arXiv:2601.07949v1 [hep-th] 12 Jan 2026

非交换瞬子散射变换

Spencer Tamagni

Leinweber 理论物理研究所，加州大学伯克利分校

2026年1月14日

摘要

我们对支撑在 $T^*\mathbb{C}$ 上、处于一般非交换瞬子背景中的手征费米子路径积分，给出了详细且数学上严谨的分析。我们证明，这类路径积分可解释为计算单极子散射矩阵矩阵系数的瞬子类比物。我们将单极子散射矩阵与（移位）Yangian $Y(\mathfrak{gl}_r)$ 的 R 矩阵之间已知的关系加以推广；我们的形式体系由此带来一种新的几何方法，用于计算（移位）仿射 Yangian $Y(\mathfrak{gl}_r)$ 的 $\widehat{}$ 矩阵。这也可以视为对双仿射格拉斯曼切片的显式描述，其中使用了与 Braverman、Finkelberg 和 Gaitsgory 的分解态射相容的 $\infty \times \infty$ 矩阵。我们的方法统一了文献中的若干早期成果，也导出了有趣的新结果和猜想。

目录

1 引言 **2**1.1 研究结果.3 1.2 致谢 .8

2 磁单极子模空间与杨氏代数 **9**2.1 散射变换与磁单极子模空间 .9 2.2 磁单极子模空间的可积结构 .11 **3 瞬子散射：第一种方法** **16**3.1 动机与暂定定义 .17 3.2 散射矩阵的确定 .20 **4 通过弦论/M理论的自顶向下方法** **33**4.1 M理论背景 .33

5 瞬子散射与新 R-矩阵 38
5.1 定义算子 $\mathbb{S}(u)$ .385.2 确定算子 $\mathbb{S}(u)$ .405.3 由 $\mathbb{S}(u)$ 得到的磁单极子散射矩阵.44

附录 **52**

A 磁单极子散射综述 **52**
A.1 磁单极子模空间：基本定义 .52A.2 散射矩阵的定义 .56A.3 散射矩阵的确定 .
60A.4 泊松括号 .64

B 关于自由费米子与格拉斯曼流形的回顾 70
B.1 边界条件 .70B.2 行列式线丛与福克空间 .71B.3 行列式产生的态 .74B.4 玻色化与
相干态基 .77

C ADHM复形的细节 **80**

1 引言

单极子的散射变换是经典规范理论与微分几何中一个优美的构造，最早见于 Hitchin 的工作 [Hit82] 和 Hurtubise[Hur85]。从历史上看，它之所以引人关注，是因为它提供了一种直接方法，能够以简单的有限维方式理解 $\mathbb{R}^3$ 上单极子模空间的几何（该模空间由非线性偏微分方程的解定义），例如参见教材 [AH88]。近年来，这一构造得到了大幅推广，在单极子模空间与（广义）仿射格拉斯曼流形切片之间建立了精确的对应关系。这些切片是在几何朗兰兹对应及库仑分支的数学研究背景下提出的，参见 [KW07], [BDG15], [BFN18]。

本文将重新审视并大幅推广单极子散射矩阵这一概念。我们将重点探讨如何把散射矩阵的构造从 $\mathbb{R}^3$ 上的单极子模空间推广到 $\mathbb{R}^4$ 和 $\mathbb{R}^3 \times S^1$ 上的（非交换）瞬子模空间（这些背景之所以重要，是因为它们是最简单的S^1-纤维化，且底空间为 $\mathbb{R}^3$）。这需要引入若干新思想，并揭示散射变换与数学物理和表示论中的其他结构之间一条隐而未见的联系，例如 Maulik-Okounkov 杨代数 [MO18],双仿射格拉斯曼流形、仿射李代数的朗兰兹对应 [BF10], 以及 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 在所研究背景上的拓扑弦理论 B模型中的对称性 [Aga+05]。瞬子散射的构造可以直接提升到弦理论中，从而为所有这些联系提供自然解释；这一思路建立在 [DHS09],[Dij+08]、 [Wit09], [Cos16]等早期工作的基础上。

尽管这一构造受到弦理论的启发，并自然地置于量子场论的框架之中，我们仍能以数学上严格的方式证明若干结果。这是因为我们需要实质性运用的量子场论内容，只有黎曼曲面上狄拉克型算子的行列式理论；自 20 世纪 80 年代以来，人们就已熟知，该理论可以借助无限维格拉斯曼流形（我们称之为佐藤格拉斯曼流形）形式化。这类流形是在可积系统和 KP 层级的研究中发展起来的，参见例如 [MJD00], [Mul94], [SW85], [Wit88] ，或参阅附录B以快速了解相关内容。由于我们希望研究结果能引起物理学家和表示论学家的兴趣，因此本文的组织力求兼顾两类读者。这意味着我们尽可能给出定理和证明，并努力清楚地区分分析中依赖物理学论证的部分与论文其余内容。数学论证应当直接明了且自成一体，不过若不了解物理学背景，它们可能会显得相当特别。

1.1 结果

本节将先确立一些记号和约定，然后陈述本文中可能令数学家感兴趣的结果，最后陈述可能令物理学家感兴趣的结果。

1.1.1 记号和约定

在陈述结果之前，我们需要先设定一些将在全文中使用的记号。 $\hbar$ 是一个 $\mathbb{C}$值参数，除非明确另有说明，否则均假定其非零。 $\mathcal{D}_\hbar$ 是由 z 和 w 生成、满足关系 $[w,z]=\hbar$的$\mathbb{C}$代数。 $\mathcal{D}_\hbar$ 是非交换余切丛 $T^*_\hbar\mathbb{C}$上的函数环。对于 $\hbar\neq 0$，它同构于 $\mathbb{A}^1$上的微分算子环；对于 $\hbar=0$ ，它特化为 $T^*\mathbb{C}$的坐标环。本文中，我们说 $\mathcal{D}_\hbar$-模时，通常指右 $\mathcal{D}_\hbar$-模。

我们对“ $T^*_\hbar\mathbb{C}$中的全纯曲线”作如下定义。取 $P(z,\ w)\in\mathcal{D}_\hbar$，其模 $\hbar$非零，并定义右 $\mathcal{D}_\hbar$-模

$$\widehat{\mathcal{O}}_C := \mathcal{D}_\hbar/P\mathcal{D}_\hbar. \tag{1.1}$$

这被视为仿射曲线的非交换类比，该曲线 C由 $P(z,\ w)=0$在 $\hbar=0$极限下定义。

本文的核心内容之一是非交换空间 $T^*_\hbar\mathbb{C}$上的瞬子模空间（秩为 r、荷为 n），例如参见 [BGK01], [KKO01], [NS98]。这些文章表明，该模空间以各种形式呈现时，均可通过类似 ADHM 的 [Ati+78] 构造表示为中岛箭图簇

$$\widetilde{M}(n,\ r) := \{(B_1,\ B_2,\ I,\ J)\in \mathrm{End}(V)\oplus\mathrm{End}(V)\oplus\mathrm{Hom}(W,V)\oplus\mathrm{Hom}(V,W)\,|\,[B_1,B_2]+IJ=\hbar\}/GL(V \tag{1.2}$$

这里 V和 W是向量空间，其中 维数 $V=n$ 且 维数$W=r$。只要 $\hbar\neq 0$，无论采用哪种稳定性条件，仿射商／范畴商、GIT 商以及由 $GL(V)$ 作用得到的栈商都彼此相同（见引理 C.1），并生成一个光滑仿射代数

维数为 $2nr$ 的代数簇。本文中，方便起见，我们不限定总瞬子荷，而是在并集上进行研究

$$\widetilde{M}(r) := \bigsqcup_{n\geq 0} \widetilde{M}(n,r) \tag{1.3}$$

$\widetilde{\ }$所有固定秩的瞬子模空间。在 $M(r)$ 上，我们有与箭图数据 W 和 V 相关联的典范丛 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{V}$，其秩（局部常数）分别为 r 和 n；注意 $\mathcal{W}$ 是平凡的，并且我们有一个典范同构 $\mathcal{W} \simeq W \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)^\circ}$。

$\widetilde{\ }$同样，在 $M(r)$ 上，我们有通用瞬子 $\mathcal{E}$，它是 ADHM复形的中间上同调层

$$\mathcal{V}\otimes\mathcal{D}_\hbar \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{V}\oplus\mathcal{V}\oplus\mathcal{W})\otimes\mathcal{D}_\hbar \xrightarrow{\beta} \mathcal{V}\otimes\mathcal{D}_\hbar \tag{1.4}$$

其映射为（当写出 z 和 w 时，我们约定它们表示相应的左乘算子）

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} B_1 - z \\ B_2 - w \\ J \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} -B_2 + w & B_1 - z & I \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中，箭图数据（B_1，B_2，I，J）被解释为典范丛之间相应的典范态射。$\mathcal{E}$ 是一个取值于右 $\mathcal{D}_\hbar$-模的 $\mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)}$-模层；若按基域 $\mathbb{C}$ 计算其秩，则该秩为无限；若按 $\mathcal{D}_\hbar$计算，则其秩为 r。

在第5.3 节中，我们将有机会考察以下奇异仿射簇

$$M_0(n,r) := \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{GL(V)} \tag{1.6}$$

其中，$\mu(B_1, B_2, I, J) = [B_1, B_2] + IJ$是 $T^*(\mathrm{End}(V)\oplus\mathrm{Hom}(W, V))$上 $GL(V)$作用量的矩映射，并配备典范辛形式。我们将这些称为瞬子的乌伦贝克模空间。

我们还将运用若干与自由费米子共形场论、$GL(\infty)$ 的半无限楔表示及相应的无限维格拉斯曼流形相关的标准构造；记号和综述参见附录B，或参阅 [MJD00], [Mul94], [SW 85], [Wit88]，其中从多个角度进行了更深入的讨论。

1.1.2 数学结果陈述

具体而言，本文展示的数学结果如下.

1. 对曲线 $P(z, w) = w$和 $P(z, w) = zw - u$（分别对应 z-轴以及保持 $T^*\mathbb{C}$ 上辛形式的环面作用的一般轨道），我们研究（无限秩）向量丛

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_C, \mathcal{E}) \tag{1.7}$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$在 $M(r)$ 上。我们证明，这些向量丛可用于定义从 $M(r)$ 到 Sato型格拉斯曼流形的映射（例如参见 [Mul94], [SW85]），这些映射可通过 Plücker 嵌入提升，从而在费米子福克空间中定义某些张量。这正是命题 3.1、3.2、5.1、5.2 的内容。这些费米子福克空间中的张量就是我们所称的“瞬子散射矩阵”。根据构造，它们在标准基中的所有分量都是瞬子模空间上的整体函数。同样根据构造，对于 $\sim M(r)$ 中的每个点，它们定义多分量KP层次的 τ-函数。

2. 命题 3.3 刻画了与 $P(z,w)=w$相关联的瞬子散射矩阵的一种等变性：它将 Γ_+ 的环群中子群 $\mathbb{C}^\times$ 在佐藤格拉斯曼流形上的作用（见 [SW85]）与某个交换子群$\widetilde{\quad}$在 $T^*\mathbb{C}$ 上的辛微分同胚作用 $M(1)$交织起来。这一点在[Aga+05]中已有预见。

$\widetilde{\quad}$3. 定理 3.5 表明，在 $M(1)$ 的一个特定开子集上（对应于这样一种情形：瞬子沿 z轴以适当意义充分分离），与 $P(z,w)=w$ 相关联的瞬子散射矩阵可分解为基本片段。各个片段都被识别为显式的表示论对象：它们是（泊松极限下的）*Miura* 算子。利用本文的方法，也可直接得到该定理的高秩类比，并在第 3节末尾予以讨论。

定理 3.5 可以看作瞬子散射矩阵构造与 [BFG12]的分解态射相容性的一个非常明确的表达（这些作者并未在非交换情形下工作，但将他们的构造转译为 ADHM 矩阵后即可直接推广）。

4. 在定理 3.8 中，我们证明了，在与上述类似的泊松极限下，任意乘积的 Miura 算子（采用三角规范化）的所有矩阵系数，都可以从一个类似的开子集延拓为仿射变形 Hilb_n（$T^*_\hbar\mathbb{C}^\times$）上的整体函数，其中 Hilb 是 $T^*\mathbb{C}^\times$上点的Hilbert概形。我们还得到了一个极为简洁的公式（3.57），给出所有矩阵元的生成函数，并附有一个几何证明。鉴于 Miura 算子与$\widehat{\quad}$的 RTT-矩阵之间的 R关系，以及 $\mathsf{Y}(\mathfrak{gl}_1)$ 来自 [MO18]对 Miura 算子的 [Pro19], 这给出了一个明确公式，在半经典极限下将 R-矩阵系数对应到 Hilb_n（$T^*_\hbar\mathbb{C}^\times$）上的函数。

5. 与 $P(z,w)=zw-u$ 相关联的瞬子散射矩阵在正文中记作 $\mathbb{S}(u)$。定理5.6 给出了一个显式公式，该公式完全确定了 $\mathbb{S}(u)$ 的所有矩阵系数，且这些系数由 ADHM 数据表示。猜想上，$\mathbb{S}(u)$ 是$\widehat{\quad}$一个 R-矩阵的半经典极限，其中$\mathsf{Y}_{+1}(\mathfrak{gl}_r)$ （关于为何这尚未成为定理，见下文1.1.4中的讨论）。

6. 我们给出一个猜想公式（5.34），该公式从[BFN18], [KP21]） $\mathbb{S}(u)$ 中提取出一个无限族的磁单极子散射矩阵（亦称仿射格拉斯曼切片的矩阵描述，参见），并且与仿射格拉斯曼流形的嵌入相容

切片作为 S^1-作用量的不动点轨迹嵌入瞬子模空间。因此，瞬子散射矩阵是其磁单极子对应物的直接推广。

1.1.3 物理结果概述

对于弦理论研究者而言，本文取得的成果如下。我们重新考察了弦理论构型 [DHS09], [Dij+08]，该构型研究了在背景 $\mathbb{R}\times T^*\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}^3$ 中存在 B场时， $T^*\mathbb{C}$上的 IIA 型超弦理论，以及一张卷绕 $\mathbb{R}\times T^*\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\{0\}$ 的 D6 膜和一张卷绕 pt $\times\{C\subset T^*\mathbb{C}\}\times\{0\}\times\mathbb{R}^3$的 D4 膜。本文考虑的新要素是一组卷绕 n的 D2 膜，它们位于 $\mathbb{R}\times$点 $\times\mathbb{C}\times\{0\}$；由于 B 场非零，D2 膜会溶入 D6 膜，并在 D6 膜上的低能规范理论中被描述为非交换瞬子 [NS98], [SW99]（有时我们也考虑一叠 $r>1$D6 膜；不过，在开启非交换性后，这种推广相对简单。）

D4-D6 交叉支撑手征费米子，相关研究见 [DHS09], [Dij+08] ，其与以下描述有关： B-模型拓扑弦，该描述见于 [Aga+05]。本文的视角则颇为不同：我们研究这些“非交换手征费米子”，将其作为体规范理论的非交换瞬子构型的探针。事实证明，与体理论的相互作用有助于阐明这些费米子的某些特征。沿着这一思路，我们证明如下。

1. 正如 [Aga+05]、 [DHS09], [和+08]Dij$\widetilde{}$中的情形一样，对这些费米自由度的路径积分可以通过手征Ward恒等式来刻画：Ward恒等式表明，所得路径积分完全由一个从瞬子模空间 $M(r)$ 到无限维格拉斯曼流形的全纯映射描述；对于D4 膜支撑的两种最简单选择，我们对该映射进行了明确刻画 $C\subset T^*\mathbb{C}$。这个全纯映射可以被视为赋予非交换瞬子的“散射数据”，从而推广了通过 [AH88], [Hit82], [Hur85], [Jar98]中的经典构造赋予单极子的散射数据。这似乎与Atiyah很早以前的一项观察有关 [Ati84]。

   要使这一论述成立，很大程度上依赖于 Witten 所倡导的自由费米子方法 [Wit88]。我们将相应的费米子路径积分称为“瞬子散射矩阵”。

2. 提升至 M 理论，并借鉴 Costello 的相关分析 [Cos16], ，可以将瞬子散射矩阵解释为计算（在半经典极限下）五维陈-西蒙斯理论中线观测量与曲面观测量的交点，该理论定义在$\mathbb{R}\times T^*_\hbar\mathbb{C}$ 上，研究见 [Cos16]。根据此类陈-西蒙斯理论中的缺陷交点与 Yangian 表示论之间已知的联系，从这个意义上说，瞬子散射矩阵自然会产生（移位）仿射 R-矩阵$\widehat{}$Yangian $Y_{+1}(\mathfrak{gl}_r)$，且是在某种半经典极限下。

   R移位 Yangian 代数的矩阵尚未在适当的一般性层次上得到定义（见 1.1.4 下文），因此，在第 5 节所讨论的这类情况下，我们的形式体系对这些杨氏代数的 RTT 形式体系作出了预测并施加了约束。

3. 从五维陈-西蒙斯理论的角度来看，本文的技术带来了计算这类缺陷交点的新方法。值得特别强调的两个重要特点是：

- 这些方法是非微扰的，也就是说，它们不依赖于围绕体陈-西蒙斯理论中的平凡场构型进行幂级数展开。事实上，按照构造，它们适用于整个瞬子模空间。
- 我们的方法并不将曲面算子的支集限制为 $T^*\mathbb{C}$中的线性子空间，这是迄今为止文献中唯一考虑的情形。事实上，附录 C 的形式体系，至少原则上，同样适用于任意支集。第 5节详细分析了最简单的非平凡例子；赋予交集的算子记为 $\mathbb{S}(u)$。

本文方法的主要局限在于，我们必须停留在上述半经典极限中，但这并不像看起来那么严重，尤其是在利用与 Yangian 的（约束性很强的）关系时。

4. 在本文的方法中，瞬子散射矩阵与单极子散射矩阵处于同等地位。公式（5.34）使这一点得到了明确体现：在某些情况下，它给出了用瞬子散射矩阵表示单极子散射矩阵的显式公式。将单极子 S-矩阵嵌入四维陈-西蒙斯理论的讨论（所采用的语言略有不同）见 [CGY21]。

5. 定理 3.5 为在 [Cos16]，此前研究的 [Ash24]，[GR20]，[GRZ24]，[HJ24]，[IJZ25]，[Zen 24]所提出的 M 理论框架中 Miura 算子的出现提供了一种新方法。它指出，对应于支撑在 $w = 0$ 上的 M5 膜与任意数量 M2 膜相交时的瞬子散射矩阵，在瞬子模空间的适当坐标图中可分解为 Miura 算子。

这一观点使我们能够证明诸如定理 3.8或（3.57）这样的结果，从而对涉及 Miura 算子的任意关联函数给出非常精确的刻画；从纯粹的二维共形场论（CFT）视角来看，这些结果极为引人注目。从这个意义上说，我们将 Miura 算子与磁单极子 S-矩阵/仿射格拉斯曼切片置于同等地位，并在更广泛的背景下阐明了它们的重要性。

1.1.4 瞬子散射矩阵与 R-矩阵

本文的一个重要动机是观察到，单极子散射矩阵与某些称为移位杨氏代数的量子群的 R-矩阵密切相关（例如李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_r$ 对应的情形）。这一观察最早至少可追溯至 [Ger+05]，并将在下文第2 节回顾；关于四维陈-西蒙斯理论视角下较新的讨论，另见 [CGY21]。我们构造瞬子散射矩阵时，确保了在以移位 Yangian 代数的$\widehat{\ }$仿射对应物，即 $\mathfrak{gl}_r$的移位 Yangian 代数 $\mathfrak{gl}_r$取代移位 Yangian 代数时，类似关系仍然成立。根据第4节的弦理论考量，我们预期这一结果成立；而在某些情形下（例如下文的引理 3.6 ），直接验证杨-巴克斯特方程很容易，因此无需依赖弦理论论证，也能确认 R-矩阵性质。

严格来说，散射矩阵的量子化是 R-矩阵；散射矩阵本身是半经典对象，不过它们可通过相关单极子/瞬子模空间上的泊松括号体现杨-巴克斯特方程（例如，见附录A中的计算）。

尽管我们在正文中给出了瞬子散射矩阵的数学精确定义，但严格来说，它与 R-矩阵的关系仍属猜想，原因如下。移位 Yangian$\mathsf{Y}_{\mu}(\mathfrak{g})$ 取决于对李代数μ的余权 $\mathfrak{g}$ 的选择，该余权称为移位；Yangian 是否存在 Yang–Baxter 形式主义，取决于 μ 是主导的还是反主导的。如果 μ是反主导的，则存在 Yang–Baxter 形式主义，且 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_r$ 的相关构造见 [FPT22]。如果 μ 是主导的，那么 [FPT22]中的构造就会失败；似乎不存在杨-巴克斯特方程，而朴素定义的余乘法也不满足余结合性。这是表示论中一个众所周知的技术问题。

这意味着，在主导移位的情形下，我们无法证明瞬子散射矩阵是 R-矩阵，因为在缺少移位 Yangian 的 RTT 形式主义时，这一说法根本没有实质内容。我们更倾向于从相反方向理解这种对应关系：由于散射矩阵适用的范围比 R-矩阵更广，因此它们应当成为推动移位 Yangian 理论最终发展的目标。具体而言，应当为 RTT1-移位仿射Yangian$\mathsf{Y}_{+1}(\mathfrak{gl}_r)$ 建立一种 RTT形式主义，$\widehat{\ }$并证明第1节构造的算子 $\mathbb{S}(u)$ 5 满足其 R-矩阵的定义（在半经典极限下）。

1.2 致谢

如果没有 Mina Aganagic 和 Yegor Zenkevich 的宝贵讨论，本文将无法完成。我感谢他们每一位在本项目的发展过程中持续提供反馈和建议，尤其感谢 Yegor 慷慨分享他关于 q-变形 Miura 算子的公式与见解。我也感谢 Tommaso Botta 和 Sujay Nair 与我合作开展相关工作；这些工作极大地影响了我的思考，并促使我继续研究本文中的构造。

本工作的部分内容是在访问哥伦比亚大学期间完成的，我感谢那里的数学系给予我的热情接待。初步结果曾在哥伦比亚非正式数学物理研讨会（2025年1月）上公布。特别感谢 Andrei Okounkov 的邀请，以及他对本项目的反馈和关注。

1.2.1 论文概要

本文结构如下。在第 2 节中，我们简要回顾单极子散射矩阵，着重介绍它们与 Yangian 的关系，以及其瞬子类比物所体现的平行特征。第 3.1 节以物理学语言，逐步说明如何将单极子散射矩阵推广为其瞬子类比物。第 3.2 节以数学上严谨的方式处理最简单的瞬子散射矩阵，它们与零截面上的费米子相关 $\mathbb{C}\subset T^*_{\hbar}\mathbb{C}$或 $\mathbb{C}^\times\subset T^*_{\hbar}\mathbb{C}^\times$。第 4 节将这一构造提升到弦理论，并深入阐释其与物理学文献其他领域的联系

。第 5.1、5.2 节从数学角度处理下一个较简单的瞬子散射矩阵（记作 $\mathbb{S}(u)$），它与曲线 $zw = u$上的费米子相关，其动机来自第 4节的讨论。第 5.3 节将这一系列思想首尾相接，并给出一个明确的方法，从瞬子类比物中还原单极子散射矩阵。

附录 A 对单极子散射矩阵作了更为详尽的介绍，旨在帮助不熟悉其构造的读者。附录B 汇集了自由费米子与无限维格拉斯曼流形理论中的记号、概念和结果，这些内容将在全文中使用。附录 C包含了关于 ADHM 复形的各种技术性计算。正文中的某些部分，尤其是证明，依赖于附录 B和 C中引入的概念或结果。对这些背景不太熟悉的读者，不妨在阅读论文其余部分之前先查阅这些附录。

关于微分几何的说明。从概念层面出发，尤其是为了与物理学建立切实的联系，本文所讨论的各种模空间具有微分几何诠释，这一点非常重要。然而，本文中的证明均不依赖于这类描述，读者会发现，所有论证完全是在代数几何的框架内进行的。尽管如此，我们仍会在文中若干处谈及其微分几何诠释，但不会讨论可能出现的任何复杂分析问题。

2 单极子模空间与杨氏代数

本文旨在重新审视并推广的核心观察，是单极子散射变换与 RTT Yangian形式之间的关系。这一联系至少可以追溯到 [Ger+05]，并在现代文献中以不同维度的箭图规范理论库仑分支量子化为背景再次出现 [NP23], [BDG15], [CGY21]。本节将概述单极子散射的重要方面，这些内容将为我们的主要构造提供动机。尽管可以研究任意ADE李代数的单极子模空间 $\mathfrak{g}$，但为具体起见，本文将注意力限制在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_r$ 。显式公式仅针对 $\mathfrak{gl}_2$。

熟悉相关材料的读者只需略读本节，以了解记号；不熟悉相关内容的读者可以参阅附录A ，其中对这一主题作了更为详细且完整的介绍。

2.1 散射变换与单极子模空间

2.1.1 一般设置

研究BPS单极子方程（也称为Bogomolny方程）的设置如下。我们研究秩为 r 的向量丛 $E \to \mathbb{R}^3$ 上的酉联络 A ，以及 End(E) 的实值截面 ϕ 。我们要求它们满足方程

$$F_A + \star D_A\phi = 0 \tag{2.1}$$

其中， $F_A = dA + A \wedge A$是联络的曲率， $D_A\phi = d\phi + [A, \phi]$是协变导数， $\star$ 是由 $\mathbb{R}^3$上的欧几里得度量确定的霍奇星算子。本文将此称为单极子方程。

经典的设定是研究在 $\mathbb{R}^3$上处处光滑且满足某些边界条件的上述方程的解。研究定义在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上的解也很有意思，这些解在零点附近具有指定奇点。我们考虑满足 $r \to \infty$ 处边界条件的解，条件由方程（A.5）指定，其中涉及选择 μ 的一个余权GL_r，并在 $r \to 0$ 处具有由另一个余权选择 λ标记的指定奇点（A.7）。为具体起见，我们在此写出标量 ϕ 上的边界条件，更多细节请参见附录A：

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &\to -i\mathrm{diag}(\phi_1, \dots, \phi_r) - \frac{i\mu}{2r} + \dots \quad \text{as } r \to \infty \\ \phi(\vec{x}) &\to -\frac{i\lambda}{2r} + \dots \quad \text{as } r \to 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

以下 ϕ_i是按顺序排列的实数 $\phi_1 < \cdots < \phi_r$。规范场 A必须在由余权的选择指定的这些点处趋近于标准狄拉克单极子构型；满足这些边界条件、并按自然同构（规范等价，即趋近于 1 于$r \to \infty$ 处，并在 λ 附近与其对易0）取商的 $F_A + \star D_A\phi = 0$ 解的模空间记为 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$。要使该模空间非空， $\mu - \lambda$必须是余根。若该空间非空，其实维数为 $4|\langle\rho,\ \mu - \lambda\rangle|$ （ρ 是韦伊向量，即正根之和的一半）；这一点可以从微分几何角度看出[MRV14]。

该 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 不紧有两个原因：其一是由于 $\mathbb{R}^3$的非紧性，其二是“单极子冒泡效应” [KW 07], ，从精确意义上说，它类似于四维中与小瞬子相关的效应。与瞬子的情形一样，单极子模空间 $\mathcal{M}_\mu^\lambda \subset \mathcal{M}_\mu^\lambda$ 存在一种 Uhlenbeck 型偏紧化，它通常是奇异的（当且仅当 λ 为极小时才光滑）。这种紧化的构造至少在代数几何的意义下可以通过散射变换完成，并在附录A中略作介绍。

2.1.2 散射矩阵

的微分几何描述 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 在概念上非常优美，但由于涉及求解偏微分方程，因此处理起来相当困难。从历史上看，人们之所以关注磁单极子散射矩阵，是因为它以有限$\mathcal{M}_\mu^{\lambda=0}$维的形式给出了 [Jar98]的易于处理的描述；秩为 $r = 2$ 的情形在 [AH88]中有详尽讨论。

基本思想如下：选取一个分解 $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ni (u,\ y)$。这会在 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$上诱导出复结构的一种优选选择，见附录A 或 [AH88]。方程 $F_A + \star D_A\phi = 0$变为

$$\left[\overline{D}_u, D_y + i\phi\right] = 0 \tag{2.3}$$

以及另一个可解释为实矩映射条件的方程。该量（威尔逊线）

$$S(u) = \mathcal{P}\exp\left\{-\int_{\gamma_u} dy(A_y + i\phi)\right\} \tag{2.4}$$

是复化联络 $A_y + i\phi$ 沿垂直线 γ_u 的整体，由 $u =$const 给出。根据上述方程，它关于 u 是协变全纯的。由于

向量丛在 E 上 $y=\text{const}$ 的限制是黎曼曲面上的一个带酉联络的向量丛， D_u 这赋予它自然的全纯结构；相对于 $y\to\pm\infty$处的全纯平凡化来表示时， $S(u)$的矩阵元关于 u是全纯的。按照设计，它们也是单极子模空间上的全纯函数，而该模空间带有由分解 $\mathbb{R}^3\simeq\mathbb{C}\times\mathbb{R}$所诱导的复结构。附录 A回顾了如何利用单极子方程的边界条件，确定 $S(u)$ 在 $u\to\infty$ 趋近时、某类优选渐近全纯标架中的矩阵元的渐近行为；这足以完全确定 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ （并进一步赋予其奇异仿射代数簇的结构）。

2.1.3 秩 *2* 中的显式散射矩阵

为使讨论更加具体，我们直接给出对 $U(2)$ 单极子的分析结果：其渐近荷为 $\mu=(k,\ n-k)$，而 0 处狄拉克奇点的荷为$\lambda=(0,\ n)$，其中 $n,\ k\geq 0$ 为整数。

那么，正如附录 A中详述的，单极子解的渐近行为要求散射矩阵具有以下形式：

$$S(u)=\begin{bmatrix}Q(u) & U^+(u)\\ U^-(u) & \widetilde{Q}(u)\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

其中所有元素都是 u 的多项式。此外， $Q(u)$ 是次数为 k 的首一多项式，$\deg\ U^\pm(u)\ \leq k-1$ 并且

$$\det S(u)=Q(u)\widetilde{Q}(u)-U^+(u)U^-(u)=u^n. \tag{2.6}$$

在该方程中取 u 的各次幂的系数，便得到刻画 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 的完整方程组； $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 是一个（一般来说有奇点的）仿射代数簇，而 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 可视为其光滑轨迹。当 λ 为零或极小时，不存在奇点。

容易看出（见 [BFN18] 第 2(xi) 节），这与 [BFN18], 中对广义仿射格拉斯曼流形切片的描述一致；当然，这一结果早已为人所知，可追溯至 [BDG15]。

2.2 磁单极子模空间的可积结构

2.2.1 单极子模空间的辛结构

回顾一下，磁单极子的模空间是一个全纯辛簇，其辛结构形式上由所有规范场和标量场空间上的以下二形式诱导而来：

$$\omega_{\mathbb{C}}=\int_{\mathbb{R}^3\setminus\{0\}}d^2u dy\,\mathrm{Tr}(\delta A_{\bar{u}}\wedge\delta(A_y+i\phi)). \tag{2.7}$$

矩阵元 S-矩阵的矩阵元是 u 的全纯函数，其系数属于单极子模空间上的全纯函数。在附录A 中，通过直接计算证明， S-矩阵系数的泊松括号具有如下形式

$$\{S^i{}_j(u),S^k{}_\ell(v)\}=\frac{S^i{}_\ell(u)S^k{}_j(v)-S^i{}_\ell(v)S^k{}_j(u)}{u-v}+\Delta^{ik}{}_{j\ell}(u,v) \tag{2.8}$$

其中，项 Δ 涉及 u和 v 的高次幂；按照附录A中概述的步骤，我们可以避免明确求出该项（下一段也将对此进行说明）。如果 Δ 项为零或可以忽略，这就与 RTT 关系在 $\mathfrak{gl}_r$ 的 Yangian 泊松极限一致（导论可参见 [Fad95]，或参见 [FPT22]，了解一个密切相关领域中的现代讨论）。进一步考察可知，我们实际上得到的是一个移位 Yangian 代数，其中移位的取值由渐近荷确定 μ， [FPT22]。

在秩为 $r = 2$ 的情形下，泊松括号的完整列表如下；其中S矩阵元的记号沿用前面贯穿全文的例子，

$$\begin{aligned} \{Q(u), Q(v)\} &= 0 \\ \left\{Q(u), \frac{U^{\pm}(v)}{Q(v)}\right\} &= \pm\left[\frac{Q(u)}{u-v}\left(\frac{U^{\pm}(u)}{Q(u)} - \frac{U^{\pm}(v)}{Q(v)}\right)\right]_- \\ \left\{\frac{U^{+}(u)}{Q(u)}, \frac{U^{-}(v)}{Q(v)}\right\} &= \left[\frac{1}{u-v}\left(\frac{P(v)}{Q(v)^2} - \frac{P(u)}{Q(u)^2}\right)\right]_- \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中，下标 $-$ 表示在 u 或 v 的展开中取负部，只要左边出现 $U^{\pm}/Q$即可。多项式 $P(u) = \det S(u) = u^n$。当 $n \leq 2k$ 时， Δ 项为零，因为在这种情况下，右边的 “–” 下标是多余的；当$n > 2k$ 时，项 Δ 非零，其唯一作用是抵消 $U^{\pm}/Q$之间的括号中出现的正次数项。

从这个角度来看，Yangian 的出现显得相当令人意外，也出乎意料。第4节将勾勒一种更具概念性、但也更复杂的解释，说明它为何会出现。目前，我们姑且接受这一点，并推导其后果。

