不连续度规的广义拼接条件

J. A. Silva* 和 F. C. Carvalho†

北里奥格兰德州立大学（*UERN*）物理系，巴西北里奥格兰德州莫索罗

Antonio R. G. Garcia‡

半干旱区联邦农村大学（*UFERSA*）自然科学、数学与统计系，*Francisco Mota*大道，莫索罗，*59625-900*，巴西北里奥格兰德州（日期：2026年1月14日）

arXiv:2601.07936v1 [gr-qc] 12 Jan 2026

本文在 Colombeau 广义函数代数的框架内，将 Darmois–Israel 拼接形式主义扩展到不连续度规的情形。该表述为涉及奇异量的非线性运算（例如分布的乘积和导数）提供了数学上自洽的处理方法。通过放宽通常对度规施加的连续性条件，广义拼接条件自然地将曲率和表面能动量张量中的高阶奇异项纳入其中。这些额外贡献代表了与时空几何中的真实不连续性相关联的新几何自由度。所得形式主义在极限情形下恢复传统的达莫瓦-以色列条件，同时提供了一种连贯的扩展，可应用于时空中的几何边界和突变。

关键词： Colombeau代数；广义函数；拼接条件；不连续度规。

I. 引言

拼接条件的构建在描述时空中的几何边界时发挥着基础作用，因为不同区域可能具有不同的物质内容或度规性质。自广义相对论诞生之初，这一问题便引出了一个核心问题：如何以数学上自洽的方式描述物质与真空之间的突变，或

* jonatassilva@alu.uern.br

† fabiocabral@uern.br

‡ ronaldogarcia@ufersa.edu.br

在两种不相容几何之间，同时确保爱因斯坦方程的物理一致性？ [1] 困难在于，爱因斯坦方程本质上是非线性的，因此无法直接将分布的线性理论应用于奇异或不连续的度规。因此，构建拼接条件必须兼顾物理层面——刻画能量和曲率的无穷小边界——以及处理涉及分布乘积的量时所要求的数学一致性。

上述提出的问题涉及一个微妙之处：必须区分时空几何中的真实不连续性与仅仅因坐标选择不当而产生的不连续性。Lanczos（1922年、1924年） [2, 3], 最初讨论了这一问题的表述，随后几十年间，该问题又经历了数次重新表述。Raychaudhuri（1953年） [4] 和 Israel（1958年） [5]等人的研究认识到恰当处理几何不连续性的重要性，但当时仍未明确区分坐标效应与真实的物理不连续性。

O'Brien 和 Synge（1952年） [8], 提出了第一个不变量处理方法，随后 Lichnerowicz（1955年） [6], 引入了可容许坐标的概念，要求存在一个 $\mathscr{C}^2$图册，使其中的度规分量 g_{ab} 保持 $\mathscr{C}^3$，但光滑超曲面上除外。Synge（1960年）[9] 对这一表述进行了完善，而 Israel（1966年） [10] 提出了最具影响力的推广：处理具有不同外在曲率的奇异超曲面，并将表面能量引入为物质能量的一个投影。与此同时，Dautcourt（1964年） [11], 、Papapetrou 及其合作者[12, 13] 也为奇异曲面发展了互补的方法。

这些里程碑巩固了现代拼接条件表述的基础，而拼接条件对于模拟具有薄边界的天体物理系统至关重要，例如物质壳层、引力激波、恒星坍缩和屏蔽效应。分量的正则性 g_{ab}，尤其是在超曲面附近，既是数学要求，也是物理要求[1]。

关于时空区域之间过渡的最早系统性表述之一由 Darmois（1927 年） [15], 提出：基于爱因斯坦方程的柯西问题，在非零超曲面上建立度规及其法向导数的连续性条件。尽管受到正则性和对称性假设的限制，这一处理确立了所谓的 Darmois 条件，对于理解时空区域如何平滑拼接具有基础性意义。数十年后，Choquet-Bruhat（1968 年） [14] 以及 Israel（1966 年） [10] 再次大幅拓展了这一框架。Israel 利用沿 Σ的高斯坐标表明，尽管度规的法向导数可能不连续，但其分量 g_{ab} 仍保持连续，

前提是两个区域在 Σ上诱导出相同的内蕴度量。在自然坐标中，这等价于要求 g_{ab} 在奇异超曲面上属于 $\mathscr{C}^0$ 类。

在连接面两侧应用爱因斯坦方程后，Israel 推导出了表层的三维守恒定律，奠定了达尔穆瓦–以色列表述的基础；该表述如今称为薄壳形式。这种方法为时空的不同区域提供了连贯的拼接条件，其依据是度规的连续性以及对外在曲率不连续性的控制。除了具有清晰的物理解释外， Σ 两侧内蕴几何相等，也避免了与定义不良的分布乘积相关的数学困难。

这种形式已成为广义相对论中广泛使用的工具，应用范围从薄壳虫洞 [16], 引力真空星 [18, 19], 和恒星模型 [20, 21], 到宇宙学畴壁 [24]。它也是剪切粘贴技术的理论基础；在这种技术中，超曲面 Σ 充当时空两个区域之间的几何边界。

尽管达莫瓦-以色列条件的传统推导通常依赖高斯–科达齐方程 [10, 25, 26], ，本文采用一种替代方法，沿用帕德马纳班的思路 [32]（另见 Poisson [33]）。该方法不借助几何恒等式，而是从赫维赛德函数表示度规的形式出发，考察爱因斯坦方程中的奇异项；这些奇异项与度规导数中包含的狄拉克 δ 型分布有关。由此，标准的达莫瓦-以色列条件自然地从诱导度规的连续性以及外在曲率张量的不连续性导出，而后者与表面能动量张量相关。

在这种情况下，通常将时空建模为两个区域 M^+ 和 M^- 沿超曲面 Σ粘合而成，其全局度规为

$$g_{ab} = \theta(l)\, g^{+}_{ab} + \theta(-l)\, g^{-}_{ab} \,, \tag{1}$$

其中， l 是一个在 Σ上消失的光滑函数， $\theta(l)$是赫维赛德函数。这种构造使得描述突变的连接面成为可能，但它预先假定诱导度规的连续性，即 $[h_{\alpha\beta}] = 0$。

然而，必须强调的是，爱因斯坦方程的分布形式存在根本性限制。Geroch 和 Traschen（1987年） [27] 指出，曲率张量的非线性性质通常使得经典的施瓦茨分布理论无法处理高度奇异的度规。尽管可以定义度规的弱导数，

曲率却涉及这些分布的乘积，而在线性框架下，这类运算在数学上并没有明确定义。为绕过这一问题，作者提出了正则度量的概念，即其逆 g^{ab} 存在且局部有界、弱导数局部平方可积的对称张量 g_{ab}。在这些条件下，爱因斯坦张量可以在分布意义下得到良好定义。然而，这一限制排除了具有更严重不连续性的度规（例如度规本身含有狄拉克 δ 项的度规），从而揭示了将标准分布理论应用于广义相对论时所存在的内在局限。

尽管 Racskó（2024） [28] 指出，奇异分布与不连续函数之间的乘积存在固有困难，这类情况常见于拼接问题中，且在经典形式体系下无法得到一致的定义；他还表明，诸如基于单侧极限平均值的临时解释等常见方法，可能会导致错误结果。他的形式体系仍以传统分布理论为基础，通过对场变量施加适当的正则性条件，避免此类“不合法”运算，从而绕开未定义乘积的出现。这一策略符合施瓦茨不可能性定理，保证了数学上的一致性，但将分析范围限制在更强的奇点（例如 δ^2）不会显式出现的情形。

在高阶导数引力理论中，这一假设会造成限制。 δ' 或 δ^2 等奇异项的出现，使得经典分布理论无法对其进行严格处理。Reina 等人（2016）在研究二次引力中的拼接面时讨论了这些困难，并认识到 Colombeau代数有助于克服此类局限，但并未实际采用这一方法 [29]。Chu（2022） [30] 提出了一种对场方程进行正则化积分的技术，足以处理 F（R）理论中的奇异分布。近来，Huber（2025） [31] 明确采用了科隆博形式体系，从而能够处理分布度规、计算高阶导数理论中的曲率不变量，并建立与彭罗斯剪切粘贴法之间的联系。

尽管取得了这些进展，且 Huber 本人（2020） [34] 曾提出度规局部变形的方案，但似乎尚未形成一种系统的表述，能够明确且严谨地处理不连续度规的拼接条件，并借助 $[g_{ab}] \neq 0$ 或 $[h_{\alpha\beta}] \neq 0$，消除这一情形下产生的分布歧义。

