arXiv:2601.07940v1 [math.OA] 12 Jan 2026

幂等单子与余单子在紧化和单位化中的应用

JERI ANN SPIKER

Abstract. 本文利用单子和余单子，在一个范畴中建立两个子范畴之间某种类型的等价关系：其中一个是反射子范畴，另一个是余反射子范畴。该范畴的对象表示非紧局部紧豪斯多夫空间的紧化。随后，本文在非含幺交换 C^*-代数的单位化所构成的对偶范畴中考察这种等价关系，并进一步将其推广到非交换情形。

1. Introduction

本文旨在运用 [2] 中介绍的技巧，通过应用幂等单子和余单子，得到一对子范畴，其中一个是反射子范畴，另一个是余反射子范畴，并且二者以一种特定方式等价。

抽象地说，设有一个范畴 $\mathcal{C}$，其中有一个反射子范畴 $\mathcal{N}$，其反射函子为 $\mathrm{N}^\eta : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$；还有一个余反射子范畴 $\mathcal{M}$，其余反射函子为 $\mathrm{M}^\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$。在满足某些假设时，伴随 $\mathrm{N}^\eta \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} \dashv \mathrm{M}^\psi \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 是一个伴随等价，并且有以下自然同构函子：$\mathrm{N}^\eta \cong (\mathrm{N}^\eta \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{M}}) \circ \mathrm{M}^\psi$ 以及 $\mathrm{M}^\psi \cong (\mathrm{N}^\eta \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{M}}) \circ \mathrm{M}^\psi$。在 [1], 中，作者给出了群在 C^*-代数上的余作用背景下这一等价关系的一个例子，并将满足这种关系的等价子范畴对称为满足最大正规等价的一对子范畴。

在 [2], 中，作者证明了在 $\mathcal{C}$ 上存在幂等单子和幂等余单子，会分别产生反射子范畴和余反射子范畴，并给出了判定这一对是否满足极大-正规等价的有效刻画。他们还以 ′可分群胚上的 Fell 丛为背景，展示了这一等价的一个例子。

本文给出了一个子范畴对的例子：在非紧局部紧豪斯多夫空间的紧化和非含幺 C^*-代数的单位化背景下，该子范畴对满足极大正规等价关系。在 [4], 中，作者将紧化视为一个函子过程，它把局部紧豪斯多夫空间范畴中的对象映射为紧豪斯多夫空间范畴中的对象。在本文中，我们则将紧化视为单个对象，即统一范畴中的三元组

2000数学主题分类。 46L05。关键词和短语。 单子、余单子、伴随函子、范畴等价、反射子范畴和余反射子范畴、紧化、单位化、局部紧豪斯多夫空间、 C^*-代数。

；我们将该统一范畴称为局部紧豪斯多夫空间紧化范畴。对于单位化，我们也采用同样的处理方式，将其视为另一个统一范畴中的三元组，并将该范畴称为 C^*-代数单位化范畴。

在第 2 节中，我们回顾了 [2] 中关于幂等单子和余单子的必要预备知识、它们与反射子范畴和余反射子范畴之间的关系，并详细说明一对子范畴满足极大-正规等价所需的假设。我们还给出一个技术引理，证明极大-正规等价在逆变等价下保持不变。逆变性意味着，一个范畴中的单子会在另一个范畴上诱导出一个余单子。这一观察与我们的例子相关，因为局部紧豪斯多夫空间的紧化范畴与交换 C^*-代数的单位化范畴，在赋予适当的态射后是逆变等价的。

在第 3 节中，我们引入局部紧豪斯多夫空间的紧化范畴，并将其记为 $\mathbf{Cpt}$。在这个范畴中，通常的一点紧化在该范畴上的某些纤维中表现为终对象。我们利用一点紧化在$\mathbf{Cpt}$上构造一个幂等单子，其对应的反射子范畴包含所有与一点紧化同构的对象。ˇ 对偶地，通常的斯通–切赫紧化在这些相同的纤维中表现为始对象，我们利用它们在$\mathbf{Cpt}$上构造一个幂等余单子。对应的余反射子范畴包含所有与斯通–切赫紧化同构的对象。此外，我们证明这两个子范畴满足极大-正规等价。

然后，在第 4 节中，我们引入交换 C^*代数的单位化范畴，并将其记为 $\mathbf{U_c}$。利用盖尔范德对偶，我们证明该范畴与 $\mathbf{Cpt}$ 反变等价。由于这一等价以及上述技术引理，我们自动得到$\mathbf{U_c}$ 中的一个极大-正规等价对。该等价的反变性意味着，$\mathbf{Cpt}$ 上的幂等单子会在$\mathbf{U_c}$ 上诱导出一个幂等余单子；我们证明，相应的余反射子范畴包含与极小单位化同构的对象。对偶地，$\mathbf{Cpt}$ 上的幂等余单子会在$\mathbf{U_c}$ 上诱导出一个幂等单子；相应的反射子范畴包含与极大单位化同构的对象。

最后，在第 5 节中，我们在一个更一般的、不要求交换性的单位化范畴上构造幂等单子和余单子。我们利用极大单位化和极小单位化完成这一构造，并证明相应的反射子范畴和余反射子范畴满足极大-正规等价。

2. Preliminaries

[1] 和 [2] 概述了本文所需的一般范畴论。我们在此总结这些结果。

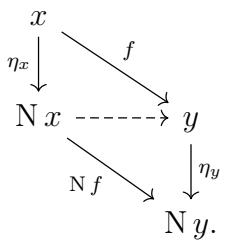
设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。令 $1_{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$上的恒等函子。若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$的子范畴，则 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 表示包含函子。

定义 2.1。 设 $\mathrm{N} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 为一个函子，且 $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to \mathrm{N}$ 为一个自然变换。若自然变换 $\eta \mathrm{N} : \mathrm{N} \to \mathrm{N}^2$ 和 $\mathrm{N}\eta : \mathrm{N} \to \mathrm{N}^2$ 均为自然同构，则称这一对 (N, η) 为 $\mathcal{C}$上的幂等单子。

设 (N, η) 是 $\mathcal{C}$上的一个幂等单子。令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{C}$的全子范畴，其对象 x 满足 $\eta_x : x \to \mathrm{N}x$ 是一个同构。令 $\mathrm{N}^\eta : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$ 表示将 N 视为从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{N}$ 的函子而得到的函子，使得 $\mathrm{N} = \mathrm{Inc}_{\mathcal{N}} \circ \mathrm{N}^\eta$。

引理 2.2。 令 (N, η)、 $\mathcal{N}$和 N^η 如上所述。则 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ 可有左伴随，且 N^η 是 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 的左伴随。因此， $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴。此外， η 是伴随 $\mathrm{N}^\eta \dashv \mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 的单位。

证明。 令 x 为 $\mathcal{C}$中的一个对象， y 为 $\mathcal{N}$中的一个对象，且 $f : x \to y$ 是$\mathcal{C}$中的一个态射。则 η_y是一个同构，因此 $\eta_y^{-1} \circ \mathrm{N} f : \mathrm{N}\ x \to y$是补全下图的唯一态射:



This 表示对于所有 x属于 $\mathcal{C}$，$(\mathrm{N}^\eta x, \eta_x)$ 是从 x到 $\mathcal{N}$的泛态射。

众所周知，为每个对象选择这样的泛态射会产生一个反射子范畴。参见 [1], 第 2 节。 □

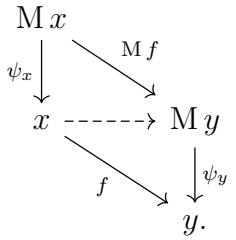
现在来看对偶情形。

定义 2.3。 设 $\mathrm{M} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个函子，且 $\psi : \mathrm{M} \to 1_{\mathcal{C}}$ 是一个自然变换。若自然变换 $\psi \mathrm{M} : \mathrm{M}^2 \to \mathrm{M}$ 和 $\mathrm{M}\psi : \mathrm{M}^2 \to \mathrm{M}$ 都是自然同构，则称 (M, ψ) 是 $\mathcal{C}$上的幂等余单子。

设 (M, ψ) 是 $\mathcal{C}$上的幂等余单子。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$的全子范畴，其对象 x 满足 ψ_x 是同构。令 $\mathrm{M}^\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ 表示将 M 视为从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{M}$ 的函子所得到的函子，使得 $\mathrm{M} = \mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} \circ \mathrm{M}^\psi$。

引理 2.4. 设 (M, ψ)、 $\mathcal{M}$ 和 M^ψ 如上所述。则 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$具有右伴随，且 M^ψ 是 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}}$ 的右伴随。因此， $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的余反射子范畴。此外， ψ 是伴随 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} \dashv \mathrm{M}^\psi$ 的单位。

证明。 与引理 2.2 对偶，对所有对象 y in $\mathcal{C}$，$(\mathrm{M}y, \psi_y)$ 是从 $\mathcal{M}$ to y 的泛态射。特别地，如果 x 是 $\mathcal{M}$ 中的对象，且 $f : x \to y$ ，那么 $\mathrm{M}\ f \circ \psi_x^{-1} : x \to \mathrm{M}y$ 是使下图成立的唯一态射:



