arXiv:2601.07846v1 [math.HO] 6 Jan 2026

模式数：一种具有结构与量子代数视角的新型数分类

JTM Campbell Maynooth 电子工程系，梅努斯大学，爱尔兰共和国 电子
邮箱：John.Campbell.2023@mumail.ie，ektopyrotic@gmail.com

摘要——**我们引入了模式数这一概念：这是一种受娱乐数学启发、基于数字与因数的整数分类方法。如果一个数的至少一个正因数以数字形式出现在其十进制表示中，则称该数为模式数。我们依据这一定义研究前一百个自然数，分析其频率与密度，比较素数与合数的表现，并提出一种生成规则。沿数轴绘制的可视化"形状图"展示了模式数之间的转换。最后，我们讨论其在量子与组合语境中对基于序列的算子和代数直觉的潜在意义。**

I. 引言

娱乐数学长期以来一直是新型数值分类和趣味结构思想的试验场 [1], [2]。基于数字的性质虽然取决于进制，但已产生了一些众所周知的数族，例如重复数字数、自恋数和回文数 [3]。

此外，基于因数的分类（素数、完全数、高度合成数）是数论的基石。本研究通过定义一类整数，将这两种视角结合起来；这类整数的算术结构直接体现在其数字表示中。

这类混合定义并非旨在取代经典理论，而是为了揭示结构模式，从而为序列分析、符号动力系统或算子式诠释提供灵感，其理念与代数和量子理论中的梯子结构相似 [4], [5]。

II. 模式数的定义

定义。若存在一个正因数 $d \mid n$，使得 $d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$，且 d 作为一位数字出现在 n 的十进制展开中，则称正整数 n 为模式数（十进制）。

备注：

- 因数包括 1 和 n。
- 仅考虑个位数因数。
- 此定义明确依赖于十进制。

III. 生成判据

令 $D(n)$ 表示 n 的正因数集合，令 $\Delta(n)$ 表示 n 中出现的数字集合。

那么，当且仅当满足以下条件时，n 是模式化的：

$$D(n) \cap \Delta(n) \cap \{1, 2, \ldots, 9\} \neq \varnothing.$$

这为生成提供了一条直接的计算规则。

IV. 100 以内的模式数

在前 100 个自然数中，**有 72 个是模式数**。根据模式数的定义，可以系统地确定这一点：

A. 第 *1* 步：回顾定义

如果一个数 n 的至少一个数字能整除该数，那么它就是模式化 的。也就是说，对于十进制数字为 d_1，d_2，……，d_k 的 n：

$$n \text{ is patterned} \iff \exists i \text{ such that } d_i \mid n.$$

B. 第 *2* 步：一位数（*1–9*）

所有一位数都显然是模式化的，因为每个数 n 都能被自身整除：

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \in \text{Patterned}.$$

因此，这个范围内有 9 个模式数。

C. 第 *3* 步：两位数（*10–99*）

对于两位数 $n = 10a + b$，其十位数字为 a，个位数字为 b，若满足以下条件，则该数为模式化数字：

$$a \mid n \quad \text{or} \quad b \mid n.$$

1) 步骤*3a*：包含数字 *1* 的数：- 如果 $a = 1$（即 10–19 之间的数），那么 $1 \mid n$ 会自动成立，因此这 10 个数都是模式化数字。- 如果 $b = 1$（即个位数字为 1 的数），那么 $1 \mid n$ 会成立，因此个位数字为 1 的数都是模式化数字：11，21，31，……，91。- 注意，11 同时出现在两个列表中；我们只计算一次。

2) 步骤*3b*：能被十位数字整除的数：- 对于 $a \neq 1$ 的数，我们检查 $a \mid (10a + b)$：

$$10a + b \equiv b \pmod{a} \implies a \mid (10a + b) \iff a \mid b.$$

- 这意味着，只有当十位数字能整除个位数字时，它才能整除该数。

例如：- 12：十位数字 1 已经能整除 $12 \to$，因此是模式化数字。- 24：十位数字为 2，个位数字为 4，$2 \mid 4 \to$ 是模式化数字。- 36：十位数字为 3，个位数字为 6，$3 \mid 6 \to$ 是模式化数字。

