \right\rangle,$$

并将命题 (2.12) 写作 $(i,j,k,l)\ \sim(i,k,j,l)$。

请注意，这两个 $\sim$ 含义不同，我们可以根据上下文推断出正确的含义。

4.1 基本结果

我们将 $e_{i\,j}$ $\mathcal{Y}^a_{c\,i}\cdot z_2\ \mathcal{Y}^i_{b\,d}\cdot z_1\ \otimes\tilde{\mathcal{Y}}^a_{c\,j}\cdot z_2\ \tilde{\mathcal{Y}}^j_{b\,d}\cdot z_1$ Y $\{e_{i,j}\ \ i\ j=$, 用于, (,), (,) $1\ \ldots$, (,) , (,)。分解到基: , , , $N\}$，通过直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', Y(b\otimes\tilde{b},z_1)Y(c\otimes\tilde{c},z_2)d\otimes\tilde{d}\right\rangle\\
=&E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', \sum_{\beta}\lambda^a_{b,\beta}\lambda^{\beta}_{c,d}\mathcal{Y}^a_{b,\beta}\otimes\tilde{\mathcal{Y}}^a_{b,\beta}(b\otimes\tilde{b},z_1)\mathcal{Y}^{\beta}_{c,d}\otimes\tilde{\mathcal{Y}}^{\beta}_{c,d}(c\otimes\tilde{c},z_2)d\otimes\tilde{d}\right\rangle\\
=&E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', \sum_{\beta}\lambda^a_{b,\beta}\lambda^{\beta}_{c,d}\mathcal{Y}^a_{b,\beta}(b,z_1)\mathcal{Y}^{\beta}_{c,d}(c,z_2)d\otimes\tilde{\mathcal{Y}}^a_{b,\beta}(\tilde{b},z_1)\tilde{\mathcal{Y}}^{\beta}_{c,d}(\tilde{c},z_2)\tilde{d}\right\rangle\\
=&E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', \sum_{\beta}\lambda^a_{b,\beta}\lambda^{\beta}_{c,d}\sum_{\gamma_1}B_{\beta,\gamma_1}\mathcal{Y}^a_{c,\gamma_1}(c,z_2)\mathcal{Y}^{\gamma_1}_{b,d}(b,z_1)d\otimes\sum_{\gamma_2}\tilde{B}_{\beta,\gamma_2}\tilde{\mathcal{Y}}^a_{c,\gamma_2}(\tilde{c},z_2)\tilde{\mathcal{Y}}^{\gamma_2}_{b,d}(b,z_1)\tilde{d}\right\rangle\\
=&E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', \sum_{\beta,\gamma_1,\gamma_2}\lambda^a_{b,\beta}\lambda^{\beta}_{c,d}B_{\beta,\gamma_1}\tilde{B}_{\beta,\gamma_2}e_{\gamma_1,\gamma_2}d\otimes\tilde{d}\right\rangle
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', Y(c\otimes\tilde{c},z_2)Y(b\otimes\tilde{b},z_1)d\otimes\tilde{d}\right\rangle\\
=&E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', \sum_{\mu}\lambda^a_{c,\mu}\lambda^{\mu}_{b,d}\mathcal{Y}^a_{c,\mu}(c,z_2)\mathcal{Y}^{\mu}_{b,d}(b,z_1)d\otimes\tilde{\mathcal{Y}}^a_{c,\mu}(\tilde{c},z_2)\tilde{\mathcal{Y}}^{\mu}_{b,d}(\tilde{b},z_1)\tilde{d}\right\rangle\\
=&E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', \sum_{\mu}\lambda^a_{c,\mu}\lambda^{\mu}_{b,d}e_{\mu,\mu}d\otimes\tilde{d}\right\rangle,
\end{aligned}
$$

所有与融合规则相容的 β，γ_1，γ_2，μ。

注 4.1。 请注意，*(6)* 中编织矩阵的元素记作 $\left(B^{a_3,a_2}_{a_4,a_1}\right)^i_{,\ j;k\ l\ ,,}$。本文中， i、 j、 k、 $l=1$ 由融合规则确定，而 a_1、 a_2、 a_3、 a_4 总是可以根据上下文推断出来。$^{\mu\ \gamma}$ 因此，我们可以将编织矩阵中的元素简写为 $B_{\mu,\ \gamma}$。

我们不再关注元素，而是写出整个编织矩阵。我们需要根据元素在矩阵中的位置来确定它们，也需要根据相应的模来确定这些元素。

为明确记号，我们用 $B_{i,j}$ 表示矩阵中的(i,j) 元素，并用 B_{U^i,U^j} 或$B_{\mu,\gamma}$ 表示其在编织矩阵中的位置由 *(6)* 确定的元素。

引理 4.2. 关系式$(a,b,c,d)\ \sim(a,c,b,d)$ 可写为

$$
B^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}\left(\lambda^a_{b,\beta_1}\lambda^{\beta_1}_{c,d},\ldots,\lambda^a_{b,\beta_N}\lambda^{\beta_N}_{c,d}\right)\tilde{B}=\operatorname{diag}\left(\lambda^a_{c,\mu_1}\lambda^{\mu_1}_{b,d},\ldots,\lambda^a_{c,\mu_N}\lambda^{\mu_N}_{b,d}\right). \tag{12}
$$

其中 $B=$ （$B_{i,\ j}$）、 $\tilde{B}=\left(\tilde{B}_{i,j}\right)$ 和 μ_i,β_j （$i,j=1,\ldots,N$）都是与融合规则相容的模。

证明。令 $C=\mathrm{diag}\left(\lambda_{b,\beta_1}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_1},\ldots,\lambda_{b,\beta_N}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_N}\right)$，$D=\mathrm{diag}\left(\lambda_{c,\mu_1}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_1},\ldots,\lambda_{c,\mu_N}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_N}\right)$，且 $A=B^{\mathrm{T}}C\tilde{B}$。现在我们检查 $A_{i,\ j}=D_{i,\ j}$。通过直接计算可知

$$A_{i,j}=\sum_{n,m=1}^{N}B_{n,i}C_{n,m}\tilde{B}_{m,j}=\sum_{k=1}^{N}B_{k,i}C_{k,k}\tilde{B}_{k,j}.$$

考虑（$a,\ b,\ c,\ d$）$\sim$（$a,\ c,\ b,\ d$）。利用四点函数的线性无关性，我们得到

$$\sum_{\beta,\gamma_1,\gamma_2}\lambda_{b,\beta}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta}B_{\beta,\gamma_1}\tilde{B}_{\beta,\gamma_2}e_{\gamma_1,\gamma_2}=\sum_{\mu}\lambda_{c,\mu}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu}e_{\mu,\mu}.$$