在本工作中，我们正是提出了这一推广。我们放宽诱导度规连续性的条件，并考虑沿着 Σ 发生真正几何断裂的连接面。为此，我们通过采用

Colombeau代数的框架，改进薄壳形式的传统方法，从而能够以定义良好的方式处理分布的乘积和导数，例如 $\theta\delta$、 $\theta\delta'$ 和 δ^2。

因此，我们得到了 Darmois–Israel 形式体系的扩展，使其适用于度规存在实质性不连续的情形，从而拓宽了传统形式体系的物理适用范围，并为研究广义相对论及修正引力理论中的非光滑匹接提供了一致的数学框架。

本文始终采用以下约定： $c = G = 1$，度规号差为（−， +， +， +）。方括号 $[F]$ 表示量 F 跨越超曲面 Σ时的跃变，即 $[F] = F^+ - F^-$。拉丁指标（a， b， c， d，……）表示四维时空中的分量，而希腊指标（α， β， γ，……）表示沿匹接超曲面的切向分量。超曲面的法向量记为 n^a，并满足 $n_a n^a = \epsilon$；对于类时超曲面（类空法向）， $\epsilon = +1$，对于类空超曲面（类时法向）， $\epsilon = -1$。 Σ 上的诱导度规记为 $h^{\alpha\beta}$；在一般情形下，其不连续性表示为 $[h_{\alpha\beta}] \neq 0$。后续所有表达式均沿用这些约定，以确保几何表述以及沿 Σ定义广义导数时的一致性。

本文结构安排如下。在第II节中，我们介绍 Colombeau 代数的基本概念，并着重说明这种结构如何使分布的乘积和导数能够得到严格定义。在第III节中，我们构造全局不连续的时空度规，并讨论条件 $[g_{ab}] \neq 0$的几何意义，包括法向量、逆度规和诱导度规的性质。在第IV节中，我们从正则化的爱因斯坦方程显式推导广义拼接条件，识别奇异贡献，并将结果与 Darmois–Israel 形式体系进行比较。最后，在第V节中，我们给出结论。

II. 预备知识

为了处理分布的乘积相关问题，例如不连续度规所引发的问题，我们采用Colombeau代数的框架。这种形式体系为处理在施瓦茨分布的经典理论中定义不明确的表达式提供了严格的方法。

A. Colombeau形式体系的基本概念

为了严格处理分布的乘积和不连续性，我们考虑由参数 $\varepsilon \in]0,1]$ 索引的光滑函数族。形式上，设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个开集；我们定义**定义 1**。 $\mathrm{E}(\Omega) := (\mathscr{C}^\infty(\Omega))^I$ 为所有满足以下条件的函数集合：对于每个 $\varepsilon \in I$，都赋予一个函数 $f_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$，该函数关于变量 $x \in \Omega$ 光滑。

由这个函数空间，我们引入：

定义 2. M) 中等函数：

$$\mathscr{E}_M(\Omega) := \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathscr{E}(\Omega)^\infty(\Omega) | \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall\, K \subset\subset \Omega \exists\, p \in \mathbb{N},\ \exists\, \eta > 0,\ \exists\, c > 0$$
$$\textit{such that } \|\partial^\alpha u_\varepsilon(x)\|_K \leq c\varepsilon^{-p}, \forall 0 < \varepsilon < \eta\}$$

N) 可忽略函数：

$$\mathscr{N}(\Omega) := \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathscr{E}_M(\Omega) | \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall\, K \subset\subset \Omega \forall\, q \in \mathbb{N},\ \exists\, \eta > 0,\ \exists\, c > 0$$
$$\textit{such that } \|\partial^\alpha u_\varepsilon(x)\|_K \leq c\varepsilon^q,\ \forall\, 0 < \varepsilon < \eta\} \tag{2}$$

于是， Ω上的简化 *Colombeau*代数定义为以下商集

$$\mathscr{G}(\Omega) := \mathscr{E}_M(\Omega)/\mathscr{N}(\Omega).$$

尽管中等函数、零函数以及商结构本身的定义乍看之下可能显得形式化且抽象，但它体现的是一个相当具体的思想。$\mathscr{G}(\Omega)$中的每个元素本质上代表一类光滑函数族（u_ε）$_\varepsilon$，它们为潜在的奇异对象（例如分布）提供正则化描述。中等函数族是指其增长在 $\varepsilon \to 0$ 时受 ε 的有限次幂控制的函数族，而零函数族则比 ε 的任意次幂衰减得更快。因此，通过取商 $\mathrm{E}_M(\Omega)/\mathscr{N}(\Omega)$，所有仅相差可忽略项的中等函数族都被视为等价，即 $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathscr{N}(\Omega)$。

因此， $\mathscr{G}(\Omega)$中的一个元素并非单个函数，而是一个等价类，其中的光滑函数在极限 $\varepsilon \to 0$ 下表现相同。这一构造使我们能够在统一框架内处理正则函数和奇异对象，同时保留在经典分布理论中定义不良的微分运算和乘法运算。用更接近物理学术语的语言来说，族 $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ 可视为.....的正则化

分布，而 $\mathcal{G}(\Omega)$ 中的元素表示这些正则化的广义极限[31]。

因此，Colombeau代数 $\mathcal{G}(\Omega)$是交换的、结合的且满足分配律；它将光滑函数作为忠实子代数包含在内，将经典分布纳入为一个线性子空间，并且满足乘积的导数的莱布尼茨法则。这种结构使得即使在经典分布空间中此类运算没有定义，也能够以一致的方式处理分布的乘积和导数。

定义了Colombeau代数 $\mathcal{G}(\Omega)$之后，我们现在可以明确给出广义函数的一种实用构造方法。为此，考虑一个光滑测试函数 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$，其中 $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$，满足以下基本条件：

i) $\int \varphi(x)\, dx^n = 1,$

ii) $\int \varphi(x)\, x^\alpha\, dx^n = 0,$ 对所有 $|\alpha| \geq 1$ 均成立。

接着定义函数族

$$\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

并由此得到θ网

$$\theta_\epsilon(x) = (\theta * \varphi_\epsilon)(x) = \int \theta(y)\varphi_\epsilon(x-y)\, dy^n,$$

它为赫维赛德函数 $\theta(x)$ 提供了光滑的正则化。同样，严格δ网表示为

$$\delta_\epsilon(x) = (\delta * \varphi_\epsilon)(x) = \int \delta(y)\varphi_\epsilon(x-y)\, dy^n\ .$$

在 Colombeau代数的发展过程中，自然会产生区分广义函数不同层次相等性的需求。正如 Colombeau [35]，所确立的，在两个不同的 $\mathcal{G}(\Omega)$ 元素之间可能存在一种关系，而该关系发挥着根本作用。

这种关系使得能够在 $\mathcal{G}(\Omega)$ 中识别出那些并非非线性相同、但在线性意义下等价的对象；具体做法是在 $\mathrm{E}_M(\Omega)$ 中引入一种弱于 $\mathcal{G}(\Omega)$ [36] 中相等性的等价关系。

定义 定义 3。 元素 $u\ of\ \mathcal{G}$（Ω） 被称为与0 相关联（记作 $u \approx 0$）i f

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi(x)\,dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)\ . \tag{3}$$

定义3　　与所选代表元 u_ε of u无关。等价关系　　n

$$u \approx v \;\Leftrightarrow\; u - v \approx 0\,,$$

对于 $u,\ v \in \mathcal{G}(\Omega)$，表明它们彼此具有伴随关系。具体而言，给定$u_\varepsilon,\ v_\varepsilon$ of $u,\ v$的代表元，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \big(u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)\big)\,\psi(x)\,dx = 0\,. \tag{4}$$

如果这一性质对某一特定的代表元对成立，那么对任何其他相应的代表元对也成立。

伴随关系中的两个成员都可以自由地进行微分：

$$u \approx v \;\Rightarrow\; Du \approx Dv\,, \tag{5}$$

对于任意偏微分算子 D。

在 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$中确立伴随关系的概念后，我们可以推导出关系 $\theta^n \approx \theta$。因此，

$$\theta^n \approx \theta \quad\Rightarrow\quad \theta^{n-1}\theta' \approx \frac{1}{n}\theta', \tag{6}$$

并且对于 $n = 1$，我们得到

$$\theta\delta \approx \frac{1}{2}\delta, \tag{7}$$

其中 $\theta' = \delta$。这种伴随关系为经典分布框架中的相应运算提供了一个“影子”，使我们能够解释乘积 $\theta\delta$，尽管它在 $\mathcal{D}'$ 中并不存在。

由（7），利用莱布尼茨法则，我们可以计算 $\theta\delta'$：

$$(\theta\delta)' = \theta'\delta + \theta\delta' \approx \frac{1}{2}\delta' \quad\Rightarrow\quad \delta\delta + \theta\delta' \approx \frac{1}{2}\delta', \tag{8}$$