3) 步骤*3c*：能被个位数字整除的数：- 如果个位数字是 $b \neq 0$，检查 $b \mid n$：

$$b \mid (10a + b) \implies b \mid 10a$$

- 因此，以 2、3、4、5、6、7、8、9 结尾的数，如果十位数字是 b 的倍数，就可以呈现模式化规律。

例如：- 36：个位数字为 6，十位数字为 $3 \to 6 \nmid 36$? 实际上是 $6 \mid 36$，没错。- 42：个位数字为 2，十位数字为 $4 \to 2 \mid 42 \to$ 模式化。

D. 步骤 4：模式数计数

根据上述规则，我们可以列举出 100 以内的模式化数字：

- 一位数：1，2，3，4，5，6，7，8，$9 \to 9$ 个数字
- 数字 10–19 $\to$ 10个数字
- 个位数字为 1 的数字：21，31，41，51，61，71，81，$91 \to 8$个数字（11 已计数）
- 可被十位数字整除的数字：20，22，24，30，33，36，40，44，48，50，55，60，66，70，77，80，88，90，$99 \to 19$ 个数字
- 其余通过个位数字整除性得到的模式数：12，15，18，14，16，21，28，32，35，39，45，48，52，54，56，63，65，72，75，81，84，87，91，92，$96 \to 26$ 个数字

将它们相加：$9 + 10 + 8 + 19 + 26 = 72$ 模式数。

E. 第 5 步：总结

关键的公式化见解是：

$$\text{Patterned}(10a + b) \iff (a \mid b) \text{ or } (b \mid 10a + b)$$

这使我们能够系统地识别出不超过 100 的全部 72 个模式数，而无需逐一列出它们，并凸显出看似不规则分布背后的算术结构。

V. 频率和密度

令 $P(N)$ 表示小于或等于 N 的模式整数数量。

对于 $N = 100$:

$$\frac{P(100)}{100} = 0.72.$$

高密度主要源于：

- 小因数（1–9）的普遍存在
- 数字 1、2、3、4、5、6 的频繁出现

VI. 质数与合数

A. 模式化素数（≤ 100）

如果素数 p 满足以下条件，则称其为模式化数：

- $p \leq 9$，或
- 数字 1 出现在 p

模式化素数 ≤ 100:

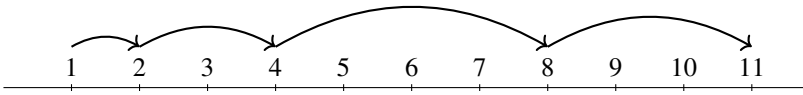
$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 41, 61, 71\}.$$

B. 观察

- 大多数模式数都是合数。
- 合数得益于多个小因数。
- 由于数字约束，许多素数被排除在外。

VII. 数轴形状图

我们将模式数可视化为数轴上的“跳跃”。



这些箭头暗示的是结构性转变，而非算术级数，这让人联想到梯子算符或步进算符。

VIII. 与数列和代数结构的联系

模式数定义了 $\mathbb{N}$ 的一个子序列，可以像在线整数数列百科全书风格的构造 [3]一样进行索引和研究。箭头图示表明：

- 基于图的解释
- 整数状态上的转移算符
- 因数与数字重叠的符号编码

这类思想让人联想到量子系统中的代数阶梯算符和离散状态转移，不过这里的背景纯粹是组合数学 [4]。

A. 基于图的解释、龙形镶嵌与海马子结构

马丁·加德纳因推广数学龙曲线而闻名，这种曲线由迭代折叠规则构造，并通过左右转向序列在几何上实现[1]。这些曲线展现出自相似性和铺砌行为，也揭示了离散符号规则与连续几何之间出人意料的联系。