2.2.2 坐标图与余乘法

单极子模空间与 Yangian 的关系，或者等价地说，单极子模空间恰好与 S-矩阵的模空间相同这一事实，赋予了它们相当强的刚性和额外结构。这是因为定义在 Yangian 上的“典范”结构可以非平凡地下降到单极子模空间上。

举一个简单的例子，假设 $S_1(u)$ 是一个磁单极子 S-矩阵，对应于荷的取值 (λ_1, μ_1)，同样地， $S_2(u)$ 是一个磁单极子 S-矩阵，对应于荷 (λ_2, μ_2)。进一步为简单起见，假设我们处于秩 $r = 2$ 的情形，并且 S_1 和 S_2 都具有 $n \leq 2k$（采用上文的记号）（对应于反主导移位杨算子，因此[FPT22] 的分析适用）。那么很容易看出

$$S^i{}_j(u) = \sum_k (S_1)^i{}_k(u)(S_2)^k{}_j(u) \tag{2.10}$$

是另一个磁单极子 S-矩阵，与荷 $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2)$ 相关。也很容易验证，若 $\Delta = 0$，则此映射与泊松括号相容。这描述了一个泊松态射

$$\overline{\mathcal{M}}^{\lambda_1}_{\mu_1} \times \overline{\mathcal{M}}^{\lambda_2}_{\mu_2} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{\lambda_1+\lambda_2}_{\mu_1+\mu_2}. \tag{2.11}$$

此外，在 RTT 形式中，“辅助”空间里的矩阵乘法 $\mathbb{C}^2$ 就是*Yangian* 上的余乘法，参见 [Fad 95], [FPT22]。因此， S的矩阵描述

单极子模空间产生了一组单极子模空间之间的典范映射，这些映射直接由底层 Yangian 中的余乘法诱导而来。这为将单极子模空间分解为基本组分提供了一套系统的方法。更确切地说，这些映射可用于在$\mathcal{M}_\mu^\lambda$的消解上构造一组坐标图（详情见 [KP21]；最基本的例子将在下文讨论）。鉴于 [KW07]中对消解的描述，消解的出现并不令人意外。

若我们在秩 2 情形中允许 $n > 2k$，读者可以验证，仍然存在如上所述的良定义映射，但它不再由朴素的矩阵乘法给出。为了在 u 中得到正确的次数，必须通过进一步乘以严格上/下三角矩阵来修正矩阵乘法（这可追溯到附录 SA中出现的 RTT - 矩阵的高斯分解）。这种修正不会引入新信息，因为它由次数条件唯一确定。这一基本观察正是将 [FPT22] 的形式体系推广到主导移位杨代数时遇到困难的根源。

2.2.3 作用角变量

上文从代数角度讨论的“余乘法”坐标图，可以从更具物理意味的角度作如下解释。分解 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 对应于通过拆分奇异单极子来部分解消 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 的奇点，如 [KW07] 中所述。S- 矩阵因子分解所在的轨迹，就是光滑单极子沿 y- 轴分成两个“簇”的轨迹：其中一簇可以泡到 λ_1 狄拉克单极子中，另一簇可以泡到 λ_2 狄拉克单极子中。这是部分解消中的一个开集，同构于两个较小的单极子模空间的乘积。KP [中的结果证实了这一直观图景21]。

单极子模空间中还有另一个可能的开子集，其中我们假设光滑单极子沿 u平面充分分离。这将导出一个坐标图，在该坐标图中，单极子模空间的可积系统结构显而易见，并由此得到可积系统的“作用量-角变量”。“因子化S-矩阵”坐标图则对应于可积系统的“坐标基”，这与代数贝特拟设的一般特征相符 [Fad95]。

在秩 2 情形下，若 $\mu = (k,\ n-k)$，$\lambda = (0,\ n)$ $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 的维数为 $2k$，则由上述泊松括号可知，$Q(u)$ 的系数在其上给出 k 个独立的泊松对易函数。从几何角度重新表述，我们有一个映射

$$\overline{\mathcal{M}}_\mu^\lambda \to \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}) \tag{2.12}$$

由赋值 $S(u) \mapsto$ 的 $Q(u)$ 的零点给出，并且它具有拉格朗日纤维。引入基底上的坐标 φ_i，$Q(u) := \prod_i (u-\varphi_i)$，在一般纤维中，我们可以引入坐标 $x_i^\pm := U^\pm(\varphi_i)$。由于关系 $\det S(u) = P(u)$，这些坐标必须满足 $-x_i^+ x_i^- = P(\varphi_i)$，对每个 $i = 1, \ldots, k$ 都成立；因此，一般纤维可识别为 $(\mathbb{C}^\times)^k$。不难看出，在这些坐标下，辛形式可识别为 $\Omega = \sum_i d\varphi_i \wedge d\log\left(x_i^+\right)$。由此可见，单极子模空间是一个可积系统，并且 (φ_i, x_i^+) 提供了一组显式的作用—角坐标；这些坐标自然对应于 [BDG15], [BFN18] 的阿贝尔化。

2.2.4 示例：开 *Toda* 链

让我们用秩 $r = 2$ 的情形来说明上述论述，其中 $\mu = (k, -k)$， $\lambda = 0$。在这种情形下， $\mathcal{M}^0_\mu$ 是一个维数为 $2k$的光滑仿射簇；这是 [AH88]研究的经典情形。如上所述，由余乘法导出的坐标图将其识别为开 Toda 格的完备相空间。

对于 $k = 1$，散射矩阵可确定为如下形式

$$S(u) = \begin{bmatrix} u - p & z \\ -z^{-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

且非平凡的泊松括号为 $\{p, z\} = z$；因此我们看到， $\mathcal{M}^0{}_{(1,-1)} \simeq T^*\mathbb{C}^\times$配备标准辛形式，而 (p, z) 是余切丛上的标准坐标。在此情形下，可积系统是一个平凡系统，对应于向 p-平面的投影。

于是我们可以通过坐标 (p_i, z_i)， $i = 1, \ldots, k$ 将因子化的 S-矩阵写为

$$\begin{aligned} S(u) &= \begin{bmatrix} Q(u) & U^+(u) \\ U^-(u) & \widetilde{Q}(u) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u - p_k & z_k \\ -z_k^{-1} & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} u - p_1 & z_1 \\ -z_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

该方程定义了一个映射

$$T^*(\mathbb{C}^\times)^k \simeq (\overline{\mathcal{M}}^0_{(1,-1)})^{\times k} \to \overline{\mathcal{M}}^0_{(k,-k)} \tag{2.15}$$

并且不难直接验证，它实际上是一个开子集的嵌入。此外，根据上文讨论的与泊松括号的相容性， (p_i, z_i) 是达布坐标，且 $\Omega = \sum_i dp_i \wedge d\log(z_i)$。

该可积系统的哈密顿量 H_k 是 $Q(u)$ 的系数： $Q(u) = u^k - H_1 u^{k-1} + H_2 u^{k-2} + \ldots$。由上文可读出

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_i p_i \\ H_2 &= \sum_{i<j} p_i p_j - \sum_{i=1}^{k} z_{i+1} z_i^{-1} \end{aligned} \tag{2.16}$$

并立即看出， H_2 是 k 粒子开 Toda 格的哈密顿量。

以下是这个例子中我们希望更一般地理解的基本特征，尤其是对于瞬子而言。

1. 存在一种本质上典范的构造，可由磁单极子解 $S(u)$构造算子；其矩阵系数是单极子模空间上的全纯函数，并为其坐标环提供一组特殊的生成元。（瞬子类比物：命题 3.1、3.2、5.1、5.2）。

2. 单极子模空间上的辛结构使得 $S(u)$ 可被视为 Yangian 传递矩阵的半经典极限 $\mathsf{Y}(\mathfrak{g})$，其中 $\mathfrak{g}$ 是单极子规范群的李代数；移位的细节在此不作讨论。（瞬子类比物，在 0 移位情形下：引理 3.6）。

3. Yangian 余乘法（ T矩阵的乘法）诱导出单极子模空间之间的典范映射；特别是，在多单极子模空间中存在一个特定开集，其特征是 $S(u)$完全分解为基本组分。（瞬子类比物：定理 3.5、3.8、5.4。）

2.2.5 量子化与 R-矩阵

接下来的三个小节与本文其余部分没有直接关系，仅用于提供动机和背景；如果读者觉得这些内容令人困惑，建议跳过。

本文为简洁起见，常会说散射矩阵“是” R-矩阵或T-矩阵，但准确地说，只有在将单极子模空间上的函数环量子化，并选取一个量子化后的模来计算其中的 S-矩阵系数时，这一说法才成立。为简单起见，在未移位的 $\mathsf{Y}(\mathfrak{gl}_r)$ 情形下（对应于 $\mu = 0$），量子化后的 S-矩阵预期会给出 $\mathsf{Y}(\mathfrak{gl}_r)$ 编织的 R-矩阵

$$\widehat{S}(u) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^r \otimes M)(u) \tag{2.17}$$

其中 M 是 $\mathcal{M}^{\lambda}_{\mu=0}$ 上全局函数量子化环的某个模。磁单极子模空间的量子化坐标环是相应 Yangian 的一个商，而 Yangian 在 M 上的作用由拉回定义。如果 M 是 $\mathsf{Y}(\mathfrak{gl}_r)$- 模的张量积，那么 $\widehat{S}(u)$ 会按照由余乘法诱导的 $\mathcal{M}^{\lambda}_{\mu=0}$ 上相应坐标图进行因子分解。

利用磁单极子模空间与仿射格拉斯曼切片的同一认定，以及后者与 BFN 风格的库仑分支 [BFN18]之间的同一认定，可以得到 S-矩阵的正则量子化。利用旗簇拟映射的计数几何，可以证明这种量子化与 S-矩阵的因子分解（即量子化的乘法态射，或真正的 Yangian 余乘法）相容，参见 [Tam24] 的第 4 节及即将发表的工作 [NT]。从直观上说，这可以视为一种 [AO17]风格的“稳定包络”构造。在 4 维 $\mathbb{R}^2 \times S^1$ 理论的 NS 极限下进行瞬子计数的背景中， $\mathcal{N} = 2$ 上的磁单极子模空间也有与之平行的构造，参见 [LN21], 对 [NP23]的讨论所作的量子化。

2.2.6 概述：仿射格拉斯曼切片的乘法态射

在秩 2 情形中，已解消单极子模空间的坐标图可以通过像上文那样相乘 2×2 矩阵，以非常“手工”的方式构造出来；亲自尝试构造一番是很有启发性的。这些坐标图将单极子模空间识别为类似“自旋链”的可积系统的完备相空间。Krylov 和 Perunov 已用仿射格拉斯曼流形语言证明，类似的构造在更一般的情形下也成立（不过始终针对有限维李代数的杨氏代数） [KP21]。

对于 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$，与[KW07] 中将狄拉克荷分解相对应的消解，可以用代数几何语言通过仿射格拉斯曼流形的卷积图来构造。 [KP21] 的作者考虑了 [BFN18]中引入的广义横截切片的此类部分解消。文中证明，当完全解消存在时（且当 μ “足够正”，这一条件类似于 $n > 2k$），它可以由仿射空间覆盖 $T^*\mathbb{A}^n$；这种覆盖与自然的环面作用相容，并且源自由 S矩阵的乘法所定义的态射的像（或许存在上文讨论过的三角歧义）。坐标图中出现的 $T^*\mathbb{A}^n$ 应视为由 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 在“足够小”的 λ 以及 μ下的乘积。在奇异仿射簇上的上述映射，是相应坐标图在爆缩下的像（此处所称的 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 在另一处称为 $\mathcal{W}_\mu^\lambda$，另见附录A中的进一步讨论）。

—

—

2.2.7 瞬子散射与双仿射格拉斯曼量

将 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 的代数几何描述朴素地推广到 $\mathfrak{gl}_r$ 被$\widehat{}$替换为 $\mathfrak{gl}_r$ 的情形，似乎会涉及 Kac-Moody 群的仿射格拉斯曼流形，在 [BF10]中称为双仿射格拉斯曼量。不幸的是，除了朴素层面之外，要对双仿射格拉斯曼量进行推理一直极具挑战性；然而在 [BF10]中，有力证据表明，瞬子模空间应当扮演其横截切片的角色（从库仑分支的角度也能看出这一点）。

正如磁单极子 S-矩阵按照 [BFN18], [KP21], 的术语可视为仿射格拉斯曼切片的“矩阵描述”一样，下文将引入的瞬子散射矩阵也可视为双仿射格拉斯曼切片的“矩阵描述”。但需要注意的是，必须使用无限维矩阵；这$\widehat{}$大致是因为， $\mathfrak{gl}_r$ 的基本表示的对应物是 $\mathfrak{gl}_r$的福克模（等级为 $k = 1$）。所寻求的“瞬子 S-矩阵”必须是移位变体 -矩阵$\widehat{}$的半经典形式，该变体属于$\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_r)$，但它缺少可用作辅助空间的有限维模。

从这一视角来看，显而易见，仅凭直觉猜测不足以构造这样的矩阵描述：瞬子模空间的坐标环与$\widehat{}$单极子模空间的坐标环（在给定荷下）规模相同，但 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_r)$ 远大于 $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_r)$，因此将 S-矩阵系数赋值给函数，必须经过一个大得多的商。下文将结合几何学与场论推理来绕开这一问题。

3 瞬子散射：第一种方法

本节将通过直接推广上一节中关于场论的讨论，提出一种自下而上的方法，用于定义和计算瞬子散射矩阵。在本文后续部分，我们将借助弦理论，自上而下地探讨这一问题，并解释这一构造与文献中其他构造的关系。第 3.1 节旨在阐释动机，主要面向物理学家，而第 3.2 节则给出精确的数学陈述。

3.1 动机与初步定义

3.1.1 瞬子与磁单极子

首先，让我们简要回顾一下将瞬子视为磁单极子的 S^1-提升的确切含义。现在，我们研究具有酉联络 A的秩为 r 的向量丛 $E \to \mathbb{R}^3 \times S^1$，并假设 $\mathbb{R}^3 \times S^1$上带有标准平坦度量。在四维情形下，Hodge 星算子满足 $\star^2 = 1$，并保持空间 $\Omega^2(\mathbb{R}^3 \times S^1, \mathrm{End}(E))$，因此我们可以施加方程

$$F_A^+ = 0 \tag{3.1}$$

关于 A 的曲率，也就是说 $F_A = -\star F_A$。我们用 (x^1, x^2, x^3, θ) 表示 $\mathbb{R}^3 \times S^1$ 上的坐标。在 $\mathbb{R}^3$ 中，当 $|x| \to \infty$ 时足够快速地趋近于 S^1 上平坦联络的 $F_A^+ = 0$ 解，称为 $\mathbb{R}^3 \times S^1$ 上的瞬子（定义渐近边界条件时，也要像单极子情形那样，令狄拉克磁通穿过 $\mathbb{R}^3$ 的渐近 S^2 边界）。

单极子方程的光滑解（即按上一节的记号为 $\lambda = 0$）恰好是 $\mathbb{R}^3 \times S^1$ 上 S^1-不变的瞬子。为说明这一点，将一个 S^1-不变联络用坐标写成 $A = A_i(x)dx^i + A_\theta(x)d\theta$，并注意到若我们将 $\phi(x) = A_\theta(x)$ 识别起来，那么 $F_A^+ = 0$ 按分量可化为 $F_{ij} + \epsilon_{ijk}D_k\phi = 0$。上一节中 $\phi(x)$ 的渐近特征值 $\phi_1, \ldots\ldots, \phi_r$ 指定了 S^1 上的渐近平坦联络。

这种对应关系有一个纳入狄拉克奇点的版本，这基本上归功于 Kronheimer [Kro85]，它将在第5.3节发挥作用，但本节中我们不需要用到它。

3.1.2 自由费米子

我们的目标是定义量 $S(u)$ 的瞬子类比。为有效地做到这一点，先得到 $S(u)$ 的另一种公式会很有帮助，因为这种公式更容易推广。

获得这种描述的基本思路如下。根据定义，$S(u)$ 是磁单极子构型背景下 $A_y + i\phi$ 的威尔逊线的经典值。威尔逊线可以解释为重带电测试粒子的世界线；在实际处理中，这通过如下可能性实现：将威尔逊线写成沿线缺陷本身支撑的某些辅助自由度的路径积分。正是这种威尔逊线的路径积分描述，可以直接推广到瞬子。

要将规范群的某个表示中的威尔逊线写成对辅助自由度的路径积分，我们希望这些自由度量子化后得到的希尔伯特空间就是该表示 R 本身。一般来说，实现这一点的一种规范做法是使用 Borel-Weil-Bott 定理（例如参见 R 第 1218–1219 页 [Del+99]），不过只要所选自由度的希尔伯特空间为 R 即可（例如参见 [Ton18]的第 2.1.3 节）。S-矩阵是基本表示中的威尔逊线 $\mathbb{C}^r$，属于 $U(r)$；当然，改为考察外代数中的威尔逊线并不会使我们丢失或获得任何信息

$$R = \Lambda^\bullet \mathbb{C}^r = \bigoplus_{k=0}^{r} \Lambda^k(\mathbb{C}^r). \tag{3.2}$$

现在 R 自然地通过对一维系统进行正则量子化而产生。该系统由 r 个自由费米子组成，以坐标 y为参数，其拉格朗日量为

$$L = \sum_{\alpha=1}^{r} \widetilde{\psi}_\alpha(y)\partial_y\psi^\alpha(y) \tag{3.3}$$

以及正则反对易关系 $\left\{\psi^\alpha,\ \widetilde{\psi}_\beta\right\} = \delta^\alpha{}_\beta$。这个作用量对应于~哈密顿量为零的费米子。此作用量具有一个 $U(r)$ 对称性，它在 ψ，ψ 上的作用为~ ~$\psi \to U\psi$, $\psi \to \psi U^\dagger$; 该对称性在希尔伯特空间上的作用产生映射 $\rho\colon U(r) \hookrightarrow U(\Lambda^\bullet\mathbb{C}^r)$。在无穷小层面上，它将李代数~ ~（属于 $U(r)$）中的矩阵 $A^\alpha{}_\beta$映射为算子 $\psi_\alpha A^\alpha{}_\beta\psi^\beta = \psi A\psi$。于是，上述取值于 R 的磁单极子 S-矩阵可用费米子产生与湮灭算符表示为

$$\rho(S(u)) = \mathcal{P}\exp\Big(-\int_{-\infty}^{+\infty} dy\widetilde{\psi}(A_y(y,u,\bar{u}) + i\phi(y,u,\bar{u})\psi\Big). \tag{3.4}$$

将 y 解释为“时间”，在每个固定的 u 处，这就是一个含时哈密顿量 $H = \psi(A_y+i\phi)\psi$ 的~（欧几里得）时间演化算符，因此，根据教科书中的论证，我们可以得到其矩阵元的泛函积分表达式，该表达式涉及对费米子系统进行规范化后的版本：

$$\langle\alpha|\,\rho(S(u))\,|\beta\rangle = \int_{\substack{\psi(-\infty)=\beta\\ \psi(+\infty)=\alpha}} D\widetilde{\psi}(y)D\psi(y)\exp\Big(-\int_{-\infty}^{+\infty} dy\widetilde{\psi}(y)(\partial_y+A_y(y,u,\bar{u})+i\phi(y,u,\bar{u}))\psi(y)\Big). \tag{3.5}$$

在 $y \to \pm\infty$ 处的边界条件必须按照态 α 和β来选取，一如往常。正如附录 A中所讨论的，为了使矩阵元成为 u的真正全纯函数，边界条件必须在 u-平面上根据进入单极子解的 D_u 算子而变化。为简洁起见，这里略去这一点。

费米子描述虽然很好，但可能显得有些武断。第4 节中的弦理论论证为这一选择提供了更深入的依据；目前我们将直接使用费米子，并推导其结果。

3.1.3 散射矩阵：路径积分描述

根据上述考量，在泛函积分层面上，很容易写出瞬子散射矩阵的定义。为了将 $\mathbb{R}^3$ 上的磁单极子推广到 $\mathbb{R}^3 \times S^1$上的瞬子，我们应作如下替换

$$\partial_y + A_y + i\phi \to \partial_y + i\partial_\theta + A_y + iA_\theta \tag{3.6}$$

并将费米子作用量推广为自然的二维类比：费米子场~变为坐标 $\psi(y,\theta)$、 $\psi(y,\theta)$ 的函数，其中坐标为 θ，于是我们得到路径积分

$$\int D\widetilde{\psi}D\psi\exp\Big(-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} dyd\theta\widetilde{\psi}(\partial_y + i\partial_\theta + A_y + iA_\theta)\psi\Big) \tag{3.7}$$

这里默认 A_y 和 A_θ 均在 $u = \text{const}$ 处取值。若引入 $\mathbb{C}^\times$ 值坐标 $z = e^{y+i\theta}$，则上述作用量化为规范手征费米子的标准作用量

$$S = \int_{\mathbb{C}_u^\times} \widetilde{\psi} \overline{D}_z \psi \tag{3.8}$$

并且我们有坐标 $(u,\ z) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{R}^3\times S^1$；$\mathbb{C}_u^\times$ 表示一个 u为常数的截面。于是，瞬子散射矩阵的一个矩阵元可表示为泛函行列式

$$\det \overline{D}_z \tag{3.9}$$

而通过在 $z \to 0$ 和 $z \to \infty$处选择边界条件，即可确定得到的是哪个矩阵元。

注意，如果我们在单极子情形中改为通过对取值于旗簇的玻色自由度进行泛函积分来表示威尔逊线（如 [Del+99]，第 1218–1219 页所述），那么我们会发现，对于二维理论，得到的是一个等级为 $k = 1$的规范手征WZW模型。手征WZW模型与多分量自由费米子之间的关系，就是 [Wit84]所述的非阿贝尔玻色化。

本节其余部分将说明如何使这个泛函行列式不再那么形式化，并为瞬子散射矩阵给出精确的定义和公式。之所以能够做到这一点，并使该理论相较于其单极子类比物具有相当多的额外结构，是因为相关的二维自由费米子理论是全纯的。一维中不存在这一现象，因为费米子仅依赖于 y。

3.1.4 另外两种变形

为了简化上一节概述的方案，对问题再作两种变形会比较方便。首先，我们不再考虑 $\mathbb{R}^3 \times S^1 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$上的瞬子，而是考虑 $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$上的瞬子。这样选择是出于技术上的便利，最终会发现它相对而言并不重要；由于二维手征费米子具有底层共形对称性，只要正确地设定问题，在 $\mathbb{C}$与 $\mathbb{C}^\times$之间来回转换并不困难。 $\mathbb{C}^2$ 上的坐标记为(z, w)；w坐标在本文前几节中曾记作 u。对于 $T^*\mathbb{C}$上的问题，我们将选择支撑在由 $w = 0$给出的曲线上的费米子。原则上，它们可以支撑在任意全纯曲线上；在第5 节将考虑另一种选择，此前会在第4节阐述这一构造的动机。

第二种变形要剧烈得多：我们不再研究定义在 $\mathbb{C}^2$上的瞬子，而是研究定义在非交换非交换余切丛上的瞬子$T^*_\hbar\mathbb{C}$ [NS98]。在此深入描述非交换瞬子会让我们离题太远，入门介绍可参见[Nek01] ；其基本内容如下。非交换 $\mathbb{R}^4$ 可通过写成 $z = x^1 + ix^2,\ w = x^3 + ix^4$ 来描述，并规定非交换 $\mathbb{R}^4$ 上的光滑函数代数是由 x^i 生成的（适当完备化后的代数），且满足 $[x^i, x^j] = i\theta^{ij}$，其中 θ^{ij} 与本文的参数 $\hbar$及其复共轭之间的关系由 $[w, z] = \hbar$给出。

非交换 $\mathbb{R}^4$ 上存在向量丛、联络和曲率理论，因此瞬子方程 $F_A^+ = 0$ 是有意义的，我们可以研究它们的解。只

正如我们可以用一个函数组来描述普通瞬子 $A_i(x)$，它满足由 $A = A_i(x)dx^i$ 的曲率反自对偶性所决定的一阶非线性偏微分方程；我们也可以将非交换瞬子视为满足形式上相同方程的解，不过方程以算子形式表示，即通过 x^i 求解 $[x^i, x^j] = i\theta^{ij}$； [NS98], [Nek01] 将它们写成产生湮灭算子代数在福克模上的算子，该代数由x^i生成。这些算子的 Wick 符号满足通常瞬子方程的一种非局部变形，其中所有乘积都被替换为依赖于 θ^{ij}的 Moyal 乘积。

NS 的洞见在于 [NS98]：尽管非交换形变相当剧烈且具有非局域性，ADHM 构造 [Ati+78] 仍只需经过最小的改动即可适用于瞬子。作为一个复流形，秩为$\widetilde{\ }$的非交换瞬子模空间，其荷为 r，是代数簇 n $M(n, r)$，即引言中所述的代数簇；非交换性的唯一影响是移动矩映射的等级。

描述费米子场与非交换瞬子联络的耦合，原则上是直接的。这是因为 $A_{\bar{z}}(z, w, \bar{z}, \bar{w})$ 现在是满足 $[w, z] = \hbar$ 的算子函数。由作用量刻画了支撑在曲线 $w = 0$上的手征费米子与非交换瞬子之间的正确耦合：

$$S = \int_{\mathbb{C}} \widetilde{\psi}\overline{D}_z\psi = \int d^2z\widetilde{\psi}(z, \bar{z})\left(\overline{\partial}_z + A_{\bar{z}}(z, w, \bar{z}, \bar{w})\Big|_{w=\hbar\partial_z}\right)\psi(z, \bar{z}). \tag{3.10}$$

非常具体地说，可以将其视为二维中的常规自由费米子系统，只是其动能项具有非标准且非局域的形式。泛函行列式 $\det D_z$ 原则上至少是一个可以在解析框架中计算的对象，不过本文将不对此进行研究。

相反，我们将通过更具代数性的方法确定由此得到的费米子路径积分。我们的结果不依赖于进行任何非交换微分几何；只需将瞬子丛 $\mathcal{E}$ 理解为 $T^*_\hbar\mathbb{C}$上的一个“全纯”向量丛，即一个右 $\mathcal{D}_\hbar$-模。对于 $\det D_z$，在选定某种归一化的情况下，我们将得到关于 ADHM 数据 (B_1、 B_2、 I、 J) 的全纯函数的完全显式公式。如果选择在 $z \to \infty$ 处施加标准边界条件，即要求费米子以足够快的速度衰减，那么公式将异常简单：

$$\det \overline{D}_z = \det B_2. \tag{3.11}$$

这可以被视为 ADHM/Nahm 变换中“互反性”的一个实例，参见[CG84]。

3.2 散射矩阵的确定

现在我们终于理解了相关设定，可以精确定义并确定瞬子散射矩阵。我们的目标是理解一般非交换瞬子背景下柯西-黎曼算子的泛函行列式 行列式 D_z，同时考察边界条件的选择在 $z \to \infty$ 处变化时的情形。乍看之下，这似乎相当棘手，但幸运的是，已有一套严谨的代数几何理论来处理这类行列式，其基础是研究某些无限维格拉斯曼流形上的行列式线丛。这是数学物理中的经典课题，我们将在附录 B 中回顾。

3.2.1 行列式与无限维格拉斯曼流形

假设你熟悉附录 B 中的讨论，定义并计算 $\det D_z$ 的设定如下。我们研究线性方程 $D_z\psi = 0$的解所构成的向量空间 $\mathbb{W}$，并考虑它们的 $z \to \infty$ 展开，从而得到一个嵌入 $\mathbb{W} \subset \mathbb{C}^r((z^{-1})) = \mathcal{H}$;若算子 D_z 合理，该嵌入便定义了 Sato的Grassmann流形 Gr($\mathcal{H}$)[1] 中的一个点。该点的 Plücker坐标由费子福克空间 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$的射影化中的一个态 $|\mathbb{W}\rangle$ 给出。正如 [Wit88] 所阐述、并在附录 B 中回顾的那样，这个态 $|\mathbb{W}\rangle$应被视为由手征费米子在一个只有单个 S^1 边界分支的曲面上的路径积分所制备的态，这与量子场论的一般原理相符。

$z \to \infty$ 处的边界条件选择由对偶态 $\langle\alpha|$标记，而给定边界条件下的数值行列式就是重叠 $\langle\alpha|\mathbb{W}\rangle$（即 Plücker坐标的某些线性组合）；因此，要理解行列式，只需描述态 $|\mathbb{W}\rangle$。也许令人惊讶的是，即使对于由非交换瞬子产生的复杂 D_z 算子，空间 $\mathbb{W}$ 和映射 $\mathbb{W} \to \mathcal{H}$ 仍然可以得到相当明确的描述，而这正是能够描述 $\det D_z$的关键洞见。

3.2.2 经典解的向量丛 $\mathbb{W}$

根据上述讨论，只要我们描述了 $D_z\psi = 0$ 的解空间 $\mathbb{W}$（以及一个足够好的映射 $\mathbb{W} \hookrightarrow \mathcal{H}$，我们稍后会回到这一点），行列式 $\det D_z$ 就有了良好定义。在我们的情形中，$\mathbb{W}$作为向量丛$\widetilde{\ }$（无限秩）的纤维，在瞬子模空间 M（r）上变化；依照惯例，我们也将其记为 $\mathbb{W}$。换言之，下面给出的构造应理解为 M（r）上的普适$\widetilde{\ }$族；我们不会在任何点取纤维。

在通常的（交换）复几何中，方程 $D_z\psi = 0$ 的含义是清楚的。瞬子丛 $\mathcal{E}$ 特别是 $T^*\mathbb{C}$上的全纯丛，因此其截面层（我们仍记作 $\mathcal{E}$）是一个局部自由的 $\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}}$-模层。方程 $\not{D}_z\psi = 0$ 仅表示 ψ 是向量丛 $\mathcal{E}\big|_{w=0}$ 的限制上的全纯截面（回想一下，ψ 支撑在全纯曲线 $\{w = 0\} \subset T^*\mathbb{C}$上），即 $\psi \in H^0(\mathbb{C},\ \mathcal{E}\big|_{w=0})$。

向量丛 $\mathcal{E}\big|_{w=0}$ 的限制可用张量积 $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 代数地描述，其中 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 表示零截面 $\mathbb{C} \subset T^*\mathbb{C}$的结构层；由于 $\mathbb{C}$ 是仿射的，截面空间 $H^0(\mathbb{C},\ \mathcal{E}\big|_{w=0})$就是 $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$底层的向量空间。在 $T^*_\hbar\mathbb{C}$上的非交换情形中，$\mathcal{E}$ 被视为一个右 $\mathcal{D}_\hbar$-模。我们有左$\mathcal{D}_\hbar$ 模

$$\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{\mathbb{C}} := \mathcal{D}_\hbar/\mathcal{D}_\hbar \cdot w \tag{3.12}$$

并且显然 我们可以将以下内容作为代数几何用途的定义 :

$$\mathbb{W} := \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_\hbar} \widehat{\mathcal{O}}^\ell_{\mathbb{C}}. \tag{3.13}$$

这不过是交换情形下解空间$D_z\psi = 0$ 的张量积描述的显然类比；这里的张量积取在 $\mathcal{D}_\hbar$ 上，并将其视为双模

[1]这个格拉斯曼流形在附录 *（$\mathcal{H}$）中被称为 Gr。附录 B 中也讨论了 B 中的情形，讨论针对的是 $r = 1$，但高秩推广是直接的。

。有趣的是，可以仅用右 $\mathcal{D}_\hbar$模来对 $\mathbb{W}$ 作另一种描述。当然，右 $\mathcal{D}_\hbar$ 模版本的 $\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{\mathbb{C}}$ 有一个自由分解

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_\hbar \xrightarrow{w\cdot -} \mathcal{D}_\hbar \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

其中第一个非零映射是由 w 给出的左乘。利用这个自由分解计算 $\mathbf{Ext}^\bullet$，我们得到以下初等观察：

$$\mathbb{W} \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}}, \mathcal{E}). \tag{3.15}$$

在这种描述中，显然 $\mathbb{W}$ 确实是 $M(r)$ 上的一个相当自然的向量丛（命题 C.4证明了这个 $\mathbf{Ext}^\bullet$ 集中在次数 1）。熟悉拓扑弦理论 B模型的读者或许会认出，$\mathbb{W}$ 在其中有着作为开弦态空间的自然诠释；这并非巧合，正如第 4节将要说明的，这也是非交换规范理论与开弦场论之间普遍联系的一部分。

3.2.3 $\mathbb{W}$ 作为到 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 的映射

现在我们要证明，$\mathbb{W}$ 给出了一个从瞬子模空间到佐藤的格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$（其子空间属于）的映射

$$\mathcal{H} = W((z^{-1})). \tag{3.16}$$

W 是 ADHM 描述 $M(r)$ 中的 r 维框架空间。为证明这一点，只需构造一个向量丛嵌入

$$\mathbb{W} \hookrightarrow \mathcal{W}((z^{-1})) \tag{3.17}$$

并证明诱导投影 $\mathbb{W} \to \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)}$ 具有有限秩核和余核（其中 $\mathcal{H}_+$ 表示 $W[z]$）。对于跟随微分几何/规范理论描述的读者而言，$\mathbb{W}$ 产生了一个到 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$ 的映射本质上是狄拉克算子的椭圆性的一种代数体现 D_z（在非交换情形中，这一点颇为非平凡），参见 [Wit88]。

为了写出该嵌入，我们调用命题 C.4，它直接分析了 $\mathcal{E}$的 ADHM 描述。它将 $\mathbb{W} \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}}, \mathcal{E})$ 描述为复形的中间上同调

$$\mathcal{V}[z] \xrightarrow{\alpha} \mathcal{V}[z] \oplus \mathcal{V}[z] \oplus \mathcal{W}[z] \xrightarrow{\beta} \mathcal{V}[z] \tag{3.18}$$

其中的映射（ADHM 矩阵被解释为相应的典范截面）

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} B_1 - z \\ B_2 - \hbar\partial_z \\ J \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} -B_2 + \hbar\partial_z & B_1 - z & I \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