由此得到

$$\theta\delta' \approx \frac{1}{2}\delta' - \delta^2. \tag{9}$$

这个表达式完全处于 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$的框架内，即使 $\theta\delta'$ 和 δ^2 在经典分布理论中都不存在，它仍然是定义良好的。

The square of the delta distribution

在 Colombeau代数中，δ^2 定义为乘积 $\delta\cdot\delta$，其代表元表示为

$$\varphi_\varepsilon^2(x) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\,\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\varphi^2\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,, \tag{10}$$

其中 $\varphi \in \mathscr{D}\ (\mathbb{R})$ 满足条件（i）和（ii）。作用于测试函数 ψ 时为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \varphi_\varepsilon^2(x)\,\psi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int \varphi^2(u)\,\psi(\varepsilon u)\,du \ \to\ \infty, \tag{11}$$

只要 $\psi(0) \neq 0$。因此， δ^2 不与任何经典分布相关联，但它作为 $\mathscr{G}(\mathbb{R})$中的一个元素是定义良好的。

因此， $\delta^2 \in \mathscr{G}(\mathbb{R})$，其代表元为 φ_ε^2。

现在让我们将 δ^2 的性质与狄拉克δ函数的性质进行比较。本例中有

$$\varphi_\varepsilon^2(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\varepsilon^2(x)\,dx \ \to\ \infty \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{12}$$

更明确地说，

$$\int \delta^2(x)\,dx \sim \frac{1}{\varepsilon},$$

这表明该积分在经典极限下发散，但按照 Colombeau [35]的意义，它作为一个广义数仍有明确的含义。

因此， δ^2 的积分不是实数，而是属于代数 $\mathbb{R}$ 的广义数[1], ；其行为可由 φ_ε^2很好地表示，而φ_ε^2的积分与 ε成反比。

现在，我们来给出乘积 $H\delta^2$。注意， $\delta^2 = \theta'\theta'$。由于 $\mathscr{G}$ 是一个交换结合代数，我们可以毫不困难地进行以下代数运算

$$\begin{aligned}\theta\delta^2 = \theta(\theta'\theta') = (\theta\theta')\theta' &= (\theta\delta)\delta \\ &\approx \left(\frac{1}{2}\delta\right)\delta \\ &\approx \frac{1}{2}\delta^2\,.\end{aligned} \tag{13}$$

因此，我们得出结论：

$$\theta\delta^2 \approx \frac{1}{2}\delta^2. \tag{14}$$

需要强调的是，据我们所知，在专业文献中，很少有这类明确的方法以构造性的方式处理涉及狄拉克分布幂次的乘积，例如 δ^2 或 $\theta\delta^2$，并将其纳入伴随关系的定义本身。即使在

[1]在 Colombeau代数中，广义数是由实数（或复数）的中等增长序列构成的等价类，其行为由 ε的幂次来控制。这些数扩展了经典实数，使得诸如（12）这样的量得以表示：它们在传统框架下会发散，但在该结构$\mathbb{R}$中仍有良好定义。有兴趣的读者可在 [37, 38]中了解更多相关内容。

Colombeau 的基础著作 [35] 及其后续发展（见 [36, 39]）主要侧重于对空间 $\mathcal{G}$ 进行结构分析，并证明 δ^2 与经典分布不满足伴随关系，但并未明确计算这类乘积。Miteva 等人（2016 年）的后续研究 [40], 专门探讨 Colombeau代数中的乘积，主要关注涉及狄拉克δ分布的导数与光滑因子的组合，并将研究范围限制在所得乘积存在伴随分布的情形。换言之，这些作者所采用的 Colombeau 乘积概念，仅适用于嵌入 $\mathcal{G}$ 中的两个分布之间的运算能够在空间 $\mathcal{D}'$中保有对应物的情况。相比之下，本文考察纯粹的广义乘积，其存在性仅由代数 $\mathcal{G}$保证，例如表达式 $\theta\delta'$ 和$\theta\delta^2$；它们在经典分布框架中都没有对应物。

尽管乘积 $\theta\delta'$ 和 $\theta\delta^2$ 可以从先前确立的关联关系代数地得到，但下面将借助方程（9）和（14），基于定义 3，直接证明表达式（4）。

引理 1. 函数 $f(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(s)\, ds - \frac{1}{2}$，其中 $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$是一个 δ 网，是奇函数。

证明。 为证明这一点，我们需要证明 $f(-u) = -f(u)$。事实上，

$$\begin{aligned} f(-u) &= \int_{-\infty}^{-u} \varphi(s)ds - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{-u} \varphi(s)ds - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{-u} \varphi(s)ds - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)ds + \frac{1}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{-u} \varphi(s)ds - \left(\int_{-\infty}^{-u} \varphi(s)ds + \int_{-u}^{+\infty} \varphi(s)ds\right) + \frac{1}{2} \\ &= -\int_{-u}^{+\infty} \varphi(s)ds + \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

作如下代换

$$\begin{cases} t = -s \Rightarrow dt = -ds, \\ s = -u \Rightarrow t = u, \\ s = +\infty \Rightarrow t = -\infty \end{cases} \tag{15}$$

我们得到

$$\begin{aligned} f(-u) &= -\int_{u}^{-\infty} \varphi(-s)(-ds) + \frac{1}{2} \\ &= \int_{u}^{-\infty} \varphi(s)ds + \frac{1}{2} \\ &= -\int_{-\infty}^{u} \varphi(s)ds + \frac{1}{2} \\ &= -\left(\int_{-\infty}^{u} \varphi(s)ds - \frac{1}{2}\right) \\ &= -f(u)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

因此， $f(-u) = -f(u)$，这就证明了该结论。 □

我们将使用引理1 来证明以下定理。

定理 1. 令 t H 为 *Heaviside* 型分布， δ 为狄拉克 δ 型分布。该 n

(i) $H\delta^2 \approx \frac{1}{2}\delta^2$

(ii) $H\delta' \approx \frac{1}{2}\delta' - \delta^2$

证明。 (*i*) 要证明 $H\delta^2 \approx \frac{1}{2}\delta^2$，我们需要证明

$$H\delta^2 - \frac{1}{2}\delta^2 \approx 0\,,$$

或等价地

$$\left(H - \frac{1}{2}\right)\delta^2 \approx 0. \tag{17}$$

我们知道

$$H_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt = \int_{-\infty}^{x/\varepsilon} \varphi(s)ds$$

and

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

分别是 H 和 δ 在 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 中的代表元。因此,

$$g_\varepsilon(x) = H_\varepsilon(x) - \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{x/\varepsilon} \varphi(s)ds - \frac{1}{2}$$

and

$$\delta_\varepsilon^2(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

是代表元 .....的表示 $H-1/2$ 和 δ^2，分别。因此，为了证明（17），我们必须证明..... at

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\left(H_\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\delta^2,\psi\rangle=0,\forall\psi\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{18}$$

Now,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\left(H_\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\delta^2,\psi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left(H_\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\delta_\varepsilon^2(x)\psi(x)dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\delta_\varepsilon^2(x)\psi(x)dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi(x)dx\end{aligned} \tag{19}$$

假设 $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq[-l,l]$ 且作如下代换

$$-l\le u=\frac{x}{\varepsilon}\le l\Rightarrow x=\varepsilon u\Rightarrow dx=\varepsilon du$$

将其代入（19）得到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\left(H_\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\delta^2,\psi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u)\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi^2(u)\psi(\varepsilon u)\varepsilon du\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u)\varphi^2(u)\psi(\varepsilon u)du\end{aligned} \tag{20}$$

根据勒贝格控制收敛定理,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\left(H_\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\delta_\varepsilon^2,\psi\rangle &= \psi(0)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{u}\varphi(s)ds-\frac{1}{2}\right)\varphi^2(u)du\\ &= 0\,,\end{aligned} \tag{21}$$

因为

$$g_\varepsilon(x)=\int_{-\infty}^{u}\varphi(s)ds-\frac{1}{2}$$

是奇函数，而 $\varphi^2(u)$ 是偶函数，因此， $g_\varepsilon(u)\varphi^2(u)$ 是奇函数，并且

$$\int_{-l}^{l}\left(\int_{-\infty}^{u}\varphi(s)ds-\frac{1}{2}\right)\varphi^2(u)du=0.$$

这就证明了式（19）中的相等。因此， (i) 成立。

(ii) 要证明 $H\delta'\approx\frac{1}{2}\delta'-\delta^2$，我们需要证明

$$H\delta'-\frac{1}{2}\delta'+\delta^2\approx 0, \tag{22}$$

当且仅当

$$\left(H-\frac{1}{2}\right)\delta'+\delta^2\approx 0. \tag{23}$$

δ' in $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的一个代表元是

$$\delta'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

要证明（23），我们必须证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\left(H_\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\delta'_\varepsilon + \delta^2_\varepsilon, \psi\rangle = 0, \forall\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}). \tag{24}$$

