arXiv:2601.07902v1 [math.AT] 12 Jan 2026

二项式环，以及紧致环面排列补空间的整系数同调

Alexey G. Gorinov，Alexander V. Zakharov

摘要

紧致环面 $T=(S^1)^n$ 的一个 *affine subtorus* 是李子群的一个平移副本。给定这类子环面的有限集合 $T_1,\dots,T_k$，以及一个素数 p，我们描述了一个显式链复形，用于计算群 $H_*(T-\bigcup_{i=1}^k T_i,\mathbb{Z}_{(p)})$。我们的主要工具是 T. Ekedahl 为空间构造的二项式模型。我们利用这些结果来表示群 $H_*(T-\bigcup_{i=1}^k T_i,\mathbb{Z})$。我们还证明，收敛到 $T-\bigcup_{i=1}^k T_i$ 同调的 Mayer–Vietoris谱序列在有理系数下于第二页退化；对于排列 $T_1,\dots,T_k$ 满足某些假设时，在整系数下也于第二页退化，且后一种情况下所有延拓问题都是平凡的。

1 引言

关于补空间 $T-\bigcup_{i=1}^k T_i$（其中 T 是复代数环面（$\mathbb{C}^*$）^{n}，且 $T_1,\dots,T_k$ 是（可能经过平移的）复代数子群）的拓扑，文献中已有相当多的研究成果。

例如，对于任意的子环面排列 T_i，L. Moci 和 R. Pagaria 在 [14] 中描述了 $\cup_i T_i$ 的一点紧化的同伦型。此外，存在一个 T 的自同构，将每个 T_i 映射到 $\mathbb{C}^n\supset(\mathbb{C}^*)^n=T$ 中闭合的子群。利用这一观察，可以应用 Alexander对偶来恢复 $T-\cup T_i$ 的整系数上同调的加法结构。作为推论，作者们得出开嵌入 $T-\cup_i T_i\subset T$ 在 E_2 处的整系数 Leray谱序列退化。这给出了 $H^*(T-\cup_i T_i)$ 的乘法结构，差一个取伴随分次环。C. De Concini 和 G. Gaiffi [4]，给出了关于 $T-\cup_i T_i$ 的有理同伦型的更精确结果；对于余维一排列的情形，F. Callegaro 和 E. Delucchi [5]，以及 F. Callegaro、M. D'Adderio、E. Delucchi、L. Migliorini 和 R. Pagaria [3] 给出了关于整系数上同调的更精确结果。不过，我们尚不清楚这些结果是否能够计算 $H^*(T,\cup_i T_i)$。

然而，假设 T 是紧致环面 $T=(S^1)^n$，而 $T_1,\dots,T_k\subset T$ 是有限个（可能经过平移的）李子群。这是本文余下部分所采用的记号。若 T 和所有 T_i 都是复代数的（且每个 $T_i\subset T$ 都是复代数簇之间的闭嵌入），则可以给出 $T-\bigcup_{i=1}^k T_i$ 的有理同伦型的一个模型，参见 A. Zakharov [15]。此外，P. Kalugin 在 [11] 中计算了若干情形下的有理贝蒂数。以上就是我们所知的已有结果。

本文的目标是计算 $T^n-\bigcup_{i=1}^k T_i$ 的同调群，其系数取在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 和 $\mathbb{Q}$ 中，参见定理 1、2、3 和 4。有理情形（定理 3）是一个实践示例：它只用到经典的 Mayer–Vietoris谱序列，但也说明了在系数更复杂时应当关注什么。为处理 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 情形（定理 1），我们使用余单纯二项代数。我们不知道如何用更标准的方法解决这个问题。

关于用二项式代数对同伦型建模的一般结果，以及其与 Grothendieck的概形化计划的关系，读者可参阅 T. Ekedahl [8] 和 B. To¨en [17] 的论文，以及 G. Horel [7] 和 B. Antieau [1]后续的研究。作为例证，阿贝尔 Eilenberg-Maclane空间的奇异上链是自由导出二项式代数。此外，取值于导出二项式代数的上链函子，给出了幂零空间的同伦范畴的全忠实嵌入。值得将此结果与 M. Mandell 的一项著名结果进行比较：他在 [13] 中证明，取上链

函子取值于整数上的 E_∞-代数（甚至是导出交换代数）时，只能给出一个忠实嵌入。R. Porter 和 A. Suciu 在 [16] 中研究了幂零 $K(\pi, 1)$ 的情形。在本文中，我们将最简单的 Eilenberg-MacLane 空间——即环面——的二项式模型应用于编排的补空间。

定理 2 对于系数取自一般二项式环 R （例如取自 $R = \mathbb{Z}$）的同调，给出了一个比定理 1 稍简单的答案，前提是所有 T_i's 的交集都是道路连通的。进一步假设函子 $I \mapsto H_1(\bigcap_{i\in I} T_i,\ \mathbb{Z})$ 从 $\{1, \dots, k\}$ 的子集到自由阿贝尔群的函子可以提升为到自由群的函子。于是我们证明（定理 4），Mayer–Vietoris谱序列的第一页就已经给出了答案，这与有理情形（定理 3）相同。

定理 1 和定理 2 给出的上链复形具有无限秩，但很容易找到适当的截断，从而得到具有相同同调的有限秩复形，分别参见推论 2 和 1。将推论 2（或定理 1）与对挠素数集合的一个界（命题 3）结合起来，就可得到 $T^n - \bigcup_{i=1}^k T_i$ 任意仿射子环面排列的整系数同调，其中 T。

我们还想提到，在 J. Bellissard [2] 和 P. Kalugin [11] 研究的准晶体理论中，某个准周期结构的 hull 的同调群与对于某些 T和 $T_1, \dots, T_k$的选择而言的 $T^n - \bigcup_{i=1}^k T_i$的同调群同构。这一事实是本项目最初的动机。

本文的组织结构。 我们在第 2 节陈述主要结果，并在第 3 节和第 4 节中证明这些结果。

致谢。 感谢 Pyotr Pushkar 告知我们这一问题，也感谢 Pavel Kalugin 向我们解释其在物理学中的应用。第二作者感谢 Dmitry Kubrak、Pierre Godfard 和 Grigory Solomadin 就二项式代数和托里克图展开富有启发性的讨论。

2 主要结果及一些评论

2.1 记号与主要结果

现在我们将回顾主要结果所需的相关要素。

一些记号和约定。我们用 $\triangle$ 表示单纯形范畴 （其对象是集合$[n] = \{0, \dots, n\}$、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，态射是保序映射）。此外，令 $\square_k$为 k-立方范畴 （其对象是 $\{1, \dots, k\}$的子集，态射是包含映射）。若 $\mathcal{C}$是一个范畴，那么函子 $\triangle^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$和 $\triangle \longrightarrow \mathcal{C}$、$\square_k^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$和 $\square_k \longrightarrow \mathcal{C}$分别称为 $\mathcal{C}$中的单纯、余单纯、立方和余立方对象。若 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是范畴，我们用 $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$表示函子$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$范畴。

以下所有环均假定为含恒等元的结合环。所有环映射均假定将 1 映到 1。设 A 为一个交换环。我们用 A-mod 表示 A-模范畴。我们将 $\mathbb{Z}$-mod 简记为阿贝尔群。我们用 $C^{\geq 0}(A)$ 表示由 A-模构成的非负分次上链复形范畴。

若 H 是一个阿贝尔群，我们令 $H[i]$ 为置于次数 $-i$ 的复形，并将其视为上链复形；有时也用 H 代替 $H[0]$。

设 $X_1, \dots, X_k \subset T$是一族子空间。对于非空的 $I \subset \{1, \dots, k\}$，令 $X_I := \bigcap_{i\in I} X_i$，并定义 $X_\varnothing := T$。