我们为模式化数字提出一种类似的构造方式：不将其仅仅视为数列中的元素，而是视为有向图中的指令节点，由此生成平面曲线和镶嵌。

1) 将模式数视为转向算子：令 $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ 表示模式数的有序序列。

定义一个转向函数：

$$\tau(p_n) = \begin{cases} L, & \text{if } |D(p_n) \cap \Delta(p_n)| \text{ is odd,} \\ R, & \text{if } |D(p_n) \cap \Delta(p_n)| \text{ is even,} \end{cases}$$

其中，$D(p_n)$ 是因子集，$\Delta(p_n)$ 是数字集。

由此生成一个符号序列：

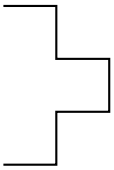
$$\tau(p_1), \tau(p_2), \tau(p_3), \dots$$

类似于海威龙曲线的折叠指令。

每一步对应：

- 单位长度的前进运动
- $\pi/2$的左转或右转

2）模式化龙曲线：利用上述规则，我们生成一条离散平面曲线。



这条曲线并非旨在精确复现经典龙曲线，而是展示数字–除数结构如何引发几何折叠。反复应用会产生自相似图案和适合铺砌的重叠区域。

3）模式化龙曲线的镶嵌：令 Γ_k 表示由前 k 个模式数生成的模式化龙曲线。

我们将镶嵌 $\mathcal{T}$ 定义为以下并集：

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{m} R_i(\Gamma_k),$$

其中 R_i 为刚性变换（旋转和反射）。

与经典龙形曲线一样，这些模式龙具有以下特性：

- 边对边铺砌
- 重叠自交
- 局部对称群

每条龙曲线的算术来源都会在镶嵌块上引入离散标记，将数论信息编码进几何中。

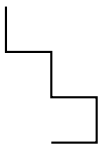
4) 海马形模式化镶嵌：我们定义一个特殊的子类，称为海马，其灵感来自龙曲线镶嵌中常见的“海马”形状。

定义。若模式化龙曲线 Γ_k满足以下条件，则称其为模式化海马形：

1) 序列 $\tau(p_1)\ldots,\tau(p_k)$中连续相同转向不超过两次。

2) 所得曲线恰好包含一个封闭有界区域。3) 头尾方向具有反射对称性。

这些约束使素数与合数模式数交错出现，从而形成更平滑的曲率和更自然有机的形状。



因此，海马代表了模式龙中的一个低熵子集，其特点是数字与因数之间的相互作用均衡。

5）解释性说明：模式龙镶嵌体现了一种对应关系：

算术结构 $\longrightarrow$符号转向 $\longrightarrow$几何形态。

这与以下领域中的构造相呼应：

- 符号动力系统
- 迭代函数系统
- 离散量子行走

尽管目前这一框架纯属娱乐性质，但它凸显了数论约束如何表现为空间组织形式，呼应了加德纳数学魔术的视觉语言。

B. 扩展海马曲线、自相似镶嵌与量子行走类比

前文引入的模式化海马曲线在经过迭代、组合与平移后，可以进一步进行结构细化。这些操作生成了呈现自相似性和局部约束的有序铺砌，其特征类似于晶体晶格和折叠生物分子链中的结构。

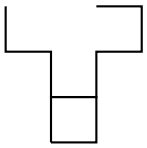
1）迭代海马曲线：令 $\Gamma_k^{(s)}$ 表示由前 k 个满足海马约束的模式数生成的模式化海马形。

定义迭代过程：

$$\Gamma_k^{(n+1)} = \Gamma_k^{(n)} \cup R_{\pi/2}(\Gamma_k^{(n)}) + \mathbf{v}_n,$$