Now,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\left(H_\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\delta'_\varepsilon + \delta^2_\varepsilon, \psi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle g_\varepsilon\delta'_\varepsilon + \delta^2_\varepsilon, \psi\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}(g_\varepsilon(x)\delta'_\varepsilon(x) + \delta^2_\varepsilon(x))\psi(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}}(g_\varepsilon(x)\psi(x))\delta'_\varepsilon(x)dx + \int_{\mathbb{R}}\delta^2_\varepsilon(x)\psi(x)dx\right) \end{aligned}\tag{25}$$

我们来求解第一个积分

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(g_\varepsilon(x)\psi(x))\delta'_\varepsilon(x)dx &= -\int_{\mathbb{R}}(g_\varepsilon(x)\psi(x))'\delta_\varepsilon(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}}(g'_\varepsilon(x)\psi(x) + g_\varepsilon(x)\psi'(x))\delta_\varepsilon(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}}(\delta_\varepsilon(x)\psi(x) + g_\varepsilon(x)\psi'(x))\delta_\varepsilon(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\delta^2_\varepsilon(x)\psi(x)dx - \int_{\mathbb{R}}g_\varepsilon(x)\psi'(x)\delta_\varepsilon(x)dx \end{aligned}\tag{26}$$

将（26）代入（25）后，（25）的最后一项与（26）的第一项相互抵消，得到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\left(H_\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\delta'_\varepsilon + \delta^2, \psi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{\mathbb{R}}g_\varepsilon(x)\psi'(x)\delta_\varepsilon(x)dx\right) \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}g_\varepsilon(x)\psi'(x)\delta_\varepsilon(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{x/\varepsilon}\varphi(s)ds - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi'(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{x/\varepsilon}\varphi(s)ds - \frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi'(x)dx \end{aligned}\tag{27}$$

假设支撑$(\varphi) \subseteq [-l, l]$ 并令 $-l \le u = x/\varepsilon \le l$，我们有 $u = \varepsilon u \Rightarrow dx = \varepsilon du$。现在，代入（27），得到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\left(H_\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\delta'_\varepsilon + \delta^2, \psi\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-l}^{l}\left(\int_{-\infty}^{u}\varphi(s)ds - \frac{1}{2}\right)\varphi(u)\psi'(\varepsilon u)\varepsilon du \\ &= -\psi'(0)\int_{-l}^{l}\left(\int_{-\infty}^{u}\varphi(s)ds - \frac{1}{2}\right)\varphi(u)du \\ &= 0, \end{aligned}\tag{28}$$

因为

$$\int_{-l}^{l}\left(\int_{-\infty}^{u}\varphi(s)ds-\frac{1}{2}\right)\varphi(u)du=0.$$

□

如引言中先前所述，Racskó [28] 强调了将奇异分布与不连续函数相乘时固有的困难，这种情况在拼接问题中经常出现。在经典分布理论中，此类运算缺乏数学上的有效性，因此许多作者采取临时性的约定，例如将不连续函数在连接面处的值解释为其单侧极限的平均值。Racskó 明确批评了这种做法，指出它可能导致错误结果，因此建立了一个避免任何涉及狄拉克δ函数的“非法”乘积或正则化的框架。然而，他的结构仍局限于不显式出现更强奇异性的情形，例如 δ^2。

相比之下，在Colombeau代数中，这些运算得到了严格定义。涉及 δ^2、$\theta\delta'$ 或 $\theta\delta^2$ 的乘积被视为定义良好的广义元素，从而可以在无需临时性假设或含糊处理的情况下操作这些超奇异项。从这个意义上说，$\mathcal{G}$ 的代数结构为探索超出经典分布理论范围的构型提供了数学上安全的环境，即使在度规或其导数中的不连续性具有物理相关性的情况下，也能确保一致性。

当人们试图理解超奇异项的物理作用时，这种数学稳健性尤为重要。在此背景下，值得注意的是，分布的幂（如 δ^2）在具有物理意义的情形中也得到了研究。Oberguggenberger [41] 将项 $\iota(\delta)^2$ 作为一维波动方程的初始数据，结果表明，尽管相应的解在光锥内部并非 $\mathcal{C}^\infty$-正则，但在该区域内仍然是 $\mathcal{G}^\infty$-正则的。这一结果表明，即使是分布的幂，也能在 Colombeau代数中得到一致处理，从而保持奇异物理系统的数学连贯性。

这一分析进一步支持了这样的观点：超奇异项尽管缺乏经典意义，但在广义函数框架下处理时，可以代表合理的物理理想化。在本研究中，我们在几何背景下探讨这一观点；在涉及不连续度规的拼接面上，δ^2的出现是自然的。

III. 不连续时空度规的构造

为了描述具有不同几何结构的两个时空区域之间的耦合，我们考虑两个伪黎曼流形（M^+，g^+_{ab}）和（M^-，g^-_{ab}），其度规分别为 g^+_{ab} 和 g^-_{ab}，定义在 M^+ 和 M^-上；它们是更大时空 M的子流形，并满足$M^+ \cup M^- \subseteq M$。这些区域由一个公共超曲面 Σ分隔，该超曲面可视为两种几何结构之间的拼接界面。

与传统情形不同，传统情形假设度规在超曲面 ($[g_{ab}] = 0$) 上连续；这里我们处理的是真正的几何断裂，也就是说，度规在全局上不连续，其形式如下：

$$g_{ab}(x) = \theta(l)\, g^+_{ab}(x) + \theta(-l)\, g^-_{ab}(x), \tag{29}$$

其中，$l(x)$ 是在 Σ 上为零的光滑函数，而 $\theta(l)$ 是赫维赛德函数。根据此定义，尽管度规在 Σ 的两侧均有良好定义，但其在超曲面上的限制条件表现出不连续性

$$[g_{ab}] \neq 0\,. \tag{30}$$

这种构造需要格外谨慎，因为推导克里斯托费尔符号、曲率张量以及能动张量本身等几何量时，会出现诸如 $\delta(l)$、$\delta'(l)$ 和 $\delta^2(l)$ 之类的项；其中最后一项在经典分布理论中没有明确定义。因此，本文将在 Colombeau 代数的框架内进行处理，该框架为处理这类表达式提供了数学上严谨的环境。

为了以数学上定义良好的方式处理上述结构，我们引入赫维赛德函数的一个光滑正则化，记作 $\theta_\varepsilon(l)$。然后将环境度规定义为

$$g_{\varepsilon ab}(x) = \theta_\varepsilon(l) g^+_{ab}(x) + \theta_\varepsilon(-l) g^-_{ab}(x)\,, \tag{31}$$

其中，$l = l(x)$ 是一个光滑函数，满足 $l(x) = 0$定义超曲面 Σ。由于$\theta_\varepsilon(-l) = 1 - \theta_\varepsilon(l)$, 这个正则化度量可以解释为沿着 Σ 的法向，在$g^+_{ab}$ 和 g^-_{ab} 之间进行的光滑插值。

于是，该度量定义为满足

$$\begin{aligned}\langle g_{\varepsilon ab},\varphi\rangle &= \int_M g_{\varepsilon ab}(x)\varphi(x)dx\\ &= \int_M (\theta_\varepsilon(l)g^+_{ab}(x)+\theta_\varepsilon(-l)g^-_{ab}(x))\varphi(x)\\ &= \int_M \theta_\varepsilon(l)g^+_{ab}(x)dx+\int_M \theta_\varepsilon(-l)g^-_{ab}(x))\varphi(x)dx\\ &= \langle\theta_\varepsilon(l)g^+_{ab}(x),\varphi\rangle+\langle\theta_\varepsilon(-l)g^-_{ab}(x),\varphi\rangle\,,\end{aligned}\tag{32}$$

在极限 $\varepsilon\to 0$, $\theta_\varepsilon\to\theta$ 下，正则化度量以广义意义趋于不连续度规

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle g_{\varepsilon ab},\varphi\rangle\equiv\langle g_{ab},\varphi\rangle\equiv\langle\theta(l)g^+_{ab},\varphi\rangle+\langle\theta(-l)g^-_{ab},\varphi\rangle\tag{33}$$

因此

$$g_{\varepsilon ab}(x)\approx\theta(l)g^+ab(x)+\theta(-l)g^-ab(x)\,,\tag{34}$$

其中符号 表示 $\approx$ 在 Colombeau代数中的弱意义下相等（见第 II节） .