其左端仅当 $\gamma_1=\gamma_2=\mu$ 时非零。由于 $e_{i,\ j}$ 是基，因此我们有

$$\sum_{\beta}\lambda_{b,\beta}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta}B_{\beta,\mu_i}\tilde{B}_{\beta,\mu_i}=\lambda_{c,\mu_i}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_i}\tag{13}$$

对于所有与融合规则相容的可能的 μ_i。

因此，当 $i\neq j$ 时，我们得到 $A_{i,\ j}=0=D_{i,\ j}$。并且我们有

$$D_{i,i}=\lambda_{c,\mu_i}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_i}=\sum_{\beta}\lambda_{b,\beta}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta}B_{\beta,\mu_i}\tilde{B}_{\beta,\mu_i}=\sum_{k=1}^{N}C_{k,k}B_{k,i}\tilde{B}_{k,i}=A_{i,i},$$

从而完成证明。 □

注4.3。 我们不使用（*13*），而是使用定理*3.9*中的方程组。

由前一个引理可得

$$\left(\lambda_{c,\mu_1}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_1},\ldots,\lambda_{c,\mu_N}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_N}\right)=\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_{b,\beta_j}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_j}B_{\beta_j,\mu_1}\tilde{B}_{\beta_j,\mu_1},\ldots,\sum_{j=1}^{N}\lambda_{b,\beta_j}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_j}B_{\beta_j,\mu_N}\tilde{B}_{\beta_j,\mu_N}\right)\tag{14}$$

˜由于我们不需要考虑 μ_i 和 β_j的顺序，而且本节中$B_{i,j}$ 和$B_{i,j}$ 的取值无关紧要，因此我们将方程（**14**），即（a,b,c,d）$\sim$（a,c,b,d），写成两个数集之间的关系：

$$\left\{\lambda_{c,\mu_1}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_1},\ldots,\lambda_{c,\mu_N}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_N}\right\}\sim\left\{\lambda_{b,\beta_1}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_1},\ldots,\lambda_{b,\beta_N}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_N}\right\}.\tag{15}$$

定理4.4. 在（*15*）的两边，非零元素出现的次数相同。

˜证明。 注意到 B,B 可逆，且（12）的两边秩相同，结论显然成立。

□

注4.5. 注意，若（*15*）中只有一个元素，该关系将与数之间的 $\sim$ 兼容。在这种情况下，我们将省略花括号。

˜为了得到 $\mathcal{U}_k$的唯一性，我们需要了解 B 和 B中的一些元素。下一节中我们将证明

˜ ˜ B 可以通过 B计算得到，而对于任意固定的 $\mathcal{U}_k$，可以逐一检查非零元素$B_{i,j}$。

现在我们准备开始证明，对于所有与融合规则相容的 i,j,k，有 $\lambda_{i,j}^{k}\sim 1$.

引理 4.6。 $\lambda_{1,k}^{k} \neq 0$, $\lambda_{k,1}^{k} \neq 0$ ， 以及 $\lambda_{k,k}^{1} \neq 0$。

证明。 第一个断言直接由定义得出： U^k是一个不可约的 U^1-模。

对于任意 $u^k \in U^k$，利用 $Y(\cdot,z)$的斜对称性，我们有

$$Y(u^k,z)u^1 = e^{zL(-1)}Y\left(u^1,-z\right)u^k = \lambda_{1,k}^{k}\cdot e^{zL(-1)}\mathcal{I}_{1,k}^{k}\left(u^1,-z\right)u^k = \lambda_{k,1}^{k}\cdot\mathcal{I}_{k,1}^{k}\left(u^k,z\right)u^1.$$

因此$\lambda_{k,1}^{k} \neq 0$。

对于 $u^k, v^k \in U^k$，我们有

$$\left\langle Y\left(u^k,z\right)v^k\right), u^1\rangle = \left\langle v^k, Y\left(e^{zL(-1)}\left(-z^{-2}\right)^{L(0)}u^k, z^{-1}\right)u^1\right\rangle.$$

也就是说，

$$\left\langle \lambda_{k,k}^{1}\cdot\mathcal{I}_{k,k}^{1}\left(u^k,z\right)v^k, u^1\right\rangle = \left\langle v^k, \lambda_{k,1}^{k}\cdot\mathcal{I}_{k,1}^{k}\left(e^{zL(-1)}\left(-z^{-2}\right)^{L(0)}u^k, z^{-1}\right)u^1\right\rangle.$$

应用前一个断言， $\lambda_{k,1}^{k} \neq 0$，从而$\lambda_{k,k}^{1} \neq 0$。 □

定理 4.7。 $\lambda_{i,\ j}^{k} \sim \lambda_{j,\ i}^{k} \sim \lambda_{j,\ k}^{i}$对于所有与融合规则相容的 i、 j、 k。

证明。 考虑 $(1,\ i,\ j,\ k) \sim (1,\ j,\ i,\ k)$。注意，方程两边各自只有一个单项式，因为 $N_{a,\ b}^{1} \neq 0$当且仅当 $a = b$。我们有 $\lambda_{j,\ k}^{i}\lambda_{i,\ i}^{1} = \lambda_{i,\ k}^{j}\lambda_{j,\ j}^{1}$.因此，根据前面的论断， $\lambda_{j,\ k}^{i} \sim \lambda_{i,\ k}^{j}$。 □

从现在起，省略 $\lambda_{a,\ b}^{c}$ 的指标置换。

引理 4.8。 $\lambda_{i,\ i-2}^{3} \sim 1$ 对于所有与融合规则相容的 i 。

证明。 我们已经知道 $\lambda_{3,\ 1}^{3} \sim 1$。假设对于 $i = 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ldots,\ 2t+1$, 有 $\lambda_{3,\ i-2}^{i} \sim 1$， 但 $\lambda_{3,\ 2t+1}^{2t+3} = 0$。

如果我们能证明，当 $N_{p,q}^{r} = 1$时，对所有 $1 \leq \{p,q\} \leq 2t+1, r \geq 2t+3$ 都有 $\lambda_{p,q}^{r} = 0$，那么 $V = \sum_{n=1}^{t} U^{2n+1}$ 将是 $\mathcal{U}$ 的子顶点算子代数。对于某个 n，若 U^{2t+3} 是 $U^{2n+1} \boxtimes U^{2n+1}$ 的一个直和项，那么定理 (2.32)(ii) 与 $U^{2n+1} \boxtimes U^{2n+1}$ 的融合规则之间便会产生矛盾，这使我们的假设不可能成立。

为了得到所需的矛盾，我们首先证明，对所有满足 $p+q = 2t+4$ 的 $r = 2t+3$ 和 p, q，都有 $\lambda_{p,q}^{r} = 0$。然后我们将证明，对所有 $r \geq 2t+3, p \leq 2t-1, q \leq 2t+1$，都有 $\lambda_{p,q}^{r} = 0$。由此我们便能得到矛盾。