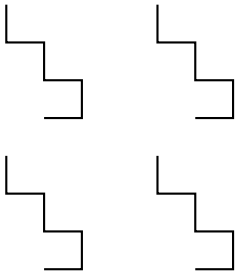
其中， $R_{\pi/2}$ 表示旋转 $\pi/2$ ，而$\mathbf{v}_n$ 是用于确保边缘对齐的平移向量。

下图展示了一条二阶海马曲线：



这种构造仿照了龙形曲线的递归折叠逻辑，同时保留了定义海马子类的数字–除数约束。

2）海马镶嵌与自相似性：通过排列 $\Gamma_k^{(s)}$ 经过旋转和反射的副本，可以得到具有重复图案的平面镶嵌。



这些镶嵌呈现出：

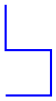
- 平移有序性
- 局部旋转对称性
- 重复曲率图案

自相似性并非仅源于缩放，而是源于从模式化数字转向序列中继承的重复符号折叠规则。

C. 高阶海马曲线与涌现复杂性

海马曲线通过迭代转向算子，由模式数递归生成。每提升一个阶次，都会添加前一条曲线旋转并平移后的副本，从而形成愈加复杂的图案。

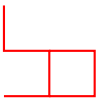
*1）1*阶：种子图案：1阶曲线最为简单，它遵循数字—除数规则，形成一条小型弯折路径：



1阶

观察：这条曲线紧凑且没有自相交，代表了基本的海马图案。

*2）2*阶：首次递归迭代：2阶曲线在一个末端节点处连接一条旋转后的1阶曲线副本：



2阶

观察：“尾部”开始卷曲，展现出早期的递归复杂性。

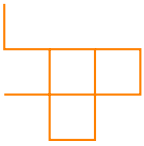
*3）3*阶：涌现自相似性：3阶添加了另一个旋转副本，形成了首批自交图案：



3阶

观察：小型子图案开始重复；曲线呈现出早期的类分形行为。

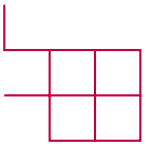
*4）4*阶：多层分支：在4阶时，分支和递归铺砌图案显著涌现：



4阶

观察：该曲线现在呈现出多个层次的递归弯曲，形成环圈以及早期的“海马状”螺旋。

5) 阶数 *5*：高阶复杂性： 阶数 5 生成了极其精细的图案，呈现出清晰的自相似性和嵌套环圈：



阶数 5

观察： 递归结构产生了密集的图案，让人联想到海马铺砌：重复的曲率、分支和重叠子图案自然涌现。这一阶数展示了海马构造的**涌现复杂性**：从简单的数字/除数规则中，涌现出丰富的分形般几何结构。

—

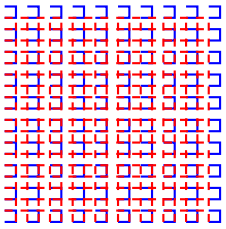
总结：随着阶数增加：

- 曲线的长度和覆盖范围不断增加。
- 递归子图案会在多个尺度上出现。
- 自相似性开始显现，图案嵌套于更大的图案之中。
- 这条曲线在视觉上近似于盘绕的“海马”，反映了生成它的算术规则。

D. 海马曲线：阶数 *10*（示意图）

在阶数 10 时，海马曲线变得极其复杂。在 TikZ 中直接绘制每一条线段并不切实际，但我们可以用示意图表示其递归结构，展示嵌套折叠和环圈。

阶数 10（示意图）



说明：

- 每个小方格代表低阶曲线的一个**基本折叠或线段**。- 红色虚线表示**递归折叠方向**，展示图案如何在网格中重复。- 此阶数的曲线包含**数百条线段**，形成**嵌套图案**、密集的环圈和远距离连接。- 虽然没有绘出每一条线段，但该示意图展示了复杂度如何随着阶数增加而**呈指数级增长**。

注意： 对于实际的高阶曲线（阶数为 10+），最好使用 **Python/Matplotlib** 或**矢量图形软件**，因为 TikZ 在绘制数百条线段时内存效率不高。