由此得到一个余反射子范畴。参见 [1], 第 2 节。 □

引理 2.5。 假设上文所给的 (N η)、 $\mathcal{N}$、N^{η}、(M ψ)、 $\mathcal{M}$ 和 M^{ψ} 均如上所述。假设自然变换 $\mathrm{N}\,\psi\colon \mathrm{N}\,\mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 和 $\mathrm{M}\,\eta\colon \mathrm{M} \to \mathrm{M}\,\mathrm{N}$ 是自然同构。那么我们有以下结果。

(i) 伴随 $\mathrm{N}^{\eta} \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} \dashv \mathrm{M}^{\psi} \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 是在 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 之间的伴随等价。(ii) $\mathrm{N}^{\eta} \cong (\mathrm{N}^{\eta} \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{M}}) \circ \mathrm{M}^{\psi}$.(iii) $\mathrm{M}^{\psi} \cong (\mathrm{M}^{\psi} \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}) \circ \mathrm{N}^{\eta}$。

证明。 参见 [2] 第 3.3 节。 □

我们将满足引理 2.5 中假设的任意一对反射子范畴和余反射子范畴称为满足极大-正规 等价的一对。这个名称最初由 [1] 在群对C^*-代数的极大与正规余作用这一语境中引入。

幂等单子和幂等余单子在范畴等价下保持不变。对于本文所关注的逆变等价, 有如下技术引理。

引理 2.6。 假设 $\mathcal{C}$ 通过逆变函子 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和G: $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$与 $\mathcal{D}$ 等价。令 $\theta : 1_{\mathcal{D}} \to \mathrm{FG}$ 为由该等价给出的自然同构。假设 (N η) 是 $\mathcal{C}$ 上的幂等单子，且(M ψ) 是$\mathcal{C}$上的幂等余单子。

令 $\mathrm{T} = \mathrm{F}\,\mathrm{N}\,\mathrm{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，且 $\delta\colon \mathrm{T} \to 1_{\mathcal{D}}$为由赋值 $\delta_x = \theta_x^{-1} \circ \mathrm{F}\,\eta_{\mathrm{G}\,x}$ 给出的自然变换，其中 x 是 $\mathcal{D}$中的一个对象。
令 $\mathrm{S} = \mathrm{F}\,\mathrm{M}\,\mathrm{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，且 $\epsilon\colon 1_{\mathcal{D}} \to \mathrm{S}$ 为由赋值 $\epsilon_x = \mathrm{F}\,\psi_{\mathrm{G}\,x} \circ \theta_x$给出的自然变换。

于是，(T δ) 是 $\mathcal{D}$ 上的幂等余单子，而(S ϵ) 是$\mathcal{D}$上的幂等单子。

此外，如果 $\mathrm{N}\,\psi$ 是自然同构，则T ϵ 是自然同构。如果M η 是自然同构，则S δ 是自然同构。

证明。 首先，我们证明 (T δ) 是 $\mathcal{D}$ 上的幂等余单子。显然，T 是一个函子，且 δ 是一个自然变换。因此，T δ 是一个自然变换。

为了证明它是一个自然同构，设 x 是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象。那么，

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\,\delta_x &= \mathrm{T}(\theta_x^{-1} \circ \mathrm{F}\,\eta_{\mathrm{G}\,x}) \\ &= \mathrm{T}(\theta_x^{-1}) \circ \mathrm{T}(\mathrm{F}\,\eta_{\mathrm{G}\,x}) \\ &= \mathrm{T}(\theta_x^{-1}) \circ \mathrm{F}(\mathrm{N}\,\mathrm{G}\,\mathrm{F}(\eta_{\mathrm{G}\,x})).\end{aligned}$$

这是同构的复合，因此 $\mathrm{T}\,\delta_x$ 是一个同构。同样，要证明 δT 是自然同构，
注意

$$\begin{aligned}\delta T x &= \delta_{\mathrm{F}\,\mathrm{N}\,\mathrm{G}\,x} \\ &= \theta^{-1}_{\mathrm{F}\,\mathrm{N}\,\mathrm{G}\,x} \circ F(\eta_{\mathrm{G}\,\mathrm{F}\,\mathrm{N}\,\mathrm{G}\,x}).\end{aligned}$$

这又是同构的复合。因此我们有 (T δ) 是 $\mathcal{D}$上的幂等余单子。

证明 (S ϵ) 是一个幂等单子的方法类似。
现在，假设 $\mathrm{N}\,\psi$ 是一个自然同构。那么对于 $\mathcal{D}$中的一个对象 x ，

$$\mathrm{T}\,\epsilon_x = \mathrm{F}\,\mathrm{N}\,\mathrm{G}\,\mathrm{F}\,\psi_{\mathrm{G}\,x} \circ \mathrm{T}\,\theta_x.$$

这是同构的复合，因此是一个同构。
证明 $\mathrm{S}\,\delta$ 是同构的方法类似。

□

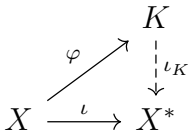
3. Compactifications

设 X 是一个非紧的局部紧豪斯多夫空间。 X 的紧化是一个对 $(K,\ \varphi)$，其中 K 是一个紧豪斯多夫空间，且 $\varphi:\ X \to K$ 是一个嵌入，使得 $\varphi(X) = K$。

从现在起，除非另有说明，我们所说的局部紧豪斯多夫空间，是指局部紧、豪斯多夫但非紧的空间。这样做是因为对一个已经紧的空间进行紧化通常没有什么意义，还会引入不必要的病态现象。

˘ 现在我们介绍局部紧豪斯多夫空间 X的一点紧化和斯通-切赫紧化的基本事实。

定义 3.1. 若局部紧豪斯多夫空间 X 的一个紧化 $(X^*,\ \iota)$ 具有以下性质，则称其为 X 的一点紧化。若 $(K,\ \varphi)$ 是 X的另一个紧化，则存在唯一的连续满射ι_K : $K \to X^*$ ，使得



交换。

引理 3.2。 若 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，则存在一个 X的一点紧化。(X^*, ι) 在如下意义下是唯一的：如果(K, φ) 是另一个具有定义 *3.1* 所述性质的紧化，那么 $\iota_K : K \to X^*$ 是一个同胚。

证明。 [5],第 185 页。 □

(X^*, ι) 具有以下有用的延拓性质。

引理 3.3。 设 X 和 Y 是非紧的局部紧豪斯多夫空间。分别用（X^*, ι）和（Y^*, κ）表示它们的一点紧化。若 f: $X \to Y$是连续真映射，则存在唯一的连续映射 f^*: $X^* \to Y^*$，使得

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[d, dashed, "f^*"] \\ Y \arrow[r, "\kappa"] & Y^* \end{tikzcd}$$

交换。

证明。 [5],第 185 页。 □

定义 3.4。 局部紧豪斯多夫空间 X 的一个紧化（βX, ρ）称为 X 的斯通-切赫紧化 X，如果它具有以下性质：若 f: $X \to K$ 是一个连续映射，且 K 是一个紧豪斯多夫空间，则存在唯一的连续映射 $\tilde{f}$: $\beta X \to K$，使得

$$\begin{tikzcd} & \beta X \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ X \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r, "f"] & K \end{tikzcd}$$

交换。

此外，若（K, φ）是 X 的一个紧化，则 $\tilde{\varphi}$ 是满射。

引理 3.5。 若 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，则存在 X 的斯通-切赫紧化。（βX, ρ）在具有定义 *3.4* 中所给性质的意义下是唯一的：若（K, φ）是另一个具有该性质的紧化，则 $\tilde{\varphi}$: $\beta X \to K$ 是一个同胚。

证明。 [5],第 241 页。 □

记号 3.6. 设 X 和 Y 是局部紧豪斯多夫空间，其 Stone–ˇCech 紧化分别为 $(\beta X, \rho)$ 和 $(\beta Y, \sigma)$。设 f: $X \to Y$ 连续。于是我们使用通常的记号 βf 来表示映射 $\sigma \circ f$: $\beta X \to \beta Y$。

引理 3.7. 存在一个范畴**Cpt**，其对象为三元组(X, K, φ)，其中 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，且(K, φ) 是 X的一个紧化。态射是一个有序对$(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$，其中: $X \to Y$是一个连续真映射

且 $F\colon K \to L$ 是一个连续映射，使得

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & L \end{array}$$

可交换。

证明。 对象 (X, K, φ) 的恒等态射为 $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_K)$，态射的复合按分量定义。此复合规则成立，是因为（真）连续映射的复合仍为（真）连续映射；并且，如果左侧图表中下方图表的顶部和底部方块可交换，那么右侧图表也可交换：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & L \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle G} \\ Z & \xrightarrow{\tau} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \downarrow{\scriptstyle g\circ f} & & \downarrow{\scriptstyle G\circ F} \\ Z & \xrightarrow{\tau} & M. \end{array}$$

□

注 3.8. 我们要求 $f\colon X \to Y$ 是真映射，以便可以考虑引理 3.3 中给出的扩张 $f^*\colon X^* \to Y^*$，并使范畴 $\mathbf{Cpt}$ 与我们稍后定义的交换 C^*-代数的单位化范畴反变等价。

对于固定的局部紧豪斯多夫空间 X，令$\mathbf{Cpt}_X$ 表示$\mathbf{Cpt}$ 的子范畴，其中对象的第一个坐标为 X，态射的第一个坐标为 id_X。我们称$\mathbf{Cpt}_X$ 为*Cpt* 在 X 上的纤维。