二项式单子。回顾一下，若交换环 R的底层阿贝尔群无挠，并且对于任意 $x \in R$和 $l \in \mathbb{Z}_{>0}$，二项式系数 $\binom{x}{l} := {}^{x}{}_{(x-1)\cdots(x-l+1)}\, l! \in R \otimes \mathbb{Q}$ 实际上属于 R，则称其为二项式环。二项式环的例子包括在任意（可以为空）素数集合处局部化的 $\mathbb{Z}$，以及任意 $\mathbb{Q}$-代数。二项式环（以及任意环映射）构成一个双完备范畴。从二项式环到阿贝尔群的遗忘函子有一个左伴随，记作 Bin。将 Bin 视为函子 Ab $\longrightarrow$Ab 时，它是一个单子。

自由二项式环 Bin($\mathbb{Z}^m$) 在 $\mathbb{Z}^m$ 上是由 $\mathbb{Q}[t_1, \dots, t_m]$ 中在整数点处取整数值的多项式构成的环；作为一个环，Bin($\mathbb{Z}^m$) 由二项式系数 $\binom{t_i}{l} = {}^{t_i}{}_{(t_i-1)\cdots(t_i-l+1)}\, l!$

对于 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。我们将 Bin 逐对象地扩展为一个单子

$$\mathrm{Bin} : [\triangle, \mathrm{Ab}] \longrightarrow [\triangle, \mathrm{Ab}]$$

在余单纯阿贝尔群范畴 $[\triangle, \mathbf{Ab}]$ 上；根据 Dold-Kan 对应，它等价于 $C^{\geq 0}(\mathbb{Z})$，从而得到一个单子

$$\mathrm{Bin} : C^{\geq 0}(\mathbb{Z}) \longrightarrow C^{\geq 0}(\mathbb{Z}).$$

我们将交替使用 Bin 的这两个版本。

稍微推广上述内容，假设 A 是一个二项式环。A 上的二项式代数，或二项式A-代数，是一个配备环映射 $A \longrightarrow R$ 的二项式环 R。从二项式 A-代数范畴到 A-模范畴的遗忘函子有一个左伴随，记为 $\mathbf{Bin}_A(-)$；将其视为 A- 模上的自函子时，它是一个单子。例如，$\mathbf{Bin}_A(A^m) = \mathbf{Bin}(\mathbb{Z}^m) \otimes_{\mathbb{Z}} A$。与 $A = \mathbb{Z}$ 一样，二项式 A- 代数范畴是双完备的。逐字重复上述构造，我们得到一个单子，记为 $\mathbf{Bin}_A$，它定义在余单纯 A-模范畴上，或者等价地定义在 $C^{\geq 0}(A)$ 上。

有关二项式代数的更多信息，请参阅 [8, 9, 7, 12] 。

上链复形 A^*。我们将 $T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$视为同一对象，并令 $pr: \mathbb{R}^n \longrightarrow T$为投影。对于一个连通的 仿射子环面 $T' \subset T$和一个子环 $R \subset \mathbb{R}$，现在定义德拉姆代数 $\Omega^*(U)$的 R-模的上链子复形 $A^*(T', R)$，其中 U 是 T'的管状邻域。我们将$\langle m_1、\ldots\ldots、 m_l\rangle$ 记作由 $m_1、\ldots\ldots、 m_l \in M$生成的 R-模 M的 R-子模。

复形 $A^*(T', R)$将集中在次数 0 和 1 上。次数 1 的分量 $A^1(T', R)$定义为 $\langle dx_1|_U、\ldots\ldots、 dx_n|_U\rangle$，其中 $x_1、\ldots\ldots、 x_n$是 $\mathbb{R}^n$中的标准坐标。次数 0 的分量$A^0(T', R)$是由所有连续函数 $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ 生成的 R-模，这些函数在将 f提升到$pr^{-1}(U)$后，在每个道路连通分支上满足

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 \tag{1}$$

对于某个 $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n \in R$， f在 T' 上的子空间上为常数（此处 a_0可能取决于分量）。

注意到， $A^1(T', R)$ 可自然地识别为 $\langle dx_1, \ldots\ldots, dx_n\rangle$，而 $A^0(T', R)$ 与 $\langle 1, f_1, \ldots\ldots, f_{n-\dim T'}\rangle$ 非自然同构，其中 $f_1, \ldots\ldots, f_{n-\dim T'}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是定义切空间 $T_{T'} \subset \mathbb{R}^n$ 的整数系数线性函数。后者是有意义的，因为向量子空间 $T_{T'}$自动定义在 $\mathbb{Z}$ 上：从 $T_{T'}$到 T'的指数映射的核是一个自然的子格。元素 $1 \in A^0(T', R)$ 定义良好，并且由 T'的连通性可知，其类张成 $H^0(A^*(T', R))$。

注 1。注意，除了 $A^*(T', R)$ 之外，还可以考虑函子 $\tau_{\leq 1}C^*_{\mathrm{sing}}(T', R)$ 和 $H^0(T', R) \oplus H^1(T', R)[-1]$。后者可以看作前者关于典范滤过的“伴随分次”版本。在下文中我们将看到， $A^*(T', R)$ 是 $\tau_{\leq 1}C^*_{\mathrm{sing}}(T', R)$ 的一个易于处理的模型。

二项式代数。现在假设 R 是二项式的。令 $A^* \in C^{\geq 0}(R)$，并设我们有一个 A^* 的余增广，即一个上链映射 $R \longrightarrow A^*$，其中左侧的 R 位于次数 0。我们将 $B(A^*)$ 定义为下图中（余单纯形）二项式代数的推出：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bin}\, R & \longrightarrow & R \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathrm{Bin}(A^*) & \longrightarrow & B(A^*). \end{array} \tag{2}$$

这里左上角的 $\mathrm{Bin}\, R$ 是将 Bin 应用于 R 的 0 次部分。左侧的竖直箭头是对余增广 $R \longrightarrow A^*$应用 Bin。顶部的水平箭头是 R上的 Bin-代数结构，它通过将R值多项式在 1 处求值来定义。具体而言， $B(A^*) = \mathbf{Bin}(A^*) \otimes_{\mathrm{Bin}(R)} R$，其中张量积是范畴中余单纯模上的（常值）余单纯环 $\mathbf{Bin}(R)$所定义的逐对象张量积。

注意，对于连通仿射子环面 $T' \subset T$，我们有一个自然余增广 $R \longrightarrow A^*(T',\ R)$，它将 $1 \in R$ 映射到 $1 \in A^0(T',\ R)$，因此上述构造给出了一个二项式代数 $B(A^*(T',\ R))$。对于 $I \subset \{1, \ldots, k\}$，我们令 $B(T_I,\ R)$ 为所有道路连通分支 $T' \subset T_I$ 对应的 $B(A^*(T',\ R))$ 的直和。

一些余立方上链复形。令 R 为一个二项式环。于是我们有以下函子 $\square_k \longrightarrow C^{\geq 0}(R)$，即由 R-模构成的余立方上链复形：

$$I \mapsto B(T_I, R),\ I \mapsto \mathrm{Bin}(H^1(T_I, R)[-1]).$$

（仅当所有 T_I 均道路连通时，我们才会使用其中的第二个函子。）

此外，对于任意交换环 R，我们有函子 $\square_k \longrightarrow C^{\geq 0}(R)$，其定义为

$$I \mapsto H^*(T_I, R),$$

其中，我们将右侧视为微分为零的上链复形。

Mayer–Vietoris 构造。回顾一下，从一个余立方上链复形 $\{C_I^*\}_{I \subset \{1,\ldots,k\}}$ 出发，可以如下构造一个双复形。令

$$C^{p,q} := \bigoplus_{|I|=p} C_I^q.$$

我们有微分 $d\colon\ C^{p,\ q} \longrightarrow C^{p,\ q+1}$，它由各个复形 C_I^* 的微分诱导而来。我们还有组合微分 $\delta\colon\ C^{p,\ q} \longrightarrow C^{p+1,\ q}$，其定义为

$$(\delta c)_{I=\{i_1<\cdots<i_{p+1}\}} := \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} c_{I\setminus\{i_j\}}|_I.$$