对于 $r = 2t+3$和 $p+q = 2t+4$，我们考虑 $(3,\ p,\ q-2,\ r) \sim (3,\ q-2,\ p,\ r)$。由此得到

$$\left\{\lambda_{3,p}^{p-2}\lambda_{r,q-2}^{p-2},\quad \lambda_{3,p}^{p}\lambda_{r,q-2}^{p},\quad \lambda_{3,p}^{p+2}\lambda_{r,q-2}^{p+2}\right\} \sim \left\{\lambda_{3,q-2}^{q-4}\lambda_{r,p}^{q-4},\quad \lambda_{3,q-2}^{q-2}\lambda_{r,p}^{q-2},\quad \lambda_{3,q-2}^{q}\lambda_{r,p}^{q}\right\}.$$

注意，根据融合规则，我们有 $N_{r}^{p-2}{}_{,\ q-2}^{} = N_{r}^{p}{}_{,\ q-2}^{} = N_{r}^{q-4}{}_{,\ p}^{} = N_{r}^{q-2}{}_{,\ p}^{} = 0$，并且我们的假设断言，对于满足 $3 \leq i \leq 2t+1$的奇数 i ，有 $\lambda_{3,\ i-2}^{i} \sim 1$ 。因此，对于所有奇数 $p \leq 2t+1$，方程变为 $\lambda_{r}^{p+2}{}_{,\ q-2}^{} \sim \lambda_{r,\ p}^{q}$。所以

$$\lambda_{r,p}^{q} \sim \lambda_{r,p-2}^{q+2} \sim \cdots \sim \lambda_{r,3}^{2t+1} = 0,$$

第一步已经完成。

现在我们考虑 $p \le 2t-1, q \le 2t+1, r \ge 2t+3$ 的情形。选取 p, q，使得对于每个可能的 $p' \le p, q' \le q$，都有 $N^r_{p',q'} = 0$，且总和 $p+q$ 最大。

考虑 $(3,\ p,\ q,\ r) \sim (3,\ q,\ p,\ r)$，我们有

$$\left\{\lambda^{p-2}_{3,p}\lambda^{p-2}_{q,r},\quad \lambda^{p}_{3,p}\lambda^{p}_{q,r},\quad \lambda^{p+2}_{3,p}\lambda^{p+2}_{q,r}\right\} \sim \left\{\lambda^{q-2}_{3,q}\lambda^{q-2}_{p,r},\quad \lambda^{q}_{3,q}\lambda^{q}_{p,r},\quad \lambda^{q+2}_{3,q}\lambda^{q+2}_{p,r}\right\}.$$

根据假设，同样有 $\lambda^r_{p-2,\ q} = \lambda^r_{p,\ q} = \lambda^r_{p,\ q-2} = 0$。由于 $p \le 2t-1$、$\lambda^{p+2}_{3\ ,\ p} \sim 1$，我们得到 $\lambda^{p+2}_{q\ ,\ r} \sim \lambda^{q+2}_{3\ ,\ q}\lambda^{q+2}_{p\ r}$。

如果 $q = 2t+1$，那么根据假设 $\lambda^{p+2}_{q\ ,\ r} \sim \lambda^{q+2}_{q\ ,\ 3} = 0$。因此我们证明了，对于任意$1 \le p \le 2t+1$，都有 $\lambda^r_{p,\ 2t+1} = 0$。如果 $q = 2t-1$，那么 $\lambda^{p+2}_{q\ ,\ r} \sim \lambda^{q+2}_{p\ ,\ r} = \lambda^{2t+1}_{p\ ,\ r} = 0$。通过对 q 使用归纳法，我们得到对于任意 $p,\ q \le 2t+1$，都有 $\lambda^r_{p,\ q} = 0$。因此第二步完成了，我们得到了所需的矛盾。 □

引理 4.9. 假设对于任意奇数的 i，$\lambda^3_{i,i} \sim 1$。对于任意奇数的 p，如果$\lambda^k_{i,j} \sim 1$ 只要最小 $\{i,j,k\} \le p$满足 i, j, k与融合规则相容的条件就成立，那么 $\lambda^{p+2}_{i\ ,j} \sim 1$。

证明。 $(3,p,i,j) \sim (3,i,p,j)$ 蕴含

$$\left\{\lambda^{p-2}_{3,p}\lambda^{p-2}_{i,j},\quad \lambda^{p}_{3,p}\lambda^{p}_{i,j},\quad \lambda^{p+2}_{3,p}\lambda^{p+2}_{i,j}\right\} \sim \left\{\lambda^{i-2}_{3,i}\lambda^{i-2}_{p,j},\quad \lambda^{i}_{3,i}\lambda^{i}_{p,j},\quad \lambda^{i+2}_{3,i}\lambda^{i+2}_{p,j}\right\}.$$

利用假设和前一个引理，我们得到 $\lambda^{p+2}_{i\ ,j} \sim 1$。 □

现在，如果我们能证明对于所有与融合规则相容的 i，都有 $\lambda^3_{i,i} \sim 1$，那么通过归纳法并利用前一个引理，我们将得到对于所有与融合规则相容的 i,j,k，都有 $\lambda^k_{i,j} \neq 0$。为了证明这一点，我们需要分别考虑两种情况：融合规则中出现的最大指标（记为 m）的奇偶性。

4.2 当 m 为奇数时

我们首先考虑 m 为奇数的情形。

引理 4.10。 $\lambda^3_{m,\ m} \sim 1$。

证明。 可以直接验证 $U^m \boxtimes U^m = U^1 + U^3$。若 $\lambda^3_{m,\ m} = 0$，则 $V = U^1 + U^m$ 是 $\mathcal{U}$ 的子顶点算子代数。由于根据定理 (2.32)(ii)，$U^m \boxtimes U^m$ 被假设在 $\mathcal{C}_V$ 中对张量积封闭，因此会产生矛盾。 □

引理 4.11。 $\lambda^m_{a\ ,\ b} \sim 1$ 对所有与融合规则相容的 a、b 均成立。

证明。 由（$m,\ i,\ m,\ i-2$）$\sim$（$m,\ m,\ i,\ i-2$），我们得到

$$\lambda^m_{i,m-i+3}\lambda^{m-i+3}_{m,i-2} \sim \lambda^3_{m,m}\lambda^3_{i,i-2} \sim 1,$$

那么 $\lambda^{m-i+3}_{m,i} \sim \lambda^{m-i+3}_{m,\ i-2} \sim 1$ 并且这些就是与融合规则相容的 a, b 的所有情形。 □

引理 4.12。 $\lambda^3_{a,b} \sim 1$ 对于所有与融合规则相容的 a、b 均成立。

证明。 考虑（m,m,i,j），则有

$$\left\{\lambda^1_{m,m}\lambda^1_{i,j},\quad \lambda^3_{m,m}\lambda^3_{i,j}\right\} \sim \left\{\lambda^{m+1-i}_{m,i}\lambda^{m+1-i}_{m,j},\quad \lambda^{m+3-i}_{m,i}\lambda^{m+3-i}_{m,j}\right\}.$$