(X, X^*, ι) 是 $\mathbf{Cpt}_X$ 中的终对象。若 (X, K, φ) 是纤维 $\mathbf{Cpt}_X$ 中的一个对象，那么根据定义 3.1，(id_X, ι_K) 显然是纤维 $\mathbf{Cpt}_X$ 中从 (X, K, φ) 到 (X, X^*, ι) 的唯一态射。我们称 (X, X^*, ι) 为单点紧化三元组。

命题 3.9. 存在一个函子$\mathrm{N} : \mathbf{Cpt} \to \mathbf{Cpt}$，它在对象上的定义为将$\mathrm{N}(X, K, \varphi)$ 赋为 $\mathbf{Cpt}_X$ 中的终对象。也就是说，

$$\mathrm{N}(X, K, \varphi) = (X, X^*, \iota).$$

N 在态射上的定义如下：$(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$ 为

$$\mathrm{N}(f, F) = (f, f^*) : (X, X^*, \iota) \to (Y, Y^*, \kappa).$$

证明。 这是显然的。 □

命题 3.10. 赋值 $\eta_{(X,K,\varphi)} = (\mathrm{id}_X, \iota_K)$ 给出一个自然变换$\eta : 1_{\mathbf{Cpt}} \to \mathrm{N}$。

证明。 对于所有态射 $(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$，我们必须检查图表

$$\begin{array}{ccc} (X, K, \varphi) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_X, \iota_K)} & (X, X^*, \iota) \\ {\scriptstyle (f,F)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f,f^*)} \\ (Y, L, \gamma) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_Y, \kappa_L)} & (Y, Y^*, \kappa). \end{array}$$

交换。

要验证图表在我们的范畴中交换，只需分别验证它在第一个坐标和第二个坐标上交换。也就是说，需要验证以下两个等式成立：

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X$$
$$f^* \circ \iota_K = \kappa_L \circ F.$$

要验证第一个等式显然成立。对于第二个等式，设 $\varphi(x) \in \varphi(X)$。于是我们有

$$\begin{aligned} f^* \circ \iota_K(\varphi(x)) &= f^* \circ \iota(x) && \text{by the commuting square for } (\mathrm{id}_X, \iota_K) \\ &= \kappa \circ f(x) && \text{by the commuting square for } (f, f^*) \\ &= \kappa_L \circ \gamma \circ f(x) && \text{by the commuting square for } (\mathrm{id}_Y, \kappa_L) \\ &= \kappa_L \circ F(\varphi(x)) && \text{by the commuting square for } (f, F). \end{aligned}$$

因此， $f^* \circ \iota_K$和 $\kappa_L \circ F$是连续函数，它们在 $\varphi(X)$这个 K的稠密子集上相等，所以该等式在整个 K 上成立，图表也交换。□

命题 3.11。 自然变换$\mathrm{N}\,\eta : \mathrm{N} \to \mathrm{N}^2$和 $\eta\,\mathrm{N} : \mathrm{N} \to \mathrm{N}^2$是自然同构。

Pr呃。 首先，我们证明 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N}$。对于 **Cpt** 中的任意对象 (X, K, φ)，我们有 e

$$\mathrm{N}^2(X, K, \varphi) = \mathrm{N}(X, X^*, \iota) = (X, X^*, \iota) = \mathrm{N}(X, K, \varphi).$$

对于态射 $(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$，我们有 $\mathbf{N}^2(f, F) : (X, X^*, \iota) \to (Y, Y^*, \kappa)$，其中

$$\mathrm{N}^2(f, F) = \mathrm{N}(f, f^*) = (f, f^*) = \mathrm{N}(f, F).$$

接下来，我们考虑 $\mathbf{N}\,\eta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$。

$$\mathrm{N}\,\eta_{(X,K,\varphi)} = \mathrm{N}(\mathrm{id}_X, \iota_K) = (\mathrm{id}_X, (\mathrm{id}_X)^*) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{X^*}).$$

最后一个等式由引理 3.3 得出，因为 $(\mathrm{id}_X)^* : X^* \to X^*$ 是满足 $(\mathrm{id}_X)^* \circ \iota = \iota$ 的唯一连续映射，因此 $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{X^*}$。所以，$\mathbf{N}\ \eta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 是恒等变换，因而是自然同构。

对于 $\eta\mathbf{N} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$，我们有

$$\eta\,\mathrm{N}(X, K, \varphi) = \eta_{(X,X^*,\iota)} = (\mathrm{id}_X, \iota_{X^*}) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{X^*}).$$

最后一个等式根据定义 3.1 得出，因为 $\iota_{X^*}: X^* \to X^*$ 是满足 $\iota_{X^*} \circ \iota = \iota$ 的唯一连续映射，因此 $\iota_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$。所以， $\eta\mathbf{N}: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 是恒等变换，因而是自然同构。□

定义 3.12。 我们将 $\mathcal{N}$ 记作 **Cpt** 的全子范畴，其对象 (X, K, φ) 满足以下性质: $\eta_{(X,K,\varphi)} = (\mathrm{id}_X, \iota_K): (X, K, \varphi) \to (X, X^*, \iota)$ 是一个同构。令 $\mathbf{N}^\eta: \mathbf{Cpt} \to \mathcal{N}$ 为函子: 将 $\mathbf{N}: \mathbf{Cpt} \to \mathbf{Cpt}$ 视为从 **Cpt** 到 $\mathcal{N}$ 的函子。因此， $\mathbf{N} = \mathbf{Inc}_{\mathcal{N}} \circ \mathbf{N}^\eta$。

注意，(X, K, φ) 是 $\mathcal{N}$ 中的对象，当且仅当 $\iota_K: K \to X^*$ 是一个同胚。因此，我们称 $\mathcal{N}$ 为 **Cpt** 的全子范畴，它包含所有与单点紧化三元组同构的对象。

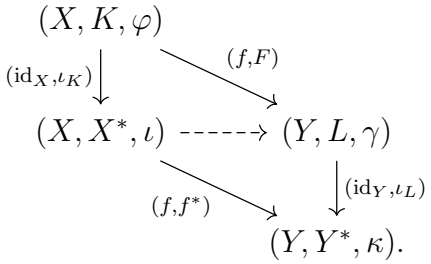
由引理 2.2 可得以下结论。

定理 3.13。 设 $\mathrm{N}: \mathbf{Cpt} \to \mathbf{Cpt}$、 $\eta: 1_{\mathbf{Cpt}} \to \mathrm{N}$、 $\mathcal{N}$ 和 $\mathrm{N}^\eta: \mathbf{Cpt} \to \mathcal{N}$ 如上所定义。则:

(i) $(\mathrm{N}\ \eta)$ 是 **Cpt**上的幂等单子。(ii) $\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 可有左伴随，N^η 是$\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$的左伴随，且 η 是伴随$\mathrm{N}^\eta \dashv \mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$的单位。特别地， $\mathcal{N}$ 是**Cpt**的反射子范畴。(iii) 对于 **Cpt**中的所有对象(X, K, φ)，$(N(X, K, \varphi)\ ^{\eta_{(X,K,\varphi)}})$ 是从(X, K, φ) 到 $\mathcal{N}$的泛态射。

此外，一个对象属于 $\mathcal{N}$，当且仅当它在**Cpt**中同构于一个单点紧化三元组。

备注 3.14: 定理 3.13中的第（3）项引出了以下图表。设 $(X,\ K,\ \varphi)$ 是**Cpt**中的一个对象，$(Y,\ L,\ \gamma)$ 是 $\mathcal{N}$中的一个对象，且 $(f,\ F): (X,\ K,\ \varphi) \to (Y,\ L,\ \gamma)$，则 $(f,\ \iota_L^{-1} \circ f^*)$ 是补全以下图表的唯一态射:



对于固定的局部紧豪斯多夫空间 X，$(X, \beta X, \rho)$ 是$\mathbf{Cpt}_X$ 中的始对象。若 (X, K, φ) 是纤维 $\mathbf{Cpt}_X$ 中的一个对象，那么根据定义 3.4，$(\mathrm{id}_X, \widetilde{\varphi})$ 显然是纤维 $\mathbf{Cpt}_X$ 中从 $(X, \beta X, \rho)$ 到 (X, K, φ) 的唯一态射。我们称 $(X, \beta X, \rho)$ 为一个斯通–切赫紧化三元组。

命题 3.15. 存在一个函子 $\mathrm{M}: \mathbf{Cpt} \to \mathbf{Cpt}$ ， 其在对象上的定义是将$\mathrm{M}(X, K, \varphi)$ 设为 $\mathbf{Cpt}_X$中的始对象。也就是说，

$$\mathrm{M}(X, K, \varphi) = (X, \beta X, \rho).$$

M 在态射 $(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$ 上的定义为

$$\mathrm{M}(f, F) = (f, \beta f).$$

证明。 这是显然的。 □

命题 3.16。 赋值 $\psi_{(X,K,\varphi)} = (\mathrm{id}_X, \widetilde{\varphi})$ 给出一个自然变换$\psi : \mathrm{M} \to 1_{\mathbf{Cpt}}$。

证明。 我们证明，对于所有态射 $(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$，图表

$$\begin{array}{ccc} (X, \beta X, \rho) & \xrightarrow[(\mathrm{id}_X, \widetilde{\varphi})]{} & (X, K, \varphi) \\ \downarrow{\scriptstyle (f, \beta f)} & & \downarrow{\scriptstyle (f, F)} \\ (Y, \beta Y, \sigma) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_Y, \widetilde{\gamma})} & (Y, L, \gamma) \end{array}$$