那么，将 $\mathbb{W}$ 的任意局部截面记为 $\ker\beta/\mathrm{im}\,\alpha$ 中的三元组 $(\psi_+(z)\ \psi_-(z)\ \xi(z))$，显然，基本上只有一个定义良好的自然映射 $\mathbb{W}\to\mathcal{W}((z^{-1}))$：

$$(\psi_+(z),\psi_-(z),\xi(z))\mapsto f(z)=J\frac{1}{z-B_1}\psi_+(z)+\xi(z)=\sum_{n\geq 0}JB_1^n\psi_+(z)z^{-n-1}+\xi(z). \quad (3.20)$$

命题 3.1。 映射 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}},\mathcal{E})\simeq\mathbb{W}\to\mathcal{W}((z^{-1}))$ 写作 (3.20) 是向量丛的嵌入；此外，我们还有（由命题 *C.5*给出的）同构

$$\begin{aligned}\ker(\mathbb{W}\to\mathcal{H}_+\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{M(r)}})&\simeq\ker(B_2)\\ \mathrm{coker}(\mathbb{W}\to\mathcal{H}_+\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{M(r)}})&\simeq\mathrm{coker}(B_2)\end{aligned} \quad (3.21)$$

$\widetilde{\ }$在 $M(r)$ 上的层，其中 $B_2:\ \mathcal{V}\to\mathcal{V}$ 是与 ***ADHM*** 矩阵对应的典范截面。

$\widetilde{\ }$注意，该命题的推论是 $\mathbb{W}$ 定义了一个从 $M(n,r)$ 到 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$的指标为零的连通分支的映射。证明需要用到附录C中的若干技术结果。

特别地，我们需要命题 C.5，粗略地说，该命题指出，我们可以通过令 α 保持 $\psi_+=$ 为常数，为模掉 $\mathrm{im}\psi_-(z)$ 选取一个规范固定条件；在这样的规范下，$\beta(\psi_+,\psi_-(z)\ \xi(z))=0$由方程唯一确定。

证明。 证明将分为几个步骤。在全文中，我们将使用 $\mathbb{W}$ 由命题 C.5所给出的描述。在该描述中，映射 $\mathbb{W}\to\mathcal{W}((z^{-1}))$ 是（记号同命题C.5）

$$(\xi(z),\psi_+)\mapsto f(z)=J\frac{1}{z-B_1}\psi_++\xi(z)=\sum_{n\geq 0}JB_1^n\psi_+z^{-n-1}+\xi(z). \quad (3.22)$$

为了证明该映射是向量丛嵌入，我们需要证明其在每个纤维上诱导的映射是单射的。

为说明单射性，注意到 $f(z)=0$当且仅当 $\xi(z)=0$并且对所有$n\geq 0$都有 $JB_1^n\psi_+=0$。由于我们有 $\xi(B_1)I=B_2\psi_+$，$\xi(z)=0$ 蕴含 $B_2\psi_+=0$。

令 $S=$张成$(B_1^n\psi_+)_{n\geq 0}\subseteq V$；显然 $S\subseteq$核J且 B_1保持 S。 B_2也保持S，因为

$$\begin{aligned}B_2B_1^n\psi_+&=\sum_{k=0}^{n-1}B_1^k[B_2,B_1]B_1^{n-k-1}\psi_++B_1^nB_2\psi_+\\&=-\hbar nB_1^{n-1}\psi_++\sum_{k=0}^{n-1}B_1^kIJB_1^{n-k-1}\psi_+=-\hbar nB_1^{n-1}\psi_+.\end{aligned} \quad (3.23)$$

由引理 C.1 我们必有 $S=0$，因此 $\psi_+=0$ 从而证明了单射性。

在命题 C.5 的描述中，映射 $\mathbb{W}\to\mathcal{H}_+$ 是 $(\xi(z)\ \psi_+)\ \mapsto\xi(z)$。因此$\ker(\mathbb{W}\to\mathcal{W}[z])\simeq\ker(B_2)$，因为对 $(\xi(z)\ \psi_+)$ 必须满足 $\xi(B_1)I=B_2\psi_+$。

最后，注意到我们有一个由赋值诱导的层态射 $\mathbf{coker}(\mathbb{W}\to\mathcal{W}[z])\to\mathbf{coker}(B_2)$

$$W[z]\ni p(z)\mapsto p(B_1)I\in\mathrm{coker}(B_2),$$

并且由命题 C.5诱导的态射是良定义且单射的。为了证明满射性，应用引理 C.2 可得任意 $\chi \in$余核(B_2) 都可以写成如下形式（记号同引理 C.2）

$$\chi = \sum_{n,i} c_{n,i} B_1^n I(e_i) = p(B_1) I \tag{3.24}$$

对于 $p(z) = \sum_{n,\ i} c_{n,\ i} e_i z^n$。

□

将命题 3.1 中构造的态射记为

$$F : \widetilde{M}(r) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H}). \tag{3.25}$$

与普吕克嵌入复合可得映射

$$\widetilde{M}(r) \to \mathbb{P}(\mathcal{F}) \tag{3.26}$$

记为 $|\mathbb{W}\rangle$。$|\mathbb{W}\rangle$ 在 $\mathcal{F}$ 的标准基下的分量是 $\mathbb{W}$的普吕克坐标，并作为线丛 $F^*\mathrm{DET}^*$ 在瞬子模空间上的截面变化，其中 $\mathrm{DET}^* \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 是典范行列式线丛。

命题 3.2。$|\mathbb{W}\rangle$ 提升为映射 $\widetilde{M}(r) \to \mathcal{F}$，并且存在唯一满足$\langle 0|\mathbb{W}\rangle = \det(B_2)$的提升选择。

证明。根据附录 B 中的定义，$\langle 0|\mathbb{W}\rangle$ 是 $F^*\mathrm{DET}^*$ 的一个截面，并且恰好在 $\ker(\mathbb{W} \to \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)}) \neq 0$处消失。根据命题 3.1，这正是整体函数 $\det(B_2)$ 的除子，这表明 $F^*\mathrm{DET}^*$ 作为 $M(r)$ 上的线丛是平凡的，因此 $|\mathbb{W}\rangle$提升为到 $\mathcal{F}$的映射。两种提升的差异是在 $M(r)$ 上乘以处处不为零的函数 $\widetilde{\ }$；显然，我们可以选择 $|\mathbb{W}\rangle$ 的归一化，使得 $\langle 0|\mathbb{W}\rangle = \det(B_2)$。

□

映射 F 应被视为将瞬子赋予其散射数据；“散射数据”是解在 $z \to \infty$处可能具有的渐近行为，其中解满足 $D_z\psi = 0$。命题 3.2 表达的正是一种共振效应：系数 $\langle 0|\mathbb{W}\rangle$恰在存在一个满足 $D_z\psi = 0$ 且在 0 处趋于 $z \longrightarrow \infty$的解时才会消失，也就是说，存在一个束缚态波函数。不出所料，这种情况发生在 $\det B_2 = 0$，因为B_2 的特征值对应于非交换瞬子在 w方向上的位置，而我们的费米子支撑在曲线 $\{w = 0\}$上。

3.2.4 $|\mathbb{W}\rangle$ 的 τ-函数

上一节中，我们给出了几何定义：对于任意非交换瞬子，将状态 $|\mathbb{W}\rangle$ 赋予相应的费米子福克空间。本节和下一节将给出该状态的两种代数刻画。为简单起见，我们将$\widetilde{\ }$限制在秩 $r = 1$的情形；此时 $M(n,\ 1) = \mathrm{Hilb}_n(T^*_{\hbar}\mathbb{C})$ 是非交换平面上的点的Hilbert概形。

正如附录B中所回顾的，任意状态 $|\mathbb{W}\rangle$ 若能表示 $\mathcal{H}$ 中某个子空间的 Plücker坐标，则由其 τ-函数刻画。该函数是一个由无穷多个变量定义的函数：

$$\tau_{\mathbb{W}}(t) := \langle 0|\, g(t)\, |\mathbb{W}\rangle \tag{3.27}$$

with

$$g(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_k\right) \tag{3.28}$$

并采用附录 B 中的记号；除有限多个变量外，其余变量 t_k 均为零。 $g(t)$通过普吕克嵌入定义了 GL_1 的环群（半群） Γ_+ 的作用（在 [SW85]中称为此名称），作用于 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$。此外，DET^* 自然地成为一个 Γ_+-等变线丛。将上面的映射 F 与由 $g(t)$给出的作用映射复合，我们得到一个从 $\sim$ $\sim M(1) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H})$的新映射，并将相应的、定义在 $M(1)$ 上的向量丛记为 $g(t)\cdot\mathbb{W}$。根据构造， $g(t)\,|\mathbb{W}\rangle = |g(t)\cdot\mathbb{W}\rangle$。

命题 3.3。 对于 $|\mathbb{W}\rangle$ 由上文命题 *3.1* 和*3.2* 构造得到的，有

$$\langle 0|\, g(t)\, |\mathbb{W}\rangle = \det\left(B_2 - \hbar \sum_{n=1}^{\infty} n t_n B_1^{n-1}\right). \tag{3.29}$$

证明。 根据附录$(\mathcal{H})$ B中环群在 Gr 上的作用定义，向量$\sim$向量丛 $g(t)\cdot\mathbb{W}$ 在 $M(1)$ 上由下式给出

$$g(t)\cdot\mathbb{W} \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_C(t), \mathcal{E}) \tag{3.30}$$

其中

$$\widehat{\mathcal{O}}_C(t) = \mathcal{D}_\hbar / P(z,w;t)\mathcal{D}_\hbar \tag{3.31}$$

且 $P(z,\ w;\ t) = w - \hbar\sum_{n=1}^{\infty} n t_n z^{n-1}$。仿照命题 C.5的证明，我们得到一个向量丛嵌入

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_C(t), \mathcal{E}) \hookrightarrow (\mathcal{O}_{\widetilde{M(1)}} \otimes \mathbb{C}[z]) \oplus \mathcal{V} \tag{3.32}$$

作为满足以下条件的$(\xi(z)\ \psi_+)$ 的轨迹： $\xi(B_1)I = (B_2 - \hbar\sum_{n=1}^{\infty} n t_n B_1^{n-1})\psi_+$。仿照命题 3.2的证明可知， $\langle 0|\, g(t)\, |\mathbb{W}\rangle = \langle 0|g(t)\cdot\mathbb{W}\rangle$ 与$\det\left(B_2 - \hbar\sum_{n=1}^{\infty} n t_n B_1^{n-1}\right)$成正比。根据命题 3.2 中的归一化，比例因子为 1。 □

本文主要关注几何方法，但我们在附录 τC 中给出了更具组合性的计算，有些读者或许会更喜欢这种方法。这个τ函数早在 Wilson 的一篇里程碑式论文中便已出现 [Wil98]，另见 [BGK02]、[BN03]，不过本文的视角相当不同。

环群在 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 上的作用对应于 KP 层级的流，参见例如[SW85]。上述证明的核心思想是，KP 流可以解释为对曲线 C 的几何变形，费米子支撑在这条曲线上；这是 [Aga+05]、[Dij+08]、 [DHS09]的一个核心洞见。

3.2.5 因子分解与 *Miura* 算子

上述几何构造通过映射 F，或等价地通过费米子福克

空间中的态族，刻画了非交换瞬子的散射数据。与单极子散射矩阵相比，这种描述可能显得相当抽象；现在我们将展示，事实上，态 $|\mathbb{W}\rangle$ 具有非常明确的表示论描述，并且与其单极子类比物的许多特征相平行。

核心思想是通过自由费米子共形场论的 Ward恒等式来刻画态 $|\mathbb{W}\rangle$，相关内容将在引理 B.3 中回顾。从表示论的角度看，这意味着我们利用了如下事实： $|\mathbb{W}\rangle$是不可约Clifford模中的一个向量，被极大各向同性子代数湮灭；这一性质将其确定到一个标量倍数。

为建立这一框架，回顾一些预备知识将会很有帮助。瞬子模空间具有 $\widetilde{\ }$一个特定开集 $U \subset M(n,\ 1)$，在该开集上

$$B_1 = \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n) \tag{3.33}$$

其中 $z_i \neq z_j$。不妨设 $|z_1| < |z_2| < \cdots < |z_n|$。令 $p_i := (B_2)_{ii}$，即 B_2 在 B_1的特征基下的对角分量。于是，由 $[B_1, B_2] + IJ = \hbar$ 可知，我们可以设 $I = (1,\ \ldots,\ 1)^T$、 $J = \hbar(1,\ \ldots,\ 1)$，并且

$$(B_2)_{ij} = p_i\delta_{ij} - \frac{\hbar}{z_i - z_j}(1 - \delta_{ij}) \tag{3.34}$$

其中， δ_{ij} 是 Kronecker δ符号。在这个开子集上，辛形式 $\omega_{\mathbb{C}}$限制为

$$\sum_i dp_i \wedge dz_i. \tag{3.35}$$

$\widetilde{\ }$包含映射 $\iota\colon U \hookrightarrow M(n,\ 1)$ 通过拉回诱导出一个环嵌入

$$\iota^* : H^0(\widetilde{M}(n,1), \mathcal{O}_{\widetilde{M}(n,1)}) \hookrightarrow \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n, p_1, \ldots, p_n, (z_i - z_j)^{-1}]$$

若赋予 $(z_i,\ p_i)$ 泊松括号 $\{p_i, z_j\} = \delta_{ij}$，则该映射是泊松映射。

引理 3.4. 在 U 上， $\iota^*\mathbb{W} \hookrightarrow \mathcal{O}_U \otimes \mathbb{C}((z^{-1}))$ 是 $z \to \infty$ 的子向量丛，其元素是展开后至多在 $z = z_i$ 处有简单极点的有理函数，并满足

$$\oint_{\gamma_i} \frac{dz}{2\pi i}\Big(\frac{\hbar}{z - z_i} - p_i\Big) f(z) = 0 \tag{3.36}$$

其中， γ_i 是一个环绕 z_i的小环路。

证明。 将（3.20）写成 B_1 的特征基形式；利用上文给出的 B_2 的显式公式，留数条件等价于（C.16）。 □

$\widetilde{\ }$回顾附录B 中，向量丛 $\mathbb{W}$ 具有一个对偶向量丛 $\mathbb{W}$，它由留数配对$\widetilde{\ }$在 $\mathbb{C}((z^{-1}))$诱导而来。 $\iota^*\mathbb{W} \hookrightarrow \mathcal{O}_U \otimes \mathbb{C}((z^{-1}))$ 被刻画为 $z \to \infty$ 的子向量丛，其元素是具有简单极点的有理函数的展开，极点位于 $z = z_i$，并满足相同的留数条件，只是 $p_i \mapsto -p_i$。

最后，回顾附录B 中与 $\psi(z)$对偶的手征玻色子， $\widetilde{\psi}(z)$ 在玻色化下：

$$\partial\varphi(z) =: \psi(z)\widetilde{\psi}(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}. \tag{3.37}$$

现在我们准备陈述我们的主要结果之一。令 $\mathcal{F}_0$ 表示费米子福克空间 $\mathcal{F}$ 的电荷零分量；我们回顾一下，它同构于海森堡代数上的一个（完备化的）福克模，该代数由 α_n 生成，其中 α_0 的作用为零。

定理 3.5。令 $|\mathbb{W}\rangle$ 表示从 $M(1) \to \mathcal{F}_0$ 中构造的态射，见命题3.1 和 3.2。在开集 U 上，它分解为

$$\iota^* |\mathbb{W}\rangle = (p_n - \hbar\partial\varphi(z_n)) \dots (p_1 - \hbar\partial\varphi(z_1)) |0\rangle \tag{3.38}$$

其中 $|0\rangle \in \mathcal{F}_0$ 是真空。

这里的“因子”指的是作为在福克模中作用的矩阵乘积的因子。这应直接与单极子模空间的特选坐标图中单极子散射矩阵的因子分解（2.14）相比较。

证明。思路是利用引理 3.4 证明算子 Q_f，Q_g 来自引理B.3会湮灭（3.38）右端；这表明左右两端必定相差一个归一化因子，我们再利用命题3.2确定该因子。

确实根据共形场论中的标准论证，我们有

$$\begin{aligned} Q_f(\text{RHS of (3.38)}) &= \oint_{\gamma_\infty} \frac{dz}{2\pi i} f(z)\psi(z)(p_n - \hbar\partial\varphi(z_n)) \dots (p_1 - \hbar\partial\varphi(z_1)) |0\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (p_n - \hbar\partial\varphi(z_n)) \cdots \oint_{\gamma_i} \frac{dz}{2\pi i} f(z)\psi(z)(p_i - \hbar\partial\varphi(z_i)) \dots (p_1 - \hbar\partial\varphi(z_1)) |0\rangle . \end{aligned} \tag{3.39}$$

现在利用算符乘积展开

$$\psi(z)\widetilde{\psi}(w) = \frac{1}{z-w} + \text{reg} \tag{3.40}$$

我们得到

$$\psi(z)(p_i - \hbar : \psi(z_i)\widetilde{\psi}(z_i) :) = p_i\psi(z_i) + \frac{\hbar}{z-z_i}\psi(z_i) + O(z-z_i) \tag{3.41}$$

（第二项正则部分中不存在常数项，例如可通过模展开进行直接计算看出）。由此 OPE 中不存在常数项可知

$$\oint_{\gamma_i} \frac{dz}{2\pi i} f(z)\psi(z)(p_i - \hbar\partial\varphi(z_i)) = \psi(z_i) \oint_{\gamma_i} \frac{dz}{2\pi i} f(z)\Big(\frac{\hbar}{z-z_i} + p_i\Big) = 0 \tag{3.42}$$

因为 $f(z)$ 是 $\iota^*\mathbb{W}$ 的一个截面。关于 Q_g 的计算几乎完全相同，留给读者完成。

根据引理 B.3，(3.38) 的左右两边相差定义在 U 上的一个处处不为零的函数，即

$$(p_n - \hbar\partial\varphi(z_n)) \dots (p_1 - \hbar\partial\varphi(z_1)) |0\rangle = f_n(z_i, p_i)\iota^* |\mathbb{W}\rangle \tag{3.43}$$

其中 $f_n \in H^0(U, \mathcal{O}_U) = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_n, (z_i - z_j)^{-1}]$，在$U$的所有闭点上均非零。将两边与 $\langle 0|$ 收缩，并应用命题 3.2 可得

$$f_n = \frac{\langle 0| (p_n - \hbar\partial\varphi(z_n)) \dots (p_1 - \hbar\partial\varphi(z_1)) |0\rangle}{\iota^* \det(B_2)}. \tag{3.44}$$

显然，$f_1 = 1$。注意到 f_n 必须是关于 p_n 的多项式，并考虑极限 $p_n \to \infty$，我们便可归纳地推出 $f_n = f_{n-1} = \cdots = f_1 = 1$。 □

算子 $p-\hbar\partial\varphi(z)$，其中 z 和 p 是泊松括号为 $\{p,z\}=1$ 的正则共轭变量，称为“Miura 算子”（或其泊松极限）。不过，从本文的角度来看，称其为“瞬子散射矩阵”更为恰当。根据关于单极子散射矩阵的讨论，我们可能会预期它在 Y($\mathfrak{gl}_1$) 中扮演 $\widehat{\quad\quad\quad\quad}$ 的 R-矩阵角色（由于我们讨论的是 $r=1$ 情形，因此有 $\mathfrak{gl}_1$ ）。在此，我们联系到其他几位作者：不同版本的相关研究曾提出，Miura 算子（及其 q 变形）满足类似于仿射 Yangian 的 R-矩阵（及其乘法类比——量子环面代数）的性质，参见 [Ash24], [GR20], [GRZ24], [HJ24], [IJZ25], [Pro19], [Zen24], 。我们的框架为此提供了自然的解释，并将这一观察置于更广阔的背景之中，将其与单极子模空间中出现的 R-矩阵联系起来。

命题3.3 和定理3.5 的一个推论是这个优美的公式

$$\langle 0|\, e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m\alpha_m}(p_n-\hbar\partial\varphi(z_n))\dots(p_1-\hbar\partial\varphi(z_1))\,|0\rangle = \iota^*\det\left(B_2-\hbar\sum_{m=1}^{\infty} m t_m B_1^{m-1}\right) \quad (3.45)$$

它表明，值得注意的是，向量 $(p_n-\hbar\partial\varphi(z_n))\dots(p_1-\hbar\partial\varphi(z_1))\,|0\rangle\widetilde{\quad}$ 的所有分量都可以从坐标图 U 延拓为 $M(n,1)$上的整体函数。该公式的 q-变形版本最初由 Y. Zenkevich 告知作者（另见 [Zen24]）；它似乎也与费曼关于 Calogero 型模型的工作有关 [Pol19]。请注意，我们对该公式的证明并未直接计算等式的任一侧。

3.2.6 RTT 关系

Miura 算子若要被视为一种R-矩阵，就必须满足的基本性质是 RTT 关于一对福克模之间的 R-矩阵的$\widehat{\quad}$关系，这对福克模取自Y($\mathfrak{gl}_1$)，并在 [MO18]中构造。为使本节的约定与 [MO18], 保持一致，我们将重新缩放海森堡生成元 α_n ，使海森堡交换关系为

$$[\alpha_m,\alpha_n] = -\frac{1}{\varepsilon_2\varepsilon_3} m\delta_{m+n,0} \quad (3.46)$$

其中 ε_2，ε_3 为复数。我们考虑 Miura 算子的量子化版本，将 $p\to\varepsilon_1\partial_z$ 替换为 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$:

$$\varepsilon_1\partial_z-\varepsilon_2\varepsilon_3\partial\varphi(z) \quad (3.47)$$

与单极子散射矩阵完全平行。这是海森堡代数的福克模上的一个算子，由 α_n生成，其系数是关于 z的微分算子。用 $\mathcal{F}_0(a)$ 表示零模 α_0 作用为 a的福克模。

回忆一下，矩阵 $R_{\mathsf{MO}}(a_1-a_2)$ (我们取其对应于 ε_2，ε_3 方向上的瞬子模空间)作用于两个福克空间的张量积 $\mathcal{F}^{(1)}(a_1)\,(a_2)$ 上，并且可以证明它满足以下两个性质（参见 [MO18], 第 12—14 章）：

1. 它与由 $\partial\varphi^{(1)}(z)+\partial\varphi^{(2)}(z)$ 的模生成的对角海森堡代数对易。

2. 它交织由这些算子的模生成的非对角 Virasoro 代数

$$T_{\pm}(z) = \varepsilon_2\varepsilon_3 : (\partial\varphi^{(1)}(z) - \partial\varphi^{(2)}(z))^2 : \pm 2(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\partial^2(\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) \tag{3.48}$$

即 $R_{\mathsf{MO}}T_{+}(z)R^{-1}{}_{\mathsf{MO}} = T_{-}(z)$。

容易验证，这两个性质意味着

引理 3.6。（另见 *[证明 19]*）

$$R_{\mathsf{MO}}(\varepsilon_1\partial_z - \varepsilon_2\varepsilon_3\partial\varphi^{(1)}(z))(\varepsilon_1\partial_z - \varepsilon_2\varepsilon_3\partial\varphi^{(2)}(z))R_{\mathsf{MO}}^{-1} = (\varepsilon_1\partial_z - \varepsilon_2\varepsilon_3\partial\varphi^{(2)}(z))(\varepsilon_1\partial_z - \varepsilon_2\varepsilon_3\partial\varphi^{(1)}(z)). \tag{3.49}$$

证明。 事实上，注意到：

$$(\varepsilon_1\partial_z - \varepsilon_2\varepsilon_3\partial\varphi^{(1)}(z))(\varepsilon_1\partial_z - \varepsilon_2\varepsilon_3\partial\varphi^{(2)}(z)) = \varepsilon_1^2\partial_z^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\partial\varphi^{(1)}(z) + \partial\varphi^{(2)}(z))\partial_z - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\partial^2\varphi^{(2)}(z) + (\varepsilon_2\varepsilon_3)^2\partial\varphi^{(1)}(z)\partial\varphi^{(2)}(z) \tag{3.50}$$

因此利用

$$\begin{aligned}\partial\varphi^{(1)}(z)\partial\varphi^{(2)}(z) &= \frac{1}{4}\Big(: (\partial\varphi^{(1)} + \partial\varphi^{(2)})^2 : - : (\partial\varphi^{(1)} - \partial\varphi^{(2)})^2 : \Big)\\ \partial^2\varphi^{(2)}(z) &= \frac{\partial}{2}(\partial\varphi^{(1)} + \partial\varphi^{(2)}) - \frac{\partial}{2}(\partial\varphi^{(1)} - \partial\varphi^{(2)})\end{aligned} \tag{3.51}$$

我们看到（3.50）右端呈现为

$$(\text{commutes with } R_{\mathsf{MO}}) \;-\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{4}\Big(\varepsilon_2\varepsilon_3 : (\partial\varphi^{(1)} - \partial\varphi^{(2)})^2 : -2\varepsilon_1\partial^2(\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})\Big). \tag{3.52}$$

回想 $\varepsilon_1 = -(\varepsilon_2+\varepsilon_3)$，括号中的量为 $T_{+}(z)$。因此，通过R_{MO} 进行共轭只会改变最后一项的符号。但这恰好会使（ $\partial^2\varphi^{(2)}$切换为 $\partial^2\varphi^{(1)}$ （3.50）。注意到其余各项关于 $\varphi^{(1)}$、 $\varphi^{(2)}$ 均对称，我们得出（3.49）。 □

将（3.49）右乘 R_{MO} ，这正是 RTT 关系。因此，构成瞬子散射矩阵的 Miura 算子乘积也满足 RTT，这可由标准论证得出。在半经典极限下，这与磁单极子散射矩阵所满足的（2.8）直接对应；另见 [Tam24] 关于量子化情形的第 4 节讨论。

3.2.7 $T^*_\hbar\mathbb{C}$ 与 $T^*_\hbar\mathbb{C}^\times$ 对比

最初的动机是研究 $T^*_\hbar\mathbb{C}^\times$ 上的瞬子，但为方便起见，我们研究了$T^*_\hbar\mathbb{C}$ 上的瞬子。由于我们的分析具有几何性质，当然也可以对 $T^*_\hbar\mathbb{C}^\times$ 重复进行。$T^*_\hbar\mathbb{C}^\times$ 上的瞬子丛同样可以通过类 ADHM 构造得到，因此技术细节

大致相同。因此，我们将简要概述结果（实际上，主要结果可以直接从（3.45）推导出来，后文将对此作出解释）。

不过有一个关键区别：绕着 $T^*_\hbar\mathbb{C}^\times$ 零截面的费米子自由费米子路径积分，自然会产生一个作用于费米子福克空间$\mathcal{F}$上的算子，而不是其中的一个态。不过，我们可以走捷径，利用自由费米子的共形对称性，直接将 $\mathbb{C}$ 上的问题映射到 $\mathbb{C}^\times$上的问题，从而理解这一点。本质上，我们通过研究 $\mathbb{C}$ 上的费米子所得到的态，已经被发现具有某个作用于真空上的算子的形式；这个算子正是规范地赋予 $\mathbb{C}^\times$上费米子的对象。为方便起见，我们仍然只考虑秩为 $r=1$的情形。

回想一下， $T^*_\hbar\mathbb{C}^\times$ 上的点的Hilbert概形有如下描述（V通常是n维的，并且 $\hbar\neq 0$）：

$$\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar\mathbb{C}^\times)=\{(g,B,I,J)\in GL(V)\times \mathrm{End}(V)\times V\times V^*|B-g^{-1}Bg+IJ=\hbar\}/GL(V). \tag{3.53}$$

$GL(V)$通过共轭作用于 $g\in GL(V)$。相应的开子集 $\iota:\ U\hookrightarrow \mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar\mathbb{C}^\times)$是指 g可对角化且具有互异特征值的部分。$\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar\mathbb{C}^\times)$带有一个由.....诱导的辛形式

$$\omega_{\mathbb{C}}=d\,\mathrm{tr}\big(Bg^{-1}dg\big)+\mathrm{tr}\,dI\wedge dJ. \tag{3.54}$$

可以验证，如果 $g=\mathrm{diag}(z_1,\ .....,\ z_n)$，$0<|z_1|<\cdots<|z_n|$ 则

$$B_{ij}=p_i\delta_{ij}-\frac{\hbar}{1-z_j/z_i}(1-\delta_{ij}) \tag{3.55}$$

且辛形式为 $\iota^*\omega_{\mathbb{C}}=\sum_i dp_i\wedge d\log(z_i)$。令 $\mathcal{F}_0(u)$ 表示海森堡代数 $[\alpha_m,\alpha_n]=m\delta_{m+n,\ 0}$ 的福克表示，其中中心元 α_0 的作用为 u。用 $|0\rangle$表示真空；$u\rangle\in\mathcal{F}_0(u)$，它满足 $\alpha_0\,|0;\ u\rangle=u\,|0;\ u\rangle$ 以及 $\alpha_n\,|0;\ u\rangle=0$ 对于$n>0$。写出圆柱面上手征玻色子的模展开：

$$\partial\varphi^{cyl}(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_n}{z^n} \tag{3.56}$$

并引入一组 无穷的第二组变量 $\tilde{t}=(\tilde{t}_1,\ \tilde{t}_2,\ .....,\ )$（除有限多个外均为零） .