应用前一个引理，证明是直接的。 □

定理 4.13. 若 m 为奇数，则 $\lambda_{i,\ j}^{k} \neq 0$ 对每个 $N_{i,\ j}^{k} = 1$均成立。

证明。 这是由前一个引理和引理（4.9）在适当调整指标后直接得到的。

□

4.3 当 m为偶数时

由引理（4.9），我们只需证明 $\lambda_{i,i}^{3} \sim 1$ ，其中 $N_{i\ ,i}^{3} = 1$。由于 $N_{m+1,m+1}^{3} = 0$，证明还需要几个引理。

引理 4.14。 $\lambda_{i,i}^{5} \sim 1$, $\forall i$ 当 $N_{i\ ,i}^{5} = 1$时。

证明。 考虑 $(3,3,i,i)$，$i \geq 3$。我们得到

$$\left\{1, \quad \lambda_{3,3}^{3}\lambda_{i,i}^{3}, \quad \lambda_{3,3}^{5}\lambda_{i,i}^{5}\right\} \sim \left\{1, \quad \left(\lambda_{i,i}^{3}\right)^{2}, \quad 1\right\}.$$

因此 $\lambda_{i,i}^{5} \sim 1$。 □

引理 4.15. $\lambda_{i,\ i+4}^{5} \sim 1$, $\forall i$ 当 $N_{i,\ i+4}^{5} = 1$。

证明。 这由 $(3,\ 3,\ i,\ i+4)$ 得出:

$$\left\{\lambda_{3,3}^{1}\lambda_{i,i+4}^{1}, \quad \lambda_{3,3}^{3}\lambda_{i,i+4}^{3}, \quad \lambda_{3,3}^{5}\lambda_{i,i+4}^{5}\right\} \sim \left\{\lambda_{3,i}^{i-2}\lambda_{3,i+4}^{i-2}, \quad \lambda_{3,i}^{i}\lambda_{3,i+4}^{i}, \quad \lambda_{3,i}^{i+2}\lambda_{3,i+4}^{i+2}\right\}.$$

由融合规则可知 $N_{i,\ i+4}^{1} = N_{i,\ i+4}^{3} = N_{3\ ,\ i+4}^{i-2} = N_{3,\ i+4}^{i} = 0$，且我们已证明引理（4.8），因此方程变为 $\lambda_{i,\ i+4}^{5} \sim 1$。 □

引理 4.16. </style}若 ， $_{3} = 0$ 或 $\lambda_{5,\ 5}^{3} = 0$，则 $\lambda_{4i+1,\ 4i+1}^{3} = 0$ 且 $\lambda_{5,\ i+2}^{i} = 0$, $\forall i$。

证明。 考虑 $(3,\ 3,\ i,\ i+2)$ 和 $(3,\ 5,\ i,\ i+2)$，得到

$$\begin{aligned} \left\{\lambda_{3,3}^{3}, \quad \lambda_{i,i+2}^{5}\right\} &\sim \left\{\lambda_{3,i}^{i}, \quad \lambda_{3,i+2}^{i+2}\right\}, \\ \left\{\lambda_{3,5}^{5}\lambda_{i,i+2}^{5}, \quad \lambda_{i,i+2}^{7}\right\} &\sim \left\{\lambda_{3,i}^{i}\lambda_{5,i+2}^{i}, \quad 1\right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

情形 $\lambda_{5,\ 5}^{3} = 0$: 这使得 $\lambda_{3,\ i}^{i}\lambda_{5,\ i+2}^{i} = 0$。我们可以在第一个方程两边同乘 $\lambda_{3,\ i}^{i}$。若$\lambda_{3,\ 3}^{3} = 0$，则对所有 i，有 $\lambda_{3,\ i}^{i} = 0$，因此 $\lambda_{5,\ i+2}^{i} = 0, \forall i$。若$\lambda_{3,\ 3}^{3} \sim 1$，则对任意 $t \geq 1$，有 $\lambda_{4t-1,\ 4t-1}^{3} \sim 1$ 且 $\lambda_{4t+1,\ 4t+1}^{3} = 0$。此外，$\lambda_{5,\ i+2}^{i} = 0, \forall i$。

情形 $\lambda_{3,\ 3}^{3} = 0$: 将 $i = 3$ 代入第二个方程，得到 $\lambda_{5,\ 5}^{3} = 0$。这一点已经讨论过。

□

引理 4.17. $\lambda_{3,\ 3}^{3} \sim \lambda_{5,\ 5}^{3} \sim 1$。

证明。 否则，若能证明对于所有 p，$q \geq 1$ 和 $r \geq 0$，都有 $\lambda_{4p+1,\ 4q+1}^{4r+3} = 0$，则会得到 $\mathcal{U}$的一个子顶点算子代数 V，其中 $V = \sum_{n=1}^{t} U^{4n+1}$。同样，存在一个 n，使得 $U^{n} \boxtimes U^{n}$的融合规则与 $\mathcal{C}_{V}$ 在张量积下封闭这一事实相矛盾。

只需假设 $\lambda_{5,\ 5}^{3} \sim 0$，并利用前一个引理得出矛盾。

我们原始的假设断言了情形 $r' = 0$，$p' = 1$，$q' = 1$。我们需要证明，若对每个 $p \leq p'$，$q \leq q'$，$r \leq r'$，都有$\lambda_{4p+1,\ 4q+1}^{4r+3} = 0$，那么 $\lambda^{4(r'+1)}{}_{4p'+1}^{\ \ \ +3}{}_{,\ 4q'+1} = 0$ 且 $\lambda_{4}^{4r'+3}{}_{(p'+1)+1,\ 4q'+1} = 0$。

考虑 (5， $4r+3$， $4p+1$， $4q+1$)，我们得到

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{5,4r+3}^{4r-1}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r-1)+3}, & \lambda_{5,4r+3}^{4r+1}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+1}, & \lambda_{5,4r+3}^{4r+3}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+3} \\ \lambda_{5,4r+3}^{4r+5}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r+1)+1}, & \lambda_{5,4r+3}^{4r+7}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r+1)+3} & \end{Bmatrix}$$

$$\sim \begin{Bmatrix} \lambda_{5,4p+1}^{4p-3}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p-1)+1}, & \lambda_{5,4p+1}^{4p-1}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p-1)+3}, & \lambda_{5,4p+1}^{4p+1}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4p+1} \\ \lambda_{5,4p+1}^{4p+3}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4p+3}, & \lambda_{5,4p+1}^{4p+5}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p+1)+1} & \end{Bmatrix}.$$

由引理（4.14）、引理（4.15）以及相对于前一个引理的假设，我们已经知道对所有 i, j，都有 $\lambda_{5,i}^{j}$。因此，我们可以将方程简化为

$$\left\{\lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r-1)+3}, \quad \lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r+1)+3}\right\} \sim \left\{\lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p-1)+1}, \quad \lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p+1)+1}\right\}.$$