交换。第一坐标上的情形显然。对于第二个坐标，我们有

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma} \circ \beta f(\rho(x)) &= \widetilde{\gamma} \circ \sigma \circ f(x) && \text{by the commuting square for } (f, \beta f) \\ &= \gamma \circ f(x) && \text{by the commuting square for } (\mathrm{id}_Y, \widetilde{\gamma}) \\ &= F \circ \varphi(x) && \text{by the commuting square for } (f, F) \\ &= F \circ \widetilde{\varphi}(\rho(x)) && \text{by the commuting square for } (\mathrm{id}_X, \widetilde{\varphi}), \end{aligned}$$

因此 $\widetilde{\gamma} \circ \beta f$ 和 $F \circ \widetilde{\varphi}$ 连续，且在 $\rho(X)$（βX的一个稠密子集）上相等，所以它们在 βX 的整个范围内都相等。□

命题 3.17。 $\mathrm{M}\psi : \mathrm{M}^2 \to \mathrm{M}$ 和 $\psi\,\mathrm{M} : \mathrm{M}^2 \to \mathrm{M}$ 是自然同构。

证明。 首先，我们证明 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$。对于任意对象 (X, K, φ)，有

$$\mathrm{M}^2(X, K, \varphi) = \mathrm{M}(X, \beta X, \rho) = (X, \beta X, \rho) = \mathrm{M}(X, K, \varphi).$$

对于态射 $(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$，有 $M^2(f, F) : (X, \beta X, \rho) \to (Y, \beta Y, \sigma)$，其中

$$\mathrm{M}^2(f, F) = \mathrm{M}(f, \beta f) = (f, \beta f) = \mathrm{M}(f, F).$$

接下来，我们考虑 $\mathbf{M}\psi : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$。对于对象 (X, K, φ)，有

$$\mathrm{M}\,\psi_{(X,K,\varphi)} = \mathrm{M}(\mathrm{id}_X, \widetilde{\varphi}) = (\mathrm{id}_X, \beta \mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\beta X}).$$

最后一个等式成立，是因为 $\beta \mathrm{id}_X = \rho \circ \mathrm{id}_X = \widetilde{\rho}$ 是满足 $\rho = \widetilde{\rho} \circ \rho$ 的唯一态射，因此 $\beta \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\beta X}$。由此，$\mathbf{M}\ \psi : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ 是恒等变换，因而是自然同构。

对于 $\psi\mathbf{M}$: $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$，我们有

$$\psi\,\mathrm{M}(X, K, \varphi) = \psi_{(X,\beta X,\rho)} = (\mathrm{id}_X, \widetilde{\rho}) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\beta X}).$$

因此，$\psi\mathbf{M} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ 是恒等变换，故为自然同构。□

定义 3.18。 我们用 $\mathcal{M}$ 表示 $\mathbf{Cpt}$ 的全子范畴，其对象 (X, K, φ) 满足如下性质：$\psi_{(X,K,\varphi)} = (\mathrm{id}_X, \widetilde{\varphi}) : (X, \beta X, \rho) \to (X, K, \varphi)$ 是一个同构。令 $\mathbf{M}^{\psi} : \mathbf{Cpt} \to \mathcal{M}$ 为函子 $\mathbf{M} : \mathbf{Cpt} \to \mathbf{Cpt}$ 视为从 $\mathbf{Cpt}$ 到 $\mathcal{M}$的函子所得。因此，$\mathbf{M} = \mathbf{Inc}_{\mathcal{M}} \circ \mathbf{M}^{\psi}$。

注意，(X, K, φ) 是 $\mathcal{M}$ 中的一个对象，当且仅当 $\widetilde{\varphi} : \beta X \to K$ 是一个同胚。˘ 因此，$\mathcal{M}$ 是$\mathbf{Cpt}$ 中所有与斯通–切赫紧化三元组同构的对象构成的全子范畴。

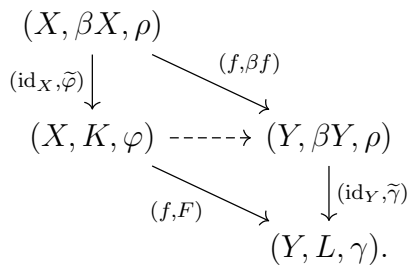
由引理 2.4，我们得到以下结论。

定理 3.19。 设 $\mathrm{M} : \mathbf{Cpt} \to \mathbf{Cpt}$、$\psi : \mathrm{M} \to 1_{\mathbf{Cpt}}$、$\mathcal{M}$ 以及 $\mathrm{M}^{\psi} : \mathbf{Cpt} \to \mathcal{M}$ 如上定义。则：

（i）（$\mathbf{M}$ ψ）是 $\mathbf{Cpt}$ 上的幂等余单子。（ii）$\mathbf{Inc}_{\mathcal{M}}$ 具有右伴随，M^{ψ} 是 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}}$ 的右伴随，而 ψ 是伴随 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} \dashv \mathbb{M}^{\psi}$ 的余单位。特别地，$\mathcal{M}$ 是$\mathbf{Cpt}$ 的余反射子范畴。（iii）对于 $\mathbf{Cpt}$ 中的任意对象（Y、K、φ），（M（X、K、φ）$\psi_{(X,K,\varphi)}$）是从 $\mathcal{M}$ 到（X、K、φ）的泛态射。

˘此外，对象属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当它同构于$\mathbf{Cpt}$中的一个 *Stone–Cech* 紧化三元组。

注记 3.20。 定理 3.19 中第 (3) 项的图表如下。设 (Y, L, γ) 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，(X, K, φ) 是 $\mathcal{M}$ 中的一个对象，并且 $(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$。那么 $(f, \beta f \circ \widetilde{\varphi}^{-1})$ 是使下图成立的唯一态射：



现在，我们证明 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 满足引理 2.5 中给出的假设，因此构成一对满足 [1] 中引入的极大-正规等价的对象。

命题 3.21。 自然变换 $\mathrm{M}\eta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}\,\mathrm{N}$ 和 $\mathrm{N}\psi : \mathrm{NM} \to \mathrm{N}$都是同构。

证明。 对于对象 (X, K, φ)，我们有

$$\mathrm{M}\,\eta_{(X,K,\varphi)} = \mathrm{M}(\mathrm{id}_X, \iota_K) = (\mathrm{id}_X, \beta \mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\beta X}).$$

因此，$\mathbf{M}\,\eta$ 是一个自然同构。同样，

$$\mathrm{N}\,\psi_{(X,K,\varphi)} = \mathrm{N}(\mathrm{id}_X, \widetilde{\varphi}) = (\mathrm{id}_X, (\mathrm{id}_X)^*) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{X^*}).$$

因此，$\mathrm{N}\psi$ 也是一个自然同构。 □

如引理 2.5 所述，命题 3.21 的一个直接推论如下。

定理 3.22。 范畴 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$ 等价。伴随$\mathrm{N}^{\eta}\circ\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} \dashv \mathrm{M}^{\psi}\circ\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 是 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$之间的伴随等价。此外，我们有

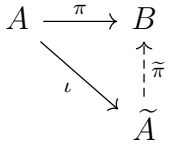
$$\mathrm{N}^{\eta} \cong (\mathrm{N}^{\eta}\circ\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}})\circ \mathrm{M}^{\psi} \quad and \quad \mathrm{M}^{\psi} \cong (\mathrm{M}^{\psi}\circ\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}})\circ \mathrm{N}^{\eta}\,.$$

4. Unitizations of Commutative C^*-Algebras

在本节中，若 τ 是 C^*-代数 A 与 B之间保持伴随的同态，我们称 $\tau\colon A \to B$ 为同态。类似地，假设C^*-代数之间的任何同构都保持伴随。

设 A 是一个 C^*-代数。 A 的单位化 是一个对$(B,\ \alpha)$，其中 B 是含单位的C^*-代数，且 $\alpha\colon A \to B$ 是单同态，使得 $\alpha(A)$是 B中的本质理想。

定义 4.1。 若 C^*-代数 A 的单位化 $(A,\ \iota)$ 具有以下性质，则称其为 A 的最小单位化。若 B 是含幺 C^*-代数，且 $\pi\colon A \to B$ 是一个同态，则存在唯一的含幺同态 $\widetilde{\pi}\colon A \to B$，使得



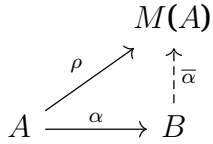
交换。

此外，若 $(B,\ \alpha)$ 是 A 的单位化，则 $\widetilde{\alpha}$ 是单射。

引理 4.2。 若 A 是一个 C^*-代数，则存在 A 的最小单位化。若 (A,ι) 具有定义 ***4.1*** 中给出的性质，则它在如下意义下是唯一的：若 (B,α) 是另一个具有定义 ***4.1*** 中所给性质的紧化，则 $\widetilde{\alpha}\colon A \to B$ 是一个同构。

证明。 [6],第 12 页和第 39 页。 □

定义 4.3。 $M(A)$ ρ 是 C^*-代数 A 的一个单位化，若满足以下性质，则称为 A 的最大单位化。如果 (B,α) 是 A 的另一个单位化，那么存在唯一的单同态 $\alpha\colon B \to M(A)$，使得



可交换。

引理 4.4。如果 A 是一个 C^*-代数，则 A 存在极大单位化。（$M(A)$ ρ）具有唯一性，即如果 （B、α）是另一个具有定义 ***4.3*** 中所给性质的紧化，那么 α： $B \to M(A)$ 是一个同构。