命题 3.7。我们有

$$\langle 0;u|\,e^{\sum_{m=1}^\infty t_m\alpha_m}(p_n-\hbar\partial\varphi^{cyl}(z_n))\dots(p_1-\hbar\partial\varphi^{cyl}(z_1))e^{\sum_{m=1}^\infty\tilde{t}_m\alpha_{-m}}\,|0;u\rangle= \\ e^{\sum_{m=1}^\infty mt_m\tilde{t}_m}\iota^*\det\Big(B-\hbar u-\hbar\sum_{m\geq 1}(mt_mg^m+m\tilde{t}_mg^{-m})\Big). \tag{3.57}$$

证明。 实际上，这是我们的公式（3.45）的一个推论。注意，根据上面的 B_{ij} 的显式公式，$B_{ij}=z_i\,(B_2)_{\ ij}$ 只需重新定义 $z_ip_i\to p_i$即可。此外，我们显然有（因为α_0 是中心的）

$$\begin{aligned}&\langle 0;u|e^{\sum_{m\geq 1}t_m\alpha_m}(p_n-\hbar\partial\varphi^{cyl}(z_n))\dots(p_1-\hbar\partial\varphi^{cyl}(z_1))e^{\sum_{m\geq 1}\tilde{t}_m\alpha_{-m}}\,|0;u\rangle\\ &=\langle 0;0|\,e^{\sum_{m\geq 1}t_m\alpha_m}(\text{same with }p_i\to p_i-\hbar u)e^{\sum_{m\geq 1}\tilde{t}_m\alpha_{-m}}\,|0;0\rangle\end{aligned} \tag{3.58}$$

然后将（3.45）乘以 $\prod_i z_i$，重新定义 $z_i p_i \to p_i$，然后将 $p_i \to p_i - \hbar u$ 移位~，便得到 $t_m = 0$处命题的结论。一般情形可通过使用海森堡交换关系将$e^{\sum_m \tilde{t}_m \alpha_{-m}}$ 移到左侧而得。

□

对（3.57）在 $t_m = \tilde{t}_m = 0$处求导，我们得到

定理 3.8。 算子的一切矩阵系数

$$(p_n - \hbar\partial\varphi^{cyl}(z_n)) \dots (p_1 - \hbar\partial\varphi^{cyl}(z_1)) \in \mathrm{End}(\mathcal{F}_0(u)) \otimes \mathcal{O}_U$$

在振子基 $\prod_i \alpha_{-\lambda_i} |0;\ u\rangle$ 的 $\mathcal{F}_0(u)$ 中，其中 λ 是某个分拆，从 ***Darboux***开集 U 延拓为 $\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar \mathbb{C}^\times)$ 上的正则函数；此外，这些矩阵系数生成 $\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar \mathbb{C}^\times)$ 的坐标环。

这直接类似于光滑 $U(2)$ 单极子在 $\mathbb{R}^3$上的单极子散射矩阵的因子化公式（2.14），并为半经典 Miura 算子 $p - \hbar\partial\varphi^{\mathrm{cyl}}(z)$ 冠以“瞬子散射矩阵”这一名称提供了充分的依据，其中泊松括号现在为 $\{p, z\} = z$。

此外，根据 Miura 算子所满足的^关系，这些整体函数在泊松括号下生成 $\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar \mathbb{C}^\times)$ 的（半经典）$Y(\mathfrak{gl}_1)$ 对称性。众所周知，将 $\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar \mathbb{C}^\times)$ 作为辛簇进行量子化（例如在 Braverman-Finkelberg-Nakajima [BFN18]之后将其展示为库仑分支）会导出（球面）Cherednik 代数 [KN16], ，并且存在使用 Cherednik 代数表示仿射 Yangian 的方法，例如 [AS12]。

然而，本文的方法要直接得多：在[MO18], 的方法中，仿射Yangian按定义由福克模中 R-矩阵的矩阵系数生成。公式（3.57）简洁地将所有可能的此类 R-矩阵系数对应到 Hilb 上的特定函数$_n(T^*_\hbar \mathbb{C}^\times)$（在半经典极限下），同时联系到 $T^*_\hbar \mathbb{C}^\times$ 中曲线的非交换几何，如 [Aga+05], [DHS09]所述。

3.2.8 普吕克关系与一个猜想

请注意，定理3.5 证明中的留数计算推论是，算子 $S = (p_n - \hbar\partial\varphi^{cyl}(z_n)) \dots (p_1 - \hbar\partial\varphi^{cyl}(z_1))$（出现在定理 3.8 中）满足普吕克关系，即 $[\Omega\ S \otimes S] = 0$ 其中

$$\Omega = \oint \frac{dz}{2\pi i} \psi(z) \otimes \widetilde{\psi}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_r \otimes \widetilde{\psi}_{-r}. \tag{3.59}$$

类比磁单极子散射矩阵，人们预期这些关于 S-矩阵系数的二次关系，加上对每对分拆μ, ν的要求，

$$\langle 0;\ u| \prod_i \alpha_{\mu_i} S \prod_j \alpha_{-\nu_j} |0;\ u\rangle \text{ 是关于 } u\text{的多项式，形式为 } (-\hbar u)^{n} C_{\mu\nu} + \text{低次} \tag{3.60}$$

生成定义该仿射簇的所有方程（注意 $\hbar \neq 0$! ）$\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar \mathbb{C}^\times)$ 针对每个 n。另请参见 [MO18] 关于筛选算子的讨论^生成以下对象的核心 Yangian 中所有关系 $\mathfrak{gl}_1$。常数

$$C_{\mu\nu} = |\mathrm{Aut}(\mu)| \prod_i \mu_i \delta_{\mu\nu}$$

是标准的归一化；Aut(μ) 是由 length(μ) 个字母构成的对称群的子群。

3.2.9 高秩推广

许多已述内容都可以推广到秩 $r > 1$，不过某些论述^会更加复杂，因为对偶玻色描述对应于等级 $\mathfrak{gl}_r$ 下的 $k = 1$ [Wit84] WZW 模型；特别是， $\mathcal{F}_0$ 所起的作用由等级 $k = 1$可积模^承担，它是从平凡的 $\mathfrak{gl}_r$ -模诱导而来（按顶点代数领域的标准术语，这是真空模 $V_1(\mathfrak{gl}_r)$的简单商）。本节仅陈述一些通过对上述主题稍作变动即可得到的结果。

记 b y $J^a{}_b(z)$， $a, b = 1, \ldots, r$为 $\widehat{\mathfrak{gl}}_r$ 等级为 $k = 1$ 的流，满足 OPE s

$$\mathrm{tr}(AJ(z))\,\mathrm{tr}(BJ(w)) \sim \frac{\mathrm{tr}(AB)}{(z-w)^2} - \frac{\mathrm{tr}([A,B]J(w))}{(z-w)} + \mathrm{reg} \tag{3.61}$$

其中~A， B 是 $r \times r$ 矩阵。

~瞬子模空间 $M(n, r)$ 具有一个特定开集 $\iota : U \hookrightarrow M(n, r)$，其中$B_1$ 是可对角化的，并且具有互异特征值。令 $\mathcal{O}_{(\hbar,0,\ldots,0)} \subset \mathfrak{gl}_r$ 表示 diag($\hbar$, 0, ..., 0) 的共轭类；利用迹将 $\mathfrak{gl}_r$ 与 $\mathfrak{gl}_r^*$ 相识别，我们可以将其视为全纯辛簇，并将 $\mathcal{O}_{(\hbar,0,\ldots,0)}$ 视为赋予基里洛夫辛形式的余伴随轨道。存在一个辛簇的同构

$$U \simeq (T^*(\mathbb{A}^n \setminus \Delta) \times \mathcal{O}^{\times n}_{(\hbar,0,\ldots,0)})/W \tag{3.62}$$

其中 W 表示对称群 S_n ，其通过置换因子作用； Δ表示 $\mathbb{A}^n$中的对角线并集 $z_i = z_j$。令 (z_i, p_i, X_i)、 $i = 1$, ..., n为 U上的坐标；我们可以将 $X_i \in \mathcal{O}_{(\hbar,0,\ldots,0)}$参数化为 $(X_i)^a{}_b = J^a_i I_{ib}$，其中 J_i, I_i在缩放意义下确定（J_i, I_i） $\mapsto$（$t_i J_i$, $t_i^{-1} I_i$），对于 $t_i \in \mathbb{C}^\times$，并满足 $\sum_a I_{ia} J^a_i = \hbar$。

定理 3.5有如下类似结论，其证明几乎相同。 $|\mathbb{W}\rangle$表示映射~$M(r) \to \mathcal{F}$ 该映射在命题 3.1 和 3.2中构造。我们有

$$\iota^* |\mathbb{W}\rangle = (p_n - \mathrm{tr}(X_n J(z_n))) \ldots (p_1 - \mathrm{tr}(X_1 J(z_1)))\,|0\rangle\,. \tag{3.63}$$

由此结果和命题 3.2可推得以下关于 ^函数的公式，该函数出现在 $\mathfrak{gl}_r$ 等级为 $k = 1$的 WZW 模型中：

$$\begin{aligned}\langle 0|\,(p_n - \mathrm{tr}(X_n J(z_n))) \ldots (p_1 - \mathrm{tr}(X_1 J(z_1)))\,|0\rangle &= \iota^* \det(B_2) \\ &= \det_{1 \le i,j \le n} \Big(p_i \delta_{ij} - \sum_{a=1}^{r} \frac{I_{ia} J^a_j}{z_i - z_j} (1 - \delta_{ij}) \Big).\end{aligned} \tag{3.64}$$

高秩情形下唯一真正的区别在于，要得到一般矩阵系数的公式（例如（3.57））会更加困难；我们将在其他地方再讨论这一点。

4 通过弦论/M理论的自顶向下方法

我们已经用非交换规范理论和代数几何的语言阐释了这一构造的本质，现在将从弦论/M理论的构造出发，说明另一条通往相同结果的路径。这将阐明这一框架的诸多方面，解释它与文献其他部分的关系，并为某些猜想提供动机。一些熟悉物理学文献的读者或许会觉得这条路径更加自然，也可能希望从本节开始阅读。

弦论的构造此前已在 [DHS09], [Dij+08]、 [Cos16], 中进行过研究，因此我们将略去各种技术细节，以强调本文所研究情形的新颖之处。

*4.1 M*理论背景

我们从位于 $\mathbb{R} \times T^*\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3_{\varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ \varepsilon_3}$ 上的 M 理论开始，其中 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ （ε_i 表示Ω形变参数 [Nek02]——参见 [Cos16] ，其中研究了一个似乎适用于我们目的的 M 理论Ω背景。我们将简单地假设该背景存在[2] 并满足某些合理性质）。将一组 nM2 膜沿着$\mathbb{C}_{\varepsilon_1}$ 以及$\mathbb{R}$方向缠绕。然后加入一张 M5 膜，使其包住 $T^*\mathbb{C}$ 的零截面以及$\mathbb{C}^2_{\varepsilon_2、\ \varepsilon_3}$。事实上，在接下来的大部分内容中，只需设定 $\varepsilon_1 = 0$ 和 $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = \hbar$ 即可。我们将按照第 3 节中的记号，使用（w、 z）作为 $T^*\mathbb{C}$ 的坐标。

4.1.1 约化到 *IIA* 型

M 理论的描述很难直接使用，因为它处于极强耦合状态。为了得到对该系统更易处理的描述，我们考虑约化到 IIA 型弦理论；事实上，这有两种自然的做法。其思路是，我们可以将 $\mathbb{C}^2_{\varepsilon_2,\ \varepsilon_3}$ 或 $T^*\mathbb{C}$ 视为 Taub-NUT流形，并沿相应纤维化的 S^1 纤维进行约化

$$TN \to \mathbb{R}^3 \tag{4.1}$$

从而得到带有 D6膜的 IIA 型弦理论描述；IIA弦耦合与 S^1 纤维的半径有关。本文将重点讨论沿S^1 纤维对 $\mathbb{C}^2_{\varepsilon_2,\ \varepsilon_3}$进行约化；另一种约化方式也很有趣，并且与范畴Donaldson-Thomas理论中的某些问题密切相关，但这超出了本文的主要探讨范围（相关内容将在即将发表的工作 [BT]中部分讨论）。

应当指出， $\mathbb{C}^2$ 仅作为复辛流形与 Taub-NUT 重合；它们的超凯勒度量并不相同，而且可以预期，M 理论的完整动力学当然取决于度量的选择。事实上，Taub-NUT 度量实际上是一个依赖变量 R 的单参数度量族，其中 R 是 S^1 纤维的渐近半径； $R \to \infty$ 对应于 $\mathbb{C}^2$ 上的平坦度量。对于我们在此进行的这类计算，由于它们受超对称性保护，并且可以改写为在经过适当扭曲的理论版本中进行的计算，预计其结果

[2]另请参阅 [NO14] ，从指标计算的角度讨论 Ω-背景下的 M 理论。

不会依赖 Taub-NUT 半径（ [Cos16] 中也有此说法）。严格来说，IIA 型描述仅在 R 取较小值时才成立。

4.1.2 瞬子散射框架

考虑沿 $\mathbb{C}^2_{\varepsilon_2,\ \varepsilon_3}$ 方向，在 $\varepsilon_1 = 0$ 和 $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = \hbar$ 处进行约化。我们得到定义在 $\mathbb{R}\times T^*\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}^3$ 上的 IIA 型弦理论，其中有一张 D6膜 缠绕 $\mathbb{R}\times T^*\mathbb{C}\times\mathbb{C}$， n 张 D2 膜 缠绕$\mathbb{R}\times\{点\}\times\mathbb{C}\times\{0\}$，以及一张 D4 膜 缠绕 $\{w=0\}\times\mathbb{R}^3$。M 理论中的 Ω 变形产生了一个有效的 B 场，其 (2，0) 部分为

$$B = \frac{1}{\hbar} dw \wedge dz \tag{4.2}$$

在这个 IIA 框架中。这个包含 $n = 0$ 张 D2 膜的构型，已在 [Dij+08] 中得到详细讨论。我们关注的是通过膜上的低能有效规范理论来描述这一构型。

在 D6 膜上，低能动力学由一个规范群为 $U(1)$ 的七维最大超对称杨-米尔斯理论描述。沿着成熟的途径 BSW [SW99]，可以将 $(w,\ z)$ 方向的世界体非交换化，从而将 Ω 场纳入低能描述。因此，就规范场对 $(w,\ z)$ 的依赖而言，D6 膜世界体上的规范场应视为非交换杨-米尔斯场。我们将把这张 D6 膜视为质量极大，因此其世界体上的规范理论可视为半经典理论。虽然 $U(1)$ 规范理论在交换空间上是没有有趣瞬子解的自由场论，但其非交换对应理论是一个非局域的相互作用场论，支持非平凡的（“弦状”）瞬子解 [NS98]。

D2 膜是 D6 膜内部的余维四缺陷，并保留 D6 膜世界体上 16 个超对称性中的一半。在 D6 膜的有效理论中，它们可描述为沿 $(w,\ z)$ 方向的非交换瞬子方程的解，且与其他坐标无关。瞬子荷 n 与 D2 膜的数量相同。

最后，众所周知，D4-D6 开弦的零模是局域在 D4-D6 交叉上的手征费米子（ [Dij+08]，[DHS09]中将其称为“I 膜构型”）。当然，4-6 开弦自然带有 D6 膜规范场基本表示下的荷。因此，这些手征费米子与规范场之间的自然耦合可由非局域有效作用量描述

$$S = \int_{\mathbb{C}\subset T^*\mathbb{C}} \widetilde{\psi}(z,\bar{z}) \left(\overline{\partial}_z + A_{\bar{z}}(z,\overline{z},w,\bar{w}) \Big|_{w=\hbar\partial_z} \right) \psi(z,\bar{z}) \tag{4.3}$$

如第 3 节所述，在我们所处的半经典极限下，D2 膜已通过假设 $A_{\bar{z}}$ 上方是一个 $\bar{z}$分量的非交换瞬子解而被完全纳入考量，因此可由 ADHM 数据 (B_1, B_2, I, J) 通过 [NS98] 的非交换 ADHM 构造完全描述。瞬子散射矩阵系数由对 4-6 弦积分消去后得到的配分函数给出；这些是泛函

行列式 $\det D_z$，对应于刻画瞬子丛在 $w=0$ 上限制的全纯结构的（高度非局域）手征狄拉克算子的行列式。命题 3.3 根据 ADHM 数据对这一手征行列式作出了完整描述。

将 [DHS09], [Dij+08] 的设想与第 3 节的规范理论讨论联系起来，一个简洁的说法是：4-6 弦零模的动力学可由定义在 B 上的非交换 -模型[3] 很好地描述。这意味着，忽略 IIA 几何中除 $T^*_\hbar\mathbb{C}$ 以外的所有方向，我们可以将 D4 膜建模为一个全纯右 $T^*_\hbar\mathbb{C}$-模，其形式为 $\mathcal{D}_\hbar\widehat{\ }$（采用附录 C 的记号），并通过非交换 ADHM 构造描述的右模来刻画 D2-D6 构型。与任何 $\mathcal{D}_\hbar$ -模型一样，开弦态的空间由一个 Ext 群给出，$\mathcal{E}$ B

$$\mathcal{H}_{4-6}=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_C,\mathcal{E}) \tag{4.4}$$

我们在第 3 节中直接通过规范理论对此作了解释。注意，当瞬子荷 $n=0$，$\mathcal{E}=\mathcal{D}_\hbar$ 且 $\mathcal{H}_{4-6}\simeq\widehat{\mathcal{O}}^\ell_C$ 时，$\mathcal{D}_\hbar$ 的左模版本 $\widehat{\mathcal{O}}_C$。这说明，4-6 零模空间是定义在 $\mathcal{D}$上的一个 -模的底层向量空间——这正是 $\mathbb{A}^1$ 所声称的 [DHS09], [Dij+08]!

DHS [Dij09], [的另一项主张是，这些+08] -模通过考察形如 $\mathcal{D}_\hbar$的微分方程的基本解的渐近展开，在佐藤格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 中定义了点，其中 $P(z,w)\Psi=0$ 取某个 $P\in\mathcal{D}_\hbar$；DHS[通过显式计算验证了这一点。09]

D2 膜的存在会带来如下变化。由 4-6 开弦构成的空间 $n\neq0$ 现在随 D2 膜模空间上的一个向量丛的纤维而变化；该模空间是非交换 $\mathcal{H}_{4-6}$ (1) 瞬子模空间的一个副本，即本文记号中的 $\widetilde{\ }$(U, 1) M。n对瞬子模空间中的每个点，在 *Gr*() 中定义一个点；也就是说，它给出了从瞬子模空间到 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 的映射。这个映射在特殊情形 $(\mathcal{H},)$ P下，已在第 *z3* 节中严格构造，并在此处记为 $=w$。

这个向量丛描述了自由费米子理论中运动方程的经典解空间$D_z\psi=0$，其中瞬子背景的选择遍历所有可能的取值。理解这个向量丛的几何结构，就能相对直接地进行量子化；正如 Witten 很久以前所解释的那样 [Wit88]，并在附录B中回顾的那样，$\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 到费米子福克空间射影化的普吕克嵌入，提供了一种显式且数学上严谨的方法，可用于构造费米子路径积分在各种代数曲线上制备的量子态（格拉斯曼流形方法尤其适用于显式 D_z 算子过于复杂而无法使用，或完全不存在的情况）。随着瞬子背景选择的变化，这种方法同样适用，而且在某种意义上是更强大的工具。由此，我们定义了第 $|\mathbb{W}\rangle$ 3节中记作 的态。第3 节其余的分析，只需运用玻色化和 Ward 恒等式的标准工具，对 $|\mathbb{W}\rangle$ 作出更显式的描述即可。

从这个角度来看，很显然，我们可以纳入、但迄今一直忽略的一种自由度，是选择更一般的代数曲线 $P(z,\ w)=0$

[3]非常抽象地说，目标为 B 的非交换 $T^*_\hbar\mathbb{C}$ 模型，是这样一个二维拓扑场论：其边界条件范畴被断言为有限生成右 $\mathcal{D}_\hbar$-模的有界导出范畴。等价地，它可以描述为带有 A场的 B模型；相关讨论见 [Aga+17] 的第 4.3 节。

在 $T^*\mathbb{C}$ 上作为费米子的支撑集。这与我们在此处的主要研究方向有些相左；我们的重点是量子群和 R-矩阵。尽管如此，本文的构造仍为拓扑弦理论中 B-模型的配分函数在所有形如 $uv + P(z,\ w) = 0$ 的背景上带来变形，其中每个背景对应于一个非交换 $U(1)$ 瞬子，它位于 $(z,\ w)$-平面上。这推广了[Aga+05], [DHS09], [Dij+08]的框架。若能找到对拓扑弦理论中瞬子的更直接解释，将会很有意思。

在合流 $P(z,\ w) = zw - u$ (其 B-模型以计算 $c = 1$ 非临界弦理论的配分函数而闻名)的情形中，我们将在第5节对此进行显式讨论。那里构造的算子 $\mathbb{S}(u)$ 是 S-矩阵的瞬子推广版本，其中 $c = 1$ 该矩阵属于非临界弦理论（这从另一种意义上说明了为何称其为“瞬子散射矩阵”）。

还要注意，从这一视角来看，$U(r)$ 瞬子的情形对应于具有r 张 D6 膜，而这些膜又源自 $\mathbb{R} \times T^*\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times A_{r-1}$ 上的 M-理论。

4.1.3 瞬子散射矩阵与陈-西蒙斯理论

从本文的视角来看，预期瞬子散射矩阵R-矩阵，这既是基于与其单极子类比物的类比，也是基于第3节中的显式计算。弦理论嵌入则提供了更具概念性的解释，具体如下。

文献 [Cos16] 认为，我们所研究背景中的 M 理论可以有效地由定义在 $\mathbb{R} \times T^*_{\hbar}\mathbb{C}$上的非交换 $U(1)$ Chern-Simons 理论描述。其论证本质上是考虑上述 D6膜上的同一规范理论，并置于 [Nek20], [Yag14] 中所述的“B型”Ω背景下，该背景由 ε_1 参数决定。若将 $T^*\mathbb{C}$ 视为覆盖 $\mathbb{R}^3$的一个 S^1纤维化，那么这一 Chern-Simons 理论可看作是 [Cos13]¦[CWY18] 中研究的四维全纯-拓扑陈-西蒙斯理论的环/仿射类比。正如这一 Chern-Simons 理论与有限维李代数的 Yangian $Y(\mathfrak{g})$ 相关联，人们也预期五维陈-西蒙斯理论与相应仿射李代数的杨氏代数 $Y(\widehat{\mathfrak{g}})$ 相关联。

R矩阵在这一框架中自然地出现如下：如果我们研究定义在背景 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$ 其中 $\mathbb{R}^2$ 具有拓扑性质的四维陈-西蒙斯理论，那么可以定义在 $\mathbb{C}$ 上点状、并沿着 $\mathbb{R}^2$中的某条直线延伸的线算子。最基本的此类线算子是规范群基本表示中的威尔逊线。在 [CWY18] 中有人论证，$\mathbb{R}^2$ 中的威尔逊线交叉由 Yangian R矩阵描述，这一结论是通过显式的费曼图计算得到的。在 [CGY21] 中（采用略有不同的语言），有人论证单极子散射矩阵可以解释为四维陈-西蒙斯理论中威尔逊线缺陷与 't Hooft 算子相交的经典极限。从这一角度来看，在单极子散射矩阵的讨论中出现有限 ADE 型杨氏代数就不那么令人意外了。

在 [余切丛16] 中，文中论证了 M2 膜如何通过陈-西蒙斯描述中的线缺陷来实现：它们沿 $\mathbb{R}$ 延伸，并沿$T^*_{\hbar}\mathbb{C}$呈点状；更准确地说，它们由沿$T^*_{\hbar}\mathbb{C}$的非交换瞬子方程的解来描述。M5 膜是缠绕$\mathbb{C} \subset T^*_{\hbar}\mathbb{C}$的曲面算子。将其投影到 $T^*\mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$的基底上，将 $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$分解并通过结合此 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 形成一个 $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ ，即 M2 膜所缠绕的对象，我们便看到

所研究的系统看起来像是由 M2 膜构成的线算子与由 M5 膜构成的半线算子的交汇。本文第3 节的核心论断是，这一交汇完全由映射 $|\mathbb{W}\rangle$ 从瞬子模空间$\sim M(1)$ 到 $\mathcal{F}$ 中构造的福克空间来描述；这与 CGY [中单极子散射矩阵所起的作用完全平行21]。

将 M2 膜线算子因子分解为基本组分，对应于转到瞬子模空间的 Darboux 图，该图称为 U 第 3 节中的 3.5 定理 $|\mathbb{W}\rangle$随后说明了 [GR20]如何由此开集上的基本片段组成；特别是， [GRZ24]提出的 Miura 算子对应于 M2-M5 交这一设想，在我们的框架中可视为一个精确的数学定理。我们的框架似乎与其他针对同一物理设置、更加代数化的方法截然不同，例如 [GRZ24]。

应将我们的方法与 [Ash24], [IJZ25] 进行比较和对照；后者沿用 [CWY18] 的思路，通过费曼图计算求出 Miura 算子。本文的方法是非微扰的，也就是说，它们无需围绕体陈-西蒙斯理论中规范场的平凡构型进行幂级数展开。另一方面，这些方法仅适用于半经典区域， $\varepsilon_1 \to 0$。这一限制并不像表面看来那么严格；例如，正如我们在第 3 节所见，1-瞬子散射矩阵具有本质上唯一的 $\varepsilon_1 \neq 0$ 形变，而要求其与定理 3.5 中的因子分解相容，就能明确且无歧义地将量子化的瞬子散射矩阵系数赋值给 z_i 变量对应的微分算子。

虽然我们在这段讨论中强调了五维陈-西蒙斯理论的视角，但R弦理论中仿射 Yangian（或更一般地，量子环面代数）的矩阵对应于膜的交点，这一点是 Y. Zenkevich 一项一般性提案的关键组成部分 [Zen23], [Zen24]；这位作者最初正是通过这种形式了解到许多这些结果的。

4.1.4 第二种散射矩阵

从陈-西蒙斯理论的视角来看，M5 膜世界体的支撑有一种在某种意义上更自然的选择，这一点很清楚：它对应于 $\mathbb{R}^2$ 中的一条直线，线算子在此相交并产生 R矩阵。由于支撑 M5 膜算子的 $\mathbb{R}$方向是 $T^*\mathbb{C} \to \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 基底中的竖直轴，因此它是完整几何中的曲线 $zw = u$；参数 u 被确定为这条直线在 $\mathbb{C}$ 平面中的位置，因此也就是移位 Yangian 代数 $\widehat{\mathsf{Y}}_{+1}(\mathfrak{gl}_1)$ 的谱变量。

请注意，用这种语言来说，研究未移位的仿射Yangian，相当于将$T^*\mathbb{C}$ 替换为 $T^*\mathbb{C}^\times$；在这种情况下，从半直线过渡到整条直线并不存在本质上的困难。这一点也体现在证明定理3.8 是定理3.5的推论相对容易。另一方面，几何表示论文献从多个角度表明，与未移位的版本或反主导移位对应物相比，主导移位 Yangian 带来了相当程度的新复杂性。在本文的框架下，第一个非平凡的例子对应于 $T^*\mathbb{C}$上的瞬子模空间。更复杂的例子来自 A_{n-1} 曲面上的瞬子模空间，其散射矩阵一般会导出$\widehat{\mathsf{Y}}_{+n}(\mathfrak{gl}_r)$。

这一表述　　在我们当前的问题中如下所示：曲线 $zw = u$ 有两个

不同的渐近端， $T^*\mathbb{C}$；一个趋近于 z轴，另一个趋近于w轴。直观上，人们会想在每个端点“拼接”两份第3 节的讨论，但这里 $T^*\mathbb{C}$ 的非交换性起了作用：第 z3 节中实质上用到了 极化下的量子化，而 z 极化与 w极化之间的比较是非局部的，由傅里叶变换给出。

在第5节中，我们将使这一想法精确化，并说明如何正确实现傅里叶变换；其结果将是一种新型散射算子 $\mathbb{S}(u)$，可以将其视为作用于福克空间 $\mathcal{F}$ 上的算子，其矩阵系数属于瞬子模空间 $\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar\mathbb{C})$ 上的整体函数 $\widetilde{\ }$（或者更一般地， $M(n,r)$ 上的整体函数，对于 $r>1$）。注意，根据定理 3.8，Miura 算子的乘积具有 $\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar\mathbb{C}^\times)$ 上整体函数的矩阵系数；若要得到 $\mathrm{Hilb}_n(T^*_\hbar\mathbb{C})$ 上的整体函数，我们需要一种新的算子，而定义它需要付出更多努力。算子 $\mathbb{S}(u)$ 似乎是 $\mathrm{Y}_{\hbar+1}(\mathfrak{gl}_r)$ 的泊松$\widehat{\ }$极限下的一种新型 R-矩阵。我们将在下一节分析它的一些基本结构，并将对其性质的更详细研究留待未来。

5 瞬子散射与新的 R-矩阵

在本节中，我们将回到数学世界，并执行第 4.1.4 节中概述的计划。在第 5.1 节中，我们给出算子 $\mathbb{S}(u)$ 的几何定义： $\mathcal{F}^{\mathrm{in}}\to\mathcal{F}^{\mathrm{out}}$该算子作用于两个费米子福克空间之间，由此可知它满足普吕克关系，因此由其真空矩阵元和费米二点函数确定。这两个量将在第 5.1 节中根据 ADHM 数据进行显式计算，并且$\widehat{\ }$我们猜想 $\mathbb{S}(u)$ 可作为 R-矩阵，用于 $\mathrm{Y}_{\hbar+1}(\mathfrak{gl}_r)$ 中的 $r=1$。由于主导移位杨代数的RTT 形式体系尚不存在，我们在此不继续证明这些猜想。

最后，第 4 节的讨论清楚表明，算子 $\mathbb{S}(u)$ 是单极子散射矩阵的直接提升（第 3 节中的对象更像是单极子散射矩阵的第一列）。由于 $\mathbb{R}^3$ 上带有某些狄拉克奇点的单极子，可以作为 S^1-作用下、定义在 $\mathbb{R}^4$ [Kro85], 上的瞬子模空间不动点集的组成部分获得，因此这就提供了一种猜想性的途径，用于从瞬子散射矩阵中读出单极子散射矩阵（见下方公式（5.34））， 至少在单极子模空间可通过在瞬子模空间中取不动点得到的情形下是如此。第 5.3节将对此进行解释。

给有疑虑的读者的说明。 本节为使论述简洁清晰，对与对偶空间和完备化相关的技术细节不作明确说明。对于本文的目标而言，这并无妨碍，因为我们只关注 $\mathbb{S}(u)$ 在费米子福克空间标准基下的（无穷）矩阵系数列表，而其中每一项都有良好定义。对于$\widehat{\ }$进一步研究 $\mathbb{S}(u)$，例如研究它与 $\mathrm{Y}_{\hbar+1}(\mathfrak{gl}_r)$ 上余积的相容性，则应更加谨慎地处理这些问题。

5.1 定义算子 $\mathbb{S}(u)$

推广 第 3 节的讨论中，我们受命研究向量丛

$$\mathbb{V}_u := \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{D}_\hbar}\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}\simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_{C_u},\mathcal{E}) \tag{5.1}$$

$\widetilde{}$在 $M(r)$ 上，其中 $\mathcal{E}$ 是万有瞬子丛，而

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u} &:= \mathcal{D}_\hbar/\mathcal{D}_\hbar(zw-u)\\ \widehat{\mathcal{O}}_{C_u} &:= \mathcal{D}_\hbar/(zw-u)\mathcal{D}_\hbar\end{aligned} \tag{5.2}$$

分别是依赖于复参数 u 的左、右 $\mathcal{D}_\hbar$-模。我们假设 $u \notin \hbar\mathbb{Z}$。

5.1.1 $\mathbb{V}_u$ 作为到 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H}_{\mathrm{in}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{out}})$ 的映射

为了完整地建立散射问题，我们不仅需要向量丛 $\mathbb{V}_u$，还需要一组额外数据，以便定义一个从瞬子模空间到记作 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H}_{\mathrm{in}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{out}})$ 的佐藤格拉斯曼流形的映射。我们首先定义这个格拉斯曼流形。记

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{in}} &:= W((z^{-1}))\\ \mathcal{H}_{\mathrm{out}} &:= W((w^{-1}))\end{aligned} \tag{5.3}$$

$\widetilde{}$其中，W 是 $M(r)$ 的 ADHM 描述中的框架空间。我们有 $\mathcal{H}_{\mathrm{in}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{out}}$ 的商$\mathcal{H}_+ = W[z] \oplus wW[w]$，以及由这样的子空间组成的佐藤格拉斯曼流形：其到 $\mathcal{H}_+$ 的诱导投影具有有限秩核和余核。

以下结论是通过对第 3 节中的计算进行“左右对称”版本而得到的；因此这里省略细节，并在附录 C 中给出。

命题 5.1。 假设 $u \notin \hbar\mathbb{Z}$。利用 $\mathbb{V}_u$ 命题 *C.4* 的描述，存在一个层的典范态射

$$\mathbb{V}_u \to \mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)} \otimes (\mathcal{H}_{\mathrm{in}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{out}}) \tag{5.4}$$

$\widetilde{}$在 M（r）上，它是向量丛嵌入。此外，根据 $\mathbb{V}_u$命题*C.7*中的描述，存在典范同构

$$\begin{aligned}\ker(\mathbb{V}_u \to \mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)} \otimes \mathcal{H}_+) &\simeq \ker(u - B_2B_1)\\ \mathrm{coker}(\mathbb{V}_u \to \mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)} \otimes \mathcal{H}_+) &\simeq \mathrm{coker}(u - B_2B_1)\end{aligned} \tag{5.5}$$

$\widetilde{}$上的层，位于 M（r）。

证明。 这部分内容见附录 C.0.6、 C.0.7、 C.0.8。 □

由上述命题， $\mathbb{V}_u$ 给出一个态射

$$G : \widetilde{M}(r) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H}_{\mathrm{in}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{out}}) \tag{5.6}$$

我们可以将其与 Plücker 嵌入 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H}_{\mathrm{in}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{out}}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F}^{\mathrm{in}} \otimes \mathcal{F}^{\mathrm{out}})$ 复合，从而得到一个态射

$$|\mathbb{V}_u\rangle : \widetilde{M}(r) \to \mathbb{P}(\mathcal{F}^{\mathrm{in}} \otimes \mathcal{F}^{\mathrm{out}}).$$

命题 5.2. $|\mathbb{V}_u\rangle$ 提升为到 $\mathcal{F}^{in} \otimes \mathcal{F}^{out}$ 的映射，并且存在唯一的提升选择满足 $\langle 0|\mathbb{V}_u\rangle = \det(u - B_2B_1)$。

证明. 根据命题 5.1，与命题 3.2 中相同的论证适用。 □

此时，方便为 $|\mathbb{V}_u\rangle$ 在 $\mathcal{F}^{\text{in}} \otimes \mathcal{F}^{\text{out}}$ 的标准基下的分量引入一些记号。根据附录 B 中回顾的半无限楔积的一般原理，这些分量都可表示为某个有限矩阵的行列式，其系数是瞬子模空间上的函数。取对偶空间后，我们可以将它们视为一族算子的矩阵系数

$$\mathbb{S}(u) : \widetilde{M}(r) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^{\text{in},\vee}, \mathcal{F}^{\text{out}})$$

这就是本文对算子 $\mathbb{S}(u)$ 的定义。有时，为了简便，我们会省略 $\mathcal{F}^{\text{in}}$ 上的对偶符号。

我们有真空向量 $|0\rangle = |0\rangle_z \otimes |0\rangle_w \in \mathcal{F}^{\text{in}} \otimes \mathcal{F}^{\text{out}}$，用半无限楔积记号表示为 $|0\rangle_z = 1 \wedge z \wedge z^2 \wedge \ldots$，$|0\rangle_w = w \wedge w^2 \wedge w^3 \wedge \ldots$。线性泛函$\langle 0| = \langle 0|_z \otimes \langle 0|_w$，其中 $\langle 0|_w = \cdots \wedge w^{-2} \wedge w^{-1} \wedge 1$ 等等。我们对 $\mathbb{S}(u)$ 的记号使得以下等式成立：

$$\langle 0|\, \widetilde{\psi}^{\text{in}}(\zeta)\psi^{\text{out}}(w)\, |\mathbb{V}_u\rangle = (\langle 0|_\zeta\, \widetilde{\psi}(\zeta) \otimes \langle 0|_w\, \psi(w))\, |\mathbb{V}_u\rangle =: \langle 0|\, \widetilde{\psi}(\zeta)\mathbb{S}(u)\psi(w)\, |0\rangle \tag{5.7}$$

对于 ψ 的字符串也同样如此。请注意，在这种记号下，右侧的真空向量会消去正 次幂 w。从代数曲线 $zw = u$ [Wit88] 上共形场论的算子形式角度来看，这种选择尤其自然。在这种记号下，命题 5.2 确定了真空矩阵元

$$\langle 0|\, \mathbb{S}(u)\, |0\rangle = \det(u - B_2B_1) \tag{5.8}$$

它确定了算子 $\mathbb{S}(u)$的归一化。

5.2 确定算子 $\mathbb{S}(u)$

与第3节的推导类似，我们希望对 $\mathbb{S}(u)$给出更直接的代数刻画。由于 $\mathbb{S}(u)$具有非局域性，且在 $z \to \infty$ 与 $w \to \infty$之间进行插值，因此它比第3节中遇到的 Miura 算子串要复杂一些。

5.2.1 τ-函数与 *Miura* 算子

作为预备，先考虑秩 $r = 1$ 的情形，并注意到群 Γ_+（采用 [SW85]中的记号）在 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H}_{\text{in}} \oplus \mathcal{H}_{\text{out}})$上有两个作用，每个直和项各对应一个。

命题 5.3。我们有

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, e^{\sum_{m=1}^\infty t_m \alpha_m^{in}}\, |\mathbb{V}_u\rangle &= \langle 0|\, e^{\sum_{m=1}^\infty t_m \alpha_m}\mathbb{S}(u)\, |0\rangle = \det\left(u - B_2B_1 + \hbar \sum_{m=1}^\infty m t_m B_1^m\right) \\
\langle 0|\, e^{\sum_{m=1}^\infty \tilde{t}_m \alpha_m^{out}}\, |\mathbb{V}_u\rangle &= \langle 0|\, \mathbb{S}(u) e^{\sum_{m=1}^\infty \tilde{t}_m \alpha_{-m}}\, |0\rangle = \det\left(u - B_2B_1 - \hbar \sum_{m=1}^\infty m \tilde{t}_m B_2^m\right).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