这里 $c = (c_J) \in C^{p,\ q}$ 以及 $\delta c = ((\delta c)_I) \in C^{p+1,\ q}$ 其中 $I,\ J \subset \{1, \ldots, k\},\ |J| = p$，且 $|I| = p + 1$。右侧的限制映射 $C_J^q \longrightarrow C_I^q$ 由包含映射 $J \subset I$ 诱导。

微分 d 和 δ 可交换。这使得 $(C^{p,\ q})$ 成为一个双复形，我们称之为 $\{C_I^*\}$ 的*Mayer- Vietoris* 双复形，并记作 $\mathrm{MV}(\{C_I^*\})$。对于由此得到的全复形，我们也采用相同的记号。

结果。现在我们可以陈述主要结果。

定理 1。设 p 是一个素数。复形 $\mathrm{MV}(\{B(T_I, \mathbb{Z}_{(p)})\})$ 计算上同调

$$H^*(T, \bigcup_{i=1}^k T_i, \mathbb{Z}_{(p)}) \cong H_{\dim T - *}(T - \bigcup_{i=1}^k T_i, \mathbb{Z}_{(p)}).$$

如果我们希望删除的仿射子环面的所有交集都是道路连通的，那么答案可以简化为：

定理 2. 假设所有非空交集 $T_I, I \subset \{1, \ldots, k\}$ 均为道路连通的，并设 R 是一个二项式环。复形 $\mathrm{MV}(\{\mathrm{Bin}(H^1(T_I, R)[-1])\})$ 计算上同调

$$H^*(T, \bigcup_{i=1}^k T_i, R) \cong H_{\dim T - *}(T - \bigcup_{i=1}^k T_i, R).$$

一切变得更加简单如果我们转而关注系数取自 $\mathbb{Q}$-代数中的同调，则情况会进一步简化

a:**定理 3**。设 R 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。复形 $\mathrm{MV}(\{H^*(T_I, R)\})$ 计算上同调

$$H^*(T, \bigcup_{i=1}^k T_i, R) \cong H_{\dim T - *}(T - \bigcup_{i=1}^k T_i, R).$$

从某种意义上说，定理 3 给出了所能期望的最小模型。我们不知道如果不再假设 R 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，该定理的结论是否仍然成立，但这里有一个关于这一方向的部分结果。

定理 4. 假设每个交集 $T_I, I \subset \{1,\dots,k\}$ 都是道路连通的，并且函子$I \mapsto H_1(T_I;\mathbb{Z})$ 从 $\square_k$ 到 阿贝尔群 可提升为一个取值于自由群的函子。

那么复形 $\mathrm{MV}(\{H^*(T_I;\mathbb{Z})\})$ 计算上同调

$$H^*(T, \bigcup_{i=1}^k T_i, \mathbb{Z}) \cong H_{\dim T - *}(T - \bigcup_{i=1}^k T_i, \mathbb{Z}).$$

注 2. 事实上，可以证明一个更一般的结果。所有交集 T_I的连通分支构成一个偏序集 $\mathcal{C}$，它通过自然的偏序集映射 $\mathcal{C} \longrightarrow \square_k$细化 $\square_k$。再次假设函子 $H_1(-,\mathbb{Z})$ 从 $\mathcal{C}$ 到阿贝尔群可提升为一个取值于自由群的函子。注意，构造 $A^*(-,\mathbb{Z})$ 可视为一个形状为 $\mathcal{C}$ 的二项复形图表。假设该图表与 $H^*(A^*(-,\mathbb{Z}))$ 拟同构，并且这一拟同构由一条在上同调上诱导恒等映射的拟同构交错链给出。（正如我们将在引理 8 中看到的，当假设所有 T_I 都是道路连通时，后一假设自动成立。）

那么，复形 $\mathrm{MV}(\{H^*(T_I;\mathbb{Z})\})$ 仍可计算 $H_{\dim T-*}(T - \bigcup_{i=1}^k T_i, \mathbb{Z})$。

我们在第 3 节证明定理 1、2 和 3，并在第 4 节证明定理 4。

2.2 评论

首先，我们来看看定理 1 和 2 为什么实际上为计算 $T - \bigcup_{i=1}^k T_i$ 的同调群提供了一个有限步骤的方案。（定理 3 和 4 的情形则显而易见。）

界定挠元。定理 1 只给出了一个 p-局部答案。我们来找出一个素数集合，其中包含所有满足 $H_*(T - \bigcup_{i=1}^k T_i, \mathbb{Z})$ 存在 p-挠元的素数 p。我们可以利用下面的命题来做到这一点。

命题 3。设 p 为一个素数。$H_*(T - \bigcup_{i=1}^k T_i, \mathbb{Z})$ 的 p-挠元子群的基数整除 $\mathrm{MV}(\{H^*(T_I^*, \mathbb{Z})\})$的基数。

我们将在第 3 节证明这个命题。

有限秩模型。接下来注意，若 $T' \subset T$ 是仿射子环面，且 R 是二项式环，则上链复形 $B(T', \mathbb{Z}_{(p)})$ 和 $\mathrm{Bin}(H^1(T', R))$ 都是无限秩的，其中一个原因是：如果 $m > 0$，$\mathrm{Bin}(\mathbb{Z}^m)$ 作为阿贝尔群具有无限秩。因此，我们希望将每个 $B(T', \mathbb{Z}_{(p)})$ 和 $\mathrm{Bin}(H^1(T', R))$ 替换为有限秩上链复形，并使其关于 T' 具有函子性。

单子 Bin : 阿贝尔群 $\longrightarrow$阿贝尔群具有自然的二项式 滤过 $(\mathrm{Bin}_{\leq i})_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，其由子函子构成。例如，$\mathrm{Bin}(\mathbb{Z}^m)_{\leq i}$ 是所有满足以下条件的多项式 $\in \mathbb{Q}[t_1,\dots,t_m]$ 构成的加法群：在整数点处取整数值，且次数为 $\leq i$；所有群 $\mathrm{Bin}(\mathbb{Z}^m)_{\leq i}$ 都是有限秩自由阿贝尔群。

将所有对象与二项式环 R 张量后，我们在 Bin_R 上得到一个滤过 $(\mathrm{Bin}_{R,\leq i})_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$。我们将此滤过逐对象扩展到 Bin_R： $[\triangle, R\text{-模}] \longrightarrow [\triangle, R\text{-模}],$，从而扩展到 Bin_R： $C^{\geq 0}(R) \longrightarrow C^{\geq 0}(R)$。

令 $\tau_{\leq i}$ 表示上链复形上的典范滤过函子。

引理 1. 设 R 为二项式环，且 A 为有限生成自由 R-模。那么，$\mathrm{Bin}_R(A[-1])$ 上的典范滤过与二项式滤过等价：对任意 $N \geq m$，映射

$$\tau_{\leq m}\,\mathrm{Bin}_{R,\leq N}(A[-1]) \longleftarrow \tau_{\leq m}\,\mathrm{Bin}_{R,\leq m}(A[-1]) \longrightarrow \mathrm{Bin}_{R,\leq m}(A[-1])$$

都是拟同构。

证明。函子 $\mathrm{Bin}_{R,\leq m}(-)/\mathrm{Bin}_{R,\leq m-1}(-)$自然同构于第 m 个除幂函子$\Gamma^n(-)$，参见 [12,注 2.8]。因此，二项式滤过导出一个谱序列

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(\Gamma^{-p}(A[-1])) \implies H^{p+q}(\mathrm{Bin}_R(A[-1])).$$

我们有 d´ecalage 同构 $\Gamma^{-p}(A[-1]) \cong \Lambda^{-p}(A)[p]$，其中 $\Lambda^*(-)$ 是格拉斯曼（或外）代数函子，参见 [10, (4.3.5)]。因此我们有 $E_1^{pq} = H^{2p+q}(\Lambda^{-p}A)$，这意味着项 E_1^{pq} 在直线 $2p+q=0$之外均为零，故谱序列在 E_1处退化。因此映射

$$H^*(\mathrm{Bin}_{R,\leq -p}(A[-1])) \longrightarrow H^*(\mathrm{Bin}_R(A[-1]))$$