证明。 [7],第 26 页。 □

($M(A)$ ρ**)** 具有以下有用的延拓性质。

引理 4.5。 设 A 和 B 是 C^*-代数。令 $(M(A)\ \rho)$ 和 $(M(B)\ \sigma)$ 表示它们的极大单位化。若 $\tau\colon A \to B$ 是非退化同态，则存在唯一的含幺同态 $M\tau\colon M(A) \to M(B)$ 使得图表

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sigma} & M(B) \\ {\scriptstyle\tau}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle M\tau} \\ A & \xrightarrow{\rho} & M(A) \end{array}$$

可交换。

证明。 [7],第 27 页。 □

引理 4.6. 存在一个范畴 $\mathbf{U_c}$，其对象为三元组 (A, B, α)，其中 A 是一个非含幺交换 C^*-代数，且 (B, α) 是 A 的单位化，其中 B 是交换的。态射是一个偶对 $(\tau, \pi) : (A, B, \alpha) \to (C, D, \beta)$，其中 $\tau\colon A \to C$ 是一个非退化同态，而 $\pi : B \to D$ 是一个含幺同态，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\beta} & D \\ {\scriptstyle\tau}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\pi} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

可交换。

证明。 对象 **(**A， B， α**)** 的恒等态射为 **(**id_A， id_B**)**，态射的复合按分量定义。此复合规则成立，是因为非退化（分别地，含幺）同态的复合仍是非退化（分别地，含幺）同态；并且在下图中，若左侧图表的上、下两个方块交换，则右侧图表也交换：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\gamma} & F \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\phi} \\ C & \xrightarrow{\beta} & D \\ {\scriptstyle\tau}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\pi} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\gamma} & F \\ {\scriptstyle\varphi\circ\tau}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\phi\circ\pi} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B. \end{array}$$

□

备注 4.7。 我们要求 A 是非含幺的，且 $\tau\colon A \to C$ 是非退化的，以便$\mathbf{U_c}$ 与 $\mathbf{Cpt}$ 反变等价。还要求 $\tau : A \to C$ 是非退化的，这样我们也可以考虑引理 4.5 中给出的扩张 $M\tau$: $M(A) \to M(C)$，其中 $(M(A)\ \rho)$ 和 $(M(C)\ \sigma)$ 分别是 A 和 B 的极大单位化。

现在我们要证明，$\mathbf{Cpt}$ 与$\mathbf{U_c}$ 通过盖尔范德对偶反变等价。

对于局部紧豪斯多夫空间 X，令 $C_0(X)$ 表示在 X 上于无穷远处消失的连续函数集合，并赋予通常的结构，使其成为一个 C^*-代数。对于局部紧豪斯多夫空间之间的连续真映射 $f : X \to Y$，令 $\mathsf{C}\ f\colon C_0(Y) \to C_0(X)$ 表示非退化同态 $\mathsf{C}\ f(g) = g \circ f$。

类似地，对于紧豪斯多夫空间 K，令 $C(K)$ 表示 K上连续函数构成的 C^*-代数；若 $F\colon K \to L$ 是紧豪斯多夫空间之间的连续映射，则令 $\mathsf{C}\,F\colon C(L) \to C(K)$ 为由 $\mathsf{C}(F)(G) = G \circ F$ 定义的含幺同态。

为了构造从 $\mathbf{Cpt}$ 到 $\mathbf{U_c}$的函子，我们想使用 [7], 第 24 页提到的以下引理。

引理 4.8。 设(X, K, φ) 是$\mathbf{Cpt}$中的一个对象。定义 $\varphi_*\colon C_0(X) \to C(K)$ 如下

$$\varphi_*(f)(z) = \begin{cases} f(x) \text{ if } z = \varphi(x) \in \varphi(X) \\ 0 \text{ if } z \notin \varphi(X) \end{cases}.$$

则$(C(K)\ \varphi_*)$ 是 $C_0(X)$的一个单位化。

命题 4.9。 存在一个反变函子$\mathrm{C}\colon \mathbf{Cpt} \to \mathbf{U_c}$，它在对象上的作用为

$$\mathrm{C}(X, K, \varphi) = (C_0(X), C(K), \varphi_*)$$

在态射$(f, F) : (X, K, \varphi) \to (Y, L, \gamma)$ 上的作用为

$$\mathrm{C}(f, F) = (\mathrm{C}\,f, \mathrm{C}\,F) : (C_0(Y), C(L), \gamma_*) \to (C_0(X), C(K), \varphi_*).$$

证明。 引理 4.8 确认 $\mathsf{C}(X, K, \varphi)$ 是$\mathbf{U_c}$ 中的一个对象，且通过直接计算可知，图表

$$\begin{array}{ccc} C_0(X) & \xrightarrow{\varphi_*} & C(K) \\ {\scriptstyle \mathrm{C}\,f}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{C}\,F}\uparrow \\ C_0(Y) & \xrightarrow{\gamma_*} & C(L). \end{array}$$

是交换的。 □

现在，我们建立一个从 $\mathbf{U_c}$ 到 $\mathbf{Cpt}$ 的函子。对于一个交换 C^* 代数 A，令$\backsim A$ 表示 A 上特征所构成的局部紧豪斯多夫空间。对于一个非退化$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$同态 $\tau\colon A \to B$ （其中的对象为交换 C^*-代数），令 $\hat{}\tau\colon B \to A$ 表示连续真映射 $\hat{}\tau(\gamma) = \gamma \circ \tau$。

证明以下引理是一个例行练习。

引理 4.10. 设(A, B, α) 是$\mathbf{U_c}$中的一个对象。那么存在一个稠密像嵌入 $\phi_\alpha\colon A \to B$。也就是说，存在一个映射 $\phi_\alpha\colon A \to B$，使得$(B, \phi_\alpha)$ 是$\widehat{\ }$ A的一个紧化。

命题 4.11. 存在一个反变函子 $\mathrm{Spec}\colon \mathbf{U_c} \to \mathbf{Cpt}$，其在对象上的作用为

$$\mathrm{Spec}(A, B, \alpha) = (\widehat{A}, \widehat{B}, \phi_\alpha)$$

在态射 $(\tau, \pi) : (A, B, \alpha) \to (C, D, \beta)$ 上的作用为

$$\mathrm{Spec}(\tau, \pi) = (\hat{\tau}, \hat{\pi}) : (\widehat{C}, \widehat{D}, \phi_\beta) \to (\widehat{A}, \widehat{B}, \phi_\alpha)$$

证明。引理 4.10 证实 $\mathrm{Spec}(A, B, \alpha)$ 是$\mathbf{Cpt}$ 中的一个对象，并且通过简单计算可知，图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & \xrightarrow{\phi_\beta} & \widehat{D} \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\pi}} \\ \widehat{A} & \xrightarrow{\phi_\alpha} & \widehat{B}. \end{array}$$

是可交换的。 □

对于局部紧（或紧）豪斯多夫空间 X，令 $\mathrm{ev}_X\colon X \to C_0(X)$ 表示求值同胚。也就是说，$\mathrm{ev}_X(x)(f) = f(x)$。对于交换的 C^*-$\widehat{\ }$代数 A，令 $\Gamma_A\colon A \to C_0(A)$ 表示盖尔范德变换。也就是说，$\Gamma_A(a)(\gamma) = \gamma(a)$。

命题 4.12. $\mathrm{SpecC} : \mathbf{Cpt} \to \mathbf{Cpt}$ 与 $1_{\mathbf{Cpt}}$ 自然同构，同构由自然同构 $\mathrm{ev}\colon 1_{\mathbf{Cpt}} \to \mathrm{SpecC}$ 给出，定义为 $\mathrm{ev}^{(X,K,\varphi)} = (\mathrm{ev}_X, \mathrm{ev}_K)$。

$\mathrm{CSpec} : \mathbf{U_c} \to \mathbf{U_c}$ 与 $1_{\mathbf{U_c}}$ 自然同构，同构由自然同构$\Gamma\colon 1_{\mathbf{U_c}} \to \mathrm{CSpec}$ 给出，定义为 $\Gamma_{(A,B,\alpha)} = (\Gamma_A, \Gamma_B)$。

证明。对于 $\mathbf{Cpt}$ 中的所有对象 (X, K, φ)，$(\mathrm{ev}_X, \mathrm{ev}_K) : (X, K, \varphi) \to (C_0(X)\ C(K)\ \phi_{\varphi_*})$ 是 $\mathbf{Cpt}$ 中的一个同构，因为该图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_X} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_K} \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow{\phi_{\varphi_*}} & \widehat{C(K)}. \end{array}$$

可交换，且每个坐标都是同胚。此外，对于所有态射 $(f,\ F) : (X,\ K,\ \varphi) \to (Y,\ L,\ \gamma)$，通过直接计算可知，该图表

$$\begin{array}{ccc} (X, K, \varphi) & \xrightarrow{(\epsilon_X, \epsilon_K)} & (\widehat{C_0(X)}, \widehat{C(K)}, \phi_{\varphi_*}) \\ \downarrow{\scriptstyle (f,F)} & & \downarrow{\scriptstyle (\widehat{\mathrm{C}f}, \widehat{\mathrm{C}F})} \\ (Y, L, \gamma) & \xrightarrow{(\epsilon_Y, \epsilon_L)} & (\widehat{C_0(Y)}, \widehat{C(L)}, \phi_{\gamma_*}) \end{array}$$