将环境度规定义为 Colombeau代数中的一个元素，使我们能够在以下各节中，即使度规存在明显的不连续性，也能严谨地计算几何量。此外，这一表述避免了前文提到的与分布的乘积相关的歧义；在 Σ 附近推导度规时，这类歧义会自然出现。

A. 度规不连续性的几何影响

让我们评估考虑 $[g_{ab}]\neq 0$ 所带来的影响。此外，我们还将说明在此情境下如何处理法向和切向量的概念。

允许 $[g_{ab}]\neq 0$ 意味着

1. 度规 g_{ab} 在超曲面 Σ 上不连续，也就是说， $g^+_{ab}\neq g^-_{ab}$。

2. 诱导度规 $h_{\alpha\beta}=g_{ab}e^a_\alpha e^b_\beta$ 也将不连续

$$[h_{\alpha\beta}]=[g_{ab}]e^a_\alpha e^b_\beta\neq 0\,,\tag{35}$$

但这引出了关于 e^a_α 行为的问题，稍后将对此进行讨论。

3. 第 e i逆度规 g^{ab} 也不连续，并且可在分布意义下表示为

$$g^{ab}(x) = \theta(l)g^{ab+}(x) + \theta(-l)g^{ab-}(x). \tag{36}$$

其正则化形式为

$$g_\varepsilon^{ab} = \theta_\varepsilon(l)g^{ab+} + \theta_\varepsilon(-l)g^{ab-} . \tag{37}$$

然而，重要的是要指出，由于矩阵求逆运算的非线性，函数 g_ε^{ab}通常并非 $g_{\varepsilon ab}$的精确逆，即 $(g_{\varepsilon ab})^{-1} \neq g_\varepsilon^{ab}$。即便如此，在 Colombeau形式主义中，通过伴随关系，恒等式 $g_\varepsilon^{ab} g_{\varepsilon bc} = \delta_c^a$ 在弱意义下得以恢复。

为验证这一性质，我们注意到

$$\begin{aligned} g_\varepsilon^{ab} g_{\varepsilon bc} &= \left(\theta_\varepsilon(l)g^{ab+} + \theta_\varepsilon(-l)g^{ab-}\right)\left(\theta_\varepsilon(l)g_{bc}^{+} + \theta_\varepsilon(-l)g_{bc}^{-}\right) \\ &= \theta_\varepsilon^2(l)g^{ab+}g_{bc}^{+} + \theta_\varepsilon(l)\theta_\varepsilon(-l)g^{ab+}g_{bc}^{-} + \theta_\varepsilon(-l)\theta_\varepsilon(l)g^{ab-}g_{bc}^{+} + \theta_\varepsilon^2(-l)g^{ab-}g_{bc}^{-} \\ &\approx \theta_\varepsilon(l)g^{ab+}g_{bc}^{+} + \theta_\varepsilon(-l)g^{ab-}g_{bc}^{-} \\ &\approx \theta_\varepsilon(l)\delta_c^a + \theta_\varepsilon(-l)\delta_c^a \\ &\approx \delta_c^a . \end{aligned} \tag{38}$$

这里我们使用以下性质

$$\theta_\varepsilon^2(l) \approx \theta_\varepsilon(l), \quad \theta_\varepsilon(l)\theta_\varepsilon(-l) \approx 0.$$

方程（38）表明，在极限 $\varepsilon \to 0$下，正则化度量满足

- For $l > 0$: $g_{\varepsilon bc} \to g_{bc}^{+}$, $g_\varepsilon^{ab} \to g^{ab+}$ and $g^{ab+}g_{bc}^{+} = \delta_c^a$;
- For $l < 0$: $g_{\varepsilon bc} \to g_{bc}^{-}$, $g_\varepsilon^{ab} \to g^{ab-}$ and $g^{ab-}g_{bc}^{-} = \delta_c^a$.

因此，恒等关系 $g_\varepsilon^{ab} g_{\varepsilon bc} \approx \delta_c^a$ 在弱意义下仍然成立，也就是说，在 Colombeau 广义函数的语境中仍然成立。

在 Darmois-Israel拼接条件的传统处理方法中，法向量定义为

$$n_i = \epsilon \partial_i l, \quad n^i n_i = \epsilon = \mp 1,$$

并且在超曲面($[n^i] = 0$)上连续，因为例如， l 是一个连续坐标，就像沿着与 Σ正交的测地线测量的固有距离一样。

假设 $[g_{ab}] \neq 0$，仍可保持 n_i 的连续性，因为 $n_i = \epsilon \partial_i l$ 仅取决于 l，而不直接取决于度规。因此，将 n_i 几何定义为 l的梯度，不受度规不连续性的影响。

尽管协变法向量 $n_i = \epsilon\, \partial_i l$ 即使在 $[g_{ab}] \neq 0$ 时仍保持连续，但其逆变形式 $n^i = g^{ij} n_j$ 通常是不连续的，因为它继承了逆度规的跳变。这是这一设定带来的自然几何后果，而非歧义：这仅仅反映了这样一个事实，即任何依赖于 g^{ab} 的对象都必须具有与度规本身相同程度的正则性（或不规则性）。

然而，归一化 $n^i n_i = \epsilon$ 涉及不连续的逆度规 g^{ij}。这意味着

$$n^i n_i = g^{ij} n_i n_j = \theta(l) g^{ij+} n_i n_j + \theta(-l) g^{ij-} n_i n_j \,. \tag{39}$$

因此，与标准情形一样，我们需要

$$g^{ij+} n_i n_j = g^{ij-} n_i n_j = \epsilon \,. \tag{40}$$

由于 n_i 在两侧相同，也就是说是连续的，这对逆度规 $[g^{ij}]$的不连续性施加了限制条件。根据式（40），我们有

$$\begin{aligned} (g^{ij+} - g^{ij-}) n_i n_j &= g^{ij+} n_i n_j - g^{ij-} n_i n_j \\ &= \epsilon - \epsilon = 0 \,. \end{aligned} \tag{41}$$

因此，

$$[g^{ij}] n_i n_j = 0 \,. \tag{42}$$

即使 g^{ij} 不连续，这一条件也是归一化 $n^i n_i = \epsilon$ 保持有效所需的最低要求。

需要强调的是，式（42）中确立的条件是对不连续性 $[g^{ij}]$的限制条件，但这并不意味着 $[g^{ij}]$在所有方向上都为零。它表示 $[g^{ij}]$沿 n_i方向的投影必须为零。从几何角度看，$[g^{ij}] n_i n_j$是由 $[g^{ij}]$与 $n_i n_j$缩并得到的标量。

对于 $[g^{ij}] n_i n_j = 0$，$[g^{ij}]$在张量意义上必须与 $n_i n_j$正交。这并不意味着 $[g^{ij}] = 0$，而是意味着 $[g^{ij}]$不能在 $n_i n_j$的方向上有分量。这只是一项对逆度规不连续性的限制条件，确保 n_i 在 Σ两侧的归一化保持一致；它只影响 $[g^{ij}]$分量的特定组合。

在传统方法中，切向量 $e^a_\alpha = \partial x^a/\partial y^\alpha$ 定义为时空坐标 x^a 对超曲面 y^α的内禀坐标的导数。此外，假设 $[e^a_\alpha] = 0$，也就是说，在 Σ两侧采用相同的坐标系。

当我们考虑 $[g_{ab}] \neq 0$ 时，那么 $[h_{\alpha\beta}] = [g_{ab}]e^a_\alpha e^b_\beta \neq 0$，这意味着诱导度规是不连续的。这引出了一个问题：向量 e^a_α 是否应保持连续？从几何上看， e^a_α 定义了超曲面的切基。如果我们在两侧都保持相同的坐标选择 y^α ，那么 $[e^a_\alpha] = 0$，而 $h_{\alpha\beta}$ 的不连续性完全源于$[g_{ab}]$。然而，如果允许坐标 y^α 在两侧不同（也就是说，在每个区域中对 Σ 使用不同的坐标系），那么 e^a_α 就可能不连续： $e^{a+}_\alpha \neq e^{a-}_\alpha$。这会使分析变得复杂，因为我们需要定义两个坐标系之间的关系。

因此，我们保持 $[e^a_\alpha] = 0$，也就是说，在 Σ 两侧使用相同的坐标系 y^α 。这使标准情形保持一致，并避免计算中出现额外的复杂性。

IV. 不连续度规的拼接条件推导

在本节中，我们应用正则化的不连续度规，推导爱因斯坦方程中的广义拼接条件。为此，我们分析诸如克里斯托费尔符号、黎曼张量和里奇张量以及里奇标量等几何实体在存在真正不连续性时的表现。目标是确定与这些不连续性相关的能动张量中的奇异贡献。

与标准情况类似，当我们对方程（31）求导时，会得到与函数 $\delta_\varepsilon(l)$ 成正比的贡献。

$$\partial_c g_{\varepsilon ab} = \theta_\varepsilon(l)\partial_c g^+_{ab} + \theta_\varepsilon(-l)\partial_c g^-_{ab} + \epsilon\delta_\varepsilon(l)[g_{ab}]n_c \ . \tag{43}$$