同构于 Grassmann代数 $\Lambda^*(A)$ 中 $\Lambda^{\leq -p}(A)$ 的包含映射。这意味着二项式滤过与典范滤过等价。

□

This 可以据此构造定理给出的上链复形的有限秩模型 2:

推论 1. 我们沿用定理 *2* 中的记号和假设。令

$$I \mapsto \tau_{\leq \dim T} \mathrm{Bin}_{\leq \dim T}(H^1(T_I, R)[-1]), I \subset \{1, \ldots, k\} \tag{4}$$

我们得到一个余立方上链复形，其所有上链分量和立方分量的秩之和有限。相应的 *Mayer-Vietoris* 双复形的总上链复形计算

$$H^*(T, \bigcup_{i=1}^{k} T_i, R) \cong H_{\dim T - *}(T - \bigcup_{i=1}^{k} T_i, R).$$

□

注 3. 注意，在 (4) 中，对于所有 I，我们都取典范滤过和二项式滤过的第 dim T 项，尽管根据引理 1，对每个单独的 T_I而言，第 dim T_I 项就足够了。原因是我们需要所得结果成为 $\{\mathrm{Bin}(H^1(T_I, R)[-1])\}$ 的余立方上链子复形。

现在我们将其推广到非连通情形。考虑一个由有限生成的 R-模组成的余增广二项复形 $A^* = [A^0 \longrightarrow A^1]$。将余增广记为 $i\colon R \longrightarrow A^*$，并假设$H^1(A^*)$ 是自由 R-模，且 i 诱导出 H^0的同构。我们有由图式 (2) 给出的推出 $B(A^*)$。

引理 2. 推出 $B(A^*)$ 具有自然滤子 $B_{\leq}(A^*)$，其性质与引理 *1* 中的类似；也就是说，对任意 $N \geq m$，映射

$$\tau_{\leq m} B_{\leq N}(A^*) \longleftarrow \tau_{\leq m} B_{\leq m}(A^*) \longrightarrow B_{\leq m}(A^*)$$

都是拟同构。

证明。 余增广映射 $i\colon R \longrightarrow A^*$ 使 Bin(A^*) 成为一个（右）Bin(R)-模。对于给定的 N，我们将乘积 Bin$_{\leq N}(A^*) \cdot$ Bin(R) 通过 i视为 Bin(A^*) 的一个子复形。令

$$B_{\leq N}(A^*) = (\mathrm{Bin}_{\leq N}(A^*) \cdot \mathrm{Bin}(R)) \otimes_{\mathrm{Bin}(R)} R$$

其中，张量积仍取在 Bin(R) 上的余单纯模范畴中。所得结果与它在 $B(A^*)$ 中的像重合，参见图表 (2) 后的注释。注意，当 $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ 时， A^* 上的典范滤过可分裂（非典范地），从而给出一个滤化拟同构 $B(A) \longrightarrow$ Bin($H^1(A^*)[-1]$)。最后应用引理 1 即可。

□

推论 2. 我们沿用定理 *1* 的记号。通过设定

$$I \mapsto \tau_{\leq \dim T} B_{\leq \dim T}(T_I, R), I \subset \{1, \ldots, k\} \tag{5}$$

我们得到一个余立方上链复形，其中所有上链分量和立方分量的秩之和有限。相应 *Mayer-Vietoris* 双复形的总上链复形计算

$$H^*(T, \bigcup_{i=1}^{k} T_i, R) \cong H_{\dim T - *}(T - \bigcup_{i=1}^{k} T_i, R).$$

□

注 4。 注意，在 (5) 中，对于所有 I，我们再次取典范滤过和二项式滤过的 dim T 次项，参见注 3。

模型的规模。我们不知道定理 3 在将其中的 $\mathbb{Q}$ 替换为 $\mathbb{Z}$ 后是否仍然成立。如果成立，那么我们就能得到一个比推论 2 和 1 所给出的模型更小的上链复形，用来计算 $T-\bigcup_{i=1}^{k} T_i$ 的同调。下面来量化一下“更小”。下文中，我们用上链复形的总秩来表示其规模。取某个 T_I 的一个分量 T'，估算它所作贡献的规模。令 $r=\dim T'$。

对模型的贡献 T' 对定理 3 中模型的贡献就是 2^r，即 T' 上同调的总秩。

我们将此与推论 1 和 2 给出的模型进行比较。为了得到下文中的估计，我们使用余单纯群的非归一化 Moore 复形，而非 Dold-Kan 对应中的归一化版本；需要注意的是，前者的规模大于或等于后者。

设 $K^*=[K^0\longrightarrow K^1]$ 是一个由自由阿贝尔群构成、 K^0 位于零次的二项复形。回顾一下，对应于 K^* 在次数 m 的余单纯群的（非归一化）Moore 复形等于 $K^0\oplus(K^1)^{\oplus m}$。还要回顾一下，我们已令 $n=\dim T$。令

$$D(n,d):=\operatorname{rk}\operatorname{Bin}_{\leq n}(\mathbb{Z}^d)=\operatorname{rk}\operatorname{Sym}^{\leq n}(\mathbb{Z}^d)=\operatorname{rk}\operatorname{Sym}^{n}(\mathbb{Z}^{d+1})=\binom{n+d}{n}.$$

Th对应于 $\tau_{\leq n}\operatorname{Bin}^{\leq n}(H^1(T')[-1])$ 的 Moore 复形的大小小于或等于

$$D(n,n)+D(n,2n)+\cdots+D(n,nr). \tag{6}$$

这是 T' 对推论 1 中模型的贡献。它是 $T'=T$ 的贡献的 $\leq$，其为 $e^{(1+o(1))n\ln n}$，如 $n\longrightarrow\infty$，而一般而言，在假设 $1/r=o(1)$ 下，(6) 为 $\sim D(n,\ nr)=e^{(1+o(1))n\ln r}$，如 $n\longrightarrow\infty$。

类似地， $\tau_{\leq n}\operatorname{Bin}^{\leq n}(K^*)$ 的大小小于或等于总和

$$D(n,a+b)+D(n,a+2b)+\cdots+D(n,a+nb)$$

其中 $a=\operatorname{rk} K^0, b=\operatorname{rk} K^1$。这是当我们设定 $a=n-r+1$ 和 $b=n$ 时， T' 对推论 2 的模型的贡献。它关于 $n\longrightarrow\infty$ 是 $\leq e^{(1+o(1))n\ln n}$ 的，且对 r 一致。

3 定理 1、2 和 3 的证明

我们先作一些初步说明，这些说明在有理情形和 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 情形下都很有用。

一个谱序列。 若 $\{C_I^*\}_{I\subset\{1,\dots,k\}}$ 是余立方上链复形，则在双复形 $(C^{p,q})$ 上存在一个垂直滤过：$=\operatorname{MV}(\{C_I^*\})$：滤过的第 t 项是一个双复形，其 (p,q)-分量等于 $C^{p,q}$ 当 $p\geq t$ 时，其余情形为 0。该滤过诱导出一个谱序列，其

$$E_1^{p,q}=\bigoplus_{|I|=p} H^q(C_I^*)\implies H^*\big(\operatorname{MV}(\{C_I^*\})\big). \tag{7}$$

Mayer–Vietoris 原理。 现在我们将介绍标准上链复形，用于计算 T 模掉一族子空间之并的相对上同调。

设 R 是一个交换环，并假设环面 T 已经三角剖分，使得每个 T_i 都是子多面体。我们用 $C^*(-,R)$ 表示该三角剖分的单纯上链，其系数取自 R。若 X_1，……， X_k 是一个有限子多面体族，则 $I\mapsto C^*(X_I,R)$ 构成一个余立方上链复形， $I\mapsto\Omega^*(T_I)$ 也如此。