可交换。因此，$\mathsf{ev}\colon 1_{\mathbf{Cpt}} \to \mathsf{Spec}\,\mathsf{C}$ 是一个自然同构。

同样，对于 $\mathbf{U_c}$ 中的所有对象 (A, B, α)，(Γ_A, Γ_B) 是一个同构，因为图表

$$\begin{array}{ccc} C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\phi_\alpha)_*} & C(\widehat{B}) \\ {\scriptstyle \Gamma_A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma_B} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

交换，且每个坐标都是一个同构。此外，对于所有态射 $(\tau, \pi) : (A, B, \alpha) \to (C, D, \beta)$，图表

$$\begin{array}{ccc} (C, D, \beta) & \xrightarrow{(\Gamma_C, \Gamma_D)} & (C_0(\widehat{C}), C(\widehat{D}), \mathrm{C}\,\phi_\beta) \\ {\scriptstyle (\tau,\pi)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (\mathrm{C}\,\hat{\tau}, \mathrm{C}\,\hat{\pi})} \\ (A, B, \alpha) & \xrightarrow{(\Gamma_A, \Gamma_B)} & (C_0(\widehat{A}), C(\widehat{B}), \mathrm{C}\,\phi_\alpha) \end{array}$$

交换，因此 $\Gamma\colon 1_{\mathbf{U_c}} \to \mathsf{C}\,\mathsf{Spec}$ 是一个自然同构。 □

推论 4.13。Cpt 和 $\mathbf{U_c}$ 是反变等价范畴。

我们立即将引理 2.6 应用于 $(\mathrm{N}\ \eta)$ 和 $(\mathrm{M}\ \psi)$，从而在 $\mathbf{U_c}$ 上诱导出一个幂等余单子和一个单子。

首先，令 $(\mathrm{T}\ \delta)$ 表示由 $(\mathrm{N}\ \eta)$ 诱导的 $\mathbf{U_c}$ 上的幂等余单子。按照惯例，令 $\mathcal{T}$ 表示其对象 (A, B, α) 满足 $\delta_{(A,B,\alpha)}$ 是同构的全子范畴。令 T^δ 表示将 T 视为从 $\mathbf{U_c}$ 到 $\mathcal{T}$ 的函子所得到的函子，使得 $\mathrm{T} = \mathsf{Inc}_{\mathcal{T}} \circ \mathrm{T}^\delta$。

若 (A, B, α) 是 $\mathbf{U_c}$ 中的一个对象，且 (A, A^*, ι) 表示与 A 相关联的一点紧化三元组，则

$$T(A, B, \alpha) = (C_0(\widehat{A}), C(\widehat{A^*}), \iota_*).$$

$(C(A^*)\ \iota_*)$ 是 $C_0(A)$ 的一个最小单位化，因为它具有定义 4.1 中给出的性质，因此 $T(A, B, \alpha)$ 同构于与 $C_0(A)$ 相关联的最小单位化三元组。

反过来，如果 $(\widetilde{A}, \widetilde{A}, \kappa)$ 是一个最小单位化三元组，那么 $(\widetilde{A})\widehat{}$ 紧化，因为它具有定义 3.1 中给出的性质。因此，$\iota_{\widetilde{A}}\colon A \to A^*$ 是一个同胚，这意味着

$$\delta_{(A,\widetilde{A},\kappa)} = (\Gamma_A^{-1}, \Gamma_{\widetilde{A}}^{-1} \circ \mathrm{C}\,\iota_{\widetilde{A}})$$

是一个同构。因此，(A, A, κ) 是 $\mathcal{T}$ 中的一个对象。因此，$\mathbf{U_c}$ 中的一个对象属于 $\mathcal{T}$，当且仅当它与一个最小单位化三元组同构。

下面总结我们的发现。

推论 4.14. 在 $\mathbf{Cpt}$ 上的幂等单子 $(\mathrm{N}\ \eta)$ 在 $\mathbf{U_c}$ 上诱导出幂等余单子 $(\mathrm{T}\ \delta)$。给定上述的 $\mathcal{T}$ 和 T^δ，我们有 $\mathsf{Inc}_{\mathcal{T}}$ 具有右伴随，T^δ 是 $\mathsf{Inc}_{\mathcal{T}}$ 的右伴随，而 δ 是伴随 $\mathsf{Inc}_{\mathcal{T}} \dashv \mathrm{T}^\delta$ 的余单位。

此外，对象 (A, B, α) 属于 $\mathcal{T}$，当且仅当 (A, B, α) 与一个最小单位化三元组同构。

现在，令 $(\mathrm{S}\ \epsilon)$ 表示由 $(\mathrm{M}\ \psi)$ 诱导的 $\mathbf{U_c}$ 上的幂等单子。令 $\mathcal{S}$ 表示其对象满足 $\epsilon_{(A,B,\alpha)}$ 为同构的全子范畴。令 S^ϵ 表示将 S 视为从 $\mathbf{U_c}$ 到 $\mathcal{S}$ 的函子所得到的函子，因此 $\mathrm{S} = \mathrm{Inc}_{\mathcal{S}} \circ \mathrm{S}^\epsilon$。

若 (A, B, α) 是 $\mathbf{U_c}$ 中的一个对象，且 $(\widehat{A}, \beta\widehat{A}, \rho)$ 表示与 A 相关联的 Stone–Čech 紧化三元组，则

$$\mathrm{S}(A, B, \alpha) = (C_0(\widehat{A}), C(\beta\widehat{A}), \rho_*).$$

$(C(\beta A)\ \rho_*)$ 是 $C_0(A)$ 的极大单位化，因为它具有定义 4.3 中给出的性质。因此，$\mathrm{S}(A, B, \alpha)$ 同构于与 $C_0(A)$ 相关联的极大单位化三元组。

反过来，如果 $(A, M(A)\ \sigma)$ 是一个极大单位化三元组，那么 $(\widetilde{M(A)}\ \phi_\sigma)$ 是紧化，具有定义 3.4 中给出的性质，因此 $\phi_\sigma : \beta A \to \widetilde{M(A)}$ 是一个同胚，这意味着

$$\epsilon_{(A,M(A),\sigma)} = (\Gamma_A, \mathrm{C}\widetilde{\phi_\sigma} \circ \Gamma_{M(A)})$$

是一个同构，因此 $(A, M(A)\ \sigma)$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个对象。因此，$\mathbf{U_c}$ 中的对象属于 $\mathcal{S}$，当且仅当它同构于一个极大单位化三元组。

推论 4.15。 $\mathbf{U_c}$ 上的幂等余单子 $(\mathrm{M}\ \psi)$ 在 **Cpt** 上诱导出一个幂等单子 $(\mathrm{S}\ \epsilon)$。取上述给出的 $\mathcal{S}$ 和 S^ϵ，可知 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{S}}$ 可有左伴随，S^ϵ 是 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{S}}$ 的左伴随，而 ϵ 是伴随 $\mathrm{S}^\epsilon \dashv \mathrm{Inc}_{\mathcal{S}}$ 的单位。

此外，(A, B, α) 是 $\mathcal{S}$ 中的一个对象，当且仅当 (A, B, α) 同构于一个极大单位化三元组。

最后，由引理 2.6 可知，由于 (N, η) 和 (M, ψ) 满足极大-正规等价，(T, δ) 和 (S, ϵ) 也满足该等价。

推论 4.16。 范畴 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{S}$ 等价。伴随 $\mathrm{S}^\epsilon \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{T}} \dashv \mathrm{T}^\delta \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{S}}$ 是 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{S}$ 之间的伴随等价。此外，我们有

$$\mathrm{S}^\epsilon \cong (\mathrm{S}^\epsilon \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{T}}) \circ \mathrm{T}^\delta \quad \textit{and} \quad \mathrm{T}^\delta \cong (\mathrm{T}^\delta \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{S}}) \circ \mathrm{S}^\epsilon .$$

5. Unitizations of C^*-Algebras

我们本可以不在$\mathbf{U_c}$上诱导幂等单子和余单子，而是像构造**Cpt**上的幂等单子和余单子那样，从头构造它们。为了推广到非交换情形，我们正是这样做的。定义 4.1–4.5 并未涉及 C^*-代数是否交换，因此它们都适用于本节。

引理 5.1。 存在一个范畴$\mathbf{U}$，其对象是三元组$(A、\ B、\ \alpha)$，其中 A 是一个非含幺 C^*- 代数，而 $(B、\ \alpha)$ 是 A 的单位化。一个态射是一对

$(\tau、\ \pi):(A、\ B、\ \alpha)\ \to(C、\ D、\ \beta)$，其中 $\tau:\ \ A\to C$ 是一个非退化同态，$\pi:\ B\to D$ 是一个含幺同态，并且图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\ \beta\ } & D \\ {\scriptstyle\tau}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\pi} \\ A & \xrightarrow{\ \alpha\ } & B \end{array}$$

可交换。

证明。 这个证明与交换情形中的引理 4.6 的证明完全相同。 □

注意，$\mathbf{U}$包含$\mathbf{U_c}$ 作为一个全子范畴。

对于一个固定的非含幺 C^*-代数 A，令 $\mathbf{U}_A$ 表示$\mathbf{U}$在 A 上的纤维，其中对象的第一坐标为 A，态射的第一坐标为 id_A。我们有$\widetilde{\ }(A,A,\iota)$ 是$\mathbf{U}_A$中的一个始对象，而 $(A,M(A)\ \rho)$ 是 $\mathbf{U}_A$中的一个终对象。