IX. 图与量子行走解释

每个模式化数 p_n 都对应有向图 $G = (V,\ E)$ 中的一个顶点，其中：

$$V = \mathcal{P},\quad (p_n, p_{n+1}) \in E.$$

在 G 上定义一个硬币空间为以下形式的离散时间量子行走：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{position}} \otimes \mathcal{H}_{\text{turn}},\quad \mathcal{H}_{\text{turn}} = \text{span}\{|L\rangle, |R\rangle\}.$$

转向算子为：

$$U_\tau |p_n\rangle |c\rangle = |p_{n+1}\rangle |\tau(p_n)\rangle.$$

从几何上看，每个量子步对应一次单位位移和旋转，并在期望空间中重现海马曲线。

1) 绝热解释与能量景观：在绝热框架中，可以定义一个哈密顿量：

$$H = \sum_n E(p_n)|p_n\rangle\langle p_n|,$$

其中 $E(p_n)$编码：

- 因数–数字匹配的数量
- 相关路径的局部曲率

海马曲线构型之所以对应低能态，是因为：

- 平衡的左转/右转
- 最少自交
- 单一有界区域

2) 材料科学与蛋白质折叠类比： 模式化海马形镶嵌呈现出引人入胜的类比：

a) 晶体：

- 模式数 →原子位点
- 转向规则 → 键角
- 铺砌周期性 →晶格对称性*b)* 蛋白质

折叠。*：*

- 模式化序列 →氨基酸链
- 左转/右转 →骨架扭转
- 海马约束 →天然折叠态

在这两种情况下，全局有序性都源于局部符号约束，这呼应了模式化数定义的算术来源。

3) 海马框架总结：发展过程：

Patterned Numbers
↓
Turn Sequences
↓
Seahorse Curves
↓
Tilings
↓
Quantum Walks

说明一个简单的娱乐性定义如何生成丰富的几何与物理类比。尽管这一框架带有推测性，但它与加德纳的哲学相契合：富有趣味的数学往往会揭示出意想不到的结构统一性。

A. 将转向算子扩展至耦合量子振子

前文引入的转向算子 $\tau(p_n)$ 可以超越几何解释，扩展用于描述沿模式化数图排列的量子振子之间的耦合规则。这一扩展在符号算术结构与基于物理原理的哈密顿系统之间架起了一座桥梁。

1) 模式化节点的振子表示：为每个模式化数 p_n 关联一个量子谐振子，其湮灭算子和产生算子 $(a_n, a_n^\dagger)$ 满足正则对易关系：

$$[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{nm}.$$

希尔伯特空间表示为：

$$\mathcal{H} = \bigotimes_n \mathcal{H}_n,$$

其中， $\mathcal{H}_n$ 对应于节点 p_n处的振子。

2）转向诱导耦合算子：定义相邻振子之间的转向相关耦合算子：

$$H_{\text{int}} = \sum_n g_{\tau(p_n)} \left(a_n^\dagger a_{n+1} + a_{n+1}^\dagger a_n \right),$$

其中：

$$g_{\tau(p_n)} = \begin{cases} g_L, & \tau(p_n) = L, \\ g_R, & \tau(p_n) = R. \end{cases}$$