引理 3. $H^*(T,\bigcup_{i=1}^{k}X_i,R)$可由$\operatorname{MV}(\{C^*(X_I,R)\})$ 的全复形计算，其中 R 是任意交换环。此外， $H^*(T,\bigcup_{i=1}^{k}T_i,\mathbb{R})$可由$\operatorname{MV}(\{\Omega^*(T_I)\})$ 的全复形计算。

□

现在我们可以证明定理 1、2 和 3 了。我们先证明最后一个定理。

定理 3 的证明。 只需在 $R=\mathbb{R}$ 的情形下证明定理 3，因此我们作此假设。若 $T'\subset T$ 是一个仿射子环面，则存在包含映射 $H^*(T',\mathbb{R})\longrightarrow\Omega^*(T')$，它将每个类映到其平移不变代表元。此外，若 $T''\subset T'$ 是一个更小的仿射子环面，则下图交换：

$$\begin{array}{ccc} H^*(T',\mathbb{R}) & \longrightarrow & \Omega^*(T') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(T'',\mathbb{R}) & \longrightarrow & \Omega^*(T''). \end{array}$$

因此，我们得到一个余立方上链复形的映射 $\{H^*(T_I,\mathbb{R})\}\longrightarrow\{\Omega^*(T_I)\}$，它在每个立方分量上都是拟同构。利用谱序列 (7)，我们看到 Mayer–Vietoris 构造的全复形之间的映射也是拟同构。由此，定理 3 可由引理 3 得证。□

辅助引理。 这里我们证明若干引理，它们将在定理 1 和定理 2 的证明中用到。设 R 是一个二项式环。

设 $F\colon R\text{-模}\longrightarrow R\text{-模}$是一个函子。我们将 F逐对象扩展为函子 $[\triangle,R\text{-模}]\longrightarrow[\triangle,R\text{-模}]$，进而通过 Dold–Kan 等价将其扩展为函子 $C^*(R\text{-模})\longrightarrow C^*(R\text{-模})$。滥用记号，我们也用 F 表示这两种扩展。

引理 4. 函子 $F\colon C^*(R\text{-模})\longrightarrow C^*(R\text{-模})$ 保持有界上链复形之间的拟同构，其中这些复形由自由的非负分次 R-模构成。

证明。 这是 Dold 的一个标准结论。具体而言， $F\colon[\triangle,R\text{-模}]\longrightarrow[\triangle,R\text{-模}]$ 保持余单纯对象 $[6]$ 的映射之间的同伦。另一方面，在 Dold–Kan 等价下，余单纯同伦映为上链同伦。因此， $F\colon C^{\geq 0}(R\text{-模})\longrightarrow C^{\geq 0}(R\text{-模})$保持上链同伦。最后注意，由投射项构成的有界复形之间的拟同构是同伦等价。

□

设 A^* 是一个 R-模的上链复形，并配有余增广 $i\colon R\longrightarrow A^*$。$i$ 的 分裂 是一个上链映射 $p\colon A^*\longrightarrow R$，满足 $p\circ i$ 是 R 的恒等映射。

引理 5。 设 $A_1^*\longrightarrow A_2^*$ 是由自由 R-模构成的有界余增广非负分次上链复形之间的拟同构。假设这两个复形 A_1^* 和 A_2^* 各自的余增广都有分裂。那么，Bin_R-代数（见图 *(2)*）的诱导映射 $B(A_1^*)\longrightarrow B(A_2^*)$ 也是拟同构。

证明。 关于引理 2 中的二项式滤过，伴随分次复形之间的诱导映射等于 $\Gamma(A_1^*/R)\longrightarrow\Gamma(A_2^*/R)$。由引理 4 应用于拟同构 $A_1^*/R\longrightarrow A_2^*/R$ 可知，它是拟同构，因此 $B(A_1^*)\longrightarrow B(A_2^*)$ 也是拟同构。

□

引理 6. 设 A^* 是一个由自由 R-模组成的有界余增广非负分次上链复形。假设 A^* 的余增广存在一个分裂 $p\colon A^*\longrightarrow R$。

那么，诱导的复合映射$\mathrm{Bin}(\ker p)\longrightarrow\mathrm{Bin}(A^*)\longrightarrow B(A^*)$ 是一个拟同构。

证明。 由于 $A^*\cong R[0]\oplus\ker p$，我们有 $B(A^*)\cong\mathrm{Bin}(\ker p)$。 □

注记 5。 将上述引理应用于所有无挠 R-模构成的较大范畴会很方便。具体而言，对于无挠群 $A\in\mathrm{Ab}^{tf}$，可以令 $\mathrm{Bin}(A)=\mathrm{colim}_{L\longrightarrow A}\mathrm{Bin}(L)$，其中 $L\longrightarrow A$遍历所有映射到 A的自由阿贝尔群。由此可知，若 $A^*\longrightarrow B^*$ 是无挠阿贝尔群链复形之间的拟同构，那么 $\mathrm{Bin}(A^*)\longrightarrow\mathrm{Bin}(B^*)$ 也是拟同构。

设 T' 是一个三角剖分环面。利用该三角剖分，我们可以将 T' 视为一个单纯集合。单形上的 R 值函数构成一个余单纯 R 代数；由于 R 是二项式的，它也是二项式的。根据 Dold-Kan 对应，我们可以将其视为范畴 $C^{\geq 0}(R)$ 上单子 Bin_R 的一个代数，其底层上链复形为 $C^*(T',\ R)$。

利用自然余增广 $R \longrightarrow \tau_{\leq 1}C^*(T',\ R)$，我们构造代数 $B(\tau_{\leq 1}C^*(T',\ R))$，见图 2 和注 1。在 $C^{\geq 0}(R)$ 中，我们有一个 Bin_R 代数的交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bin}_R(R) & \longrightarrow & \mathrm{Bin}_R(\tau_{\leq 1}C^*(T',R)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & C^*(T',R) \end{array} \tag{8}$$

其中，左箭头 $\mathrm{Bin}_R(R) \longrightarrow R$ 是二项式代数 $\mathrm{Bin}_R R$ 的结构映射。图 (8) 给出了映射 $B(\tau_{\leq 1}C^*(T',\ R)) \longrightarrow C^*(T',\ R)$（同样是 $C^{\geq 0}(R)$ 中的 Bin_R-代数之间的映射）。

引理 7. 该映射

$$B(\tau_{\leq 1}C^*(T',R)) \longrightarrow C^*(T',R)$$

是一个拟同构。

证明。 任意一点 $x \in T'$ 都定义了一个分裂 $\mathrm{ev}_x\colon C^*(T',\ R) \longrightarrow R$，这是通过在 x 处求值得到的。应用引理 6，我们得出存在一个二项式代数之间的拟同构 $s_x\colon B(\tau_{\leq 1}C^*(T',\ R)) \cong \mathrm{Bin}_R(H^1(T',\ R)[-1])$。注意， s_x 关于引理 2 中描述的二项式滤过是滤过的。引理的证明蕴含映射 $H^*(B(H^1(T',\ R)[-1])) \longrightarrow H^*(T',\ R)$ 是一个同构。

□

注记 6。 事实上，自由二项式代数是 Eilenberg–MacLane 空间上链的模型。例如，对于任意 $n > 0$ 和有限生成自由阿贝尔群 A，都有一个自然的拟同构 $\mathrm{Bin}(A[-n]) \longrightarrow C^*_{\mathrm{sing}}(K(A^\vee,\ n)\ \mathbb{Z})$，参见 [8]。

定理 1 的证明。 上文给出的定理 3 的证明无法直接推广到 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 系数的情形，但它让我们知道该寻找什么。我们对 $T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 作三角剖分，使得