由假设可得 $\lambda_{4\ (p+1)+1,4q+1}^{4r+3} \sim \lambda_{4p+1\ 4q+1,}^{4(r+1)+3}$。因此我们有

$$\lambda_{4(p+1)+1,4q+1}^{4r+3} \sim \lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r+1)+3} \sim \cdots \sim \lambda_{5,4q+1}^{4p+4r+3} \sim 0,$$

最后一个关系来自前一个引理，即 $\lambda_{5,i+2}^{i} = 0$；而根据融合规则，若 $|i-j|>4$，则有 $N_{i\ ,j}^{5} = 0$。

令 $r = r'$，即可得到所需结论。 □

引理 4.18。 对任意奇数 i， $\lambda_{i,i}^{3} \neq 0$ 与融合规则相容。

证明。 我们已经有 $\lambda_{3,3}^{3} \sim \lambda_{5,5}^{3} \sim 1$。设 $\lambda_{k,k}^{3} \sim 1$ 对于 $k \leq t$ 成立，其中 $t \geq 5$，但 $\lambda_{t+2,t+2}^{3} = 0$。回顾（16）中的第一个方程。令 $i = t$，则得到 $\lambda_{t,t+2}^{5} = 0$。令 $i = t+2$，则得到 $\lambda_{t+2,t+4}^{5} = 0$。

考虑（3、5、i、i）、 $\forall i \geq 3$、

$$\left\{1, \quad \lambda_{i,i}^{7}\right\} \sim \left\{\lambda_{5,i}^{i-2}, \quad \lambda_{5,i}^{i+2}\right\}.$$

令 $i = t+2$，则有 $\{1, \lambda_{t+2,t+2}^{7}\} \sim \{0,0\}.$。由定理（4.4）可得矛盾。 □

定理 4.19。 如果 m 为偶数，则对于每个$N_{i\ ,\ j}^{k} \neq 0$ $_{,\ j} = 1$都有λ_{i}^{k}。

P证明。 前一个引理断言引理（4.9）。通过递归，我们可以得到所需结果 n. □

5 （$\mathcal{U}$、 Y）的唯一性

在本节中，我们固定基 $\{e_{i,j}\}$，并令 Y（·、 z）为 $\mathcal{U}$上的一个顶点算子代数结构，使得对于所有 i、 j、 k， λ_{i}^{k}、 $_{j} = 1$与融合规则相容。假设 $\mathcal{U}$上还存在另一个顶点算子代数结构 $Y^{\sim}$（·、 z），我们将证明：当编织矩阵满足某些非零条件时，对于 Y（·、 z）， λ_{b}^{a}、$_{c}$的平方在N_{b}^{a}、$_{c} = 1$时等于 1。这些条件可以针对任意固定的 $\mathcal{U}_{k}$逐一验证，从而得到（$\mathcal{U}$、 Y（·、 z））≅（$\mathcal{U}$、 Y（·、 z）），进而证明 $\mathcal{U}$的唯一性。

引理 5.1。 $\lambda_{1,\ k}^{k} = \lambda_{k,\ 1}^{k} = \lambda_{k,\ k}^{1} = 1$ 对所有 k 均成立。

证明。由于我们假设 $\mathcal{U}_{n-1}$ 具有唯一的顶点算子代数结构，因此对于所有 $u \in U^{\top}$，有 $Y(u,\ z) = Y(u,\ z)$，即 $\lambda^{k}_{1,\ k} = 1$。

对于任意的 $u^1 \in U^1$、$u^k \in U^k$，$Y(\cdot, z)$ 和 $Y(\cdot, z)$ 的斜对称性（ [FHL]）意味着

$$\overline{Y}(u^k, z)u^1 = e^{zL(-1)}\overline{Y}\left(u^1, -z\right)u^k = e^{zL(-1)}Y(u^1, -z)u^k = Y\left(u^k, z\right)u^1 = \mathcal{I}^k_{k,1}\left(u^k, z\right)u^1.$$

与此同时，$Y\left(u^k, \overline{z}\right)u^1 = \lambda^k_{k,1} \cdot \mathcal{I}^k_{k,1}(u^k, z)u^1$。因此我们得到 $\lambda^k_{k,1} = 1$。

注意，由注 2.26，$\mathcal{U}$ 有唯一的不变双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，满足 $\langle 1, 1\rangle = 1$。对于 $u^1 \in U^1$ 和 $u^k, v^k \in U^k$，我们有

$$\left\langle Y\left(u^k, z\right)v^k\right), u^1\rangle = \left\langle v^k, Y\left(e^{zL(-1)}\left(-z^{-2}\right)^{L(0)}u^k, z^{-1}\right)u^1\right\rangle.$$

也就是说，

$$\left\langle \mathcal{I}^1_{k,k}\left(u^k, z\right)v^k, u^1\right\rangle = \left\langle v^k, \mathcal{I}^k_{k,1}\left(e^{zL(-1)}\left(-z^{-2}\right)^{L(0)}u^k, z^{-1}\right)u^1\right\rangle.$$

$(\mathcal{U}, Y)$ 上的不变双线性形式给出 —

$$\left\langle \lambda^1_{k,k} \cdot \mathcal{I}^1_{k,k}\left(u^k, z\right)v^k, u^1\right\rangle = \left\langle v^k, \lambda^k_{k,1} \cdot \mathcal{I}^k_{k,1}\left(e^{zL(-1)}\left(-z^{-2}\right)^{L(0)}u^k, z^{-1}\right)u^1\right\rangle.$$

由于 $\lambda^k_{k,1} = 1$，我们得到 $\lambda^1_{k,k} = 1$。 □

定理 5.2。$\lambda^k_{i,\ j} = \lambda^k_{j,\ i} = \lambda^i_{j,\ k}$ 对于所有与融合规则相容的 i、j、k。

证明。这可由定理 (4.7) 的证明和前一个引理推出。 □

引理 5.3。$B^{\mathrm{T}}\tilde{B} = I$。

证明。回顾 (12)。这直接来自我们选取的 $Y(\cdot,\ z)$。 □

融合规则表明，最长的直和项在 $m = 4K + 1$ 时出现在第 $(2K + 1)$ 个位置，而在 $m = 4K + 3$ 时出现在第 $(2K + 3)$ 个位置。当 $m = 4K$ 时，最长的直和项出现在第 $(2K + 1)$ 个位置。当 $m = 4K + 2$ 时，最长的直和项同时出现在第 $(2K + 1)$ 个和第 $(2K + 3)$ 个位置，本文采用第 $(2K + 1)$ 个位置。我们将具有最长融合规则的模记为 U^t。

引理 5.4。$\left(\lambda^a_{t,\ t}\right)^2 = 1$ 若 $\left(\tilde{B}^{a,t}_{a,t}\right)_{U^1,\ U^t} \neq 0$。