命题 5.2。 存在一个函子 $\mathrm{M}:\mathbf{U}\ \to\mathbf{U}$，其在对象上的定义为将 $\mathrm{M}(A,B,\alpha)$ 设为$\mathbf{U}_A$中的一个始对象。也就是说，

$$\mathrm{M}(A,B,\alpha)=(A,\widetilde{A},\iota).$$

M 在态射 $(\tau,\pi):(A,B,\alpha)\ \to(C,D,\beta)$ 上的定义为

$$\mathrm{M}(\tau,\pi)=(\tau,\widetilde{\kappa\circ\tau}):(A,\widetilde{A},\iota)\to(C,\widetilde{C},\kappa).$$

证明。 这是显然的。 □

命题 5.3。 赋值 $\psi_{(A,B,\alpha)}=(\mathrm{id}_A,\widetilde{\alpha})$ 给出一个自然变换$\psi:\mathrm{M}\ \to 1_{\mathbf{U}}$。

证明。 我们证明，对于所有态射 $(\tau,\pi):(A,B,\alpha)\ \to(C,D,\beta)$，图表

$$\begin{array}{ccc} (C,\widetilde{C},\kappa) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_C,\widetilde{\beta})} & (C,D,\beta) \\ {\scriptstyle(\tau,\widetilde{\kappa\circ\tau})}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle(\tau,\pi)} \\ (A,\widetilde{A},\iota) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_A,\widetilde{\alpha})} & (A,B,\alpha) \end{array}$$

可交换~这在第一个坐标上显然成立。对于第二个，令 $\iota(a)\in A$。于是我们有：

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}\circ\widetilde{\kappa\circ\tau}(\iota(a)) &= \widetilde{\beta}\circ\kappa\circ\tau(a) && \text{by the commuting square for } (\tau,\widetilde{\kappa\circ\tau}) \\ &= \beta\circ\tau(a) && \text{by the commuting square for } (\mathrm{id}_C,\widetilde{\beta}) \\ &= \pi\circ\alpha(a) && \text{by the commuting square for } (\tau,\pi) \\ &= \pi\circ\widetilde{\alpha}(\iota(a)) && \text{by the commuting square for } (\mathrm{id}_A,\widetilde{\alpha}). \end{aligned}$$

~$\beta\circ\widetilde{\kappa\circ\tau}$和 $\pi\circ\widetilde{\alpha}$ 是同态，在 $\iota(A)$ 上非退化，并且在 $\iota(A)$ 上一致~；由于后者是 A 的本质理想，因此它们必定在整个 A 上一致。□

命题 5.4。 $\mathrm{M}\psi:\mathrm{M}^2\to\mathrm{M}$ 和 $\psi\mathrm{M}:\mathrm{M}^2\to\mathrm{M}$ 都是自然同构。

证明。 首先，我们证明 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$。对于一个对象 (A, B, α)，我们有

$$\mathrm{M}^2(A, B, \alpha) = \mathrm{M}(A, \widetilde{A}, \iota) = (A, \widetilde{A}, \iota) = \mathrm{M}(A, B, \alpha).$$

对于态射 $(\tau, \pi) : (A, B, \alpha) \to (C, D, \beta)$，我们有 $\mathbf{M}^2(\tau, \pi) : (A, \widetilde{A}, \iota) \to (B, \widetilde{B}, \kappa)$，其中

$$\mathrm{M}^2(\tau, \pi) = \mathrm{M}(\tau, \widetilde{\kappa \circ \tau}) = (\tau, \widetilde{\kappa \circ \tau}) = \mathrm{M}(\tau, \pi).$$

因此，$\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$。接下来，考虑 $\mathbf{M}\psi : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$。我们有

$$\mathrm{M}\,\psi_{(A,B,\alpha)} = \mathrm{M}(\mathrm{id}_A, \widetilde{\alpha}) = (\mathrm{id}_A, \widetilde{\iota \circ \mathrm{id}_A}) = (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_{\widetilde{A}}).$$

最后一个等式成立，是因为 $\iota \circ \mathrm{id}_A = \widetilde{\iota}$ 是满足 $\widetilde{\iota} \circ \iota = \iota$ 的唯一含单位同态。因此，$\iota \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\widetilde{A}}$。

因此，$\mathbf{M}\psi : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ 是恒等变换，故为自然同构。类似地，对于 $\psi\mathbf{M} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$，我们有

$$\psi\,\mathrm{M}(A, B, \alpha) = \psi_{(A,\widetilde{A},\iota)} = (\mathrm{id}_A, \widetilde{\iota}) = (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_{\widetilde{A}}).$$

由此得出，$\psi\mathbf{M} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ 也是恒等变换，故为自然同构。□

定义 5.5。 我们将 $\mathcal{M}$ 记作 $\mathbf{U}$ 的全子范畴，其对象 (A, B, α) 满足以下性质：$\psi_{(A,B,\alpha)} : (A, \widetilde{A}, \iota) \to (A, B, \alpha)$ 是一个同构。令 $\mathbf{M}^{\psi} : \mathbf{U} \to \mathcal{M}$ 为如下函子：将 $\mathbf{M}$ 视为从 $\mathbf{U}$ 到 $\mathcal{M}$ 的函子，从而 $\mathbf{M} = \mathbf{Inc}_{\mathcal{M}} \circ \mathbf{M}^{\psi}$。

注意，(A, B, α) 是 $\mathcal{M}$ 中的一个对象，当且仅当 $\widetilde{\alpha} : A \to B$ 是一个同构。因此，我们称 $\mathcal{M}$ 为 $\mathbf{U}$ 的全子范畴，它包含所有与最小单位化三元组同构的对象。

由引理 2.4，我们立即得到以下结论。

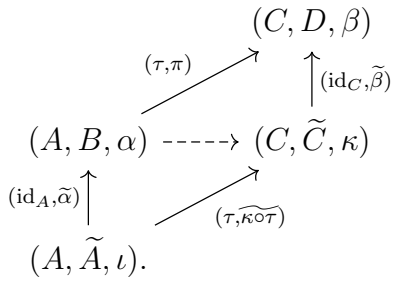
定理 5.6。 设 $\mathrm{M}:\mathbf{U} \to \mathbf{U}$，$\psi : \mathrm{M} \to 1_{\mathbf{U}}$，$\mathcal{M}$，且 $\mathrm{M}^{\psi} : \mathbf{U} \to \mathcal{M}$ 如上所述。则：

(i) $(\mathrm{M}\ \psi)$ 是 $\mathbf{U}$ 上的幂等余单子。(ii) $\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}}$ 具有右伴随，M^{ψ} 是 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}}$ 的右伴随，而 ψ 是伴随 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} \dashv \mathrm{M}^{\psi}$ 的余单位。因此，$\mathcal{M}$ 是 $\mathbf{U}$ 的余反射子范畴。(iii) 对于 $\mathbf{U}$ 中的所有对象 (C, D, β)，$(\mathrm{M}(C, D, \beta)\ \psi_{(C,D,\beta)})$ 都是从 $\mathcal{M}$ 到 (C, D, β) 的泛态射。

此外，对象 (A, B, α) 属于 $\mathcal{M}$，当且仅当 (A, B, α) 与一个最小单位化三元组同构。

注记 5.7. 定理 5.6 中 (3) 的图表如下。若 (C, D, β) 是 $\mathbf{U}$ 中的一个对象，(A, B, α) 是 $\mathcal{M}$ 中的一个对象，且 $(\tau, \pi) : (A, B, \alpha) \to (C, D, \beta)$，则 $(\tau, \widetilde{\kappa \circ \tau} \circ \widetilde{\alpha}^{-1}) :$

$\widetilde{\ }(A,B,\alpha) \to (C,C,\kappa)$ 是使下图成立的唯一态射：



命题 5.8. 存在一个函子 $\mathrm{N} : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$，其在对象上的定义是令 $\mathrm{N}(A, B, \alpha)$为$\mathbf{U}_A$中的终对象。也就是说

$$\mathrm{N}(A,B,\alpha) = (A, M(A), \rho).$$

N 在态射 $(\tau, \pi) : (A, B, \alpha) \to (C, D, \beta)$ 上的定义为

$$\mathrm{N}(\tau,\pi) = (\tau, M\tau) : (A, M(A), \rho) \to (C, M(C), \sigma).$$

证明。 显然。 □

命题 5.9。 赋值 $\eta_{(A,B,\alpha)} = (\mathrm{id}_A, \alpha)$ 给出了一个自然变换$\eta : 1_{\mathbf{U}} \to \mathrm{M}$。

证明。对于一个 对于所有态射 $(\tau, \pi) : (A, B, \alpha) \to (C, D, \beta)$，我们必须验证该图表

$$\begin{array}{ccc} (C,D,\beta) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_C,\overline{\beta})} & (C, M(C), \sigma) \\ {\scriptstyle(\tau,\pi)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle(\tau,M\tau)} \\ (A,B,\alpha) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_A,\overline{\alpha})} & (A, M(A), \rho) \end{array}$$