证明。 论证与命题 3.3相同，细节从略。 □

回顾开子集 $\iota:\ U \hookrightarrow M(n,\ 1)$，在该集合上 B_1 可对角化，且具有互异特征值 z_i B_2 p_i $\jmath$ $V \hookrightarrow$，其对角元素为 。引入另一个开子集： $M(n,\ 1)$，在该集合上 B_2 可对角化，且具有互异特征值 $\widetilde{p}_i$，并且 B_1 的对角元素为 $\widetilde{z}_i$。由于福克空间中的一个态由其 τ-函数唯一确定，由式（3.45）可得

定理 5.4。 秩为 $r = 1$ 时，瞬子散射矩阵$\mathbb{S}(u)$ 的第一行和第一列满足（为避免符号混淆，我们用 $|\mathbb{V}_u\rangle$ 表示公式）

$$\begin{aligned}\langle 0|_w\, \iota^*\, |\mathbb{V}_u\rangle &= (u - z_n p_n + \hbar z_n \partial\varphi^{in}(z_n)) \dots (u - z_1 p_1 + \hbar z_1 \partial\varphi^{in}(z_1))\, |0\rangle_z \in \mathcal{F}^{in}\\ \langle 0|_z\, \jmath^*\, |\mathbb{V}_u\rangle &= (u - \widetilde{z}_n \widetilde{p}_n - \hbar \widetilde{p}_n \partial\varphi^{out}(\widetilde{p}_n)) \dots (u - \widetilde{z}_1 \widetilde{p}_1 - \hbar \widetilde{p}_1 \partial\varphi^{out}(\widetilde{p}_1))\, |0\rangle_w \in \mathcal{F}^{out}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

下文将确定矩阵 $\mathbb{S}(u)$ 的其余部分。

5.2.2 普吕克关系与费米子传播子

以更几何的方式重述命题 5.3 ，可以说映射 $G:\ M(1) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H}_{\mathrm{in}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{out}})$ 如上所构造，对每个 Γ_+-作用都是等变的，其中作用在$\mathcal{H}_{\mathrm{in}}$ 上与由哈密顿量 $H(t) = \sum_m t_m \mathrm{tr}(B_1^m)$ 生成的辛同胚相交织；而作用在 $\mathcal{H}_{\mathrm{out}}$ 上与由 $\widetilde{H}(\tilde{t}) = \sum_m \tilde{t}_m \mathrm{tr}(B_2^m)$生成的辛同胚相交织。

显然，这些 Γ_+ 作用在 $M(1)$ 上并不对易，因此不能指望矩阵系数 3.57有类似于（ $\mathbb{S}(u)$）那样的简单公式。这一现象曾以不同的语言在 [Aga+05]中被观察到。尽管如此，仍有以下补救办法。

由于 $\mathbb{S}(u)$ 源自普吕克嵌入像中的一个态 $|\mathbb{V}_u\rangle$ ，它自然满足普吕克关系。一个经典事实（例如参见 MJD00|第 9 章）是，普吕克关系刻画了嵌入 $GL(\mathcal{H}) \hookrightarrow GL(\mathcal{F})$ 的像，其中 $\mathcal{H}$ 是有限维或无限维向量空间（后一种情形下，定义$GL(\mathcal{H})$ 时需格外谨慎），而 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{H}$的外代数。在我们当前的设定中，这一思想体现为以下内容

引理 5.5。 瞬子散射矩阵 $\mathbb{S}(u)$由其真空矩阵元 $\langle 0|\, \mathbb{S}(u)\, |0\rangle$ 及以下对象唯一确定

$$G(\zeta, w) := \frac{\langle 0|\, \widetilde{\psi}(\zeta) \mathbb{S}(u) \psi(w)\, |0\rangle}{\langle 0|\, \mathbb{S}(u)\, |0\rangle} = \frac{\langle 0|\, \widetilde{\psi}^{in}(\zeta) \psi^{out}(w)\, |\mathbb{V}_u\rangle}{\langle 0|\mathbb{V}_u\rangle}. \tag{5.11}$$

证明。 $\mathbb{S}(u)$ 显然由真空矩阵元及以下对象确定

$$\frac{\langle 0|\, \widetilde{\psi}(\zeta_1) \dots \widetilde{\psi}(\zeta_N) \mathbb{S}(u) \psi(w_1) \dots \psi(w_N)\, |0\rangle}{\langle 0|\, \mathbb{S}(u)\, |0\rangle} \tag{5.12}$$

对所有 N。命题 5.1 表明，在 $M(1)$所示的开子集上，其中

$$u \notin \mathrm{Eigenvalues}(B_2 B_1) \cup \hbar\mathbb{Z} \tag{5.13}$$

（这恰好是我们可以求逆 $\langle 0|\,\mathbb{S}(u)\,|0\rangle$ 的地方） $\mathbb{V}_u$ 的纤维确定了 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H}_{\text{in}}\oplus\mathcal{H}_{\text{out}})$ 大胞腔中的一个点，因此 $\mathbb{S}(u)\cdot(\langle 0|\,\mathbb{S}(u)\,|0\rangle)^{-1}$ 可以写成该轨迹上的费米子双线性形式的指数。根据维克定理，上面的表达式可写为

$$\pm \det_{1\le i,j\le N} G(\zeta_i, w_j). \tag{5.14}$$

□

对于物理学家而言，这个引理可以用更为熟悉的语言重新表述。态 $|\mathbb{V}_u\rangle$ 源于格拉斯曼流形中的一个点，而不只是 $\mathcal{F}^{\text{in}}\otimes\mathcal{F}^{\text{out}}$中的任意向量，这意味着 $zw=u$ 上的费米子理论是自由的，尽管它是非局域的。当$\mathbb{V}_u$ 位于大胞腔中时，该态可以写成福克真空的显式玻戈留波夫变换。当然，任何自由场论（不一定是局域的）都完全由其未归一化的配分函数和传播子决定，这是一个众所周知的事实。

现在我们将计算传播子 $G(\zeta;\ w)$。为简单起见，我们在此讨论秩 $r=1$ 情形；高秩情形并不更加困难，但我们将推迟到第 5.3 节再讨论其与单极子散射矩阵的关系。

定理 5.6。 对于 $\mathbb{S}(u)$ 由命题 *5.1*、 *5.2*构造的，传播子由以下显式公式给出

$$\begin{aligned} G(\zeta,w)=\frac{\langle 0|\,\widetilde{\psi}(\zeta)\mathbb{S}(u)\psi(w)\,|0\rangle}{\langle 0|\,\mathbb{S}(u)\,|0\rangle} &= J\frac{w}{w-B_2}\frac{1}{u-B_2B_1}\frac{1}{\zeta-B_1}I \\ &+\Big(J\frac{1}{w-B_2}\frac{1}{\zeta-B_1}I+1\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k\frac{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+k+1)}{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+1)}w^{-k}\zeta^{-k-1}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

注意，当 $\hbar\neq 0$ 时，出现的无穷级数是阶乘发散的，只能理解为关于 z，w 的形式幂级数；这是算子 $\mathbb{S}(u)$ 非局域性的标志。如果 $\mathbb{S}(u)$ 来自黎曼曲面上具有两个边界分支的局部全纯场论的路径积分，那么该表达式将解析延拓到整个黎曼曲面上；然而， $\mathbb{S}(u)$ 来自“非交换曲线” $zw=u$ 上的路径积分。幸运的是，当 $\hbar\to 0$ 时，该级数退化为 $1/(\zeta-u/w)$ 的展开，这正是费米子传播子在真正的有理曲线 $zw=u$ 上的预期行为，其中 $\sim\psi$ 插入 $z\to\infty$ 片， ψ 插入 $w\to\infty$ 片。

我们还顺便指出，命题 5.1 意味着，对于每一组 ADHM 数据 (B_1,B_2,I,J)，

$$\det_{1\le i,j\le N} G(\zeta_i,w_j)$$

确定了 Toda 层级在 Miwa 坐标中的一个显式 τ-函数（ζ_i，w_j）。

证明。 我们首先将以下表达式视为 z 的函数：

$$\frac{\langle 0|\,\widetilde{\psi}(\zeta)\psi(z)\mathbb{S}(u)\,|0\rangle}{\langle 0|\,\mathbb{S}(u)\,|0\rangle}=\frac{\langle 0|\,\widetilde{\psi}^{in}(\zeta)\psi^{in}(z)\,|\mathbb{V}_u\rangle}{\langle 0|\mathbb{V}_u\rangle}. \tag{5.16}$$

根据定义以及 $\mathbb{V}_u$ 附录C.0.6、C.0.7、C.0.8中的描述，该表达式可确定为以下形式

$$\frac{\langle 0|\,\widetilde{\psi}^{in}(\zeta)\psi^{in}(z)\,|\mathbb{V}_u\rangle}{\langle 0|\mathbb{V}_u\rangle} = J\frac{1}{z-B_1}\phi_z(\psi_+)+\phi_z(\xi) \tag{5.17}$$

其中 ϕ_z 是从 C.0.7 而 $(\psi_+、\ \psi_-、\ \xi)$ 是我们如今熟悉的三元组，见~命题 C.4、C.7。插入 $\langle 0|\,\psi(\zeta)$ 便能唯一确定

$$\xi = \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \zeta^{-k-1} \in \widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}[[\zeta^{-1}]]. \tag{5.18}$$

我们约定 ϕ_z 通过在 $\zeta \to \infty$ 处展开并利用线性性作用于 ξ。由于我们假设$u - B_2B_1$ 可逆，(C.45) 确定了三元组的其余部分为

$$\begin{aligned}\psi_+ &= -B_1\frac{1}{u-B_2B_1}\frac{1}{\zeta-B_1}I\\ \psi_- &= \frac{1}{u-B_2B_1}\frac{1}{\zeta-B_1}Iw+\frac{1}{\zeta-z}\frac{1}{\zeta-B_1}I.\end{aligned} \tag{5.19}$$

再由附录 C.0.8中对映射 $\mathbb{V}_u \to \mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)}\otimes(\mathcal{H}_{\text{in}}\oplus\mathcal{H}_{\text{out}})$ 的描述可知，我们必有

$$G(\zeta,w) = J\frac{1}{w-B_2}\phi_w(\psi_-)+\phi_w(\xi). \tag{5.20}$$

注意到

$$\phi_w\Big(\frac{1}{\zeta-z}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\zeta^{-k-1}\phi_w(z^k) = \sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k\frac{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+k+1)}{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+1)}\zeta^{-k-1}w^{-k} \tag{5.21}$$

即可得出结果。 □

根据引理 5.5，命题 5.1、5.2 以及定理 5.6可完全确定算子 $\mathbb{S}(u)$。进一步研究它的性质将很有意思；目前我们先就此作一些评论并提出一些猜想。

^5.2.3 $\mathbb{S}(u)$ 作为 $\mathsf{Y}_{+1}(\mathfrak{gl}_1)$的半经典 R-矩阵

由其作为瞬子散射矩阵的构造方式可知，$\mathbb{S}(u)$ 应当是 R-^矩阵，对应于$\mathsf{Y}_{+1}(\mathfrak{gl}_1)$的泊松极限。人们希望验证的最基本、最重要的性质是，~在 $M(r)$ 的矩阵元上定义的泊松括号 $\mathbb{S}(u)$ 可以改写为一个半经典杨-巴克斯特方程，其中 R_{MO} 来自 [MO18], ，正如单极子情形（2.8）中那样。

我们尚未尝试验证这一点，原因如下。正如第2 节关于半经典极限的讨论已经清楚表明的那样，对于主导移位杨代数，磁单极子散射矩阵并不严格满足杨-巴克斯特关系；它们未能满足该关系的情况由“Δ项”刻画。我们当然预期主导移位仿射Yangian也会有类似表现，因此，$\mathbb{S}(u)$ 不太可能是

杨-巴克斯特方程最朴素的形式。若没有一个通用框架来理解移位 Yangian 代数中杨-巴克斯特方程所产生的修正，那么尝试计算由$\mathbb{S}(u)$满足的方程这一特殊情形下的修正，似乎还为时过早（即使在简单得多的 $\mathfrak{gl}_r$移位杨代数情形下，这些修正的含义也已经不甚明了）。

虽然关于假想的“修正杨-巴克斯特方程”几乎没有任何有用的已知结果，但有一点很清楚：修正项总是涉及正的谱变量的幂 u，正如我们在 Δ项（2.8）中所见。值得欣慰的是，在上面给出的显式公式 $G(\zeta, w)$ 中，$\mathbb{S}(u)$ 的矩阵元会随着我们深入 u 展开而出现任意大的正幂 ζ，w 而矩阵元中关于 u 的负次数部分则基本上是统一的，并由$\det(u - B_2B_1) = 0$ 处的极点所控制，这些极点由命题5.1的一般构造所决定。

5.2.4 $G(\zeta, w)$ 与向量-向量 R-矩阵

$\widehat{\mathrm{Y}}_{+1}(\mathfrak{gl}_1)$ 具有一种称为向量表示的表示，因此 Fock 表示可以粗略地看作向量表示的半无限楔积（例如，参见 [Tsy17], [Fei+11] ，关于未移位的情形）。据我所知，即使在未移位的情形下，也没有已知的向量表示对之间的R-矩阵公式。

根据定理 5.6 ，自然可以猜想，在 $n = 1$ 瞬子背景下，费米子传播子的以下量子化是两个向量表示之间的一个 R-矩阵（详见下一段）

$$\widehat{G}(\zeta, w; u) = \frac{w}{w-x}\frac{1}{u-x\partial_x}\frac{1}{\zeta-\partial_x} + \left(\frac{1}{w-x}\frac{1}{\zeta-\partial_x}+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(u+k+1)}{\Gamma(u+1)}w^{-k}\zeta^{-k-1} \tag{5.22}$$

为方便起见，我们将所有参数都设为 1。

该公式应按如下方式理解为一个 R-矩阵：提取 $\zeta^{-m-1}w^{-n}$ 的一个系数，可得到一个关于 u^{-1} 的形式劳伦级数，其系数是作用于 x-坐标的微分算子。我们预期，这一展开中出现的微分算子会生成 $\mathrm{Y}_{+1}(\mathfrak{gl}_1)$ 在向量表示中的作用，而该向量表示由 x-坐标的某类适当函数构成。反过来，将此表达式作用于测试函数 $f(x)$，并将 $\widehat{\ }$ 与另一个函数 $g(x)$ 配对，就可以将系数 $(g(x)\ G(\zeta,\ w;\ u)\ \cdot f(x))$ 视为关于 u^{-1} 的洛朗级数，其系数是作用于 $\curlywedge\zeta$ 或 w 上函数的算子积分核；这些积分算子同样应生成 $\mathrm{Y}_{+1}(\mathfrak{gl}_1)$ 在由 ζ 或 w 的函数构成的向量模中的作用。这里的“积分”指形式地提取留数。$\curlywedge$

G 也应满足某种“杨–巴克斯特”方程，其中可能会出现谱变量 u 的正次数修正项。

5.3 从 $\mathbb{S}(u)$ 得到的单极子散射矩阵

在这一最后部分，我们将把这一系列思想闭合起来，并说明单极子散射矩阵（至少对于某些荷值 λ 和 μ 附录 A中的记号）可以从 $\mathbb{S}(u)$ 推导出来。这表明，本文讨论的所有半经典 R-矩阵

都可以纳入一个统一的框架。在本节中，为了得到有意义的单极子散射矩阵，我们需要假设秩为 $r > 1$ 。

5.3.1 数学动机

从数学上说，理解这一点的策略如下。 $U(r)$ 单极子$\widetilde{\mathcal{M}}_{-\mu}^{-\lambda}$作为 $\mathbb{C}^\times$ 作用量在 $\widetilde{M}(n,\ r)$ 上的不动点集出现，当

$$n = \frac{1}{2}(\|\lambda\|^2 - \|\mu\|^2). \tag{5.23}$$

从微分几何的角度看，这可以追溯到 Kronheimer 的一个观察Kro以及作用量可视为一种自然作用量的复化，该作用量由纤维的旋转所诱导(此处我们利用了以下事实：瞬子模空间与 Taub-NUT 空间上的复流形结构相同)。这一结果的一个版本可能对表示论学家更为熟悉：在型中，仿射格拉斯曼流形中的横截切片可以表示为中岛箭图簇，参见例如 MVBF。

定理5.6 的证明可以推广到的情形，以计算传播子；此时它带有如下指标(；)，，，……，。将限制到(，)中的不动点集后，可以证明它具有关于作用量的等变性。利用在自然诱导的作用量下的权分解，可以将其分解；在某种适当的约定下，其零权分量应当是仿射格拉斯曼切片的单极子散射矩阵／矩阵描述；这就是下文公式（5.34）的内容。

公式（5.34）以非常具体的方式，明确给出了仿射格拉斯曼切片的矩阵描述（沿用 [BFN18], [KP21] 的术语）与其作为类型 A 中岛簇的表示之间的对应关系。具体做法是将磁单极子散射矩阵系数表示为中岛簇不变环中的显式元素。我们预期，（5.34）直接在 [MV02], 的切片矩阵描述中实现同构，这一矩阵描述见 [BFN18]。请注意，我们也免费得到了到 $\hbar \neq 0$ 的仿射变形。

严格来说，我们并未给出（5.34）成立的完整数学证明；困难之处在于证明箭图簇的不变环中不存在其他关系，除了由施加于 S-矩阵系数的条件所蕴含的关系。根据单极子情形的经验，这似乎很可能成立，但本文不会对此进行证明。不过，我们会通过具体例子加以说明。这个猜想很可能可以归结为证明上述命题 5.1 中构造的态射是一个嵌入。

5.3.2 物理动机

让我们从物理角度重新阐述分析的动机和计划；思路就是把第3.1 节中从单极子散射矩阵推导出瞬子矩阵的论证步骤倒过来。

忽略非交换性（或者直接将其设为 0；在秩为$r > 1$ 的情形下，这样做造成的影响较小），算子 $\mathbb{S}(u)$ 源自曲线$\{zw = u\} \subset T^*\mathbb{C}$上的手征费米子路径积分。该曲线是映射下垂直线上方的纤维，其中 u 固定：

$T^*\mathbb{C} \to \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{C}$，即 $\mathbb{C}$ 所在的 u平面。假设我们的背景瞬子构型实际上在旋转纤维的圆周作用下是 S^1不变的，那么费米子问题便获得了 $U(1)$ 对称性。另一方面，根据 Kronheimer 的观察 S^1Kro [85]，这样的 S^1-不变瞬子构型等同于具有某种狄拉克奇点的单极子构型。 [85]

严格来说，要定义瞬子模空间上的 S^1-作用量，我们还需要选择一个将规范丛 $\mathcal{E}$ 提升为 S^1-等变向量丛的提升；这决定了渐近单极子荷 μ 以及原点处奇异单极子荷λ 的大小。

我们可以利用这一 $U(1)$ 作用量，将 $zw = u$ 上的费米子分解为沿 S^1 纤维的卡鲁扎–克莱因模；反向构造第 3.1节中的过程，便可精确地由零模对该路径积分的贡献确定单极子散射矩阵系数。实际上，这些一般是外代数 $\Lambda^\bullet(\mathbb{C}^r)$ 中的散射矩阵系数，而通常的 S-矩阵则是费米子数为 1的分量上的诱导映射。由于费米子理论是自由的，且各 KK 模彼此解耦，因此可直接从费米子传播子 $G(\zeta;w)$中读出结果：传播子分解为无穷多个彼此解耦的传播子，每个 KK 模对应一个，而零模对应的传播子恰好就是单极子散射矩阵。

此处需要注意， $G(\zeta;w)$ 应理解为关于 $z\to\infty,\sim w\to\infty$的渐近展开，因为根据附录 $\langle\psi^\alpha(y=T/2)\psi_\beta(y=-T/2)\rangle$, $\alpha,\beta=1,\dots,r$ 中散射矩阵的定义，只有在极限 $T\to\infty$下，散射矩阵才来自费米子量子力学中的期望值A。

5.3.3 单极子模空间作为 $\mathbb{C}^\times$-不动轨迹

我们以对我们有用的形式回顾 [BF10], [Kro85], [MV02] 的结果。考虑$\widetilde{\ }$仿射中岛簇 $M(n,r)$。取一个同态 $\mu\colon \mathbb{C}^\times\to GL_r$。不失一般性，我们可以假设 μ 落在极大环面中，并写作

$$\mu(t)=\operatorname{diag}(t^{\mu_\alpha})_{\alpha=1}^n \tag{5.24}$$

其中 $\mu_1\geq\cdots\geq\mu_r$和 $t\in\mathbb{C}^\times$为整数。

这定义了一个作用于 $\mathbb{C}^\times$ 的作用量 $\widetilde{M}(n,\ r)$: $t\in\mathbb{C}^\times$ 的作用方式为

$$t\cdot(B_1,B_2,I,J)=(tB_1,t^{-1}B_2,I\mu(t),\mu^{-1}(t)J). \tag{5.25}$$

注意，该作用量在 μ 沿 GL_r 中心的余特征移位后保持不变；因此不失一般性，我们可以假设 $\mu_1=0$。

通常，不动点集是若干个互不相交的 A_∞ 箭图簇的并：

$$\widetilde{M}(n,r)^{\mathbb{C}^\times}=\bigsqcup_{\sigma/\sim}\widetilde{M}_\sigma \tag{5.26}$$

其中的并集遍历满足以下条件的 σ 的共轭类： $\mathbb{C}^\times\to GL_n$ 求解

$$\begin{aligned} tB_1&=\sigma(t)B_1\sigma^{-1}(t)\\ t^{-1}B_2&=\sigma(t)B_2\sigma^{-1}(t)\\ I\mu(t)&=\sigma(t)I\\ \mu^{-1}(t)J&=J\sigma^{-1}(t)\end{aligned} \tag{5.27}$$

并且，对于给定的 σ,

$$\widetilde{M}_\sigma := \{(B_1, B_2, I, J) | [B_1, B_2] + IJ = \hbar \text{ and } (5.27)\}/G_\sigma \tag{5.28}$$

其中， G_σ 是 GL_n中 σ 的中心化子。每个 M_σ 都是一类 A_N 箭图簇，其中N = #（ G_σ中的 GL 因子）。取特例 $\hbar = 0$，我们可将 Uhlenbeck 模空间 $M_0(n, r)$（一个奇异仿射簇）中的不动点集类似地分解为若干连通分支，记作$M_{0,\sigma}$。

现在注意，在瞬子模空间的不动点集上，泛层的纤维$\mathcal{E}$ 在 0 处的 $T^*\mathbb{C}$ 变为一个 $\mathbb{C}^\times$-表示，而根据 ADHM 复形（见附录C），其特征标可通过以下方式计算

$$\chi\left(\mathcal{E}\Big|_0\right) = \mathrm{tr}_W(\mu(t)) - (1-t)(1-t^{-1})\,\mathrm{tr}_V(\sigma(t)). \tag{5.29}$$

给定 t时，这是不动点集上的局部常值函数，我们可以写作

$$\chi\left(\mathcal{E}\Big|_0\right) = \sum_{\alpha=1}^{r} t^{\lambda_\alpha} \tag{5.30}$$

对于整数 λ_α，其顺序为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$；我们将这些整数视为另一个余特征$\lambda$。 σ 确定 λ ，反之亦然，且相差一个共轭。注意， μ 与 λ 并非可以任意关联：它们必须相差一个余根，并满足例如 $\sum_\alpha \lambda_\alpha^2 \geq \sum_\alpha \mu_\alpha^2$。关于[MV02]的断言可转述为：

$$M_{0,\sigma} \simeq \overline{\mathcal{M}}^{-\lambda}_{-\mu} \tag{5.31}$$

其中 σ、 μ 满足关系式（5.29），且单极子模空间/仿射格拉斯曼切片$\mathcal{M}^{-\lambda}_{-\mu} = \mathcal{W}^{-\lambda}_{-\mu}$ 如附录（A.43）所述；该同构是仿射代数簇层面的同构。以这种形式表述，该结果本质上是 Kronheimer 的观察 [Kro85]，它通过 [KW07]中开创的单极子模空间与仿射格拉斯曼切片之间的对应关系得以建立。

关于约定的说明。为免读者困惑，我们需要指出，文献中通常将 $\mathcal{W}^\lambda_\mu$ 定义为 主导的 λ。利用（A.43），该定义对任意 λ都有意义。对（λ、 μ）施加魏尔群作用，以及同时变号（λ、 μ） $\mapsto$（$-\lambda$、 $-\mu$）不会改变底层代数簇，但会改变散射矩阵/到 GL_r（u）中的嵌入（通过（A.43））：魏尔群作用会用相应的置换矩阵共轭散射矩阵，而变号则会将散射矩阵替换为其逆矩阵。我们在此引入这个符号，以避免在下文的（5.34）中求矩阵逆。

关于仿射变形的注记。容易看出，固定点集 $M_\sigma \simeq \mathcal{M}^\lambda_\mu(\hbar)$ 对应于单极子模空间的仿射变形，其中狄拉克奇点位于 u-平面上坐标为 $\hbar$ 的整数倍的位置。这与命题 $\mathbb{S}(u)$ 中 $u \in \hbar\mathbb{Z}$ 处的极点相吻合，参见命题 5.1，这也符合我们的总体图景。

5.3.4 高秩情形下的费米子传播子与等变性

在第5.2节中，计算了秩为 $r=1$ 情形下的费米子传播子 $G(\zeta;w)$。定理 5.6 的证明可直接推广到秩为 $r>1$ 的情形。唯一的区别是，此时算子 $\mathbb{S}(u)$ 对应于 $\mathcal{F}^{\mathrm{in}}\otimes\mathcal{F}^{\mathrm{out}}$ 中的一个张量，其中 $\mathcal{F}^{\mathrm{in/out}}$ 是 r-$\widetilde{\ }$ 分量的费米子福克空间。我们将各分量中的费米子记作 $\psi^{\alpha}(w)$、$\psi_{\alpha}(\zeta)$，其中 $\alpha=1$、$\dots r$。指标 α 对应于在框架空间 W 中选取一个基；相应地，将 ADHM 数据 I、J 的分量记作 $J^{\alpha}\in V^{*}$ 和 $I_{\alpha}\in V$。

于是我们得到定理 5.6 在秩 $r>1$ 情形下的如下推广：

命题 5.7。

$$G_{\alpha}{}^{\beta}(\zeta;w):=\frac{\langle 0|\,\widetilde{\psi}_{\alpha}(\zeta)\mathbb{S}(u)\psi^{\beta}(w)\,|0\rangle}{\langle 0|\,\mathbb{S}(u)\,|0\rangle}=J^{\beta}\frac{w}{w-B_2}\frac{1}{u-B_2B_1}\frac{1}{\zeta-B_1}I_{\alpha}+\left(J^{\beta}\frac{1}{w-B_2}\frac{1}{\zeta-B_1}I_{\alpha}+\delta_{\alpha}^{\beta}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^{k}\frac{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+k+1)}{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+1)}w^{-k}\zeta^{-k-1}\tag{5.32}$$

其中 δ_{α}^{β} 是 *Kronecker δ*符号。

由此公式立即可知，若将 (B_1,B_2,I,J) 限制在$\widetilde{M}(r)^{\mathbb{C}^\times}\subset\widetilde{M}(r)$ 上，其中该不动点集对应于 $\mathbb{C}^\times$ 由余特征 μ 按第 5.3.3节所述定义的作用量，则$G_{\alpha}{}^{\beta}(\zeta;w)$ 满足以下等变性：

引理 5.8。

$$G_{\alpha}{}^{\beta}(t\zeta;t^{-1}w)\Big|_{\widetilde{M}(r)^{\mathbb{C}^\times}}=t^{\mu_\alpha-\mu_\beta-1}G_{\alpha}{}^{\beta}(\zeta;w)\Big|_{\widetilde{M}(r)^{\mathbb{C}^\times}}.\tag{5.33}$$

证明。 根据命题 5.7 和（5.27）。 □

这意味着，关于自然诱导的 $\mathbb{C}^\times$-作用量，

$$\mathrm{End}(W)\otimes H^{0}\Big(\widetilde{M}(r)^{\mathbb{C}^\times},\mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)^{\mathbb{C}^\times}}\Big)(u)\otimes\mathbb{C}[[\zeta^{-1},w^{-1}]],$$

$G_{\alpha}{}^{\beta}(\zeta;w)$ 属于权重为 -1 的子空间。鉴于上面的讨论，提出以下猜想似乎是自然的。

猜想 5.9。定义一个 $r\times r$ 矩阵

$$S_{\alpha}{}^{\beta}(u):=\mathrm{Coeff}[w^{\mu_\beta}\zeta^{\mu_\alpha-1}]\left(G_{\alpha}{}^{\beta}(\zeta;w)\Big|_{\widetilde{M}(r)^{\mathbb{C}^\times}}\right).\tag{5.34}$$

其元素是在 $\mathbb{A}^1_u\times\widetilde{M}(r)^{\mathbb{C}^\times}$ 上的有理函数，在轨迹$\det(u-B_2B_1)$ =0处有极点。回顾第*5.3.3*节的约定，$\mu_r\le\cdots\le\mu_1=0$。于是 $S_{\alpha}{}^{\beta}(u)$ 在(5.26) 的每个连通分支上，均限制为 $\widetilde{\mathcal{M}}^{-\lambda}_{-\mu}$/仿射格拉斯曼切片的矩阵描述的单极子散射矩阵 $\widetilde{\mathcal{W}}^{-\lambda}_{-\mu}$，对应于同构(5.31)。

请注意，这里假设 $\mu_1 = 0$ 很重要，尽管 $\mathbb{C}^\times$-作用量本身与这一选择无关；否则，$S(u)$ 中的一些元素会出于平凡的原因恒等于零。之所以需要这样做，追溯起来是因为佐藤格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H}_{\text{in}} \oplus \mathcal{H}_{\text{out}})$ 取决于为 $\mathbb{C}^\times$ 在 $T^*\mathbb{C}$ 上的作用选择吸引方向。只要 $\mu_1 \leq 0$，这个猜想就应该成立。值得进一步深入研究 $\mathfrak{gl}_\infty$ 四元数的平移自同构为何会出现。

如果已知态射 $\widetilde{M}(n, r) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H}_{\text{in}} \oplus \mathcal{H}_{\text{out}})$ 在命题5.1 中构造的嵌入，那么这个猜想很可能可以由引理5.8推出。有趣的是，这个猜想意味着散射矩阵在某种意义上独立于 λ。下面将通过一些简单的示例来说明这个猜想。

5.3.5 示例：当 $\widetilde{\mathcal{M}}_{-\mu}^{-\lambda}$ 是一个余伴随轨道时

（5.34）最容易理解的情形是特殊情况：当 $\widetilde{\mathcal{M}}_{-\mu}^{-\lambda}$ 同构于 $\mathfrak{gl}_r^*$ 中的一个余伴随轨道时。根据第5.3.3节的讨论，这种情况发生在 $\mu = 0$ 且

$$\mathrm{tr}_V\, \sigma(t) = n_0 + n_{-1}t^{-1} + \cdots + n_{-(\ell-1)}t^{-(\ell-1)}. \tag{5.35}$$

其中 $r > n_0 > n_{-1} > \cdots > n_{-(\ell-1)} \geq 0$。相应的$\widetilde{\mathcal{W}}_{-\mu}^{-\lambda}$是对余切丛的仿射变形；该余切丛属于描述长度为 ℓ 的旗 $V_{-(\ell-1)} \subset \ldots V_{-1} \subset V_0 \subset \mathbb{C}^r$ 的部分旗簇，其中 $\dim V_{-i} = n_{-i}$。V_{-i} 对应于 $\mathbb{C}^\times$ 作用下 V 的 $-i$ 权空间。

在不动点集上，$B_1 :\ V_{-i-1} \to V_{-i}$，特别是$B_1\big|_{V_0} = 0$。于是由（5.34），

$$S_\alpha{}^\beta(u) = \delta_\alpha^\beta + J^\beta \frac{1}{u - B_2 B_1\big|_{V_0}} I_\alpha = \delta_\alpha^\beta + \frac{1}{u} J^\beta I_\alpha. \tag{5.36}$$

众所周知，这是余伴随轨道对应的正确散射矩阵，因为 $J^\beta I_\alpha$与箭图描述中的 $\mathfrak{gl}_r$-矩映射重合，而施加于散射矩阵上的条件（A.43）将其限定为 $1+u^{-1}\boldsymbol{\mu}$的形式，其中 $\boldsymbol{\mu}$是 $\mathfrak{gl}_r$矩映射。这也是半经典的 R-矩阵，对应于$\mathsf{Y}(\mathfrak{gl}_r)$，它使一个 r维模与一个由 $T^*(GL_r/P)$量子化得到的模发生编织，其中抛物子群 P由 λ确定，等价地 σ。注意

$$\begin{aligned}
\det S(u) &= \frac{1}{u^r}\det{}_W(u + JI) \\
&= u^{-n_0}\det{}_{V_0}(u + IJ) \\
&= u^{-n_0}\det{}_{V_0}(u + \hbar - B_{1,-1}B_{2,0}) \\
&= u^{-n_0}(u+\hbar)^{n_0-n_{-1}}\det{}_{V_{-1}}(u + \hbar - B_{2,0}B_{1,-1}) \\
&= \ldots \\
&= \prod_{j=0}^{\ell}(u + j\hbar)^{n_{-(j-1)}-n_{-j}}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