证明。考虑式 (12) 中的 $(a,\ b,\ t,\ t)$，可得

$$\mathrm{diag}(\lambda^{\beta_1}_{a,b}\lambda^{\beta_1}_{t,t}, \ldots, \lambda^{\beta_N}_{a,b}\lambda^{\beta_N}_{t,t})\tilde{B} = \tilde{B}\,\mathrm{diag}(\lambda^{\mu_1}_{a,t}\lambda^{\mu_1}_{b,t}, \ldots, \lambda^{\mu_N}_{a,t}\lambda^{\mu_N}_{b,t}).$$

比较等式两边矩阵中的 $(i,\ j)$ 元素，可得

$$\lambda^{\beta_i}_{a,b}\lambda^{\beta_i}_{t,t}\tilde{B}_{i,j} = \tilde{B}_{i,j}\lambda^{\mu_j}_{a,t}\lambda^{\mu_j}_{b,t} \tag{17}$$

对所有 i 和 j。选择 $(i,\ j)$，使得 $\beta_i = U^1$ 和 $\mu_j = U^t$。通过计算融合规则即可得到。由于 $\lambda^1_{t,\ t} = 1$ 和 $b = a$，我们得到 $\tilde{B}_{i,\ j} = \tilde{B}_{i,\ j}\left(\lambda^{\mu_i}_{a,\ t}\right)^2$。因此，若 $\left(\tilde{B}^{a,t}_{a,t}\right)_{U^1,\ U^t} \neq 0$，则有 $\left(\lambda^a_{t,\ t}\right)^2 = 1$。 □

定理 5.5。 对于所有与融合规则相容的 i,j,k，若 $\left(\tilde{B}_{p,t}^{q,t}\right)_{U^{r'},\,U^t} \neq 0$，则 $\left(\lambda_{p,\,q}^{r}\right)^2 = 1$。

证明。 取 j使其满足 (17) 中的 $\mu_j = U^t$，并遍历所有满足 $N_{a\ ,b}^{\beta_i} = 1$ 的 β_i。将方程两边分别乘以 $\lambda_{t\ ,t}^{\beta_i}$，并令 $(p,q,r) = (a,b,\beta_i)$，即可得到所需结果。 □

˜**注 5.6**。 从现在起，若使用 B 中的元素，我们均假设它们非零。对于任意固定的 $\mathcal{U}_k$，可以逐一检验各种情形。本节末尾给出了计算编织矩阵元素的示例。

引理 5.7。 定义映射 $\sigma : (\mathcal{U}, Y) \to (\mathcal{U}, Y)$ 如下：¯

- 若 $N_{t\ ,t}^{k} = 1$，则 $\sigma(u^k) := \lambda_{t,t}^{k} u^k$;
- 若 $N_{t\ ,t}^{k} = 0$，则 $\sigma(u^k) := \lambda_{a,b}^{k} \sigma(u^a)_{(n)} \sigma(u^b) \restriction U^k$，对任意 $N_{a,b}^{k} = 1$ 和 $u^a{}_{(n)} u^b \restriction U^k = u^k$ 均成立（这里 $\restriction$ 是限制），

并进行线性展开。因此，它是定义良好的同态。

证明。 我们记作 $u^p{}_{(n)} u^q = \sum_r w^r$，并将 Y 的 n 次积记作 (n)。根据 $\lambda_{p,\underline{q}}^{r}$ 的定义，我们有 $u^p{}_{(n)} u^q = \sum_r \lambda_{p,q}^{r} w^r$。注意，由 (17) 并令 $\mu_j = t$，我们总有

$$\lambda_{a,b}^{\beta_i} \lambda_{t,t}^{\beta_i} = \lambda_{a,t}^{t} \lambda_{b,t}^{t}. \tag{18}$$

若 $m \neq 4K+2$，则它定义良好，因为融合规则表明，对于所有奇数 k，都有 $N_{t\ ,t}^{k} = 1$。若 $m = 4K+2$，则 $t = 2K+1$，且 $k = m+1$ 是 $N_{t\ ,t}^{k} = 0$ 的唯一情形。假设存在 $a', b' < k$，使得 $N_{a',b'}^{k} = 1$ 且 $u^{a'}{}_{(n)} u^{b'} \restriction U^k = u^k$。我们需要证明 $\lambda_{a,b}^{k} \lambda_{t,t}^{a} \lambda_{t,t}^{b} = \lambda_{a',b'}^{k} \lambda_{t\ ,t}^{a'} \lambda_{t\ ,t}^{b'}$，这由 (18) 显然可得。因此我们得到一个定义良好的映射。

现在我们检查 $\sigma(u^p{}_{(n)}\, u^q) = \sigma(u^p)_{(n)} \sigma(u^q)$。由 $\sigma(u^p{}_{(n)}\, u^q) = \sum_r \lambda_{t,\ t}^{r} w^r$，以及 $\sigma(u^p)_{(n)} \sigma(u^q) = \lambda_{t\ ,\ t}^{p} \lambda_{t\ ,\ t}^{q} \sum_r \lambda_{p,\ q}^{r} w^r$。根据（18）和定理（5.5）可得该方程。

□

定理 5.8。 如果编织矩阵中的相应元素非零，则 $\mathcal{U}$ 的顶点算子代数结构是唯一的。

证明。 前一个引理中的 σ 就是我们所需的同构。这是前一个引理和定理（5.5）的直接推论。

□

˜注意，由于我们有（17）和注记（5.6），只需检查 B 的元素是否非零。˜我们给出计算 B 的例子，尤其是在 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{6\mathrm{A}}$ 的情况下；相关内容见 [DJY]。此外，按照命题（2.22）和（7）进行直接计算，可以得到 $\mathcal{U}_2$ 唯一性的一个例子。

例 *5.9*。考虑 $L(25/28, 0)$-模的编织矩阵。分别用 Q_2 和 Q_3 表示不可约的 $L(25/28, 0)$-模 $L(25/28, 34/7)$ 和 $L(25/28, 9/7)$。为方便起见，我们将 $\left(\tilde{B}_{Q_a,Q_b}^{Q_c,Q_d}\right)_{Q_e,Q_f}$ 记作 $\left(\tilde{B}_{a,b}^{c,d}\right)_{e,f}$，$a, b, c, d, e, f \in \{2,3\}$。于是有 $\left(\tilde{B}_{2,2}^{3,3}\right)_{3,2} \neq 0$，$\left(\tilde{B}_{3,2}^{3,2}\right)_{3,3} \neq 0$，$\left(\tilde{B}_{2,3}^{3,3}\right)_{3,2} \neq 0$，以及 $\left(\tilde{B}_{3,3}^{2,3}\right)_{2,3} \neq 0$。