- $\mathbb{R}^n$ 中每个单形的原像都是由真正的仿射单形构成的不交并，且每个顶点的所有坐标都属于 $\mathbb{Z}_{(p)}$；
- 每个子环面 T_i 都有一个闭多面体管状邻域 X_i，使得对于每个非空的 $I \subset \{1,\dots,k\}$– 包含映射 $T_I \longrightarrow X_I$ 是同伦等价，且– 对于 T_I 中的每个道路连通分支 T'，其对应的 X_I 道路连通分支都包含在由 A 的定义所给出的管状邻域 U 中（$T',\ \mathbb{Z}_{(p)}$）。

设 T' 是某个 $T_I, I \subset \{1,\dots,k\}$ 的一个道路连通分支，并设 X' 是 X_I 中对应的道路连通分支。我们有一个上链映射

$$A(T',\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow C^*(X',\mathbb{Z}_{(p)}) \tag{9}$$

它诱导出一个拟同构 $A(T',\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \tau_{\leq 1}C^*(X',\mathbb{Z}_{(p)})$。

我们可以将 $C^*(X',\mathbb{Z}_{(p)}$ 视为 $C^{\geq 0}(\mathbb{Z}_{(p)})$ 中由单子 $\mathrm{Bin}^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 作用的代数，参见引理 6 之后和引理 7 之前的注释。映射 (9) 诱导出一个 $\mathrm{Bin}^{\mathbb{Z}_{(p)}}$-代数映射 $\mathrm{Bin}(A(T',\mathbb{Z}_{(p)})) \longrightarrow C^*(X',\mathbb{Z}_{(p)})$，进而诱导出一个 $\mathrm{Bin}^{\mathbb{Z}_{(p)}}$-代数映射

$$B(T',\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow C^*(X',\mathbb{Z}_{(p)}). \tag{10}$$

这个映射可分解为

$$B(T',\mathbb{Z}_{(p)}) = B(A^*(T',\mathbb{Z}_{(p)})) \longrightarrow B(\tau_{\leq 1}C^*(T',\mathbb{Z}_{(p)})) \longrightarrow C^*(X',\mathbb{Z}_{(p)}).$$

$A^*(T', \mathbb{Z}_{(p)})$ 的余增广有一个分裂， $\tau_{\leq 1}C^*(T', \mathbb{Z}_{(p)})$ 的余增广也如此。后一种情况下，该分裂由在任意点 $x \in T'$ 处求值给出。因此，我们可以利用引理 5 和引理 7 得出结论：(10) 是一个拟同构。这些映射 (10) 诱导出一个余立方上链复形的映射

$$\{B(T_I, \mathbb{Z}_{(p)})\} \longrightarrow \{C^*(T_I, \mathbb{Z}_{(p)})\}$$

我们刚刚已经看到，它在每个立方分量上都是拟同构。现在，我们应用谱序列 (7) 和引理 3，完成定理 1 的证明。□

定理 2 的证明。取 T 的任意一个三角剖分，使得每个 T_i 都是一个子多胞体。我们用 $C^*(-, R)$ 表示相应的单纯上链函子。由于假设 $T_{\{1,\dots,k\}}$ 道路连通，因而非空，所以我们可以选取一个 $x \in T_{\{1,\dots,k\}}$。令 $I \subset \{0, \dots, k\}$。我们定义 ev_x： $C^*(T_I, R) \longrightarrow R$ 为在 x 处的求值映射；它是余增广 $R \longrightarrow C^*(T_I, R)$ 的一个分裂。我们有以下箭头：

$$\mathrm{Bin}_R(H^1(T_I, R)[-1]) \leftarrow \mathrm{Bin}_R(\ker \mathrm{ev}_x) \longrightarrow \mathrm{Bin}_R(\tau_{\leq 1}C^*(T_I, R)) \longrightarrow B(\tau_{\leq 1}C^*(T_I, R)) \longrightarrow C^*(T_I, R). \quad (11)$$

左侧的箭头由上链映射 $\ker \mathrm{ev}_x \longrightarrow H^1(T_I, R)[-1]$ 诱导，并由引理 4 可知它是拟同构。接下来的两个箭头的复合由引理 6 可知是拟同构，最后一个箭头由引理 7 可知是拟同构。映射 (11) 诱导出相应余立方上链复形之间的映射，我们再次利用谱序列 (7) 和引理 3 完成证明。□

命题 3 的证明。对 T 进行三角剖分，使每个 T_i 都成为子多面体。设 $(E^{p,q}_r, d_r)$ 是余立方上链复形 $\{C^*(T_I, \mathbb{Z})\}$ 所对应的谱序列 (7)，该复形利用子多面体族 $T_1, \dots T_k$构造。注意，复形 (E_1, d_1) 可与 $\{H^*(T_I, \mathbb{Z})\}$ 等同。此外，所有微分$d_{>1}$ 都是挠元，因为根据定理 3 的证明，在 $\mathbb{Q}$ 上的同一谱序列于 E_2 处退化（即从第二个微分开始，所有微分均为零）。

因此， E_2 中存在的所有挠元也都存在于 $H^*(\{H^*(T_I, \mathbb{Z})\})$中，而高阶微分 $d_{>1}$ 不会产生新的挠元。最后，从 E_∞ 过渡到上同调时可能需要非平凡扩张，但这不会影响挠元的基数。由此证明了命题 3。□

4 定理4的证明

本节中，基环为 $\mathbb{Z}$。

4.1 比较Bin与 Γ

预备观察。令 Fin_* 为有限基点集范畴。给定 $S \in \mathsf{Fin}_*$，令 $\mathbb{Z}\langle S/* \rangle$表示由 S生成的自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}\langle S \rangle$ 对 $\mathbb{Z} \cdot *$ 取商所得的商群，其中 $* \in S$ 为基点。函子 $\mathbb{Z}\langle -/* \rangle$: $\mathsf{Fin}_* \longrightarrow \mathsf{Ab}$ 的本质像记作 Ab'：这是由阿贝尔群构成的子范畴，其中选定的（无序）基子集等于 $S \setminus \{*\}$，且其态射 Ab' 为 $\mathbb{Z}$-线性映射，将基元素映为零或另一个基元素。

对偶范畴 $\mathsf{Fin}_*^{\mathrm{op}}$也有类似的描述。存在一个函子 $S \longrightarrow \mathbb{Z}^{S/*}$，从 $\mathsf{Fin}_*^{\mathrm{op}}$到 Ab，它将一个基点集合 S 映为 S 上的整数值函数，这些函数在 $* \in S$处取零。这个函子的本质像记作 Ab''。令 Bin'' 和 Γ'' 分别为函子 $\mathrm{Bin}(-)$ 和 $\Gamma(-)$ 在 Ab'' 上的限制。

命题12. 存在函子 $\mathrm{Bin}'' \simeq \Gamma''$ 的自然同构。

证明. 令 F 表示 Bin'' 或 Γ''。对角映射 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 是 Ab'' 中的一个态射。它在阿贝尔群 $F(\mathbb{Z})$ 上诱导出余代数结构。同样，态射 $0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ 产生余增广$\mathbb{Z} \longrightarrow F(\mathbb{Z})$。

我们断言，函子 F 由余增广余代数 $F(\mathbb{Z})$ 决定。具体而言，存在自然同一化 $F(\mathbb{Z}^{S/*}) \simeq \otimes_{s \in S \setminus \{*\}} F(\mathbb{Z} \cdot s)$，它由 $F(\mathbb{Z}^{S/*})$ 上的交换代数结构诱导。