在 Colombeau广义函数代数的框架下，由此产生的分布的乘积不存在歧义，因此，为了考虑最一般的情形，我们不要求度规在 Σ 处连续。于是我们有 $[g_{ab}] \neq 0$。由于 $[g_{ab}] = g^+_{ab} - g^-_{ab}$，在这种情况下我们有 $g^+_{ab} \neq g^-_{ab}$。从物理上说，这意味着度规

确实是不连续的[2]，且不要求诱导度规 $h^{\alpha\beta}$ 在 Σ 两侧相同。

由式（43），可确定广义克里斯托费尔符号:

$$\Gamma^a_{\varepsilon bc} \approx \theta_\varepsilon(l)\Gamma^{a+}_{bc} + \theta_\varepsilon(-l)\Gamma^{a-}_{bc} + B^a_{bc}\delta_\varepsilon(l)\,, \tag{44}$$

其中

$$\Gamma^{a+}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad+}(\partial_c g^+_{bd} + \partial_b g^+_{cd} - \partial_d g^+_{bc})\,, \tag{45}$$

$$\Gamma^{a-}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad-}(\partial_c g^-_{bd} + \partial_b g^-_{cd} - \partial_d g^-_{bc})\,, \tag{46}$$

and

$$B^a_{bc} = \frac{\epsilon}{2}\tilde{g}^{ad}\left([g_{bd}]n_c + [g_{cd}]n_b - [g_{bc}]n_d\right)\,, \tag{47}$$

其中 $\tilde{g}^{ad}$ 是平均逆度规，其定义为

$$\tilde{g}^{ad} := \frac{1}{2}(g^{ad+} + g^{ad-})\,. \tag{48}$$

薄壳形式的一个自然要求是满足条件 $B^a_{bc} \approx \lim_{\varepsilon\to 0} B^a_{\varepsilon bc} \approx 0$ [31]。然而，在本文中，我们不施加这一条件，因为 $[g_{ab}] \neq 0$。

考虑式（44）可计算黎曼张量，结果为

$$R^a_{\varepsilon bcd} \approx \theta_\varepsilon(l)R^{a+}_{bcd} + \theta_\varepsilon(-l)R^{a+}_{bcd} + (A^a_{bcd} + \tilde{A}^a_{bcd})\delta_\varepsilon(l) + Q^a_{bcd}\delta'_\varepsilon(l) + F^a_{bcd}\delta^2_\varepsilon(l), \tag{49}$$

其中

$$A^a_{bcd} = \epsilon\left([\Gamma^a_{bd}]n_c - [\Gamma^a_{bc}]n_d\right), \tag{50}$$

$$\tilde{A}^a_{bcd} = \partial_c B^a_{bd} - \partial_d B^a_{cb} + \tilde{\Gamma}^a_{ce}B^e_{bd} + \tilde{\Gamma}^e_{db}B^a_{ce} - \tilde{\Gamma}^a_{de}B^e_{cb} - \tilde{\Gamma}^e_{cb}B^a_{de}\,, \tag{51}$$

$$Q^a_{bcd} = \epsilon\left(B^a_{db}n_c - B^a_{cb}n_d\right)\,, \tag{52}$$

and

$$F^a_{bcd} = B^a_{ce}B^e_{db} - B^a_{de}B^e_{cb}\,. \tag{53}$$

[2]“真正的不连续性”这一术语用于区分度规的实际不连续性——即在 Σ 超曲面上，g^+_{ab} 与 g^-_{ab} 之间的有效跃变——以及纯粹表观的不连续性；后者可能源于坐标选择不当或变换定义不良。在标准的Darmois–Israel形式体系中，许多表观不连续性可以通过要求 g_{ab} 连续并确保坐标系具有良好的适应性来消除。在此，我们明确放宽 $[g_{ab}] \neq 0$，因此讨论的是内禀几何不连续性，也就是说，这是真实的物理断裂，而不仅仅是坐标断裂。

˜在式（51）中， Γ^a_{ce} 是平均克里斯托费尔符号，其表达式为

$$\tilde{\Gamma}^a_{ce} := \frac{1}{2}\left(\Gamma^{a+}_{ce} + \Gamma^{a-}_{ce}\right) . \tag{54}$$

请注意，在式（49）中， R^{a+}_{bcd} 和 R^{a-}_{bcd} 分别是 $l > 0$ 和 $l < 0$ 两侧的正则黎曼张量˜，而 Σ中的各项 $A^a_{bcd} + A^a_{bcd}$、 Q^a_{bcd}和 F^a_{bcd} 则是刻画不连续性的奇异贡献。项 A^a_{bcd} 在标准情形下已经存在，而其余各项则均由度规不连续 $[g_{ab}] \neq 0$引起。

里奇张量由缩并 $R_{bd} = R^a_{bcd}$确定，因此可以写成

$$R_{\varepsilon bd} \approx \theta_\varepsilon(l)R^+_{bd} + \theta_\varepsilon(-l)R^-_{bd} + (A_{bd} + \tilde{A}_{bd})\delta_\varepsilon(l) + Q_{bd}\delta'_\varepsilon(l) + F_{bd}\delta^2_\varepsilon(l) . \tag{55}$$

里奇标量 可由缩并$R_\varepsilon = g^{bd}_\varepsilon R_{bd}$得到。这里需要谨慎处理，因为

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &\approx g^{bd}_\varepsilon R_{bd} \\ &\approx (\theta_\varepsilon(l)g^{bd+} + \theta_\varepsilon(-l)g^{bd-})\left(\theta_\varepsilon(l)R^+_{bd} + \theta_\varepsilon(-l)R^-_{bd} + \bar{A}_{bd}\delta_\varepsilon(l) + Q_{bd}\delta'_\varepsilon(l) + F_{bd}\delta^2_\varepsilon(l)\right) , \end{aligned}$$

˜其中 $A_{bd} = A_{bd} + A_{bd}$。展开括号内的乘积，并考虑分布的乘法后，可得

$$R_\varepsilon \approx \theta_\varepsilon(l)R^+ + \theta_\varepsilon(-l)R^- + \tilde{g}^{bd}\bar{A}_{bd}\delta_\varepsilon(l) + \tilde{g}^{bd}Q_{bd}\delta'_\varepsilon(l) + \left(\tilde{g}^{bd}F_{bd} - 2\tilde{g}^{bd}Q_{bd}\right)\delta^2_\varepsilon(l) , \tag{56}$$

由此得到广义函数框架下里奇标量的最终正则化形式。请注意， $\tilde{g}^{bd}$ 是平均逆度规，因此无法进行通常的指标缩并运算，所以

$$\tilde{g}^{bd}\bar{A}_{bd} \neq \bar{A}, \tilde{g}^{bd}Q_{bd} \neq Q \text{ e } \tilde{g}^{bd}F_{bd} \neq F . \tag{57}$$

通过代入结果（31）、（55）和（56），可以用广义形式表述爱因斯坦场方程。因此，爱因斯坦张量也分解为五个部分，即

$$R_{\varepsilon ab} - \frac{1}{2}g_{\varepsilon ab}R_\varepsilon \approx 8\pi T_{\varepsilon ab} \tag{58}$$

变为

$$\begin{aligned} &\theta_\varepsilon(l)\left(R^+_{\varepsilon ab} - \frac{1}{2}g^+_{\varepsilon ab}R^+_\varepsilon\right) + \theta_\varepsilon(-l)\left(R^-_{\varepsilon ab} - \frac{1}{2}g^-_{\varepsilon ab}R^-_\varepsilon\right) + \left(\bar{A}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{ab}\bar{A}_{ab}\right)\delta_\varepsilon(l) \\ &+ \left(Q_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{ab}Q_{ab}\right)\delta'_\varepsilon(l) + \left(F_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{ab}(F_{ab} - 4Q_{ab})\right)\delta^2_\varepsilon(l) \approx 8\pi T_{\varepsilon ab} . \end{aligned} \tag{59}$$

观察式（59），我们可以将能量-动量张量表示为以下形式

$$T_{\varepsilon ab} \approx \theta_\varepsilon(l) T^+_{ab} + \theta_\varepsilon(-l) T^-_{ab} + \delta_\varepsilon(l) S_{ab} + \delta'_\varepsilon(l) W_{ab} + \delta^2_\varepsilon(l) J_{ab} \tag{60}$$

其中

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_{\varepsilon ab} \approx T_{ab} \approx \theta(l) T^+_{ab} + \theta(-l) T^-_{ab} + \delta(l) S_{ab} + \delta'_\varepsilon(l) W_{ab} + \delta^2_\varepsilon(l) J_{ab}, \tag{61}$$

with

$$S_{ab} = \bar{A}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{ab}\bar{A}_{ab}\,, \tag{62}$$

$$W_{ab} = Q_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{ab}Q_{ab}\,, \tag{63}$$

and

$$J_{ab} = F_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{ab}(F_{ab} - 4Q_{ab})\,. \tag{64}$$