例 5.10。 我们采用注（*3.3*）中的记号，并考虑 $L(11/12,0)$-模。在此情形下$t=3$，且对于满足以下条件的所有 $a,b,c\in\{3,5,7\}$，都有 $\left(\tilde{B}^{b,3}_{a,3}\right)_{3',3}{}^{c}\neq 0$：这些 $\tilde{B}_{i,j}$ 出现在定理（*5.5*）中且与融合规则相容。

我们将编织矩阵记为 $B_{(a,b,c)}$。我们需要检查所有的

$$(a,b,c)\in\left\{\begin{matrix}(3,3,3),(3,3,5),(3,5,3),(3,5,5),\\(5,3,3),(5,3,5),(5,5,3),(5,5,5),\\(5,5,7),(5,7,5),(7,5,5)\end{matrix}\right\}.$$

为了证明 $B_{(3,3,3)}=\left(\tilde{B}^{3,3}_{3,3}\right)_{3',3}{}^{3}\neq 0$，我们需要检查

$$r(3,3,3,3)_{3,3}=r(3,2,3,2)_{2,3}r(2,2,3,3)_{3,2}+r(3,2,3,4)_{2,3}r(2,2,3,3)_{3,4}\neq 0.$$

由于

$$\begin{aligned}
r(3,2,3,2)_{2,3}&=r(3,2,2,1)_{2,2}r(2,2,2,2)_{1,3}=x^{1/4}x^{-1/4}\frac{[1]}{[2]},\\
r(2,2,3,3)_{3,2}&=r(2,2,2,2)_{3,1}r(1,2,2,3)_{2,2}+r(2,2,2,2)_{3,3}r(3,2,2,3)_{2,2},\\
&=x^{-1/4}\frac{[3]}{[2]}x^{1/4}+\left(-x^{-1/4-2/2}\frac{[1]}{[2]}x^{-1/4+3/2}\frac{[1]}{[3]}\right),\\
r(3,2,3,4)_{2,3}&=r(3,2,2,3)_{2,2}r(2,2,2,4)_{3,3}+r(3,2,2,3)_{2,4}r(4,2,2,4)_{3,3}\\
&=x^{-1/4+3/2}\frac{[1]}{[3]}x^{1/4}+x^{-1/4}\frac{[2]}{[3]}x^{-1/4+4/2}\frac{[1]}{[4]},\\
r(2,2,3,3)_{3,4}&=r(2,2,2,2)_{3,3}r(3,2,2,3)_{2,4}\\
&=-x^{-1/4-2/2}\frac{[1]}{[2]}x^{-1/4}\frac{[2]}{[3]},
\end{aligned}$$

令 $r=x^{1/2}+x^{-1/2}$，于是得到

$$\begin{aligned}
B_{(3,3,3)}&=\frac{[1]}{[2]}\left(\frac{[3]}{[2]}-\frac{[1][1]}{[2][3]}\right)-\left(\frac{[1]}{[3]}+\frac{[1][2]}{[3][4]}\right)\frac{[1]}{[3]}\\
&=1-\frac{1}{r^2-1}-\frac{1}{(r^2-1)^2}-\frac{1}{(r^2-1)^2(r^2-2)}\\
&=1-\frac{1}{r^2-2}.
\end{aligned}$$

也就是说，实部 $B_{(3,3,3)}>0$，因此 $B_{(3,3,3)}\neq 0$

按照上述相同的方法，我们有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}B_{(3,3,5)}>0,\operatorname{Re}B_{(3,5,3)}<0,\quad \operatorname{Im}B_{(3,5,5)}>0,\operatorname{Im}B_{(5,3,3)}>0,\quad \operatorname{Re}B_{(5,3,5)}>0,\\
&\operatorname{Im}B_{(5,5,3)}>0,\operatorname{Re}B_{(5,5,5)}<0,\quad \operatorname{Re}B_{(5,5,7)}>0,\operatorname{Re}B_{(5,7,5)}<0,\quad \operatorname{Re}B_{(7,5,5)}<0.
\end{aligned}$$

因此，我们所需的编织矩阵中的所有元素都非零。由定理（*5.5*）和前一个定理可知，$\mathcal{U}_2=U_1^1\oplus U_1^3\oplus U_1^5\oplus U_1^7=\left[0,\overline{0}\right]_1\oplus\left[2,\frac{5}{4}\right]_1\oplus\left[4,\frac{19}{4}\right]_1\oplus\left[6,\frac{21}{2}\right]_1$ 具有唯一的顶点算子代数结构。

6 由 Griess 代数生成

文献 [JZ] 证明了 $\mathcal{U}_1$ 由 Griess 代数生成。现在我们证明，若 $\mathcal{U}_{k-1}$ 由 Griess 代数生成，则 $\mathcal{U}=\mathcal{U}_k$也由 Griess 代数生成。

引理 6.1. U^3_{k-1} 由 *Griess* 代数生成。

证明. 由于 U^3_{k-1} 是一个不可约的 $\mathcal{U}_{k-1}$-模，我们只需在其中找到一个权为 2 的向量。

For $\mathcal{U}_1$, we have $U^3=V(\frac{5}{2})\otimes L(\frac{25}{28},\frac{9}{7})$ and $\frac{5}{2}+\frac{9}{7}=2$.
对于 $\mathcal{U}_k$ 满足 $k\geq 2$，我们有 $U^3_{k-1}=\mathcal{U}_{k-1,2}\otimes L\left(c_{k+6},\ h^{k+6}_{(1,\ 3)}\right)$ 以及

$$\mathcal{U}_{k-2,0}\otimes L\left(c_{k+5},h^{k+5}_{(3,1)}\right)=\left[0,h^{k+5}_{(3,1)}\right]_{k-2}\subseteq\mathcal{U}_{k-1,2}.$$

注意

$$h^{(k+6)}_{(1,3)}+h^{(k+5)}_{(3,1)}=\frac{k+8}{k+6}+\frac{k+4}{k+6}=2,$$

证明完毕。 □

定理 6.2。 $\mathcal{U}$ 由 *Griess* 代数生成。

证明。 我们已经知道， U^1和 U^3由 Griess 代数生成。假设对于 $0\leq k\leq n$， U^{2k+1}由 Griess 代数生成。根据 U^3的融合规则，我们有 $U^{2k+3}\subseteq U^3\boxtimes U^{2k+1}$，因此 U^{2n+3}由 Griess 代数生成。所以 $\mathcal{U}$ 由 Griess 代数生成。 □

7 开放问题

以下是基于本文及其引用文献提出的一些开放问题。

问题 7.1。 在 *[DJY]*中，使用 *[DJX1]* 的量子维数理论来确定 $\mathcal{U}_{6A}$的不可约模和融合规则。对于本文，是否有一种好的方法，能够同时确定所有 k $\mathcal{U}_k$ 的不可约模和融合规则?

问题 7.2 **.** 到目前为止，我们计算出的编织矩阵的所有元素都非零，这是普遍成立的吗?