因此， p_n 的算术结构会直接调制振荡器之间的耦合强度。

3) 耦合不对称性的几何解释：最初被定义为几何转向的左右之分，如今有了物理意义：

- *L*-转向对应于建设性耦合对齐
- *R*-转向对应于受挫或相移的耦合

从这个意义上说，海马约束（有界曲率和平衡转向）会形成受挫程度更低、相干性更强的振荡器网络。

4) 绝热演化与简正模：考虑总哈密顿量：

$$H(s) = (1-s)H_0 + sH_{\text{int}}, \quad s \in [0,1],$$

其中 $H_0 = \sum_n \omega_n a_n^\dagger a_n$。

绝热演化有利于局域在模式化海马子图上的低能简正模。这些模对应于平滑的几何曲线，且自交最少，呼应了海马镶嵌的稳定性。

5）物理类比：*a*）声子

晶体：

- 振荡器 →晶格位点
- 转向算子 →方向性键各向异性
- 海马 →低能声子带*b*）激子输运：

- 图案化节点 → 发色团位点
- 转弯调制耦合 → 相位相干路径
- 海马图 → 高效传输通道*c)* 蛋白质折叠景观：

- 振荡器 →局部构象模式
- 耦合符号 →空间位阻与能量约束
- 海马 →天然态流形

6）诠释性总结：扩展转向算子定义了一种符号到物理的对应关系：

Digit–Divisor Pattern
↓
Turn Operator
↓
Coupling Geometry
↓
Collective Modes

这一构造表明，算术约束可以充当结构化振荡器网络的生成器，从而将趣味数论与凝聚态物理和量子动力学中使用的模型联系起来。

B. 模式化素数、间隙与有向无环图表示

研究模式数的一项重要观察是，并非所有素数都是模式化的。在基于数字—因数的分类框架中，这一区分既精确又有意义。将模式数和素数表示为有向图时，其分布自然形成**有向无环图（DAG）**，其中的边表示顺序依赖关系或“轮次依赖关系”。

1) 定理：模式化素数的刻画：**定理**。素数 p 是模式化的（十进制），当且仅当满足以下条件之一：

1) $p \le 9$，或
2) the digit 1 出现在 p 的十进制表示中。

证明。设 p 为素数。则 $D(p) = \{1, p\}$，即因数集合。

- 如果 $p \le 9$，那么 $p \in D(p) \cap \Delta(p)$，因此 p 是模式化的。
- 如果 $p > 9$，则 $\{1, \ldots, 9\}$ 中唯一的因数是 1。因此，p 是模式化的，当且仅当数字 1 出现在 p中。

该定理使我们能够在构建跟踪模式化数字序列的有向无环图时，区分**稳定节点**（含数字 1 的素数）与**间隙**（不含数字 1 的素数）。

2）图与振子解释：在受模式化素数启发的有向无环图表示中：

- **含数字 1 的素数：** 充当低曲率节点或高度连接的顶点。这些节点构成序列有向无环图的骨架，类似于海马曲线中的平滑转弯。
- **不含数字 1 的素数：** 充当间隙或连接稀疏的节点。它们的缺失造成了“缺失连接”，并使有向无环图中出现不规则性。

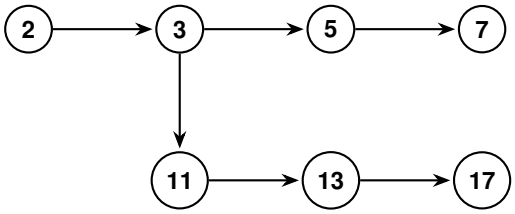
生成的有向无环图是**无环的**，因为边始终从较小的数字指向较大的数字（反映了按顺序生成的过程），但图中呈现出丰富的结构：密集连接的区域与间隙交错分布。

3）涌现结构特征：模式化素数的不规则分布会带来：

- **非周期性：** 模式化节点沿数轴非周期性地出现。
- **结构化无序：** 有向无环图的连通性在密集簇与稀疏间隙之间交替。
- **振子模型中的谱行为：** 将这些有向无环图视为耦合振子时，它们会产生反映不规则连通性的简正模；其中一些模式局限于簇中，另一些则延伸至稀疏区域。