以及沿映射 $(\{s,*\},\ *)\longrightarrow(S,\ *)$ 的函子性。具体来说，$\mathrm{Bin}(\mathbb{Z}^{S/*})$ 由二项式系数 $\prod_{s\in S\setminus\{*\}}\binom{x_s}{n_s}$ 张成，而 $\Gamma(\mathbb{Z}^{S/*})$ 则由除幂 $\prod_{s\in S\setminus\{*\}}y_s^{[n_s]}$ 自由张成，其中 x_s 和 y_s 分别对应于 S 在 $s\in S\setminus\{*\}$ 处的狄拉克函数。基点集合之间的映射 $g\colon(S,\ *)\longrightarrow(S',\ *)$ 诱导出映射 $G\colon F(\mathbb{Z}^{S'/*})\longrightarrow F(\mathbb{Z}^{S/*})$；按照上述同一化，该映射由 $F(\mathbb{Z})$ 上的余代数结构决定。具体而言，对所有 $s'\in S'\setminus\{*\}$，我们有

$$G(x_{s'})=\sum_{f(s)=s'}x_s,$$

其中求和遍历 s' 的原像；$y_{s'}$ 同理。余代数 $\mathrm{Bin}(\mathbb{Z})$ 和 $\Gamma(\mathbb{Z})$ 同构：$\binom{x}{n}$ 与 $x^{[n]}$ 的余乘法公式相同。因此，将 $\prod_{s\in S\setminus\{*\}}\binom{x_s}{n_s}$ 发送到 $\prod_{s\in S\setminus\{*\}}y_s^{[n_s]}$ 的映射定义了一个同构 $\mathrm{Bin}(\mathbb{Z}^{S/*})\simeq\Gamma(\mathbb{Z}^{S/*})$，该同构关于 $(S,\ *)$ 具有函子性。换言之，函子 Bin'' 和 Γ'' 同构。

□

某些二项式图表的分裂。令 Spaces_*^{ft} 表示每个次数中仅含有限个单形的带基点单纯集合范畴。这里，我们将这类对象简称为 空间。设 $S\colon\ \mathcal{C}\longrightarrow\mathrm{Spaces}_*^{ft}$ 是一个空间图表，使得对于所有 $d\in\mathcal{C}$，空间 S_d 具有圆的楔和的整系数同调。众所周知，关于由引理 1 给出的 Bin 上的二项式滤过的伴随分次，与除幂函子 Γ 同构（参见 [12]）。

命题 13. 存在一个自然的图表等价 $\Gamma(H^1(S_d)[-1])\ \tilde{\leftsquigarrow}\mathrm{Bin}(H^1(S_d)[-1])$，其形状为 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。

证明。约化复形 $C^*(S_d)$ 只有一个非平凡上同调群，位于次数 1，这意味着存在一个关于 $d\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 函子性的自然等价 $\tilde{C}^*(S_d)\ \tilde{\leftsquigarrow}\ H^1(S_d;\mathbb{Z})[-1]$。另一方面，约化复形 $\tilde{C}^*(S_d)$ 可视为 Ab 中的余单纯复形″，其等于 $\mathbb{Z}^{S_d/*}$。由前一个命题可得一个同构 $\mathrm{Bin}(\mathbb{Z}^{S_d/*})\simeq\Gamma(\mathbb{Z}^{S_d/*})$，它自动关于 d 具有函子性，因为图中的箭头在 Ab 中的余单纯对象之间诱导出态射 $\mathbb{Z}^{S_d/*}\longrightarrow\mathbb{Z}^{S_{d'}/*}$″。最后，引理 4 给出一个函子性等价 $F(\mathbb{Z}^{S_d/*})\ \tilde{\leftsquigarrow}\ F(H^1(S_d)[-1])$，其中 $F=$ 属于 Bin Γ，由此完成证明。

□

现在我们可以证明定理 4 了。我们将假设一个技术性结果（命题 14），该结果将在第 4.2 节中证明。设 $\mathcal{C}=\square_k$ 是与环面排列 $\{T_I\subset T\}$对应的立方图表，而 A^* 是 2.1 节中描述的、形状为 $\mathcal{C}$ 的相应二项复形。

引理 8. 如果所有 T_I 都是道路连通的，那么图表 A^* 是可分解的，即存在图表的准同构 $A^*\ \tilde{\leftsquigarrow}\ H^0(A^*)\oplus H^1(A^*)[-1]$。

证明。我们可以假设所有 I都满足 $0\in T_I$。回顾一下，图表项 A_I^0 是由所有沿着 T_I 保持常值、并且相对于 T 上的仿射结构而言是仿射且整的函数构成的 $\mathbb{Z}$-模（见公式 (1)）。在 $0\in T$ 处的取值分裂出 $H^0(A^*)\subset A^*$，从而给出 A^*的一个分解。 □

定理 4 的证明。根据我们的假设，自由阿贝尔群图表 $H_1(T_I;\mathbb{Z})\in$阿贝尔群可提升为自由群图表，也就是说，存在一个自由群图表 $G_I\in$群^{free}，并配有同构$G_I/[G_I,G_I]\simeq H_1(T_I;\mathbb{Z})$，且该同构关于 T_I 是函子性的。

由命题 14 可知，存在一个图表 $S\colon\ \mathcal{C}\longrightarrow\mathrm{Spaces}_*^{ft}$，其中 S_I 的同伦型是 G_I 的分类空间。于是，命题 13 蕴含每个 $\mathrm{Bin}(H^1(S_I)[-1])\ \tilde{\leftsquigarrow}\ \Gamma(H^1(S_I)[-1])$。注意，d´ecalage 同构 $\Gamma^k(H^1(S_I)[-1])\ \tilde{\leftsquigarrow}\ \Lambda^k(H^1(S_I))[-k]$ 将 $\Gamma(H^1(S_I)[-1])$ 与 $\mathrm{MV}(H^*(T_I,\mathbb{Z}))$ 对应起来。最后，由于所有 T_I 都是连通的，根据上述引理 8，我们可知 A^* 是可分解的。因此，复形 $\mathrm{MV}(\mathrm{Bin}(H^1(S_I,\mathbb{Z})[-1]))$ 等价于 $\mathrm{MV}(H^*(T_I,\mathbb{Z}))$，由定理 2 可得，$\mathrm{MV}(H^*(T_I))$ 计算 $H^*(T,\cup_i T_i,\mathbb{Z})$。□

4.2 分类空间的图表

设 $\mathcal{C}$ 为 k-立方体范畴 $\square_k$。设 $G\colon \mathcal{C} \longrightarrow$Groups 是一个从 $\mathcal{C}$ 到群范畴的函子，使得每个$G(I)$ $I \in \mathcal{C}$ 都是有限生成自由群。

具体多面体是单纯复形的几何实现。具体多面体之间的映射 $f\colon K \longrightarrow L$ 若由底层单纯复形之间的映射诱导，则称为单纯的；若将 K 中的每个单形细分为有限个仿射单形后， f 在 K 的任意单形 $\triangle$ 上的限制都是从 $\triangle$ 到 L 的某个单形的仿射映射，则称为分段线性映射，或称 PL 映射。

空间 X 上的多面体结构是 X 与一个具体多面体之间的同胚。若两个多面体结构所产生的、对应具体多面体之间的两个映射都是 PL 映射，则称这两个结构等价。我们将具有选定的多面体结构等价类的空间称为多面体。

PL 映射的定义可以直接推广到多面体。多面体 X 的子多面体是配备了多面体结构的子空间 $X' \subset X$，且包含映射 $X' \longrightarrow X$ 是 PL 映射。例如，多面体的开子集也是子多面体。若纤维、底空间和全空间均为多面体，则通过要求所有局部平凡化都是 PL 映射，即可定义局部平凡分段线性纤维丛。

若至少一个（因而每一个）参与定义 X 上多面体结构的具体多面体是有限的，则多面体 X 是有限的。若多面体中的每个点都有一个作为有限子多面体的闭邻域，则该多面体是局部有限的。

~ ~**命题 14**。 存在一个函子 $BG(-)$，从 $\mathcal{C}$ 到带基点空间，使得每个 $BG(I)$ $I \in \mathcal{C}$ 都是与 $G(I)$的分类空间同伦等价的有限多面体。