通常根据 $\mathbb{S}(u)$ 沿 $u \in \hbar\mathbb{Z}$ 的极点来确定。

5.3.6 示例： A_2 曲面

正幂 u 出现的最简单例子（即得到主导移位的 Yangian）是 A_2 曲面。这对应于我们当前约定中的选择 $r=2$, $\mu=(0,\ -1)$ 和 $\lambda=(1,\ -2)$。将 $I,\ J$ 的分量写作 $I_0\in V_0$, $I_{-1}\in V_{-1}$，对于 $J^0,\ J^{-1}$ 也类似。 $B_1,\ B_2$ 的唯一非零分量是 $B_{1,\ -1}:\ V_{-1}\to V_0$,$B_{2,\ 0}:\ V_0\to V_{-1}$，且 $\dim V_0=\dim\ V_{-1}=1$。

我们根据（5.34）

$$\begin{aligned}
S_1{}^1(u)&=J^0\frac{1}{u-B_2B_1\big|_{V_0}}I_0+1=1+\frac{1}{u}J^0I_0\\
S_1{}^2(u)&=J^{-1}B_{2,0}\frac{1}{u-B_2B_1\big|_{V_0}}I_0=\frac{1}{u}J^{-1}B_{2,0}I_0\\
S_2{}^1(u)&=J^0\frac{1}{u-B_2B_1\big|_{V_0}}B_{1,-1}I_{-1}=\frac{1}{u}J^0B_{1,-1}I_{-1}\\
S_2{}^2(u)&=\frac{1}{u}J^{-1}B_{2,0}B_{1,-1}I_{-1}+J^{-1}I_{-1}+u+\hbar.
\end{aligned}\tag{5.38}$$

很容易看出，矩阵系数生成了 A_2 箭图的不变环，并且 ADHM 关系

$$\begin{aligned}
B_{1,-1}B_{2,0}+I_0J^0&=\hbar\\
-B_{2,0}B_{1,-1}+I_{-1}J^{-1}&=\hbar
\end{aligned}\tag{5.39}$$

蕴含

$$\det S(u)=\frac{1}{u}(u+\hbar)(u+2\hbar).\tag{5.40}$$

这有一个极点和两个零点，正如 $-\lambda=(-1,\ 2)$ 所规定的那样。在 u 中取系数，便得到仿射变形 A_2 曲面的通常描述。

显然，对于 $\mathfrak{gl}_2$ 的更多主导移位杨代数， $G_\alpha{}^\beta(\zeta;w)$ 中无穷级数的更多项将对 $S_2{}^2$ 有贡献。

5.3.7 示例：三维镜像到 $T^*Gr(n,2n)$

最不平凡的一类例子是那些通过三维镜像对称与 $T^*\mathrm{Gr}(n,2n)$相关的簇，在这些例子中可以直接验证（5.34）成立。它们对应于 $r=2,\mu=0,\ \lambda=(n,-n)$。在这种情况下， λ 决定了

$$\mathrm{tr}_V\,\sigma(t)=n+(n-1)(t+t^{-1})+\cdots+t^{n-1}+t^{1-n}.\tag{5.41}$$

B_1 分解为映射$B_{1,\ i}:\ V_i\to V_{i+1}$ 以及 B_2 分解为映射$B_{2,\ i}:\ V_i\to V_{i-1}$。矩映射条件为

$$\begin{aligned}
B_{1,-1}B_{2,0}-B_{2,1}B_{1,0}+\sum_\alpha I_\alpha J^\alpha&=\hbar\\
B_{1,i-1}B_{2,i}-B_{2,i+1}B_{1,i}&=\hbar,\ \ i\neq 0.
\end{aligned}\tag{5.42}$$

由（5.34）可读出

$$S_\alpha{}^\beta(u) = \delta_\alpha^\beta + J^\beta \frac{1}{u - B_{2,1}B_{1,0}} I_\alpha \tag{5.43}$$

对于 α，$\beta = 1, 2$。显然 $S(u) = 1 + O(u^{-1})$ 对于 $u \to \infty$，这确保其满足（A.43）中的高斯分解条件。要检验（A.43）中的第二个条件，只需考察行列式

$$\det S(u) = \frac{\det(u - B_{2,1}B_{1,0} + IJ)}{\det(u - B_{2,1}B_{1,0})}. \tag{5.44}$$

反复应用矩映射条件，并利用对于矩形矩阵 A，B，$\det(1 + AB) = \det(1 + BA)$，可得

$$\begin{aligned} \det(u - B_{2,1}B_{1,0}) &= u(u - \hbar)\dots(u - (n-1)\hbar) \\ \det(u - B_{2,1}B_{1,0} + IJ) &= (u + \hbar)\dots(u + n\hbar). \end{aligned} \tag{5.45}$$

我们看到，$\det S(u)$ 是一个有理函数，其 n 零点和 n 极点位于 $\hbar$ 的整数倍处，这与 $-\lambda = (-n, n)$ 以及 $\mathbb{S}(u)$ 的一般特征相符。

附录

磁单极子散射综述

磁单极子散射变换是经典规范理论中的一种构造，曾由 Atiyah、Hitchin、Hurtubise、Jarvis 等众多学者研究 [AH88], [Hit82], [Hur85], [Jar98]。为帮助读者了解背景，我们将在本附录中介绍磁单极子散射。本附录并无本质上的新内容，不过，仔细考察磁单极子散射变换可能会为构建通用的 RTT 移位 Yangian 代数形式体系带来有价值的见解，这一点已逐渐明朗。因此，我们尽可能详尽地阐述了单极子模空间上的泊松结构（Yangian 的半经典印记）。

我们将研究规范群 $G = U(r)$ 的情形。在本附录中，我们给出纯形式化的处理，即不讨论微妙的解析问题。

A.1 磁单极子模空间：基本定义

要恰当地讨论磁单极子模空间，需要做一些准备并给出若干定义，我们将在本节中介绍。

A.1.1 设定与记号

我们在 $\mathbb{R}^3$ 上使用笛卡尔坐标（x^1, x^2, x^3）和标准欧几里得度量。我们还会使用球坐标，记为（r, θ, ϕ）。我们研究秩为 r 的酉向量丛 $E \to \mathbb{R}^3$，其酉联络记为 A。在局部坐标中，A 由一个取值于 $r \times r$ 反厄米矩阵的1-形式 A_i 给出，指标为 $i = 1$，2、3。我们还引入一个标量场 ϕ，它是向量丛 End(E) 的实值截面（实值意味着其取值于 U的李代数 r）。

如果一对（A, ϕ）满足方程，则称其为一个单极子构型

$$F_A + \star D_A\phi = 0 \tag{A.1}$$

该方程联系了曲率 $F_A = dA + A \wedge A$ 和协变导数 $D_A\phi = d\phi + [A, \phi]$。这里，$\star$ 表示通过 $\mathbb{R}^3$上的欧几里得度量在微分形式上诱导的霍奇星算子。这是关于A 和 ϕ分量的非线性一阶偏微分方程组。不过请注意，如果将规范群替换为其极大环面，该方程组就会变为线性的；更不变地说，如果我们将 E 优选地分解为线丛的直和，并要求（A, ϕ）保持这一分解。

我们希望研究单极子方程的解的模空间，并将相差一个规范变换（ E的光滑自同构，且当 $r \to \infty$ 时趋于恒等变换）的两个解视为等价。为了得到合理的模空间，我们必须指定当 $r \to \infty$ 时在 (A, ϕ) 上的边界条件。要严谨地陈述这一边界条件，需要稍作铺垫。

A.1.2 狄拉克单极子

狄拉克单极子构型是在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上定义的一个参考构型，它取决于余特征 $\rho : \mathbb{C}^\times \to (\mathbb{C}^\times)^r \hookrightarrow GL_r$，我们将其视为由 r 个整数组成的集合 $(m_1, \ldots, m_r)$。令 $m = \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_r)$ 表示相应的对角矩阵。m 称为狄拉克单极子的荷。

狄拉克单极子的底层向量丛在拓扑上是非平凡的，可以抽象地描述如下。令 $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$ 表示沿径向平移取商，并将 $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$视为……。记 $\mathcal{O}(k)$ 为 $\mathbb{P}^1$ 上次数为 k 的、在同构意义下唯一的线丛；它可以看作是通过 $U(1)$ 的权为 $-k$ 的表示与霍普夫丛 $S^3 \to S^2$关联而成的。于是 $E = \pi^*(\mathcal{O}(-m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(-m_r))$，相对于这一线丛分解，标量场在坐标中的表达式为

$$\phi_D(r) = -\frac{im}{2r}. \tag{A.2}$$

我们很容易算得

$$\star d\phi_D = \frac{im}{2r^2} \star dr = \frac{im}{2} \sin\theta d\theta \wedge d\phi \tag{A.3}$$

其中 $(r,\ \theta,\ \phi)$ 是 $\mathbb{R}^3$中的标准球坐标。由此可读出“联络” $A = \frac{im}{2} \cos\theta d\phi$，它满足方程 $F_A + \star \mathcal{D}_A \phi = dA_D + \star d\phi_D = 0$。然而，这个联络在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$处定义不良，因为 ϕ 在那里不是一个好的坐标。因此，我们用两个补丁覆盖 S^2 （“N”表示北，“S”表示南），并在每个补丁中将联络定义为

$$\begin{aligned} A^S &= \frac{im}{2}(1 + \cos\theta) d\phi \\ A^N &= \frac{im}{2}(\cos\theta - 1) d\phi. \end{aligned} \tag{A.4}$$

这样设计后，A^S 在 $\theta = \pi$ 附近定义良好，而 A^N 在 $\theta = 0$附近定义良好。注意，$A^N - A^S = e^{im\phi} d e^{-im\phi}$，这反映了 E 是通过过渡函数 $e^{im\phi}$由两个平凡向量丛粘合而成的这一事实。

我们将一个荷为 m 的参考狄拉克场记为 $(A_{D,\ m},\ \phi_{D,\ m})$。请牢记一个众所周知的事实：定义非平凡荷狄拉克单极子的联络，无法在整个 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$上用单一规范表示；这一点将在下文确定散射矩阵的渐近行为时发挥重要作用。

A.1.3 无穷远边界条件

了解上述记号后，我们现在可以陈述如下结果。取一个余权 $(\mu_1,\ \ldots\ldots,\ \mu_r)$。我们寻找满足（A.1）的解，使得当 $r \to \infty$ 时，有

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &\to -i\mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_r) - \frac{i\mu}{2r} + \ldots \\ A(\vec{x}) &\to A_{D,\mu} + \ldots \end{aligned} \tag{A.5}$$

其中点号表示关于 $r \to \infty$衰减更快的项。为了避免反复强调显而易见之事，在写这些方程时，我们还默认要求我们的向量丛 E 满足

在某个开集 $U \subset \mathbb{R}^3$上存在一个光滑同构 $E\big|_U \simeq \pi^*(\mathcal{O}(-\mu_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(-\mu_r))$；该开集是某个半径 $R \gg 0$足够大的球 $\{|x| \leq R\}$ 的补集，而上述公式是相对于这一识别写出的。 ϕ_i 是实数，我们假设它们互不相同且按 $\phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_r$排序。我们将 ϕ_i 称为对称性破缺参数，因为它们使无穷远处的规范群破缺为其极大环面。

A.1.4 光滑单极子的模空间

令 $\mathcal{G}_\infty \subset \mathrm{Aut}(E)$ 为在 $r \to \infty$ 时趋于 1 的规范变换子群。我们将荷为 μ 的光滑单极子的模空间记为 $\mathcal{M}_\mu$ ，并作如下

定义 A.1.

$$\mathcal{M}_\mu := \{(A,\phi) | F_A + \star D_A\phi = 0, \ \text{boundary conditions (A.5)}\}/\mathcal{G}_\infty. \tag{A.6}$$

用这些术语表述时，模空间是一个无限维空间被一个无限维群取商所得，因此它是否确实是一个合理的有限维空间尚不明确。下文将讨论的散射变换的主要应用之一，是它能够（至少形式上）通过以代数几何条件取代偏微分方程，为单极子模空间提供一种易于处理的有限维描述。

注意，荷 μ 不能是任意余权，原因如下。作为 $\mathbb{R}^3$ 上的向量丛， E 在拓扑上必然是平凡的；特别是，它在任意大半径球面上的限制也必然平凡。只有当 $e^{-i\mu\phi}$ 在$\pi_1(U(r))$中表示平凡同伦类时，这才与来自狄拉克奇点的边界条件相容；而这当且仅当 $\det\left(e^{-i\mu\phi}\right) = 1$ 时成立。这意味着 μ 必须是余根。

A.1.5 狄拉克奇点

上述磁单极子模空间以满足单极子方程（A.1）且处处光滑的解为参数 $\mathbb{R}^3$。考虑存在奇点、但仅在某些点具有指定奇点的解非常有用，详见 [MRV14] ，其中对此进行了详细讨论。从 $p_1, \ldots, p_k$中删去若干点，并考虑定义在 $\mathbb{R}^3$上的向量丛 E及对(A,ϕ)，使其定义在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$上并满足 $F_A + \star D_A\phi = 0$，且无穷远处的边界条件由荷为 μ的狄拉克单极子给定。

对每个点 p_i，选取一个余权 λ_i ，并施加如下条件：相对于 p_i 附近将 $E = \oplus_i \mathcal{L}_i$ 分解为线丛直和的某种分解，

$$\begin{aligned} \phi(x) &\sim -\frac{i\lambda_i}{2|\vec{x} - \vec{x}_i|} + \ldots \\ A(x) &\sim A_{D,\lambda_i} + \ldots \end{aligned} \tag{A.7}$$

如 $\vec{x} \to \vec{x}_i$，其中点表示较弱奇异项。我们将$\mathcal{G}_{\infty,\ \{p_i\}} \subset \mathrm{Aut}(E)$记为规范变换子群，其元素在 $r \to \infty$ 处趋于恒等变换，并在 p_i附近稳定 λ_i。于是，我们得到一个狄拉克奇点背景下光滑单极子的模空间，其描述如下

定义 A.2。

$$\mathcal{M}^{\lambda_1,\dots,\mu}{}_{\lambda_k}(p_1,\dots,p_k) := \{(A,\phi)|F_A + \star D_A\phi = 0,\ \text{边界条件（A.5）和（A.7）}\}/\mathcal{G}_{\infty,\{p_i\}}. \tag{A.8}$$

我们尤其关注只有一个点的情形，该点可取为原点 $0 \in \mathbb{R}^3$，并且该处有一个余权 λ。我们用 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 表示相应的模空间。与上一小节类似的考量表明，$\lambda - \mu$ 必须是一个余根。

$\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 在非空时是实维数为 $4|\langle\rho$ 的光滑流形，$\mu - \lambda\rangle|$（ρ 表示韦伊向量），关于微分几何的讨论见 [MRV14]。它们因两个原因而非紧：其一是与$\mathbb{R}^3$的非紧性有关的“红外”效应；其二是称为单极子冒泡的“紫外”效应 [KW07]，令人联想到四维中的小瞬子现象。与瞬子模空间类似，$\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 允许进行部分紧化 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$；通常所得空间是奇异的，其中加入了“冒泡”构型。我们称这类紧化为乌伦贝克型紧化。下文将通过散射矩阵，以代数几何的方式给出其显式构造。当 λ 为零或极小时，不会发生单极子冒泡。

由于我们只对在无穷远处趋于 1 的规范变换取商，因此，在无穷远处保持边界条件形式不变的常数规范变换会在模空间 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 上非平凡地作用。由于对称性破缺参数 ϕ_i，这意味着先验地，只有极大环面 $T \subset G$ 会作用于给定的 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$。实际起作用的完整群是 μ 的中心化子，不过若没有 S-矩阵构造，这一点并不明显。

A.1.6 超凯勒结构与辛结构

磁单极子模空间 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 具有无限维超凯勒商的结构，因此是（至少形式上是）超凯勒流形，见 [AH88]。虽然形式上确实如此，但要用有限维的方式精确描述它们上的超凯勒结构，仍然是一个相当棘手的问题。

我们来回顾一下这些结论背后的形式论证。我们考虑由所有满足边界条件（$\mathcal{A}$ 联络和标量场组成的无限维空间 $(A,\ \phi)$（A.5）和（A.7）的联络和标量场构成的空间，并在其上定义度量

$$ds^2 = -\int_{\mathbb{R}^3\setminus\{p_j\}} d^3x\,\mathrm{Tr}\left(\delta A_i \otimes \delta A_i + \delta\phi \otimes \delta\phi\right) \tag{A.9}$$

以及辛形式三元组

$$\omega_i = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{p_j\}} d^3x\,\mathrm{Tr}\left(\delta A_i \wedge \delta\phi + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta A_j \wedge \delta A_k\right) \tag{A.10}$$

其中 ε_{ijk} 是完全反对称符号。无穷小自同构 $\epsilon(x)$ $\in$Lie($\mathcal{G}_{\infty,\{p_i\}}$) 按照通常的公式作用于场（记作 $D_i\epsilon = \partial_i\epsilon + [A_i,\epsilon]$）：

$$\begin{aligned}\delta A_i &= D_i\epsilon\\ \delta\phi &= [\phi,\epsilon].\end{aligned} \tag{A.11}$$

注意，$\mathcal{G}_{\infty,\{p_i\}}$ 中关于规范变换的条件意味着我们要求 $\epsilon(|x| \to \infty) \to 0$ 足够快地变化，并且 $\epsilon(x)$ 在 $x \to p_i$ 时保持正则，而 $[\epsilon(x)\ \lambda_i] =$（当 $x \to p_i$ 时趋于零）。

我们可以如下计算$\mathcal{G}_{\infty,\ \{p_i\}}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的作用量所对应的超凯勒矩映射。令 V_ϵ 为 $\mathcal{A}$ 上与李代数元素 $\epsilon(x)$相对应的向量场，并用 ι_V 表示与 V的内乘运算。于是，我们可以根据 (A.11) 进行计算

$$\begin{aligned}\iota_{V_\epsilon}\omega_i &= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{p_j\}} d^3x\ \mathrm{Tr}\left(D_i\epsilon\delta\phi - \delta A_i[\phi,\epsilon] + \varepsilon_{ijk}D_j\epsilon\delta A_k\right)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3\setminus\{p_j\}} \mathrm{Tr}\,\epsilon(x)\Big(D_i\delta\phi + [\delta A_i,\phi] + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(D_j\delta A_k - D_k\delta A_j)\Big)\\ &= -\delta(\langle\epsilon,\mu_i\rangle)\end{aligned} \tag{A.12}$$

其中

$$\langle\epsilon,\mu_i\rangle = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{p_j\}} d^3x\ \mathrm{Tr}\left(\epsilon(x)\Big(D_i\phi + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}\Big)\right). \tag{A.13}$$

在从公式 $\iota_V\omega_i$ 的第一行推导到第二行时，我们进行了分部积分，并利用了迹的若干性质。从第二行推导到第三行时，我们用到了联络曲率变分的公式 $\delta F_{ij} = D_i\delta A_j - D_j\delta A_i$。读者不妨验证，根据我们对 $\epsilon(x)$ 的假设以及对场的边界条件，从无穷远处的球面和包围 p_i 的无穷小球面进行分部积分时产生的边界项均为零。

由这一形式计算可见，方程 $F_A + \star D_A\phi = 0$ 等价于三元矩映射组 μ_i 的消失，因此我们可以改写为

$$\mathcal{M}_\mu^\lambda = \bigcap_{i=1}^{3}\mu_i^{-1}(0)\Big/\mathcal{G}_{\infty,\{p_j\}} \tag{A.14}$$

它将有限维空间 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 表示为无限维仿射空间对无限维群的超凯勒商。

由（A.10）可清楚看出，旋转 $\mathbb{R}^3$ 会使 ω_i 像三维向量一样旋转；结合超凯勒几何的基本事实，这尤其意味着，在 $\mathbb{R}^3$ 中选取一个方向，会在单极子模空间上诱导出一个优选的复结构。从此以后，我们只关注 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 作为复辛簇的情形，其所采用的复结构对应于 x^3 方向。在此复结构下， ω_3 被认作凯勒形式，而 $\Omega = \omega_1 + i\omega_2$ 则成为全纯辛形式。

A.2 散射矩阵的定义

散射变换是一种技术，可用更具体的术语来描述单极子模空间 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ inmuch，不过还须依赖下文将要讨论的标准猜想。本节将回顾散射矩阵的定义，并说明它属于何种对象。

A.2.1 实方程与全纯方程

与我们对 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C}\times$ is 所选的复结构相对应的是一个识别 $\mathbb{R} \ni u\ y$ ($u = x^1 + ix^2$, $y = x^3$)，其中 和 。在这些坐标下，我们有联络$A = A_u du + A_{\bar{u}} d\bar{u} + A_y dy$，并记 $D_u = \partial_u + A_u$、 $D_u = \partial_u + A_{\bar{u}}$、 $D_y = \partial_y + A_y$。复辛形式 Ω 与下式成正比：

$$\omega_{\mathbb{C}} = \int d^2u dy \,\mathrm{Tr}\left(\delta A_{\bar{u}} \wedge \delta(A_y + i\phi)\right). \tag{A.15}$$

由此可见，$(A_{\bar{u}}, A_y + i\phi)$ 为 $\mathcal{A}$ 上的特征性全纯坐标。方程 $F_A + \star D_A\phi = 0$ 化为

$$\begin{aligned} \left[\overline{D}_u, D_y + i\phi\right] &= 0 \\ \left[D_u, \overline{D}_u\right] + \frac{i}{2} D_y\phi &= 0. \end{aligned} \tag{A.16}$$

在此复结构下，第一个方程被解释为 $\mathcal{A}$ 上的复矩映射；第二个方程则是由凯勒形式 ω_3 导出的实矩映射。按照标准的推理，人们预期 Kempf-Ness 定理存在一个无限维类比（表达辛商与 GIT 商的等价性），并且单极子模空间可以表示为满足第一个方程的解空间，除以复值规范变换，并满足适当的稳定性条件。这使我们有理由相信散射变换是完备的（即 S-矩阵包含了单极子解的全部数据，精确到规范等价）。

A.2.2 散射变换的构想

非线性方程 $F_A + \star D_A\phi = 0$ 的内容，用全纯数据表示时，就是微分算子 D_u 与 $D_y + i\phi$ 对易这一条件。为了提取单极子解中的重要数据，我们沿用数学物理中一条成熟的思路：固定 u 的一个取值，并考虑相应的线性问题

$$(\partial_y + A_y(y, u, \bar{u}) + i\phi(y, u, \bar{u}))s = 0 \tag{A.17}$$

对于 s 在 $u =$ 为常数的垂直线上对 E 的限制的一个截面。该方程将具有一个单值矩阵，将 $y \to -\infty$ 处的解与 $y \to +\infty$处的解联系起来。因此，方程 $\left[\partial_u + A_{\bar{u}}, \partial_y + A_y + i\phi\right] = 0$ 本质上表明，在适当的规范下，只要避开所有狄拉克奇点的位置，这个单值矩阵就会在 u平面上全纯变化。事实证明，这一条件足以在有限维歧义范围内唯一确定单值矩阵，而这有限个参数恰好在模空间 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$中变化。现在我们将把这一图景阐述得更加精确、具体。

A.2.3 威尔逊线与全纯标架

线性问题（A.17）的单值矩阵可形式化地表示为复联络的威尔逊线／整体 $A_y + i\phi$：

$$W(y_f, y_i; u, \bar{u}) = \mathcal{P}\exp\left\{-\int_{y_i}^{y_f} dy (A_y(y, u, \bar{u}) + i\phi(y, u, \bar{u}))\right\}. \tag{A.18}$$

这给出了沿着 u = 恒定的直线，从初始位置 y_i 到最终位置 y_f 的平行移动矩阵。由 $\left[D_u, D_y + i\phi\right] = 0$ 可知， W 是协变全纯的，其含义是

$$\overline{D}_u W(y_f, y_i; u, \bar{u}) = \overline{\partial}_u W(y_f, y_i; u, \bar{u}) + A_{\bar{u}}(y_f, u, \bar{u}) W(y_f, y_i; u, \bar{u}) - W(y_f, y_i; u, \bar{u}) A_{\bar{u}}(y_i, u, \bar{u}) = 0. \tag{A.19}$$

为了提取一个实际上在 u 中关于 W全纯的矩阵，我们需要在全纯标架中表示它；这种标架由被 D_u湮灭的截面构造而成。最后，我们只关注该表达式在 $y_i \to -\infty$、 $y_f \to +\infty$时的渐近行为。

具体而言，这意味着我们研究满足相容方程组的解 $s(y,\ u,\ \bar{u})$

$$\begin{aligned}(\partial_y + A_y(y, u, \bar{u}) + i\phi(y, u, \bar{u}))s(y, u, \bar{u}) = 0 \\ (\overline{\partial}_u + A_{\bar{u}}(y, u, \bar{u}))s(y, u, \bar{u}) = 0.\end{aligned} \tag{A.20}$$

我们考察这些解在 $|y|$ 较大时的渐近行为，同时允许 u 取任意值。令 s_a^+、 $a = 1$、... ...、 r 表示定义在 y为较大正值区域内的解基，并类似地令 s_a^- 表示定义在 y为较大负值时的解基。我们构造矩阵 $g_\pm(y,\ u,\ \bar{u})$，其中 $= [s_1^\pm, \ldots, s_r^\pm]$ 在 y 为较大正值时定义，而 g_- 在 y为较大负值时定义。注意，在这个阶段， $g_\pm$ 仍是不明确的（即不能由磁单极子构型（$A,\ \phi$）唯一确定），因为可以在右侧乘以关于 u全纯变化的可逆矩阵；我们将在下一小节中说明如何部分消除这种不明确性。

定义 A.3。 单极子散射矩阵为

$$S(u) := \lim_{L\to\infty} g_+^{-1}(L/2, u, \bar{u}) W(L/2, -L/2; u, \bar{u}) g_-(-L/2, u, \bar{u}). \tag{A.21}$$

按照构造， $S(u)$ 的矩阵系数是变量u的全纯函数；由于场的正则性（$A,\ \phi$），它们在 u-平面上除狄拉克奇点的位置外均为正则函数。根据构造，显然矩阵系数还会在单极子模空间上全纯变化，其复结构由复坐标（$A_{\bar{u}},\ A_y + i\phi$）确定。

A.2.4 三角歧义

上文中， $g_\pm$ 矩阵基本上是随机选取的；我们希望尽可能消除这一辅助选择。通过更仔细地考察场（$A,\ \phi$）的渐近行为，可以做到这一点。

关键观察在于，在 $r \to \infty$ (A.5)处的边界条件给出了一类特殊的解的基底 $s_a^\pm$，这些解满足方程 $(D_y + i\phi)s = D_u s = 0$，适用于 y 很大且为正 y以及 $y \to +\infty$很大且为负 $1/y$的区域。首先考虑 $1/y$时解的行为。保留到 $1/y$阶的项，方程 (A.5)（狄拉克场采用北极规范）可写为：

$$\begin{aligned}\left(\partial_y + \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_r) + \frac{\mu}{2y}\right)s = 0 \\ \overline{\partial}_u s = 0.\end{aligned} \tag{A.22}$$

由此可见，对于每个 $a=1$，……，r，都存在一个解，当 $y\to+\infty$ 时其行为为

$$s_a^+(y,u,\bar{u})\sim e^{-\phi_a y}y^{-\mu_a/2}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ c_a(u)\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \tag{A.23}$$

其中 $c_a(u)$ 是关于 u 的处处不为零的整函数，而列向量中唯一的非零元素位于第 a 个位置。

虽然具有给定渐近行为的解 s_a^+ 确实存在，但仅凭渐近行为无法唯一确定它们。具有上述渐近行为的解 s_a^+ 只有在改变函数 $c_a(u)$，以及加上关于 $y\to\infty$ 衰减得更快的解之后，才能被唯一确定。如果我们任意选取一些具有所需渐近行为的参考解 $(s_1^+$，……，$s_r^+)$，则可用公式将其表示为一种冗余（这里我们假设对称性破缺参数按 $\phi_1<\cdots<\phi_r$ 的顺序排列）：

$$s_a^+(y,u,\bar{u})\mapsto\sum_{b\geq a}s_b^+(y,u,\bar{u})(h_+(u))^b{}_a. \tag{A.24}$$

我们可以将集合 $(h_+(u))^a{}_b$ 视为关于 u 的解析函数，其取值于可逆下三角矩阵中，记作 $h_+(u)$。我们将下三角矩阵构成的子群记作 $B_+\subset G_{\mathbb{C}}=GL_r$。因此，矩阵 $g_+(y,\ u,\ \bar{u})$ 一般由单极子构型 $(A,\ \phi)$ 唯一确定，但仍存在 $g_+(y,\ u,\ \bar{u})\mapsto g_+(y,\ u,\ \bar{u})h_+(u)$ 的不确定性。

类似的考量表明，g_- 的定义存在如下歧义：$g_-(y,u,\bar{u})\mapsto g_-(y,u,\bar{u})h_-(u)$，其中 h_- 取值于上三角矩阵子群 $B_-\subset GL_r$。

下一节将说明，事实上，S-矩阵可能具有的唯一奇点是极点（位于 $u\to\infty$ 处以及狄拉克奇点的位置），其阶数由 μ 和 λ中的整数确定。也就是说，在适当的（代数）规范类 $S(u)$中，它将是 $G_{\mathbb{C}}(u)$的一个元素（即条目为变量u的有理函数的可逆矩阵）。

保持这类规范的三角歧义，是指函数 $h_\pm(u)$不仅解析，而且实际上是代数的情形，因此，在 u-平面上正则这一条件迫使它们为多项式。我们将取值于 $B_\pm$的多项式函数记作 $B_\pm[u]$——注意，由于要求矩阵对 u的每个取值行列式都非零，这类矩阵的对角项必须为常数。于是，散射矩阵典范地取值于双陪集 $B_+[u]\backslash G_{\mathbb{C}}(u)/B_-[u]$，而将磁单极子赋给其散射数据（$A,\ \phi$）的映射 $\mapsto S(u)$给出了一个典范映射

$$\mathcal{M}_\mu^\lambda\longrightarrow B_+[u]\backslash G_{\mathbb{C}}(u)/B_-[u]. \tag{A.25}$$

人们预期散射变换是完备的，也就是说，该映射实际上是一个嵌入。在秩 2 情形下，若 $\lambda=0$，这可由 [Don84] 推出，正如 [Hur85]中所观察到的。关于 $\lambda=0$，但一般的 G 和 μ，Jarvis 已得到了相应结果 [Jar98]。据作者所知，对于非零的 λ，尚无完整证明，尽管这一结果几乎可以肯定成立。

或许可以通过将我们的公式（5.34）与对描述相应奇异磁单极子构型的 Nahm 方程的分析进行比较，来证明这一结果。

这个映射可用于赋予 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 代数簇结构，而本文中我们通常正是以这种方式看待 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$。请注意，通过此映射将 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$视为代数簇时，其复结构自动与规范理论所产生的复结构相容；在后者中，$(A_{\bar{u}},\ A_y + i\phi)$ 是全纯坐标。

A.3 散射矩阵的确定

现在我们将研究如何确定 $S(u)$ 在其奇点附近的渐近行为。这将刻画 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 作为复流形的结构，并在假设散射变换完备的前提下，将其 Uhlenbeck 型偏紧化 $\mathcal{M}_\mu^\lambda$ 构造为仿射代数簇。由于边界条件（A.5）、（A.7），关键计算是确定任意荷的狄拉克单极子的散射数据。

A.3.1 狄拉克单极子的散射数据

现在我们将计算在荷为 m的狄拉克单极子场这一特殊情形下的 $S(u)$。在（y，u，$\bar{u}$）坐标中，规范场由下列表达式给出（其中包含了对称性破缺参数，不过它们实际上不起什么作用）：

$$\begin{aligned}\phi(y,u,\bar{u}) &= -i\mathrm{diag}(\phi_1,\dots,\phi_r) - \frac{im}{2\sqrt{y^2+|u|^2}} \\ A^{N,S}(y,u,\bar{u}) &= \frac{im}{2}\Big(\frac{y}{\sqrt{y^2+|u|^2}} \pm 1\Big)\frac{1}{2i}\Big(\frac{du}{u} - \frac{d\bar{u}}{\bar{u}}\Big)\end{aligned} \tag{A.26}$$

± 1 上的符号根据北部图/南部图来选择；注意北对应 $y \to +\infty$，南对应 $y \to -\infty$。特别地，我们看到，当 y很大时，在各自的图中，A^N 和A^S 的主导阶都趋于零，并且 A 的 y分量恒等于零$A_y = 0$。

利用初等积分

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dy}{\sqrt{y^2+|u|^2}} = 2\ln\left(\frac{L}{2|u|} + \sqrt{1+\frac{L^2}{4|u|^2}}\right) \tag{A.27}$$

我们很容易求得渐近行为（注意，这里处理的是阿贝尔规范场，因此不需要路径排序）：

$$\exp\left\{-\int_{-L/2}^{+L/2} dy(A_y(y,u,\bar{u}) + i\phi(y,u,\bar{u}))\right\} \sim \mathrm{diag}\left(e^{-\phi_1 L}\Big(\frac{L}{|u|}\Big)^{-m_1},\dots,e^{-\phi_r L}\Big(\frac{L}{|u|}\Big)^{-m_r}\right) \tag{A.28}$$

对于 $L \to \infty$。要确定 $g_\pm$ 矩阵，我们只需找出$y \to \pm\infty$的渐近解。渐近解 s^- 对于 $y \to -\infty$ 在主阶上满足方程

$$\begin{aligned}(\partial_y + \mathrm{diag}(\phi_1,\dots,\phi_n) - m/2y)s^+ &= 0 \\ (\overline{\partial}_u + A^S_{\bar{u}})s^- &= 0.\end{aligned} \tag{A.29}$$