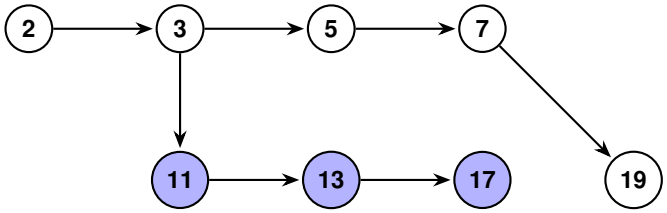
4）受模式化素数启发的有向无环图示例：模式化素数形成了有趣的连通结构：一些素数（包含数字 1 的素数）充当“低曲率”节点，而其他素数则形成间隙。我们可以将这些结构表示为**有向无环图（DAG）**，其中的边表示顺序连接或模式化素数之间的连接。

a) 1. 简单顺序有向无环图：该有向无环图展示了顺序依赖关系（边从左向右）以及作为垂直连接的模式化素数（包含 1 的节点）。



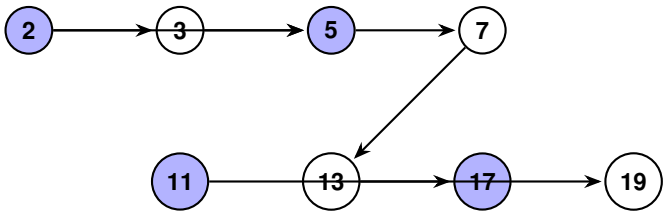
说明： 垂直边表示通过模式化素数（包含 1 的节点）形成的连接，展现了原本顺序结构中的额外连通性。

b) 2. 带间隙的聚类有向无环图：这里引入了受海马铺砌启发的簇和间隙。蓝色节点是模式化素数。



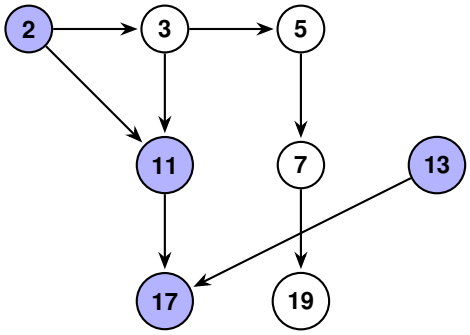
说明： 蓝色节点之间的垂直边形成簇，簇之间由间隙隔开，反映了模式化素数的不规则分布。

c) 3. 由间隙分隔的两个簇：该有向无环图展示了由间隙（灰色节点）分隔的两个模式化素数簇。



说明： 蓝色节点形成垂直连接的簇，而间隙则打断了水平连通性，模仿出一种结构化的无序状态。

d) 4. 多层海马启发式有向无环图：该有向无环图强调跨多个层级的分支，其灵感来源于海马铺砌和递归折叠。



说明：多层分支模拟递归铺砌逻辑。蓝色节点（模式化素数）形成垂直／对角连接，而间隙造成不规则的间距，呈现出类似海马铺砌图案的形态。

X. 结论

模式数展示了简单的数字和因子相互作用如何产生一个出人意料地稠密且结构化的整数族。尽管其本质上具有趣味性，但这种分类促使人们进一步研究进制依赖性、渐近密度和算子式解释。

并非所有素数都是模式数，这一事实是特征，而非缺陷。这种不规则性引入了复杂性、自相似性以及具有物理可解释性的结构，使模式数数列在图形、几何和量子启发式模型中既富有数学趣味，又具有结构上的实用价值。

参考文献

[1] M. Gardner, 《数学游戏》, 《科学美国人》, 1956—1981年。 [2] R. K. Guy, 《数论未解问题》, 施普林格, 2004年。 [3] N. J. A. Sloane 等, 《在线整数数列百科全书》, 2025年。[4] B. C. Hall, 《数学家的量子理论》, 施普林格, 2013年。 [5] V. Katz, 《数学史》, 培生, 2009年。

披露声明

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性

与本研究相关的数据和代码可根据合理请求向通讯作者获取。

量子-库拉莫托-振荡器-网络-图模拟（Q-KONGS）源代码可在此处获取：
https://github.com/MuonRay/Quantum-Kuramoto-Oscillator-Network-Graph-Simulation

[本材料基于爱尔兰科学基金会（SFI）支持的研究成果，并在13/RC/2077和13/RC/2077-P2号资助项目下由欧洲区域发展基金共同资助。]