方程（60）描述了能量-动量张量 T_{ab} 穿越超曲面 Σ时的变化。在 Σ的两侧，张量 T_{ab} 分别由 T^+_{ab}（当 $l > 0$时）和 T^-_{ab}（当 $l < 0$时）给出，它们通过爱因斯坦方程以通常的方式确定局部几何。然而，在爱因斯坦张量中施加跨越 Σ 的不连续度规，意味着爱因斯坦方程不能仅由T^+_{ab}和 T^-_{ab}满足，也不能像标准情形那样仅由

$$T_{\alpha\beta} = \theta(l) T^+_{\alpha\beta} + \theta(-l) T^-_{\alpha\beta} + \delta(l) S_{\alpha\beta}\,. \tag{65}$$

满足。

因此，我们观察到额外项 W_{ab} 和 J_{ab}的出现，以及 S_{ab}，后者已包含在标准的达莫瓦-以色列条件中。方程（62）是

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\left(A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}A g_{\alpha\beta}\right) \tag{66}$$

的类比项，表示一个奇异贡献（正比于 $\delta(l)$），其支撑位于超曲面 Σ 上。该项在 Σ 上充当额外的能量-动量分布，确保爱因斯坦方程在整个时空（包括超曲面两侧）始终保持一致。

难点在于如何对方程（63）和（64）作出物理解释。这些项在经典分布理论中没有意义（因为任意分布都不能相乘），但在 Colombeau代数中则定义良好。由此得到的爱因斯坦方程揭示了与度规几何不连续性相关的新广义项。接下来，我们将讨论这些项如何在物理情境中体现，以及它们可能具有何种解释。

A. Σ 上奇异项的可能物理解释

广义相对论中拼接条件的经典表述由 Darmois 提出，后经 Israel 改进，其依据是度规张量在超曲面 Σ 两侧连续，即 $[g_{ab}] = 0$。这一假设排除了诸如 $\theta(l)\delta(l)$ 或 $\delta^2(l)$ 这类含义不明确的分布乘积，从而确保爱因斯坦方程在经典分布理论的意义下仍然成立。

然而，一旦放宽度规的连续性条件并允许 $[g_{ab}] \neq 0$，场方程的推导中便会出现新的奇异项。这些项不仅包括熟知的 $\delta(l)$ 贡献，它表征了位于 Σ 上的能量-动量薄壳的存在，还包括更奇异的贡献，例如 $\delta'(l)$ 和 $\delta^2(l)$。

尽管这类项在施瓦茨分布框架内没有定义，但在广义函数的 Colombeau代数中却有良好定义。如第 II 节所述，这一形式体系使得我们能够以与微分演算相容的方式处理分布的乘积和导数，从而为所涉及的对象提供数学上自洽的处理方法。

在这一框架下，我们现在讨论与 Σ 的几何性质相容的可能物理解释：

(i) 与标准情形一样，与 $\delta_\varepsilon(l)$ 成正比的项仍与集中在超曲面 Σ 上的能量-动量密度相关。这一分布贡献在文献中普遍被认为代表着分隔两个时空区域的薄壳，其中 Σ 上局域化的能量和动量由张量 S_{ab} 决定。

然而，在不连续度规 $[g_{ab}] \neq 0$ 的情形下，这一项的结构发生了根本性改变。由广义爱因斯坦方程得到的表面张量 S_{ab} 不仅取决于外在曲率的跃变 A_{ab}，还取决于一个~额外项 A_{ab}，该项直接源自度规不连续。

这一修正表明，尽管 $\delta_\varepsilon(l)$ 仍描述一种无限集中分布，但与这一项相关的物理内容已不同于度规连续的情形，因为表面能量密度现在还取决于几何在 Σ 处发生断裂的方式。因此，其张量结构反映了度规不连续性的直接影响

。因此，在这一新背景下，项 $\delta_\varepsilon(l)$ 不仅刻画了薄壳的存在，还包含了有关不连续性内部几何的信息。

(ii) 与 $\delta'_\varepsilon(l)$ 成正比的项，可能与几何或沿超曲面 Σ法向方向上的能量分布的急剧变化有关。在经典分布框架中，狄拉克δ函数的导数仅是一个操作性对象，既没有逐点定义，也无法与其他分布相乘。然而，在 Colombeau代数中， $\delta'_\varepsilon(l)$ 是一个定义良好的平滑且集中的函数，因此可将其解释为非光滑跃迁的标记。因此，该项可能与内部应力、曲率导数的不连续性，或跨越Σ的能量-动量分布变化有关，反映出层更复杂的内部结构（见附录A）。

(iii) 与$\delta^2_\varepsilon(l)$ 成正比的项代表了更高一级的奇异性；不同于 $\delta_\varepsilon(l)$，它在经典 Schwartz分布框架中没有意义。然而，它的性质与狄拉克δ函数类似，在 Colombeau代数中获得了精确定义，其中量 $\int \delta^2(x)\ dx$ 被解释为一个无限强但仍属适度性质的广义数。对 $\delta^2_\varepsilon(l)$ 进行典型的正则化后，可见其具有高度局域化的结构，其最大值发散，积分在正则化极限 $\sim \varepsilon^{-1}$ 下按 $\varepsilon \to 0$增长。这种行为表明， $\delta^2(l)$ 具有比简单表面能量分布更显著的奇异强度（见第II节）。

鉴于这些性质，将该项理解为沿超曲面 Σ 高度集中的能量或曲率密度的理想化表现是合理的。这种结构可能对应于内部具有奇异曲率的厚层的极限状态，或一种极端的几何跃迁。例如，Huber [31] 的研究表明，在相关形式体系中采用平滑函数时，自然会出现支撑分布于时空子区域上的对象，从而刻画厚壳。在此意义下， $\delta^2_\varepsilon(l)$ 的存在可以被解释为极端几何跃迁或有效厚层的数学标志。尽管其确切的物理解释仍有待进一步研究，但它在 Colombeau代数中的形式一致性，使其作为扩展场方程的合法组成部分纳入其中具有充分依据。

必须强调的是，这些解释目前仍是假设性的。它们并非建立在实验模型或任何既定的物理学界共识之上，而是基于

Colombeau框架的形式一致性，以及在 $[g_{ab}] \neq 0$ 时自然呈现的数学结构。因此，这些观点应被视为初步提案，对其进行更深入的探索，或许能为广义相对论中广义函数的本质带来新的视角。

从这一观点来看，新增项 W_{ab} 和 J_{ab} 可视为度规连续性放宽时出现的额外几何自由度的指示。尽管其确切的物理解释仍有待进一步研究，但它们的存在标志着朝着更全面地描述时空中的奇异结构迈出了一个具有概念意义的步伐。

假设度规不连续，会形成一个更一般且更复杂的框架。方程（62）–（64）严格来说并非Lanczos方程，因为它们是以四阶张量的形式表述的。要得到完整的表述，必须将其投影到超曲面上，由此得到三阶张量 $S_{\alpha\beta}$,$W_{\alpha\beta}$ 和 $J_{\alpha\beta}$。这些对象类似于经典Lanczos方程，

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon}{8\pi}\left([K_{\alpha\beta}] - [K]\, h_{\alpha\beta}\right),$$

but 纳入不连续性 $[g_{ab}] \neq 0$ 所产生的额外贡献。

除了切向投影外，法向分量 $G_{ab}n^a n^b$ 和混合分量 $G_{ab}e^a_\alpha n^b$ 在描述不连续性如何影响穿过 Σ 的能量-动量通量方面也发挥着关键作用。这些项对于 W_{ab} 和 J_{ab}尤其重要；由于它们的奇异性更强，可能具有显著的法向分量，并影响能量-动量守恒以及超曲面的内禀和外禀动力学。

这些投影的几何和物理影响将在后续工作中加以考察，届时将通过系统分析阐明度规不连续如何改变 Σ 的内在结构以及沿法向的行为。

V. 总结与结论

在这项工作中，我们将 Darmois-Israel 形式体系扩展到了度规存在真正不连续性的情形，即当 $[g_{ab}] \neq 0$时。我们在 Colombeau代数框架内系统地构建了这一表述，从而能够严格处理爱因斯坦场方程中出现的分布乘积和分布的导数。