由于 $A_{\bar{u}}^{S}$ 在 y趋于无穷大时于主阶上消失，最一般的渐近截面 s^{-} 具有如下形式的分量 $s^{-,\,i}$，$i=1,\ \ldots\ldots,\ r$

$$s^{-,i}(y,u,\bar{u}) \sim e^{-\phi_i y}(-y)^{m_i/2}h_{-,i}(u) \tag{A.30}$$

对于 $y \to -\infty$，其中 $h_{-,\,i}(u)$ 是关于 u 的处处非零整函数。请注意，上文讨论的三角歧义并不会出现，因为描述狄拉克单极子的场由对角矩阵给出，因此问题实质上归结为 1×1 情形。我们可以选择一种规范，使 h_- 是 u 的代数函数，而不只是解析函数；此时可知 h_- 必须是常数。舍去常数后，我们得到

$$g_-(-L/2,u,\bar{u}) \sim \mathrm{diag}\Big(e^{\phi_1 L/2}L^{m_1/2},\ldots,e^{\phi_r L/2}L^{m_r/2}\Big) \tag{A.31}$$

对于 $L\to\infty$。对 $y\to+\infty$ 进行类似的计算，并在狄拉克场的北极规范下令 $A_{\bar{u}}^{N}$ 的首项为零，可得渐近行为

$$g_+(L/2,u,\bar{u}) \sim \mathrm{diag}\Big(e^{-\phi_1 L/2}L^{-m_1/2},\ldots,e^{-\phi_r L/2}L^{-m_r/2}\Big). \tag{A.32}$$

现在我们可以结合 (A.28)、(A.31) 和 (A.32) 来计算 $S(u)$。不过，在将它们直接相乘之前，有一点需要注意：(A.31) 写在南极图册中，而 (A.32) 写在北极图册中；若要利用 (A.28) 从大负值的 y 延拓到大正值的 y，在与 g_+^{-1} 相乘之前，还必须乘上过渡函数 $e^{+im\phi}=(u/\bar{u})^{m/2}$，因为 (A.21) 的写法假定 W、g_- 和 g_+ 是相对于向量丛的相容平凡化来表示的。换句话说，由于 (A.32) 写在北极图册中，在 (A.21) 中对 W 的正确代换不是 (A.28)，而是 $(u/\bar{u})^{m/2}\times$(A.28)。

汇总所有贡献，根据（A.21），我们计算得（下标“D”提醒我们，这是荷为 m 的狄拉克磁单极子的结果）：

$$\begin{aligned} S_D(u) &= \lim_{L\to\infty}\mathrm{diag}\Big(e^{\phi_i L/2}L^{m_i/2}\times(u/\bar{u})^{m_i/2}\times e^{-\phi_i L}\frac{(u\bar{u})^{m_i/2}}{L^{m_i}}\times e^{\phi_i L/2}L^{m_i/2}\Big)_{i=1}^{r} \\ &= \mathrm{diag}(u^{m_1},\ldots,u^{m_r}) = u^{m}. \end{aligned} \tag{A.33}$$

请注意，所有的 L 和 $\bar{u}$ 依赖性最终都会相互抵消，这是必然的。狄拉克单极子的散射数据具有这种形式，这正是狄拉克奇点与向量丛的海克修改之间基本联系的基础，详见 [KW07]。

请注意，阿贝尔规范群情形下的单极子方程是线性的，因此解可以相加，散射矩阵可以相乘。若在位置（u_α，y_α）处存在多个荷为 m_α 的狄拉克奇点，则总散射矩阵为 $S_D(u)=\prod_\alpha(u-u_\alpha)^{m_\alpha}$。请注意，散射矩阵与垂直方向上的位置 y_α 无关，因为计算 W 时，我们沿该方向的一条直线进行积分。

A.3.2 当 $u\to\infty$ 时的渐近行为

现在已具备所有必要的预备知识，可以确定矩阵 $S(u)$，其中 $u\to\infty$。根据第 A.2.4 节的讨论，当 $L\to\infty$ 时，我们有如下渐近行为

$$g_\pm(L/2,u,\bar{u}) \sim \mathrm{diag}(e^{\mp\phi_1 L/2}L^{\mp m_1/2},\ldots,e^{\mp\phi_r L/2}L^{\mp m_r/2})h_\pm(u). \tag{A.34}$$

在同时涉及 L 和 u的方程中，我们约定考察 $|u|$较大但 $L \gg |u|$时的渐近行为。矩阵 $h_{\pm}$ 是下三角形的（当 $+$时）或上三角形的（当 $-$时），且当 u较大时，其非零项关于 u多项式地增长。不失一般性，通过对截面 $s_a^{\pm}$进行归一化，可以假设对角项均为 1。

同样，利用边界条件（A.5），我们看到可以将 W 在（A.21）中替换为上一节计算得到的狄拉克场的威尔逊线。然后，我们可以借鉴上一节的计算，得出渐近行为

$$S(u) \sim h_+^{-1}(u) u^{\mu} h_-(u) \tag{A.35}$$

对于 $u \to \infty$；我们理解这句话的意思是，在第 A.2.4 节所讨论的任意一种规范下，单极子散射矩阵在 u 趋于无穷大时必须具有上述首项渐近行为。

可由（A.35）得出以下结论。令 $\Delta_i(S(u))$表示 $S(u)$的第 i个主子式（左上角 $i \times i$ 阶子矩阵的行列式）；由于 $\Delta_i(h_+^{-1}(u) u^{\mu} h_-(u)) = \Delta_i(u^{\mu})$，我们得出 $\Delta_i(S(u)) \sim u^{\langle \mu,\ \omega_i \rangle}$ 对于 $u \to \infty$，其中方括号表示余权与权之间的典范配对，且 $\omega_i = (1, \ldots\ldots, 1, 0, \ldots\ldots, 0)$ 是 GL_r的第 i个基本权。特别地，若转而考虑 u^{-1}中的形式幂级数，则 $\Delta_i(u)$变为可逆，并且我们有一个（必然唯一的）高斯分解

$$S(u) = E(u) H(u) F(u) \tag{A.36}$$

其中 $E(u)$ 是对角线上为单位元的下三角矩阵，$H(u)$ 是对角矩阵，而 $F(u)$ 是对角线上为单位元的上三角矩阵。由此，结合（A.35）以及高斯分解的唯一性可知，当 $E(u)$ 和 $F(u)$ 取较大值时，它们至多呈多项式增长，并且 $H(u)$ 关于 $u \to \infty$ 有如下形式的展开：

$$H(u) = u^{\mu}(1 + O(u^{-1})). \tag{A.37}$$

然而，正如第 A.2.4 节所讨论的，$S(u)$ 在左侧相差 $B_+[u]$、右侧相差 $B_-[u]$的意义下并不唯一；渐近行为（A.35）意味着，实际上，每个 $S(u)$作为 $B_+[u] \backslash G_{\mathbb{C}}(u) / B_-[u]$中的元素，在 $G_{\mathbb{C}}(u)$ 中都有唯一的形如（A.36）的代表元，前提是我们还施加以下条件：

$$\begin{aligned} E(u) &= 1 + O(u^{-1}) \\ F(u) &= 1 + O(u^{-1}). \end{aligned} \tag{A.38}$$

非正式地说，我们只需利用 $B_+[u]$ 自由度消去 $E(u)$ 中出现的任意正次幂u，同样地，利用 $B_-[u]$ 消去 $F(u)$ 中出现的任意正次幂。

换言之，我们已经证明（A.35）意味着我们将典范映射（A.25）提升为一个映射

$$\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}(u) \tag{A.39}$$

并与完备化（在大 u 处展开）$G_{\mathbb{C}}(u) \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}((u^{-1}))$ 复合后，其像落入

$$B_{+,1}[[u^{-1}]] u^{\mu} B_{-,1}[[u^{-1}]]$$

其中，下标 1 表示在 $u = \infty$ 处取值的核。

A.3.3 狄拉克奇点附近的渐近行为

同样的考量基本上也能确定狄拉克奇点位置附近的渐近行为，我们假设该位置为 $u=0$。当 $u\to 0$ 时，由定义（A.21）可知W 将主要由沿直线靠近 $y=0$ 的小邻域贡献，因为此处的规范场正变得几乎奇异。根据（A.7），这一贡献再次由狄拉克单极子的散射矩阵给出；通过标准的鞍点渐近分析论证可知，散射矩阵必定具有如下行为

$$S(u)\sim S_+(u)u^{\lambda}S_-(u) \tag{A.40}$$

对于 $u\to 0$，其中矩阵 $S_{\pm}(u)$ 在 $u=0$ 处是正则的，但除此之外任意，并对应于包围 $y=0$ 至 W 的小区间两侧各自的贡献。如果唯一的狄拉克奇点位于 $u=0$，则该条件可以更代数化地表述为

$$S(u)\in G_{\mathbb{C}}[u]u^{\lambda}G_{\mathbb{C}}[u]\subset G_{\mathbb{C}}(u) \tag{A.41}$$

其中，根据前一小节的构造，我们将 S-矩阵视为 $G_{\mathbb{C}}(u)$ 的元素。Uhlenbeck 型紧化 $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}$ 通过将该条件放宽为以下条件来构造（上横线表示闭包）

$$S(u)\in\overline{G_{\mathbb{C}}[u]u^{\lambda}G_{\mathbb{C}}[u]}\subset G_{\mathbb{C}}(u), \tag{A.42}$$

见下文。这意味着我们要求 S-矩阵在 $u=0$ 处有一个 $\leq\lambda$ 阶的极点，而不是恰好 λ 阶的极点。具有 $<\lambda$ 阶极点的构型是“起泡”构型，其中奇异的狄拉克荷已被某个光滑的单极子荷屏蔽。

如果存在多个狄拉克奇点，只需在每个奇点所在的位置分别施加 A.40，并对 λ 使用该奇点的荷。以代数方式重新表述这一条件同样很直接。

A.3.4 磁单极子模空间与广义仿射格拉斯曼切片 s

子空间

$$\overline{\mathcal{W}}_{\mu}^{\lambda}:=\overline{G_{\mathbb{C}}[u]u^{\lambda}G_{\mathbb{C}}[u]}\bigcap B_{+,1}[[u^{-1}]]u^{\mu}B_{-,1}[[u^{-1}]]\subset G_{\mathbb{C}}(u) \tag{A.43}$$

与 [BFN18], 中定义的广义仿射格拉斯曼切片重合；参见该文第 2(xi) 节。已知它是一个维数为$2|\langle\rho,\ \mu-\lambda\rangle|$的不可约仿射代数簇，而前两节的论证表明，映射（A.25）可提升为 $G_{\mathbb{C}}$（u），并可分解为一个映射

$$\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}\longrightarrow\overline{\mathcal{W}}_{\mu}^{\lambda}. \tag{A.44}$$

预计散射变换的完备性将把此映射识别为 $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}$ 嵌入其 Uhlenbeck 型紧化 $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}\simeq\mathcal{W}_{\mu}^{\lambda}$，并且 $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}$ 本身可由 $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}$ 的光滑轨迹恢复。

A.3.5 秩 2 情形下的完全确定

对于 $G = U(2)$ 我们将把这些结果完全明确地表述出来。记一个预期的 S-矩阵为 b y

$$S(u) = \begin{bmatrix} Q(u) & U^+(u) \\ U^-(u) & \widetilde{Q}(u) \end{bmatrix}. \tag{A.45}$$

我们将原点处的荷取为 $\lambda = (0,\ n)$，并将无穷远处的荷取为$\mu = (k,\ n-k)$，其中 $n,\ k \geq 0$。然后要求

$$S(u) = E(u)H(u)F(u) \tag{A.46}$$

具有 $E(u)$、 $F(u)$ 的形式 $1 + O(u^{-1})$ 和 $H(u) = u^{\mu}(1 + O(u^{-1}))$，这意味着 $Q(u) = u^k + \ldots$，并且 $U^{\pm}(u) = O(u^{k-1})$，对于 $u \to \infty$。同样， $S(u) \in G_{\mathbb{C}}[u]u^{\lambda}G_{\mathbb{C}}[u]$ 当且仅当 $S(u)$的所有矩阵元都是 u 中的多项式，并且

$$\det S(u) = Q(u)\widetilde{Q}(u) - U^+(u)U^-(u) = u^n \tag{A.47}$$

（通过与 $u \to \infty$的渐近行为进行比较，我们看到行列式的首项系数必须为 1）。注意，由行列式条件可推出

$$\deg \widetilde{Q}(u) \leq \begin{cases} k-2 & n < 2k-1 \\ n-k & n \geq 2k-1 \end{cases} \tag{A.48}$$

~，并且在第二种情况下 $Q(u)$ 是首一的。取 $\det S(u) = u^n$ 中 u 的系数，得到刻画单极子模空间 $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda} \simeq \mathcal{W}_{\mu}^{\lambda}$ 作为仿射簇的显式方程；因此，其坐标环显然由 $S(u)$ 的矩阵元的系数生成。

注意，将狄拉克奇点的位置移至 $x_{\alpha} = (u = a_{\alpha},\ y = 0)$，使得每个奇点的荷均为 (0, 1)，会将模空间变形成由下式切出的仿射簇

$$\det S(u) = \prod_{\alpha=1}^{n}(u - a_{\alpha}) \tag{A.49}$$

只要 a_{α} 彼此不同，该簇就是光滑的。沿 y方向移动奇异单极子，同时将其固定在 $u = 0$ 处，可以消解 $\mathcal{W}_{\mu}^{\lambda}$ 的奇点；本文不会用到这些消解。

A.4 泊松括号

如上所述，单极子模空间视为复辛簇时，带有规范定义的辛形式

$$\omega_{\mathbb{C}} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{p_j\}} d^2u dy \, \mathrm{Tr}(\delta A_{\bar{u}} \wedge \delta(A_y + i\phi)) \tag{A.50}$$

由所有联络和标量场构成的空间诱导而来。由于散射矩阵直接由规范场和标量场定义，因此可以利用这个辛形式来计算

矩阵系数的泊松括号，至少在忽略下文将要讨论的某个细节的情况下如此。

回忆一下，在任意辛流形上，若其辛形式为 Ω，局部坐标为 x^I，

$$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_{IJ}dx^I \wedge dx^J \tag{A.51}$$

函数的泊松括号定义为

$$\{f, g\} = \Omega^{IJ}\frac{\partial f}{\partial x^I}\frac{\partial g}{\partial x^J} \tag{A.52}$$

其中 Ω^{IJ} 是 Ω_{IJ}的矩阵逆。于是，计算它等价于采用以下形式化步骤：计算 $\delta f \wedge \delta g$，其中变分是相对于坐标 $x \to x + \delta x$的变化取的，然后将 $\delta x^I \wedge \delta x^J$ 替换为 Ω^{IJ}。

这在无限维情形下仍然有意义。令 m、$n = 1$、.....、r表示向量丛指标。那么，在点 $(A_{\bar{u}})^m{}_n(y$、u、$\bar{u})$ 处取值的联络和标量场的分量，类似地还有 $A_y + i\phi$，都可以看作空间 $\mathcal{A} \ni (A$、$\phi)$ 上的一组无限坐标。于是，辛形式可用这些坐标写为（对所有指标求和）

$$\omega_{\mathbb{C}} = \int d^2u d^2u' dy dy' \delta(A_{\bar{u}})^m{}_n(y, u, \bar{u})\delta(A_y + i\phi)^n{}_m(y', u', \bar{u}')\delta(y - y')\delta^2(u - u'). \tag{A.53}$$

$\delta(y - y')$ 是狄拉克δ函数，$\delta^2(u - u')$ 是它的二维类比。要计算单极子模空间上两个函数的泊松括号（它们是 $(A_{\bar{u}}$、$A_y + i\phi)$ 的泛函所诱导的），可按以下步骤进行：计算关于联络和标量场的变分之积 $\delta f \delta g$，然后在其出现的任何位置作如下替换

$$(\delta A_{\bar{u}})^m{}_n(y, u, \bar{u})\delta(A_y + i\phi)^{m'}{}_{n'}(y', u', \bar{u}') \to \delta^m_{n'}\delta^{m'}_n\delta(y - y')\delta^2(u - u') \tag{A.54}$$

（当然，也要将任何 $\delta A_{\bar{u}}\delta A_{\bar{u}}$ 项替换为 0，对 $\delta(A_y + i\phi)\delta(A_y + i\phi)$ 也作类似处理。）因此，确定单极子模空间上的泊松结构，就归结为一个相对直接的变分法练习。下面我们将针对散射矩阵元 $\left\{S^i{}_j(u)\ S^k{}_\ell(v)\right\}$ 的泊松括号进行分析。

A.4.1 变分

散射矩阵定义为

$$S(u) = \lim_{L\to\infty} g_+^{-1}(L/2, u, \bar{u})W(L/2, -L/2; u, \bar{u})g_-(-L/2, u, \bar{u}) = \lim_{L\to\infty} S_L(u). \tag{A.55}$$

因此，要计算泊松括号，只需了解联络变化时 $g_\pm$ 和 W 的变分。

对于威尔逊线，根据定义可直接得出一个众所周知的结论：

$$\delta W(L/2, -L/2; u, \bar{u}) = -\int_{-L/2}^{L/2} dy W(L/2, y; u, \bar{u})(\delta A_y(y, u, \bar{u}) + i\delta\phi(y, u, \bar{u}))W(y, -L/2; u, \bar{u}). \tag{A.56}$$

特别要注意的是，威尔逊线仅依赖于 $A_y + i\phi$。要得到有趣的泊松括号，需要某种 $A_{\bar{u}}$ 依赖，而这来自 $g_{\pm}$。

每个 $g_{\pm}$ 均定义为满足

$$g_{\pm}^{-1}\overline{D}_u g_{\pm} = \overline{\partial}_u \tag{A.57}$$

作为一个算子方程；这只是在重述矩阵 $g_{\pm}$ 的列构成了区域 $y \to \pm\infty$内关于 $D_u s = 0$的一个解基。在此方程中，约定$D_u = \partial_u + A_{\bar{u}}$，其中 $A_{\bar{u}}$ 在 $y = \pm L/2$ 处取值，适用于涉及 $g_{\pm}$的方程。

对（A.57）取变分，得到（为简洁起见，我们省略下标 $\pm$）

$$\begin{aligned} -g^{-1}\delta g g^{-1}\overline{D}_u g + g^{-1}\delta A_{\bar{u}} g + g^{-1}\overline{D}_u g g^{-1}\delta g &= \left[\overline{\partial}_u, g^{-1}\delta g\right] + g^{-1}\delta A_{\bar{u}} g \\ &= \overline{\partial}_u(g^{-1}\delta g) + g^{-1}\delta A_{\bar{u}} g = 0. \end{aligned} \tag{A.58}$$

将 $\delta A_{\bar{u}}$ 视为已知，满足此方程且在 $|u| \to \infty$ 处消失的唯一 δg 可写成积分

$$g_{\pm}^{-1}\delta g_{\pm}(\pm L/2, u, \bar{u}) = -\int_{\mathbb{C}} d^2 v \frac{1}{u - v} g_{\pm}^{-1}\delta A_{\bar{u}} g_{\pm}(\pm L/2, v, \bar{v}). \tag{A.59}$$

此方程的内容仅仅是$\partial_u (u - v)^{-1} = \delta^2(u - v)$。我们不讨论此类积分的收敛性或相关问题，因为这里只是在进行形式计算。

A.4.2 主要计算

现在将应用刚得到的结果来计算矩阵元 $\{S^i{}_j(u)\ S^k{}_\ell(v)\}$ 的泊松括号。对于 S-矩阵的变分，计算如下（为避免之后在因子 2 上遇到麻烦，截断 L 保持有限）：

$$\begin{aligned} \delta S_L(u) &= -g_+^{-1}\delta g_+ g_+^{-1} W g_- + g_+^{-1}\delta W g_- + g_+^{-1} W g_- g_-^{-1}\delta g_- \\ &= +\int_{\mathbb{C}} d^2 w \frac{1}{u - w} g_+^{-1}\delta A_{\bar{u}} g_+(L/2, w, \bar{w}) S_L(u) \\ &\quad - \int_{-L/2}^{+L/2} dy\, g_+^{-1} W(L/2, y; u, \bar{u})\delta(A_y + i\phi)(y, u, \bar{u}) W(y, -L/2; u, \bar{u}) g_- \\ &\quad - \int_{\mathbb{C}} d^2 w \frac{1}{u - w} S_L(u)(g_-^{-1}\delta A_{\bar{u}} g_-)(-L/2, w, \bar{w}). \end{aligned} \tag{A.60}$$

为了完成形式计算，我们按照既定方法进行：先计算 $\delta S_L(u) \otimes \delta S_L(v)$，然后替换

$$\delta(A_{\bar{u}})^m{}_n(y, w, \bar{w}) \wedge \delta(A_y + i\phi)^{m'}{}_{n'}(y', w', \bar{w}') \to \delta^m_{n'}\delta^{m'}_n \delta(y - y')\delta^2(w - w')$$

无论它出现在哪里。为避免在积分边界处出现由狄拉克δ函数支撑所导致的问题，我们采用如下“点分解”正则化过程：在计算中令 $L' = L + \varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$ 很小；然后最后令 $\varepsilon \to 0$，再令 $L \to \infty$。不难看出，任何本质内容都不依赖于这一选择，其他选择也会导向

等价的结果（例如，将积分边界上的狄拉克δ函数解释为 $1/2$ ，会导致计算稍微繁琐一些，但答案相同）。我们还原回 S_L 和 $S_{L'}$ 上的指标，使得我们计算的是 $\delta(S_L)^i{}_j\delta(S_{L'})^k{}_\ell$。

现在很清楚，在计算乘积时，只有涉及 $\delta A_{\bar{u}}\delta(A_y+i\phi)$ 的项会对泊松括号作出贡献，因此我们可以忽略任何 $\delta A_{\bar{u}}\delta A_{\bar{u}}$ 项，同样也可以忽略任何$\delta(A_y+i\phi)\delta(A_y+i\phi)$项。此外，由于我们假设 $L<L'$， δS_L 中涉及$\delta(A_y+i\phi)$的项在与出现在 $\delta S_{L'}$中的任一 $\delta A_{\bar{u}}$ 收缩时都会贡献为零，因为后者支撑在 $\pm L'/2$ ，而 $\delta(A_y+i\phi)$ 变分支撑在某个$y\in(-L/2,L/2)$处，所以 $\delta(\pm L'/2-y)=0$ 恒等为零。

根据上述讨论， δS_L 中的第一项和第三项才能产生非零收缩，并且它们必须与 $\delta S_{L'}$中的中间项发生收缩，因此我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\delta S_L(u))^i{}_j(\delta S_{L'}(v))^k{}_\ell = \\
&-\int\int_{-L'/2}^{+L'/2} d^2w dy' \frac{1}{u-w}(g_+^{-1})^i{}_m(L/2,w,\bar{w})(g_+(w,\bar{w})S_L(u))^n{}_j(g_+^{-1}W)^k{}_{m'}(L'/2,y';v,\bar{v})\times \\
&\qquad\qquad (Wg_-)^{n'}{}_\ell(y',-L'/2;v,\bar{v})\delta(A_{\bar{u}})^m{}_n(L/2,w,\bar{w})\delta(A_y+i\phi)^{m'}{}_{n'}(y',v,\bar{v}) \\
&+\int\int_{-L'/2}^{+L'/2} d^2w dy' \frac{1}{u-w}(S_L(u)g_-^{-1}(w,\bar{w}))^i{}_m(g_-)^n{}_j(-L/2,w,\bar{w})(g_+^{-1}W)^k{}_{m'}(L'/2,y';v,\bar{v})\times \\
&\qquad\qquad (Wg_-)^{n'}{}_\ell(y',-L'/2;v,\bar{v}))\delta(A_{\bar{u}})^m{}_n(-L/2,w,\bar{w})\delta(A_y+i\phi)^{m'}{}_{n'}(y',v,\bar{v}) \\
&\qquad\qquad +\dots
\end{aligned}
\tag{A.61}
$$

其中圆点表示对泊松括号没有贡献的项。

考察上面的第一行。将 $\delta A_{\bar{u}}$ 与 $\delta(A_y+i\phi)$ 收缩，实际上就是指令：消去 dy' 积分并令 $y'=L/2$，同样消去 d^2w 积分并令 $w=v$。项 $\delta^m_{n'}\delta^{m'}_n$ 表示将其余的各项彼此收缩的指令，因此第一行对泊松括号的贡献为

$$
-\frac{1}{u-v}(g_+^{-1}Wg_-)^i{}_\ell(L/2,-L'/2;v,\bar{v})(g_+^{-1}W)^k{}_n(L'/2,L/2;v,\bar{v})(g_+(L/2,v,\bar{v})S_L(u))^n{}_j. \tag{A.62}
$$

令 $L'=L+\varepsilon$ 并令 $\varepsilon\to 0$ 趋于无穷时，因子 $(g_+^{-1}W)(L'/2,\ L/2;\ v,\ \bar{v})$ 趋于 $g_+^{-1}(L/2,\ v,\ \bar{v})$，这与 $g_+S_L(u)$ 中的 g_+ 相消。然后令 $L\to\infty$，根据定义，我们从这些因子得到 $S(u)$；同样地，根据定义，$(g_+^{-1}Wg_-)(L/2,\ -L/2,\ ;\ v,\ \bar{v})$ 趋于 $S(v)$。最终，这些项的贡献为

$$
-\frac{1}{u-v}S^i{}_\ell(v)S^k{}_j(u) \tag{A.63}
$$

对于泊松括号。对第二项的考察非常相似：进行缩并后，它化简为

$$
\frac{1}{u-v}(S_L(u)g_-^{-1}(-L/2,v,\bar{v}))^i{}_m(Wg_-)^m{}_\ell(-L/2,-L'/2;v,\bar{v})(g_+^{-1}Wg_-)^k{}_j(L'/2,-L/2;v,\bar{v}). \tag{A.64}
$$

令 $L' = L + \varepsilon$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，因子 $(Wg_-)(-L/2,\ -L'/2,\ v,\ \bar{v})$ 趋于 $g_-(-L/2,\ v,\ \bar{v})$，这抵消了 $S_L(u)g_-^{-1}$ 中的 g_-^{-1}。然后，当 $L \to \infty$ 时，我们得到 $S(u)$，同样，$(g_+^{-1}Wg_-)(L/2,\ -L/2;\ v,\ \bar{v})$ 变为 $S(v)$，因此这一项的贡献为

$$\frac{1}{u-v} S^i{}_\ell(u) S^k{}_j(v). \tag{A.65}$$

我们得出泊松括号为

$$\left\{S^i{}_j(u), S^k{}_\ell(v)\right\} = \frac{S^i{}_\ell(u)S^k{}_j(v) - S^i{}_\ell(v)S^k{}_j(u)}{u-v}. \tag{A.66}$$

A.4.3 一个注意事项

这一计算在某种程度上是形式化的，因此在足够具体的情形下可能需要修正，也就不足为奇了。事实上，关键问题在于，从（A.58）到（A.59）时，我们假设所寻求的解在0 处趋于 $|u| \to \infty$，从而唯一地确定了 δg 关于 $\delta A_{\bar{u}}$的表达式。然而，上文已经详细说明，$g_\pm$ 并非由$A_{\bar{u}}$唯一确定：任意 $g'_\pm = g_\pm h_\pm$（u）只要 $h_\pm$（u）在 u-平面上全纯且为三角形的，也同样可以。

事实上，正如上文所述，需要利用重新定义 $g_\pm$ 的自由，才能写出 S（u）的矩阵系数的具体公式，因此这种自由不能被忽略。所以，应将（A.59）理解为：允许加上一个关于 u多项式地依赖的三角矩阵后成立，而真正的泊松括号形式为

$$\left\{S^i{}_j(u), S^k{}_\ell(v)\right\} = \frac{S^i{}_\ell(u)S^k{}_j(v) - S^i{}_\ell(v)S^k{}_j(u)}{u-v} + \dots \tag{A.67}$$

其中省略号表示 u 中次数更高的项。遗憾的是，这些项似乎不存在任何通用且实用的形式。

事实上，可以用下面的技巧完全避免确定这些项。若我们对在多项式三角变换下不变的矩阵系数函数，采用朴素的泊松括号而忽略修正项，那么上述推导仍可原样进行。例如，对于 $U(2)$ 个磁单极子，散射矩阵具有如下形式

$$S(u) = \begin{bmatrix} Q(u) & U^+(u) \\ U^-(u) & \widetilde{Q}(u) \end{bmatrix} \tag{A.68}$$

而这类不变函数为

$$\begin{aligned} h(u) &= Q(u) \\ e(u) &= \left[\frac{U^-(u)}{Q(u)}\right]_- \\ f(u) &= \left[\frac{U^+(u)}{Q(u)}\right]_- \end{aligned} \tag{A.69}$$

其中下标 $-$ 表示取 $u \to \infty$ 展开中的负次数部分。在量子群的语言中，散射矩阵 $S(u)$ 起到传递矩阵的作用，而这些表达式本质上就是 Drinfeld 流；众所周知，在该

背景下，我们为 $S(u)$ 计算得到的这种形式的泊松括号，意味着 $e(u)$ $f(u)$ $h(u)$ 生成元满足标准的 Drinfeld 风格关系。

此处记录不变元上的泊松括号，仅为方便读者查阅。回想一下，在任意给定的、位置固定的~狄拉克奇点的 $U(2)$ 个磁单极子模空间上，对于编码狄拉克奇点位置的给定固定多项式 $P(u)$，我们有关系 $Q(u)Q(u) - U^+(u)U^-(u) = P(u)$。泊松括号为$\{Q(u)\ Q(v)\} = 0$ 以及

$$\begin{aligned}\left\{Q(u), \frac{U^\pm(v)}{Q(v)}\right\} &= \pm\frac{Q(u)}{u-v}\left[\frac{U^\pm(u)}{Q(u)} - \frac{U^\pm(v)}{Q(v)}\right] \\ \left\{\frac{U^+(u)}{Q(u)}, \frac{U^-(v)}{Q(v)}\right\} &= \frac{1}{u-v}\left[\frac{P(v)}{Q(v)^2} - \frac{P(u)}{Q(u)^2}\right]\end{aligned} \tag{A.70}$$

这里约定，每当出现 $U^\pm(a)/Q(a)$ 时，我们都取等式两边关于 $1/a$ 的展开中的负次数部分。这解释了上面的"…"；它们的作用是抵消出现的正次数项。

下面给出一个示例计算，以说明这些结果是如何得到的：

$$\begin{aligned}\left\{\frac{U^+(u)}{Q(u)}, \frac{U^-(v)}{Q(v)}\right\} &= \frac{1}{Q(u)}\left\{U^+(u), \frac{U^-(v)}{Q(v)}\right\} - U^+(u)\cdot\frac{1}{Q(u)^2}\left\{Q(u), \frac{U^-(v)}{Q(v)}\right\} \\ &= \frac{1}{Q(u)Q(v)}\left\{S^1{}_2(u), S^2{}_1(v)\right\} - \frac{1}{Q(u)}\left\{S^1{}_2(u), S^1{}_1(v)\right\}\frac{1}{Q(v)^2}U^-(v) \\ &- \frac{U^+(u)}{Q(u)}\cdot\frac{1}{Q(u)Q(v)}\left\{S^1{}_1(u), S^2{}_1(v)\right\} \\ &= \frac{1}{Q(u)Q(v)}\frac{1}{u-v}\Big[S^1{}_1(u)S^2{}_2(v) - S^2{}_2(u)S^1{}_1(v) - \frac{U^-(v)}{Q(v)}(S^1{}_1(u)S^1{}_2(v) - S^1{}_2(u)S^1{}_1(v)) \\ &- \frac{U^+(u)}{Q(u)}(S^1{}_1(u)S^2{}_1(v) - S^2{}_1(u)S^1{}_1(v))\Big] \\ &= \frac{1}{u-v}\Big[\frac{\widetilde{Q}(v)}{Q(v)} - \frac{\widetilde{Q}(u)}{Q(u)} - \frac{U^-(v)U^+(v)}{Q(v)^2} + \frac{U^+(u)U^-(v)}{Q(u)Q(v)} - \frac{U^+(u)U^-(v)}{Q(u)Q(v)} + \frac{U^+(u)U^-(u)}{Q(u)^2}\Big] \\ &= \frac{1}{u-v}\left[\frac{P(v)}{Q(v)^2} - \frac{P(u)}{Q(u)^2}\right].\end{aligned} \tag{A.71}$$

第一行是在第一个参数中应用泊松括号的乘积法则和链式法则；第二行是在第二个参数中应用同样的法则，并结合显而易见的事实：$\{Q(u)\ Q(v)\} = 0$ 以及 $Q(u) = S^1{}_1(u)$、$U^+(u) = S^1{}_2(u)$ 等；第三行用到了 (A.66)，而在~推导最后一行时，则用到了关系式 $Q(u)Q(u) - U^+(u)U^-(u) = P(u)$。

B 关于自由费米子和格拉斯曼流形的回顾

在本附录中，我们将按照 [MJD00], [Mul94], [SW85], [Wit88]，对自由费米子和无限维格拉斯曼流形的相关内容作一番自成一体的概述，这些内容是我们所需要的。我们的目标并非在此做到面面俱到或完全严谨，因为现有文献已对这些材料作了充分阐述；我们只是希望提供足够的内容，使本文能够自成一体。

B.1 边界条件

自由费米子问题中引入格拉斯曼流形，是通过考虑有限圆盘 D 上自由费米子场论的所有可能边界条件所构成的空间，其中坐标为 $|z| \leq 1$:

$$S = \int_D \widetilde{\psi}\bar{\partial}\psi. \tag{B.1}$$

在 D 上的自由费米子路径积分至少在形式上计算 $\det\bar{\partial}$，但很容易看出，若在 ∂D 上不施加任何边界条件，$\bar{\partial}$ 就有无穷多个零模，由 $n \geq 0$ 的 z^n 张成。为了得到有望定义良好的正则化无穷乘积，必须选择边界条件，消除除至多有限多个之外的所有零模。