可交换。

第一坐标上的情况显然。对于第二坐标，设 $\alpha(a) \in \alpha(A)$。那么

$$\begin{aligned} M\tau \circ \overline{\alpha}(\alpha(a)) &= M\tau \circ \rho(a) && \text{by the commuting square for } (\mathrm{id}_A, \overline{\alpha}) \\ &= \sigma \circ \tau(a) && \text{by the commuting square for } (\tau, M\tau) \\ &= \overline{\beta} \circ \beta \circ \tau(a) && \text{by the commuting square for } (\mathrm{id}_B, \overline{\beta}) \\ &= \overline{\beta} \circ \pi(\alpha(a)) && \text{by the commuting square for } (\tau, \pi). \end{aligned}$$

$M\tau \circ \alpha$ 和 $\overline{\ }\beta \circ \pi$ 是同态，且它们是非退化的，并且在 $\alpha(A)$ 上一致；后者是 B 的本质理想。因此，它们在整个 B 上都必须一致，从而该图表可交换。□

命题 5.10。 $\mathrm{N}\eta : \mathrm{N} \to \mathrm{N}^2$ 和 $\eta\mathrm{N} : \mathrm{N} \to \mathrm{N}^2$ 是自然同构。

证明。 首先，我们证明 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N}$。对于 $\mathbf{U}$ 中的对象 (A, B, α)，有

$$\mathrm{N}^2(A,B,\alpha) = \mathrm{N}(A, M(A), \rho) = (A, M(A), \rho) = \mathrm{N}(A,B,\alpha).$$

对于态射 $(\tau,\pi):(A,B,\alpha)\to(C,D,\beta)$，有 $\mathrm{N}^2(\tau,\pi):(A,M(A)\ \rho)\to(C,M(C)\ \sigma)$，其中

$$\mathrm{N}^2(\tau,\pi)=\mathrm{N}(\tau,M\tau)=(\tau,M\tau)=\mathrm{N}(\tau,\pi).$$

因此，$\mathrm{N}^2=\mathrm{N}$。接下来，我们考虑 $\mathrm{N}\eta:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$。我们有

$$\mathrm{N}\,\eta_{(A,B,\alpha)}=\mathrm{N}(\mathrm{id}_A,\overline{\alpha})=(\mathrm{id}_A,M(\mathrm{id}_A))=(\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_{M(A)}).$$

最后一个等式成立，因为 $M(\mathrm{id}_A)$ 是唯一满足 $M(\mathrm{id}_A)\circ\rho=\rho$ 的态射。因此，$M(\mathrm{id}_A)=\mathrm{id}_{M(A)}$。

对于 $\eta\mathrm{N}:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$，我们有

$$\eta\,\mathrm{N}(A,B,\alpha)=\eta_{(A,M(A),\rho)}=(\mathrm{id}_A,\overline{\rho})=(\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_{M(A)}).$$

最后一个等式成立，因为 ρ 是唯一满足 $\rho\circ\rho=\rho$ 的态射。□

定义 5.11. 我们将 $\mathcal{N}$ 记作 $\mathbf{U}$ 的全子范畴，其对象 (A,B,α) 满足如下性质：$\eta_{(A,B,\alpha)}:(A,B,\alpha)\to(A,M(A)\ \rho)$ 是一个同构。令 $\mathrm{N}^\eta:\mathbf{U}\to\mathcal{N}$ 为如下函子：将 $\mathrm{N}:\mathbf{U}\to\mathbf{U}$ 视为从 $\mathbf{U}$ 到$\mathcal{N}$的函子即可得到该函子。因此，$\mathrm{N}=\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}\circ\mathrm{N}^\eta$。

注意，$(A,\ B,\ \alpha)$ 是 $\mathcal{N}$ 中的一个对象，当且仅当 $\alpha:\ B\to M(A)$ 是一个同构。因此，我们称 $\mathcal{N}$ 为$\mathbf{U}$ 中与某个极大单位化三元组同构的对象所构成的全子范畴。

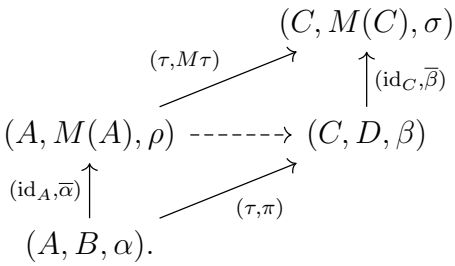
由引理 2.2 可立即得出以下结论。

定理 5.12. 设 $\mathrm{N}:\mathbf{U}\to\mathbf{U}$、$\eta:\ 1_{\mathbf{U}}\to\mathrm{N}$、$\mathcal{N}$ 和 $\mathrm{N}^\eta:\mathbf{U}\to\mathcal{N}$ 如上所定义。那么：

(i) $(\mathrm{N}\ \eta)$ 是 $\mathbf{U}$ 上的幂等单子。(ii) $\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 可有左伴随，N^η 是 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 的左伴随，而 η 是伴随 $\mathrm{N}^\eta\dashv\mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 的单位。特别地，$\mathcal{N}$ 是 $\mathbf{U}$ 的反射子范畴。(iii) 对于 $\mathbf{U}$ 中的任意对象 (A,B,α)，$(\mathrm{N}(A,B,\alpha)\,\eta_{(A,B,\alpha)})$ 是从 (A,B,α) 到 $\mathcal{N}$ 的泛态射。

此外，对象 (A,B,α) 属于 $\mathcal{N}$，当且仅当 (A,B,α) 与一个极大单位化三元组同构。

注记 5.13。定理 5.12 中第 (3) 项的图表如下。对于 $\mathbf{U}$ 中的对象 (A,B,α)、$\mathcal{N}$ 中的对象 (C,D,β)，以及 $(\tau,\pi):(A,B,\alpha)\to(C,D,\beta)$，$(\tau,\beta^{-1}\circ M\tau)$ 是使下图成立的唯一态射：



命题 5.14。 自然变换 $\mathrm{M}\,\eta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}\,\mathrm{N}$ 和 $\mathrm{N}\,\psi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}\,\mathrm{M}$是自然同构。

证明。 对于对象 (A, B, α)，我们有

$$\mathrm{M}\,\eta_{(A,B,\alpha)} = \mathrm{M}(\mathrm{id}_A, \widetilde{\alpha}) = (\mathrm{id}_A, \widetilde{\iota \circ \mathrm{id}_A}) = (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_{\widetilde{A}}).$$

因此，$\mathbf{M}\,\eta$ 是一个自然同构。同样，

$$\mathrm{N}\,\psi_{(A,B,\alpha)} = \mathrm{N}(\mathrm{id}_A, \overline{\alpha}) = (\mathrm{id}_A, M(\rho \circ \mathrm{id}_A)) = (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_{M(A)}).$$

因此，$\mathbf{N}\,\psi$ 也是一个自然同构。 □

命题 5.14 直接推出以下结论。

定理 5.15。 范畴 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 等价。伴随 $\mathrm{N}^{\eta} \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{M}} \dashv \mathbb{M}^{\psi} \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}$ 是 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$之间的伴随等价。此外，我们有

$$\mathrm{N}^{\eta} \cong (\mathrm{N}^{\eta} \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{M}}) \circ \mathrm{M}^{\psi} \quad \textit{and} \quad \mathrm{M}^{\psi} \cong (\mathrm{M}^{\psi} \circ \mathrm{Inc}_{\mathcal{N}}) \circ \mathrm{N}^{\eta}\,.$$

6. Conclusion

请注意，第 5 节中在$\mathbf{U}$ 上构造幂等单子和幂等余单子，并不依赖于第 3 节或第 4 节中给出的任何结果。我们完全可以先在 C^*-代数的单位化范畴中介绍极大-正规等价。这是我们最一般的例子。接着，我们可以将其特化到交换情形，并利用逆变等价，在$\mathbf{Cpt}$中诱导出满足极大-正规关系的那对子范畴。也就是说，我们可以按相反的顺序来讲述这一过程。

我们选择先在紧化范畴中介绍极大-正规等价。这个例子在概念上更容易理解。

正如引言和 [2] 中所述，这个例子是众多满足极大-正规等价的子范畴例子之一，这些范畴涉及 C^*-代数。此外，我们在拓扑情形中的例子表明，这些对子并非 C^*-理论所独有，在其他领域也很常见。

References

[1]Erik B´edos、S. Kaliszewski 和 John Quigg，反射-余反射等价，Theory Appl. Categ. **25** (2011)，第 6 期，142–179。MR2805748[2] ,关于群胚分次 C^*-代数以及通过单子和余单子关联的等价子范畴，2025。arXiv:2512.06461 [math.OA].[3] Marco Grandis，范畴论及其应用：初学者教材，第 2 版，世界科学出版社有限公司，哈肯萨克，新泽西州，2021。MR4274580[4] Asgar Jamneshan 和陶哲轩，不可数测度论的基础方面：盖尔范德对偶、里斯表示、典范模型和典范分解，Fund. Math. **261**(2023)，第 1 期，1–98，DOI 10.4064/fm226-7-2022。MR4566000[5] James R. Munkres，拓扑学，第 2 版，普伦蒂斯·霍尔公司，上萨德尔河，新泽西州，2000。MR3728284[6] Gerard J. Murphy，C^*-代数与算子理论，学术出版社公司，波士顿，马萨诸塞州，1990。MR1074574[7] Iain Raeburn 和 Dana P. Williams，莫里田等价与连续迹 C^*-代数，《数学调查与专著》，第 60 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998。MR1634408

School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University, Tempe,Arizona 85287电子邮件地址：jaspiker@asu.edu