由此形成的形式体系为描述非光滑

拼接面提供了连贯的数学结构，即使度规及其导数存在不连续性，也能保持几何一致性。分析表明，度规直接发生不连续会引发一系列几何效应：(i) 法向量和诱导度规的行为需要满足额外的一致性条件，因为只有协变法向量 n_i 保持连续，而 n^i 和 $h^{\alpha\beta}$ 则继承了逆度规的不连续性；(ii) 克里斯托费尔符号会出现与 δ分布及其导数成比例的项；(iii) 曲率张量呈现按奇异性阶数划分的分解，包括正则、奇异和超奇异部分；(iv) 在广义能量-动量张量中，除了标准的薄壳项外，还出现了与匹接超曲面两侧几何断裂相关的新贡献，这些项在经典的达莫瓦-以色列情形中并不存在。

所提出的模型将经典的达莫瓦-以色列条件作为特例纳入其中，同时将其推广到更一般的情形，使时空可能呈现突变或复杂的内部结构。因此，Colombeau框架不仅在数学上自洽，在概念上也稳健，为研究时空中的奇点、度规号差变化以及几何边界开辟了新途径。

附录A：$\delta'(l)$的几何与分布性质

本附录将进一步介绍张量 W_{ab}的相关细节，该张量与 $\delta'_\varepsilon(l)$成正比。这有助于更深入地分析这一项可能的解释。

设 $l(x^a)$是时空上的一个标量场，并设 $\delta_\varepsilon(l)$表示一个支撑在超曲面上的狄拉克δ函数正则化

$$\Sigma = \{x^a \mid l(x^a) = 0\}.$$

应用链式法则，可得

$$\partial_a \delta(l(x)) = \delta'(l)\, \partial_a l(x). \tag{A1}$$

由于法向量（除符号外）定义为 $n_a = \epsilon\, \partial_a l$，因此可得

$$\partial_a \delta(l) = \delta'(l)\, n_a. \tag{A2}$$

方程（A2）表明：

- δ分布的时空导数仍支撑于 Σ 上；从这个意义上说，它“存在”于该超曲面上，正如 $\delta(l)$ 一样。

- 它具有明确的定向，即法向量 n 所指的方向 a.
- 因此，集中在超曲面上的分布的导数，衡量了沿着 Σ 法向离开时该分布的变化。

因此， $\delta'(l)$衡量了沿着指向 Σ的法向方向的变化。这使我们可以合理地将张量 W_{ab} 视为表明能量-动量分布沿着 l并非均匀或恒定，而是呈现内部变化。这种解释在文献中尚未得到充分确立，但我们提出这一观点，认为它合理且具有坚实的数学基础。

参考文献

[1] RAJU, C. K. 广义相对论中的连接条件。《**物理学杂志A：数学与一般物理**》，第15卷，第6期，第1785–1793页，1982年。[2] LANCZOS, C. 关于德西特宇宙的说明。《**物理学杂志**》，第23卷，第539–543页，1922年。[3] LANCZOS, C. 爱因斯坦引力理论中的面状物质分布。《**物理学年鉴**》（**莱比锡**），第379卷，第14期，第518–540页，1924年。[4] RAYCHAUDHURI, A. 相对论宇宙学。《**物理学杂志**》，第133卷，第325–336页，1953年。[5] ISRAEL, W. 广义相对论中的奇异超曲面与薄壳。《**伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学**》，第248卷，第1256期，第404–425页，1958年。[6] LICHNEROWICZ, A. **引力与电磁学的相对论理论**。Masson et Cie，巴黎，1955年。[7] LEE, J. M. 《**光滑流形导论**》。第2版。纽约：Springer，2013年。第1章。[8] O’BRIEN, S.; SYNGE, J. L. 广义相对论中不连续处的跃变条件。《**都柏林高等研究院通讯**》，第9期，第1–20页，1952年。[9] SYNGE, J. L. 《**相对论：广义理论**》。North-Holland，阿姆斯特丹，1960年。[10] ISRAEL, W. 广义相对论中的奇异超曲面与薄壳。《**新物理学杂志B辑（1965–1970）**》，第44卷，第1–14页，1966年。

[11] DAUTCOURT, G. 广义相对论中的牛顿近似。《**数学新闻**》，第27卷，第1–2期，第277–316页，1964年。[12] PAPAPETROU, A.; TREDER, H. 关于广义相对论中运动定律的说明。《**数学新闻**》，第20卷，第53–61页，1959年。[13] PAPAPETROU, A.; HAMOUI, A. 广义相对论中的简单物质层。《**亨利·庞加莱研究所年刊：A辑，理论物理**》，第9卷，第2期，第179–211页，1968年。[14] CHOQUET-BRUHAT, Y. 一般爱因斯坦时空，引力冲击波。《**亨利·庞加莱研究所年刊**》，第8卷，第327–338页，1968年。[15] DARMOIS, G. 爱因斯坦引力方程。《**数学科学纪事**》，第XXV分册，1927年。[16] POISSON, E.; VISSER, M. 薄壳虫洞：线性化稳定性。**Physical ReviewD**，第52卷，第7318–7321页，1995年。[17] VISSER, M.《**洛伦兹虫洞：从爱因斯坦到霍金**》。AIP出版社，1996年。[18] MAZUR, P. O.; MOTTOLA, E. 引力凝聚星：黑洞的一种替代方案。**Universe**，第9卷，第2期，第88页，2023年。[19] UCHIKATA, N.; YOSHIDA, S. 缓慢旋转的薄壳重力真空星。**ClassicalandQuantum Gravity**，第33卷，第2期，025005，2016年。[20] FAYOS, F.; JAÉN, X.; LLANTA, E.; SENOVILLA, J. M. M. Vaidya辐射度规的内部：引力坍缩。**Physical ReviewD**，第45卷，第2732–2735页，1992年。[21] FAYOS, F.; SENOVILLA, J. M. M.; TORRA, J. 两个球对称时空的一般匹配。**Physical Review D**，第54卷，第4862–4872页，1996年。[22] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S.《**宇宙弦与其他拓扑缺陷**》。剑桥大学出版社，2000年。[23] IPSER, J.; SIKIVIE, P. 引力排斥性畴壁。**PhysicalReview D**，第30卷，第712–719页，1984年。[24] BLAU, S. K.; GUENDELMAN, E. I.; GUTH, A. H. 假真空泡的动力学。**PhysicalReview D**，第35卷，第1747–1766页，1987年。[25] MANSOURI, R.; KHORRAMI, M. 广义相对论中薄壳的Darmois–Israel方法与分布方法的等价性。《**数学物理学杂志**》，第37卷，第5672–5683页，1996年。[26] MISNER, C. W. 等。**引力**。麦克米伦，1973年。[27] GEROCH, Robert；TRASCHEN, Jennie。广义相对论中的弦及其他分布源。

PhysicalReview D，第 36 卷，1017–1031 页，1987年。[28] RACSKÓ, Bence. 一般场论中的拼接条件。**Classical and Quantum Gravity**，第 41 卷，015020 页，2024年。[29] REINA, B.; SENOVILLA, J. M. M.; VERA, R. 二次引力中的拼接条件：薄壳和双层。**Classical and Quantum Gravity**，第 33 卷，105008 页，2016年。[30] CHU, C.-S.; TAN, H.-S. 广义达尔穆瓦–以色列接合条件。**Universe**，第 8 卷，第 5 期，250 页，2022年。[31] HUBER, A. 一般壳层与广义函数。**ClassicalandQuantumGravity**，第 42 卷，095014 页，2025年。[32] PADMANABHAN, T. **引力：基础与前沿**。剑桥大学出版社，2010年。[33] POISSON, Eric. **相对论学家工具箱：黑洞力学的数学**。剑桥：剑桥大学出版社，2004年。[34] HUBER, A. 广义相对论中的拼接条件与局部时空。**European Physical JournalC**，第 80 卷，1132 页，2020年。[35] COLOMBEAU, J. F. **分布的乘法：数学、数值工程与理论物理中的一种工具**。Springer，1992年。[36] GROSSER, M.; KUNZINGER, M.; OBERGUGGENBERGER, M.; STEINBAUER, R. **广义函数几何理论及其在广义相对论中的应用**。Springer，2001年。[37] ARAGONA, J.; JURIAANS, S. O. 科隆博广义数拓扑环的一些结构性质。**Algebras, GroupsandGeometries**，第 23 卷，253–264 页，2001年。[38] GARCIA, A. R. G.**科隆博完备广义数与广义函数：代数、拓扑和分析方面**。2006年。1 卷。博士论文——数学与统计研究所，圣保罗大学，圣保罗，2006年。[39] OBERGUGGENBERGER, M. **分布的乘法及其在偏微分方程中的应用**。Longman，1992年。[40] MITEVA, M.; JOLEVSKA-TUNESKA, B.; ATANASOVA-PACEMSKA, T. 分布的科隆博乘积。**SpringerPlus**，第 5 卷，2042 页，2016年。[41] OBERGUGGENBERGER, M. 非线性模型中的广义函数——综述。**NonlinearAnalysis: Theory, Methods & Applications**，第 47 卷，5029–5040 页，2001年。