问题 7.3. 文献 *[LYY, JZ]*证明了 $\mathcal{U}_1$ 由伊辛向量生成，而我们只证明了 $\mathcal{U}_k$ 由 *Griess* 代数生成。所有 $\mathcal{U}_k$ 都由伊辛向量生成吗？这个问题的答案有助于证明文献 *[LY]*中的猜想 *A.14*。

致谢

W. Zheng 获得国家自然科学基金项目（编号 12201334）和山东省自然科学基金项目（编号 ZR2022QA023）的资助。

参考文献

[ABD] T. Abe, G. Buhl, C. Dong, 《有理性、正则性与 C_2-余有限性》。《美国数学会汇刊》356（2004年），3391–3402。[ADL] T. Abe, C. Dong, H. Li, 《顶点算子代数 $M(1)^+$ 与 V_L^+ 的融合规则》。《数学物理通讯》253（2005年），171–219。[ADJR]C. Ai, C. Dong, X. Jiao, L. Ren, 《副费米子顶点算子代数的不可约模与融合规则》。《美国数学会汇刊》370（2018年），第8期，5963–5981。[B] R.E. Borcherds, 《顶点代数、Kac-Moody代数与 Monster》，Proc.Nat.Acad.Sc. 83（1986年）306–3071。[C] J. H. Conway, 《Fisher-Griess Monster群的一个简单构造》。《数学发明》79（1985年），513–540。[DJX1] C. Dong, X. Jiao, F. Xu, 《量子维数与量子伽罗瓦理论》。《美国数学会汇刊》365（2013年），6441–6469。[DJX2] C. Dong, X. Jiao and F. Xu, 《顶点算子代数的镜像扩张》。《数学物理通讯》329（2014年），263-294。[DJY] C. Dong, X. Jiao, N. Yu, 《6A代数及其表示》。《代数杂志》533（2019年），174–210。[DL] C. Dong, J. Lepowsky, 《广义顶点算子代数与相对顶点算子》。《数学进展》第112卷。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州，1993年。[DLM1] C. Dong, H. Li, G. Mason, 《有理顶点算子代数的正则性》。《数学进展》132（1997年），148–166。[DLM2] C. Dong, H. Li, G. Mason, 《顶点算子代数的扭表示》。《数学年刊》310（1998年），571–600。[DLM3] C. Dong, H. Li, G. Mason, 《顶点算子代数的简单流与扩张》。《数学物理通讯》180（1996年），671-707。[DLM4] C. Dong, H. Li, G. Mason, 《顶点算子代数的紧自同构群》。《国际数学研究通报》18（1996年），913-921。[DM] C. Dong, G. Mason, 《关于量子伽罗瓦理论》。《杜克数学杂志》86（1997年），305–321。[DMZ] C. Dong, G. Mason, Y. Zhu, 《Virasoro代数的离散级数与月光模》。《纯粹数学专题讨论会论文集》，美国数学会56 II（1994年），295–316。[DZ] C. Dong, W. Zheng, 《 $3C$-代数与 $5A$-代数的顶点算子代数结构的唯一性》。《代数杂志》572（2021年），76–110。[FFK] G. Felder, J. Frohlich, G. Keller, 《极小共形模型的辫子矩阵与结构常数》。《数学物理通讯》124（1989年），第4期，647–664。[FHL] I. B. Frenkel, Y. Huang, J. Lepowsky, 《关于顶点算子代数及其模的公理化方法》。《美国数学会回忆录》104, 1993年。

[FLM] I. B. Frenkel、J. Lepowsky、A. Meurman，《顶点算子代数与怪兽》。纯粹与应用数学，第134卷，Academic Press，马萨诸塞州，1988年。[FZ] I. B. Frenkel、Y. Zhu，《与仿射代数和Virasoro代数表示相关的顶点算子代数》。《杜克数学杂志》66（1992），第1期，123–168。[GKO] P. Goddard、A. Kent、D. Olive，《Virasoro代数和超Virasoro代数的酉表示》。《数学物理通讯》103（1986），105–119。[H1] Y. Huang，《交织算子代数的广义有理性与“雅可比恒等式”》。《数学精选》6（2000），225–267。[H2] Y. Huang，《微分方程与交织算子》。《当代数学通讯》7（2005），375–400。[HKL] Y. Huang、A. Kirillov、J. Lepowsky，《编织张量范畴与顶点算子代数的扩张》。《数学物理通讯》337（2015），第3期，1143–1159。[JZ] X. Jiao、W. Zheng，《由两个伊辛向量生成的顶点算子代数》，《代数杂志》610（2022），546–570。[KR] V.G. Kac、A.K. Raina，《无限维李代数最高权表示孟买讲座》。世界科学出版社，新加坡，1987年。[KZ] V.G. Knizhnik、A.B. Zamolodchikov，《二维中的流代数与Wess–Zumino模型》。《核物理B辑》247（1984），83–103。[Li1] H. Li，《正则顶点算子代数的一些有限性性质》，《代数杂志》212（1999），495-514。[Li2] H. Li，《顶点算子代数上的对称不变双线性形式》。《纯粹与应用代数杂志》96（1994），279–297。[Lin] X. Lin，《有理顶点算子代数的镜像扩张》。《美国数学会汇刊》369（2017），3821–3840。[LY]C.H. Lam 和 H. Yamauchi，《Fischer 3-换位群的Conway–Miyamoto对应》。《美国数学会汇刊》375（2022），第3期，2025–2067。[LYY] C. H. Lam、H. Yamada、H. Yamauchi，《顶点算子代数、扩展 E_8 图以及关于怪兽单群的McKay观察》。《美国数学会汇刊》359（2007），第9期，4107–4123。[M] M. Miyamoto，《由两个共形向量生成、其 τ-对合生成 S_3的顶点算子代数》。《代数杂志》268（2003），653–671。[SY] S. Sakuma、H. Yamauchi，《由两个Miyamoto对合生成S_3的顶点算子代数》。《代数杂志》267（2003），272–297。[TK] A. Tsuchiya、Y. Kanie，《P1上共形场论中的顶点算子与辫群的单值化表示》。《纯粹与应用数学高级研究》16（1988），297–372。

[W] W. Wang，《Virasoro顶点算子代数的有理性》。《国际数学研究通报》。耶鲁大学。康涅狄格州，1990年。[X] F. Xu，《局部网的镜像扩张》，《数学物理通讯》 **270**(2007)，835-847。[Zheng] W. Zheng，《由两个伊辛向量 e 和 f 生成、满足 $\langle e、\ f\rangle = \frac{1}{2^8}$, $\tau_e\tau_f = 3$或$\langle e、\ f\rangle = \frac{3}{2^9}$ 的顶点算子代数》，《代数杂志》 **572**(2021)，60–75。[Zhu] Y. Zhu，《顶点算子代数特征标的模不变性》。《美国数学会杂志》**9**(1996)，237–302。