证明。 我们分两步进行。也就是说，我们首先要找到 G(–)到局部有限多面体的一个提升，然后构造一个到有限多面体的子函子。对每个 $I \in \mathcal{C}$，选取一个带基点树 $E(G(I))$，其上有 $G(I)$的自由单纯作用，使得每个 $E(G(I))/G(I)$都成为 $G(I)$的分类空间。注意，$E(G(I))/G(I)$从 $E(G(I))$继承了多面体结构。

步骤 1。 对 $I \in \mathcal{C}$，令

$$E'(G(I)) = \prod_{I \longrightarrow J} E(G(J))$$

其中乘积取遍 $\mathcal{C}$ 中所有以 I 为起点的箭头（包括 I的恒等映射）。令 $G(I)$在 $E'(G(I))$上按对角方式作用。此外，若 $I \longrightarrow J$ 是 $\mathcal{C}$中的一个箭头，则有一个 $G(I)$-空间映射$E'(G(I)) \longrightarrow E'(G(J))$。因此

$$I \mapsto B'(G(I)) := E'(G(I))/G(I)$$

这是一个从 $\mathcal{C}$ 到带基点多面体的函子，其中每个 $B'(G(I))$中的基点由 $E'(G(I))$诱导。

步骤 2。 每个空间 $B'(G(I))$ 都纤维化在紧分类空间 $E(G(I))/G(I)$ 上，其纤维等于乘积

$$\prod_{\alpha: I \longrightarrow J, \alpha \neq \mathrm{Id}_I} E(G(J))$$

取遍所有从 I出发且不是恒等映射的映射。因此，除非 $I = \{1, \ldots, k\}$，否则 $B'(G(I))$ 不是紧的，我们需要对其稍作修剪。我们将使用下面的引理来完成这一点：

引理 9。 设 $F = T_1 \times \cdots \times T_m$ 是局部有限树的乘积。假设 B 是有限圆圈楔和。记基点为 $0 \in B$，并假设 $\pi_1(B,0)$ 通过树自同构的乘积作用在 F 上。令$F \longrightarrow X \xrightarrow{p} B$ 为与该作用相关联的 *PL* 纤维丛。

那么， X 中与 X 同伦等价的有限子多面体，在按包含关系排序的 X 的所有紧子空间集合中是共尾的。

证明。 为楔和 B中的每个圆选定一个定向，并令 $g_1, \ldots, g_l$ 为 $\pi_1(B,0)$的相应生成元系。记 p 在基点 $0 \in B$ 上的纤维为 F_0。

设 $K \subset X$ 为一个紧子空间， $T \subset F_0$ 为有限子树的乘积。利用沿 $X \xrightarrow{p} B$ 上的自然平坦联络进行平行传递，我们可以将 T 延拓为一个有限子多面体 $T' \subset X$，使得

对于 $t \in B \setminus \{0\}$，纤维 $T' \cap p^{-1}(t)$ 同胚于 T，因此是可缩的；而纤维 $T' \cap p^{-1}(0)$ 是 T及其在 g_1、……、g_l作用下的像的并。必要时扩大 T，即可假设 T' 包含 K。最后，可以选取一个包含 $T' \cap p^{-1}(0)$ 的有限子树乘积 $S \subset p^{-1}(0)$，并令 $X' = T' \cup S$。根据构造，$X' \subset X$ 是一个有限子多面体，而 $X' \longrightarrow B$ 是一个纤维可缩的真映射，因此是同伦等价。 □

我们继续证明命题 14。我们对 $|I|$ 使用归纳法。对于 $I = \varnothing$，令 $B''(G(I))$ 为 $B'(G(I))$ 的任意一个有限子多面体，它与 $B'(G(I))$ 同伦等价，并且包含基点。根据引理 9，这是可行的。

现在假设 $0 < m \leq k$，并且对于每个满足 $|I| < m$ 的 I，我们都已构造出一个有限子多面体$B''(G(I)) \subset B'(G(I))$，使得包含映射是同伦等价，并且任意箭头 $I_1 \longrightarrow I_2$，$|I_1| \leq |I_2| < m$ 都将 $B''(G(I_1))$ 映至 $B''(G(I_2))$。令 I 满足 $|I| = m$。再次利用引理 9，我们定义$B''(G(I)) \subset B'(G(I))$ 为一个有限子多面体，使其与 $B'(G(I))$ 同伦等价，并且包含基点以及所有以 I 为终点的箭头的像。至此，函子 $B''(G(-))$ 的构造完成了归纳步骤，命题 14 的证明也告完成。 □

注记 7。引理 9 或许可以推广到更一般的空间。例如，假设 X是一个多面体，且存在一个有限子多面体 $X' \subset X$，使得包含映射是同伦等价。是否可以推出，具有这一性质的有限多面体在 X的所有紧子空间构成的集合中是共尾的？如果一般而言答案是否定的，那么若再假设 X 是局部有限和／或有限维的，答案是否定的吗？

注记 8。命题 14 可以推广到 $\mathcal{C}$ 等于任意有限偏序集的情形。

参考文献

[1] B. Antieau, 球面 *Witt* 向量与空间的整模型, https://arxiv.org/abs/2308. 07288.[2] J. Bellissard, 固体物理中 C^*-代数的 *K* 理论, 收录于：《统计力学与场论：数学方面》，T. C. Dorlas 编，Springer，1986年，第 99–156 页。[3] F. Callegaro, M. D'Adderio, E. Delucchi, L. Migliorini, R. Pagaria, 环面排列上同调代数的 *Orlik-Solomon* 型表示，《美国数学会汇刊》，373，2020年，第 1909-1940 页，https://arxiv.org/abs/1806.02195。勘误：《美国数学会汇刊》，374，2021年，第 3779-3781 页。[4] C. De Concini, G. Gaiffi, 微分代数与环面排布补空间的同伦型，《林琴国家科学院院刊》，物理、数学与自然科学类，32，2021年，1，第 1–21 页，https://arxiv.org/abs/2007.02118.[5] F. Callegaro, E. Delucchi, 环面排列上同调的组合生成元，《拓扑学及其应用》355，2024年，https://arxiv.org/abs/2307.04553.[6] A. Dold, 对称积及其他复形函子的同调，《数学年刊》，68，1，1958年，第 54-80 页。[7] G. Horel, 二项式环与同伦论，《纯粹与应用数学杂志》（《克雷尔数学杂志》），813，2024年，第 283-305 页，https://arxiv.org/abs/2211.02349.[8] T. Ekedahl, 整系数同伦论中的极小模型，《同调、同伦与应用》，4，2，2002年，第 191-218 页，https://arxiv.org/abs/math/0107004.[9] J. Elliot, 二项式环、整值多项式与 λ-环，《纯粹与应用代数杂志》，207，1，2006年，第 165-185 页。

[10] L. Illusie, 余切复形与 ´变形 I，《数学讲义》，239，Springer，1971年。[11] P. Kalugin, 准周期图案的上同调与匹配规则，《物理学杂志 A：数学与一般》，38，2005年，第 3115–3132 页。[12] D. Kubrak, G. Shuklin, A. Zakharov, 导出二项式环 I：对数概形的整 *Betti* 上同调，2023年，https://arxiv.org/pdf/2308.01110.[13] M. Mandell上链与同伦型，《高等科学研究所数学出版物》，103，2006年，第 213-246 页。[14] L. Moci, R. Pagaria, 子环面配置的上同调，《伦敦数学学会杂志》，106，3，2022年，第 1999-2029 页，https://arxiv.org/abs/2001.05180[15] A. Zakharov, 子流形配置补空间的有理同伦型，https://arxiv. org/abs/2211.05033.[16] R. Porter, A. Suciu, 杯积一代数与 *1*-极小模型，https://arxiv.org/abs/2306.11849，2023年。[17] B. To¨en，仿射层，《数学精选》，12，2006年，第 39-134 页。Alexey Gorinov：高等经济学院数学系，电子邮箱：agorinov@hse.ru, gorinov@mccme.ru Alexander Zakharov：金奈数学研究所，电子邮箱：azakharov@cmi.ac.in