ψ 的边界值取值于向量空间 $\widetilde{\mathcal{H}}$，其中包含定义在 $S^1 = \partial D$ 上的（大致而言）光滑函数。为消除所有零模，可以要求 $\psi\big|_{\partial D}$, $\widetilde{\psi}\big|_{\partial D} \in \mathcal{H}_-$，其中 $\mathcal{H}_-$ 是 $\mathcal{H}$ 的子空间，由 z^{-1} 的边界值，z^{-2}、.....生成。

为了使这一点完全精确，需要将 $\mathcal{H}$ 视为 z中劳伦多项式空间的完备化，这样“生成”就意味着在张成与闭包意义下生成。有些参考文献，例如 [SW85]，采用解析方法，并使用希尔伯特空间完备化 $\mathcal{H} = L^2(S^1)$。就本文的目标而言，采用更具代数性的方法并使用 z^{-1}中的形式劳伦级数 $\mathcal{H} = \mathbb{C}((z^{-1}))$ 更为合适，参见例如 [Mul94]；这也与 [Wit88]的方法一致。从物理上看，可以将劳伦级数版本理解为：用复平面 D 取代有限圆盘 $\mathbb{C}$，并将函数展开在 S^1 “无穷远处”。在这种设定下，$\mathcal{H}_- = z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]] \subset \mathcal{H}$。

我们可以考虑更一般的边界条件 $\psi\big|_{\partial D} \in W \subset \mathcal{H}$，由 W 中的某个子空间 $\mathcal{H}$标记。为了得到合理的边界条件，我们希望零模至多只有有限个，因此要求 $\dim(W \cap \mathcal{H}_+) < \infty$, 其中 $\mathcal{H}_+ = \mathbb{C}[z] \subset \mathcal{H}$。$\widetilde{\ }$同样，对于任意子空间 W，都可以相对于自然的留数配对定义其对偶 W （$\oint_{S^1}$ 表示在 $z = \infty$处的留数）

$$\widetilde{W} = \left\{ f(z) \,\middle|\, \oint_{S^1} dz f(z)g(z) = 0 \ \ \forall g(z) \in W \right\} \tag{B.2}$$

并且，分部积分中不存在边界项要求 $\widetilde{\psi}\big|_{\partial D} \in \widetilde{W}$。有限个$\widetilde{\ }$零模同样要求 $\dim(W \cap \mathcal{H}_+) < \infty$。

于是我们可以作出如下

定义 B.1. *Sato*的*Grassmann*流形$\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 定义为所有满足自然投影 $W \to \mathcal{H}_-$ 具有有限维核和余核的闭子空间 $W \subset \mathcal{H}$ 的集合。

另外，考虑“对偶”格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}^*(\mathcal{H})$ 也很方便，它由满足 $W \to \mathcal{H}_+$ 具有有限维核和余核的闭子空间 $W \subset \mathcal{H}$ 构成。

显然，我们可以将 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$ 视为自由$\widetilde{\text{}}$费米子共形场论的边界条件模空间。对于任意 $W \in \mathbf{Gr}(\mathcal{H})$，我们可以定义指标 $\mathbf{index}(W) := \mathbf{dim}(W \cap \mathcal{H}_+) - \mathbf{dim}(W \cap \mathcal{H}_+)$。这是 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$ 上的局部常值函数，并且我们可以将其分解为连通分支

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{H}) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_n(\mathcal{H}) \tag{B.3}$$

其中 $n = \mathbf{index}(W)$。指标为零的连通分支 $\mathbf{Gr}_0(\mathcal{H})$ 是我们主要关注的对象，可以将其视为“ $\mathbb{C}^\infty$中的中维子空间的格拉斯曼流形”。

我们将关注如何在 $\mathbf{Gr}$ 上进行代数几何$(\mathcal{H})$。实际上，我们只需能够定义行列式线丛 $\mathbf{DET}^*$ 的对偶及其整体截面。为此，我们按照 [Mul94], [Wit88]的方法，将 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$近似为有限维格拉斯曼流形，如下所示。定义 $2n$维向量空间 V_{2n} :
$= \mathbb{C}z^{-n} \oplus \mathbb{C}z^{-n+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}z^{n-1} \subset \mathcal{H}$。记

$$\mathrm{Gr}(V_{2n}) := \bigsqcup_{k=0}^{2n} \mathrm{Gr}_k(V_{2n}). \tag{B.4}$$

其中，$\mathbf{Gr}_k(V)$ 是 V 中 k 维平面的通常格拉斯曼流形。通过如下定义，$\mathbf{Gr}(V_{2n})$ 嵌入 $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$: 给定一个 $U \in \mathbf{Gr}(V_{2n})$，取子空间 $W = z^{-n-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]] \oplus U \subset \mathcal{H}$。此外，这些嵌入显然与自然嵌入 $\mathbf{Gr}_k(V_{2m}) \subset \mathbf{Gr}_{k+n-m}(V_{2n})$ 兼容，因此我们得到一个 $\cup_{n \geq 0}\mathbf{Gr}(V_{2n}) \subset \mathbf{Gr}(\mathcal{H})$ 的嵌入。

在 [SW85], $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 的解析方法中，它具有无限维复流形的结构，而 $\cup_{n \geq 0}\mathrm{Gr}(V_{2n})$ 是一个稠密子空间，因此，向量丛的截面由其在每个 $\mathbf{Gr}(V_{2n})$上的限制所确定。在代数方法中，对于我们的目的，只需[4]将 $\mathbf{DET}$ 定义为* 它在每个 $\mathbf{Gr}(V_{2n})$上限制为通常的行列式线丛，且这些限制彼此相容。这正是如下说法的正确解释：$\mathbf{DET}$ 在 $W \subset \mathcal{H}$ 上的纤维应为 W 的最高外幂；参见 [Wit88]的方程 33 附近的讨论。

B.2 行列式线丛与福克空间

为说明这会产生具体且合理的结果，我们不妨回顾一下有限维格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}_k(V_{2n})$ 上行列式线丛的一些基本事实。通用的 k-平面 $\mathcal{E}$ 在 $\mathbf{Gr}_k(V)$ 上扫出一个向量丛，而 $\mathbf{DET} := \Lambda^k(\mathcal{E})$ 是一个线丛。

引理 B.2。 存在一个典范同构

$$H^0(\mathrm{Gr}_k(V_{2n}), \mathrm{DET}^*) \simeq \Lambda^k(V_{2n}^*). \tag{B.5}$$

[4]关于佐藤格拉斯曼流形的点函子方法，参见 [VPM96]。

这是众所周知的结论，例如可将其视为 Borel-Weil-Bott 定理的一个特例。特别地，如果我们取总格拉斯流形 $\mathrm{Gr}(V_{2n}) = \bigsqcup_k \mathrm{Gr}_k(V_{2n})$，就得到整个外代数

$$H^0(\mathrm{Gr}(V_{2n}), \mathrm{DET}^*) \simeq \Lambda^\bullet(V_{2n}^*) \tag{B.6}$$

它可以被视为取值于V的自由费米子所对应的（有限维）福克空间。对于 $m \leq n$，我们有与上文讨论的嵌入相关联的自然拉回映射 $H^0(\mathrm{Gr}(V_{2n}), \mathrm{DET}^*) \to H^0(\mathrm{Gr}(V_{2m}), \mathrm{DET}^*)$；用外代数语言确定这些映射是个很好的练习。

根据定义，$\mathrm{DET}^* \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 的整体截面是由各个 $\mathrm{Gr}(V_{2n})$ 上的整体截面构成的系统的逆极限，其态射由与嵌入 $\mathrm{Gr}(V_{2m}) \subset \mathrm{Gr}(V_{2n})$（$m < n$）相关联的拉回映射给出，

$$H^0(\mathrm{Gr}(\mathcal{H}), \mathrm{DET}^*) := \varprojlim H^0(\mathrm{Gr}(V_{2n}), \mathrm{DET}^*) \simeq \mathcal{F}. \tag{B.7}$$

利用外代数的描述，可以借助标准的费米子福克空间 $\mathcal{F}$，非常明确地描述这个逆极限；该空间可以视为由定义在 $\mathcal{H}$ 上的半-$\widetilde{}$无限微分形式构成。其描述如下。引入算子 ψ_r，ψ_r（$r \in \mathbb{Z} + 1/2$），它们满足标准的反对易关系 $\left\{\psi_r, \widetilde{\psi}_s\right\} = \delta_{r+s,\,0}$，$\{\psi_r, \psi_s\} = \left\{\widetilde{\psi}_r, \widetilde{\psi}_s\right\} = 0$。存在唯一的真空向量 $|0\rangle \in \mathcal{F}$ 满足

$$\psi_r |0\rangle = \widetilde{\psi}_r |0\rangle = 0 \tag{B.8}$$

$\widetilde{}$对于 $r > 0$，并且 $\mathcal{F}$ 由以下形式的向量生成[5] $\prod_i \psi_{-r_i} \prod_j \psi_{-s_j} |0\rangle$，其中 $r_i,\ s_j > 0$。$\widetilde{}$通过将 ψ_{-r} 视为与$z^{-r-1/2}$楔乘，ψ_{-r} 视为与 $z^{r-1/2}$的收缩，并将 $|0\rangle$ 视为 $z^0 \wedge z^1 \wedge z^2 \wedge \ldots$，即可看出它与半无限微分形式之间的联系。

我们有一个自然的线性泛函 $\langle 0|$，定义在 $\mathcal{F}$ 上，它满足 $\langle 0|0\rangle = 1$，并且在所有其他标准基向量上取值为零。$\langle 0|$ 可以理解为与 $\cdots \wedge z^{-2} \wedge z^{-1}$ 楔乘，并取出 $\cdots \wedge z^{-2} \wedge z^{-1} \wedge z^0 \wedge z^1 \wedge \ldots$ 的系数。

B.2.1 本原截面

注意，由于 $\mathrm{Gr}_k(V_{2n})$ 是真空间，其上的任何整体函数必定是常数。因此，DET^* 的整体截面可通过指定其零点除子来确定，至多相差一个标量倍数（具有相同零点集的任意两个截面的比值都是一个无极点的函数）。

这样，我们可以定义与子空间相关联的典范截面 $W \subset V_{2n}$，其维数为 $2n-k$，并按照 [Wit88] 的说法，将其称为原始截面。现在固定一个子空间W，其维数为 $2n-k$。根据维数计数，对于一般的 $U \in \mathrm{Gr}_k(V_{2n})$，维数$(W \cap U) = 0$。于是，我们可以通过要求截面 $\sigma_W(U)$ 在除子维数$(U \cap W) > 0$ 上有一个简单零点，从而将其刻画到整体标量因子的程度；该除子即 U不与 W横截的轨迹。A

[5]“生成”是指在逆极限的自然拓扑下取张成与闭包。通俗地说，我们允许 $\mathcal{F}$ 中的向量包含标准基向量的无限线性组合；我们将这样的无限线性组合按定义视为其在基向量上的截断序列，仅 $\widetilde{}$ 包括 ψ_{-r}，ψ_{-r}对于 $r < N$，其中某个 N。每个截断都是有限和。

这个截面的公式可写如下。固定一个体积形式 α 于V_{2n}上，例如 $\alpha = z^{-n} \wedge \cdots \wedge z^{n-1}$ 利用 V_{2n}中的单项式标准基。然后，由于 W是固定的，也在其上选取一个体积形式 $\eta \in \Lambda^{2n-k}(W)$。于是，如果 U =张成u_1，……， u_k，我们便得到一个截面

$$\sigma_W(U) = \frac{u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \wedge \eta}{\alpha}. \tag{B.9}$$

当然，对这类截面的研究由来已久，并且与普吕克嵌入几何有关。注意，如果令 W 在 $\mathrm{Gr}_{2n-k}(V)$ 中变化，那么 σ_W 便作为 $\mathrm{DET}^* \boxtimes \mathrm{DET}^*$ 在 $\mathrm{Gr}_k(V) \times \mathrm{Gr}_{2n-k}(V)$ 上的一个截面变化。

读者可以验证，对于 $n \to \infty$，该陈述是：子空间 $W \in \mathrm{Gr}^*(\mathcal{H})$ 确定了支撑在 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 的、由 $-\mathrm{index}(W)$ 标记的分支上的本原截面；当 W 变化时，这些截面作为 $\mathrm{DET}^* \to \mathrm{Gr}^*(\mathcal{H})$ 的截面变化。

在半无限楔积描述中，原始截面记作 $|W\rangle$，其构造如下，见 [Mul94], [SW85]（为简单起见，假设 $\mathrm{index}(W) = 0$）。由于$W \in \mathrm{Gr}_0^*(\mathcal{H})$，我们可以为 W 选取一组基 $w_j(z)$，$j \geq 0$，使得对于除有限多个 j之外的所有 j，都有 $w_j(z) = z^j(1 + O(z^{-1}))$。于是

$$|W\rangle = w_0(z) \wedge w_1(z) \wedge w_2(z) \wedge \ldots \tag{B.10}$$

由于我们假设除有限多个 $w_j(z)$外，其余均为首一的，因此可以按照通常的线性代数规则，将半无限楔积展开为 $\mathcal{F}$ 中的标准基态；每个系数都有良好定义，但整个表达式一般是标准基态的无限线性组合 $z^{s_0} \wedge z^{s_1} \wedge \ldots$（参见上文关于逆极限拓扑的脚注）。

B.2.2 克利福德代数刻画

下面的引理是关于本原截面 $|W\rangle$的半无限楔积描述的直接推论。为陈述该引理，我们先引入一些记号。回忆一下，$\mathcal{F}$ 是由 ψ_r、 ψ_r和 $r \in \mathbb{Z} + 1/2$生成的克利福德代数上的一个模。写出标准模展开

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{r \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}} \\ \widetilde{\psi}(z) &= \sum_{r \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\widetilde{\psi}_r}{z^{r+1/2}} \end{aligned} \tag{B.11}$$

并对 f， $g \in \mathcal{H}$定义

$$\begin{aligned} Q_f &= \oint_\gamma f(z)\psi(z) \\ \widetilde{Q}_g &= \oint_\gamma g(z)\widetilde{\psi}(z) \end{aligned} \tag{B.12}$$

其中 $\oint_\gamma$ 表示取 $z = \infty$处的留数。最后，回忆一下， W 表示相对于留数配对的 W 的对偶。

我们有原始截面的“克利福德代数刻画”：

引理 B.3. 与本原截面 $\sigma_W(U) \in H^0(\mathrm{Gr}(\mathcal{H}), \mathrm{DET}^*)^{\sim}$ $^{\sim}$对应的态 $|W\rangle$ 在相差一个标量场的意义下由 $Q_f |W\rangle = 0 = Q_g |W\rangle$刻画，对所有 $f \in W$和 $g \in W$均成立。

上述引理给出了一个判定准则：在已知空间 W 的情况下，确定本原截面 $|W\rangle$ 。一个相关的问题是，在所有截面中确定本原截面；普吕克关系对这一问题给出了经典刻画。

引理 B.4. 费米子福克空间中的一条射线 $|\omega\rangle$ 可写成 $|W\rangle$ 的形式，其中 $W \in \mathrm{Gr}^*(\mathcal{H})$ 是某个（必然唯一的）元素，当且仅当它满足二次关系

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_r |\omega\rangle \otimes \widetilde{\psi}_{-r} |\omega\rangle = 0. \tag{B.13}$$

注意，普吕克关系中出现的算子可以改写为

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_r \otimes \widetilde{\psi}_{-r} = \oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \psi(z) \otimes \widetilde{\psi}(z). \tag{B.14}$$

普吕克关系给出了众所周知的普吕克嵌入 $\mathrm{Gr}^*(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F})$ 的显式刻画（至少在有限维情形下是如此）。

B.3 行列式产生的态

引入这一形式体系，旨在提供一个框架，以几何方式理解格拉斯曼空间 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 上的某些费米子路径积分；最终，这将导出对某些泛函行列式的纯代数描述。下面以一个标准的具体历史案例说明这一做法。为了说明其动机，并明确联系量子场论，我们将简要回到解析框架。

自由费米子可以定义在紧黎曼曲面 C 上；在该曲面上，我们给定了一个带有酉联络 A 的线丛 $\mathcal{L} \to C$。场 $\psi(z)$ 取值于 $K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}$ 的光滑截面，其中 $K_C^{1/2}$ 表示典范丛 K_C 的一个平方根的选取，而 $\widetilde{\psi}(z)$ 取值于 $K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ 的光滑截面。令 $\partial_A : \Omega^{0,0}(C, K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}) \to \Omega^{0,1}(C, K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L})$ 表示取值于该向量丛的柯西 - 黎曼／狄拉克算子。自由费米子理论在 C 上的配分函数形式上表示为对所有费米子光滑截面空间进行的泛函积分：

$$\int D\widetilde{\psi} D\psi \exp\left(- \int_C \widetilde{\psi} \overline{\partial}_A \psi \right) = \det \overline{\partial}_A. \tag{B.15}$$

为了理解迄今讨论的形式体系中的行列式，我们去掉点 $p \in C$ 的一个小邻域。我们在 p 附近选取一个局部坐标 z^{-1}，使得在局部坐标中 $z \to \infty$ 对应于 p。我们还假设 $\mathcal{L}$ 在 p 的这个邻域内是平凡化的。去掉 p 的邻域后，得到一个只有一个边界分支的黎曼曲面 Σ；在边界上，$K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}$ 自然地平凡化，因此我们可以选择一个由子空间 $U \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 标记的边界条件。我们将作用于 $K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}$ 的光滑截面、且边界值属于 U 的狄拉克算子记为 ∂_A^U，以提醒

我们它依赖于 U。对带有边界条件 U 的 Σ 上的场进行路径积分，形式上计算得到 $\det \partial_A^U$。

直接定义 $\det \partial_A^U$ 通常需要某种复杂的正则化过程。无论细节如何，显然，任何合理的 $\det \partial_A^U$ 定义都必须满足以下两个性质：

1. 当 U 在 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 中变化时，$\det \partial_A^U$ 作为 DET^* 的全纯截面变化；也就是说，如果我们在所有 U 上工作，那么行列式是 $H^0(\mathrm{Gr}(\mathcal{H}), \mathrm{DET}^*)$ 中的一个典范元素。
2. 作为 DET^* 的一个截面，$\det \partial_A^U$ 恰好在存在一个 $\psi \in \Omega^{0,0}(\Sigma, K_\Sigma^{1/2} \otimes \mathcal{L})$，使得 $\partial_A \psi = 0$ 且 $\psi\big|_{\partial\Sigma} \in U$ 时为零。

非正式地说，第一个条件表明行列式确实是一个行列式，第二个条件表明，当且仅当相应算子有非零核时，行列式才为零。

根据上述讨论，第二个条件实际上将泛函行列式唯一确定到一个整体标量倍数（本节中我们将不考虑此类整体标量）：它是与空间 $W \subset \mathcal{H}$ 相关联的 $\mathrm{DET}^* \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ 的本原截面；该空间由 $K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}$ 全纯截面的边界值构成。我们将费米子福克空间中相应的射线记作 $|W\rangle \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$；有时我们会滥用记号，也用 $|W\rangle$ 表示该射线在 $\mathcal{F}$ 中的一个向量提升。

在代数几何背景下，可以反转这一逻辑来定义泛函行列式。现在，C 是一条光滑射影曲线，$p \in C$ 是一个点，z^{-1} 是 p 处的形式坐标，而 $\Sigma = C \setminus p$；我们不再限制到 $\partial\Sigma$，而是限制到 p处的形式穿孔圆盘 $\mathbb{D}_p^\times$，并假设 $\mathcal{L}$在形式圆盘 $\mathbb{D}_p$上被平凡化。在p 处展开，便得到一个映射

$$H^0(C \setminus p, K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}) \hookrightarrow \mathbb{C}((z^{-1})) = \mathcal{H}. \tag{B.16}$$

其像的闭包记为 $W \subset \mathcal{H}$；事实上，W 定义了 $\mathrm{Gr}^*(\mathcal{H})$ 中的一个点，其指标为 $\mathrm{index}(W) = \deg \mathcal{L} - 1$。这可由以下考虑得出：由于 $C \setminus p$ 是一个仿射簇，我们可以使用与（形式）覆盖 $C = (C \setminus p) \cup \mathbb{D}_p$相关联的 Čech 复形来计算上同调。展开定义后，我们看到存在自然同构

$$\begin{aligned} \ker(W \to \mathcal{H}_+) &\simeq H^0(C, K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}(-p)) \\ \operatorname{coker}(W \to \mathcal{H}_+) &\simeq H^1(C, K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L}(-p)) \end{aligned} \tag{B.17}$$

由此可知，它们各自都是有限维的（因为 C 是射影的），并且 $\mathrm{index}(W) = \deg \mathcal{L} - 1$（由黎曼–罗赫定理得出）。因此，我们可以为 W 赋予定义良好的原始态 $|W\rangle$，并将其作为

定义 B.5. 沿用上述记号，泛函行列式 行列式 $\det \partial_A^U$ 定义为赋予 $H^0(C \setminus \overline{p}, K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L})$的原始态 $|W\rangle \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$。

注意，在这种方法中，要恢复数值行列式 $\det \partial_A$，我们只需使用 DET^* 的自然平凡化，在点 $U = \mathbb{C}[[z^{-1}]] \in \mathrm{Gr}_1(\mathcal{H})$ 处取此截面的值

在大胞腔上。为了对数值行列式陈述有意义的结果，当然必须通过其他方式确定 $|W\rangle$ 的归一化。

有一种更具几何意味的方式可以描述 $|W\rangle$ 是如何产生的。令 $\mathfrak{M}$ 表示由数据 $(C,\ \mathcal{L},\ p,\ z,\ \phi_p)$ 构成的模空间堆，记号如上（ϕ_p 表示在 p 的形式邻域中对 $\mathcal{L}$ 的平凡化）。从这些数据中提取 W 定义了一个态射

$$\mathfrak{K} : \mathfrak{M} \to \mathrm{Gr}^*(\mathcal{H}) \tag{B.18}$$

称为克里切弗映射，将其与普吕克嵌入 $\mathbf{Gr}^*(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F})$ 复合，就得到赋予 $\mathfrak{M}$ 中一点的状态 $|W\rangle$。正是这一结构将被我们仿用于瞬子问题。

B.3.1 示例

为说明这一术语体系，我们来考察 $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \setminus \infty$ 上的路径积分，其中 $\mathcal{L}$ 平凡，而 $K_C^{1/2} \simeq \mathcal{O}(-z_1)$ 在局部被如此平凡化，从而可与在某个点 $z_1 \in \mathbb{P}^1 \setminus \infty$ 处消失的函数层相识别。写作 $W(z_1) = H^0(\mathbb{P}^1 \setminus \infty,\ \mathcal{O}(-z_1))$；按照上述构造，我们应当得到一个状态 $|W(z_1)\rangle$。明确理解这一状态是很有启发性的。

$W(z_1)$的基由 $w_j(z) = (z - z_1)^j$给出，其中 $j \geq 1$。接下来

$$\begin{aligned} |W(z_1)\rangle &= (z - z_1) \wedge (z - z_1)^2 \wedge (z - z_1)^3 \wedge \dots \\ &= (z - z_1) \wedge (z^2 - z_1 z) \wedge (z^3 - z_1 z^2) \wedge \dots \\ &= z \wedge z^2 \wedge z^3 \wedge \cdots - z_1 \cdot z^0 \wedge z^2 \wedge z^3 \wedge \dots \\ &\quad + z_1^2 \cdot z^0 \wedge z \wedge z^3 \wedge \cdots + O(z_1^3) \\ &= \sum_{r=1/2}^{\infty} \psi_{-r} z_1^{r-1/2} \, |0\rangle = \psi(z_1) \, |0\rangle \end{aligned} \tag{B.19}$$

这里回顾一下，ψ_{-r}表示与 $z^{r-1/2}$的缩并，且 $|0\rangle = z^0 \wedge z^1 \wedge \dots$。$\widetilde{W}(z_1)$被认作在 z_1处至多有一个简单极点的函数；引理B.3 通过注意到以下事实即可验证：

$$\begin{aligned} Q_f \, |W(z_1)\rangle &= \oint_{\gamma_{z_1}} dz f(z) \psi(z) \psi(z_1) \, |0\rangle = 0, \ \text{ if } (z - z_1) f(z) \text{ is regular at } z_1 \\ \widetilde{Q}_g \, |W(z_1)\rangle &= \oint_{\gamma_{z_1}} dz g(z) \widetilde{\psi}(z) \psi(z_1) \, |0\rangle = 0, \ \text{ if } g(z_1) = 0. \end{aligned} \tag{B.20}$$

我们利用留数定理将积分轮廓收缩为一个包围 z_1的小环路 γ_{z_1}，并使用算子乘积展开

$$\begin{aligned} \psi(z)\psi(z_1) &= O(z - z_1) \\ \widetilde{\psi}(z)\psi(z_1) &= \frac{1}{z - z_1} + \mathrm{reg} \end{aligned} \tag{B.21}$$

如 $z \to z_1$。读者可以将 $\left|\widetilde{W}(z_1)\right\rangle = \widetilde{\psi}(z_1) \ |0\rangle$ 作为练习验证。

在 [Wit88] 中，人们注意到，在$\sim C$ 上的一点对线丛进行扭曲/Hecke变换，在上述意义下等价于在该点插入 ψ 或 ψ ；这在自由费米子共形场论中被解释为“乘法Ward恒等式”。本质上，它表明 Hecke变换这一操作是通过自由费米子理论中的一个真正的局部算子实现的，而该算子无非是插入基本局部场 $\psi(z)$，$\sim\psi(z)$。这只是对基本算子乘积展开的一种几何解释。

本文的一项主要结果可以表述为沿着以下方向对这一结果作出推广。我们不再考虑抽象的代数曲线 C，而是考虑嵌入在非交换代数曲面中的曲线，如 [Aga+05]、 [DHS09], [Dij+08]中所述；例如 $T^*_\hbar\mathbb{C}$中的零截面。非交换 $U(1)$ 上的瞬子 $T^*_\hbar\mathbb{C}$ 可以看作 $T^*_\hbar\mathbb{C}$ 上具有满支撑的秩1层，它们由平凡线丛出发，在若干点$(z_i,\ p_i)\ \in T^*\mathbb{C}$进行某种复二维类比的Hecke变换而得。若将自由费米子理论置于零截面 $\mathbb{C}\subset T^*\mathbb{C}$上，则曲面$(z_i,\ p_i)$ 上点 $T^*_\hbar\mathbb{C}$ 处的“Hecke变换”由插入局部算子

$$p_i-\hbar\partial\varphi(z_i) \tag{B.22}$$

其中 $\partial\varphi(z)$ 是在玻色化下与费米子等价的手征玻色子，见下文。请注意，若将非交换性取为零，即 $\hbar\to 0$，局部算子便基本上变为平凡的，这正如预期，因为瞬子可以直接移出零截面。非交换性所引入的非局域性对于使该公式成立至关重要。

对于 $T^*\mathbb{C}$中更一般的全纯拉格朗日子流形，在这种情况下，自由费米子理论的非局域性更难以抑制（参见 [Aga+05]、 [DHS09], [Dij+08]），因此相应的论述会更加复杂，尽管它是 [Aga+05]、 [DHS09], [Dij+08] 中适用于瞬子模空间的构造的自然推广。

B.4 玻色化与相干态基

迄今为止，原始截面 $|W\rangle$ 是通过考察它们在自由费米子Fock空间标准基中的展开来描述的；该标准基由 $\sim\psi$ 和 ψ 对真空施加负模作用而得。这相当于给出子空间$W\subset\mathcal{H}$的显式Plücker坐标。对于某些应用，使用态的“玻色化”描述会更方便，具体如下。我们假设读者对玻色化有基本了解，教科书式的介绍可参见例如[MJD00] 或 [Del+99], 第1202–1205页。

B.4.1 $\mathcal{F}$ 的玻色子描述

由于 Gr($\mathcal{H}$) 有 $\mathbb{Z}$ 个连通分支，DET* 的整体截面空间分解为由各个分支支撑的截面之和，

$$H^0(\mathrm{Gr}(\mathcal{H}),\mathrm{DET}^*)\simeq\mathcal{F}=\bigoplus_{N\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_N. \tag{B.23}$$

（冒号表示正规序）下的模

$$:\psi(z)\widetilde{\psi}(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_n}{z^{n+1}}=\partial\varphi(z) \tag{B.24}$$

生成一个海森堡代数

$$[\alpha_m,\alpha_n]=m\delta_{m+n,0} \tag{B.25}$$

并且每个 $\mathcal{F}_N$ 都同构于海森堡代数的一个福克模（我们称之为玻色福克空间），其中零模 α_0 的作用量为 N,

$$\mathcal{F}_N=\mathbb{C}[\alpha_{-1},\alpha_{-2,\ldots}]\,|N\rangle\,. \tag{B.26}$$

用半无限楔积描述来表示状态 $|N\rangle=z^N\wedge z^{N+1}\wedge z^{N+2}\wedge\ldots$。本文通常关注对应于零指标分支的玻色福克空间 $\mathcal{F}_0$。请注意，我们的记号是一致的，因为费米真空 $|0\rangle=|N=0\rangle$。

B.4.2 环群对 $Gr(\mathcal{H})$ 的作用

定义算子（除有限多个外，所有 t_n 都必须为零）

$$g(t):=\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}t_n\alpha_n\Big) \tag{B.27}$$

那么，赋值 $|\omega\rangle\mapsto\langle 0|\,g(t)\,|\omega\rangle$ 将 $\mathcal{F}_0$ 识别为无穷多个变量 t_i 的函数，其中对于 $n>0$,

$$\begin{aligned}\alpha_n&\to\frac{\partial}{\partial t_n}\\ \alpha_{-n}&\to nt_n.\end{aligned} \tag{B.28}$$

我们将定义 $\langle t|:=\langle 0|\,g(t)$，并将与该态相关联的函数视为其在算子 α_n 的相干态基中的表达式。原始态 $|W\rangle$ 的波函数

$$\tau_W(t)=\langle t|W\rangle \tag{B.29}$$

出于历史原因被称为其 τ函数，这些原因与可积层级有关，而可积层级对我们而言只起很小作用。不过，这是一种简洁的方式，可以对 $|W\rangle$ 的数据进行编码。

注意，算子 $g(t)$ 对应于 GL_1 的环群在 $\mathrm{Gr}^*(\mathcal{H})$ 上一半的作用：对于 $W\in\mathrm{Gr}^*(\mathcal{H})$，预期的作用可通过取上述类型的任意基 $w_j(z)$（属于 $|W\rangle$），并替换 $w_j(z)\mapsto w_j(z)e^{\sum_{n=1}^{\infty}t_nz^n}$来定义。然而，由于我们使用 $\mathcal{H}=\mathbb{C}((z^{-1}))$，这个公式并不保持 $\mathcal{H}$，因此定义不良。我们可以通过普吕克嵌入来绕过这一问题：利用该作用在 $\mathcal{F}$ 上借助 $g(t)$ 定义良好的事实，并注意到若 $|W\rangle$ 满足普吕克关系，则 $g(t)\,|W\rangle$ 也满足普吕克关系。由此便得到该群（在 [SW85] 中称为 Γ_+）在 $\mathrm{Gr}^*(\mathcal{H})\hookrightarrow\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 上的作用。我们将 W 在该作用下的像记作 $g(t)\cdot W$，于是 $g(t)\,|W\rangle=|g(t)\cdot W\rangle$。

在 Krichever 解的经典理论中（即 $W = H^0(C \setminus p, K_C^{1/2} \otimes \mathcal{L})$ 如上所述时），可以利用上述刻画，借助曲线 C的 θ 函数推导出 $\tau_W(t)$ 的显式公式；由于这不属于本文的主要论述范围，我们在此不作回顾，而请参阅 [Dub81], 或 [SW85] 的第 6 节和第 9 节以了解详情。我们的公式（3.45）、（3.57）也可以从这一角度来理解，但对我们而言，有趣的模空间是瞬子模空间，而曲线通常固定为有理曲线。因此，该表达式由 ADHM 矩阵的一个简单有限维行列式给出。

B.4.3 高秩类比

在本附录中，我们回顾了单个自由费米子 $\psi(z)$ 及其共轭 $\sim\psi(z)$ 的理论。许多相关内容自然可以推广到 r 分量自由费米子 $\sim\psi^a(z)$、 $\psi_a(z)$、 $a = 1$、……、 r。关于格拉斯曼流形的所有讨论，在将 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^r((z^{-1}))$、 $\mathcal{H}_+ = \mathbb{C}^r[z]$、 $\mathcal{H}_- = z^{-1}\mathbb{C}^r[[z^{-1}]]$ 替换进去之后，基本上都仍然成立。不过也会出现一些新特征；例如，可以考虑与更一般的向量丛耦合的柯西-黎曼算子 ∂_A （我们的非交换瞬子算子也应被视为这种形式）。同样，福克空间 $\widehat{\ }$ 的玻色子描述更为复杂，并且会用到等级为 $k = 1$ 的 $\mathfrak{gl}_r$ 可积表示（这就是 [Wit 84] 的非阿贝尔玻色化）。这个 Kac–Moody 代数由流生成

$$J^a{}_b(z) =: \psi^a(z)\widetilde{\psi}_b(z) : . \tag{B.30}$$

C ADHM复形详述

在这个技术附录中，我们将证明关于非交换瞬子丛 $\mathcal{E}$ 的若干事实，这些事实依赖于使用 ADHM 构造对它们进行描述。

C.0.1 稳定性与余稳定性

令 V，W 表示维数为 n 和 r 的向量空间，它们出现在 $\sim M(n,\ r)$ 的 ADHM 描述中。我们回顾一下，ADHM 数据（$B_1,\ B_2,\ I,\ J$）必须满足矩映射方程

$$[B_1, B_2] + IJ = \hbar. \tag{C.1}$$

我们有如下稳定性和余稳定性条件，这些条件可能由这样的四元组（$B_1,\ B_2,\ I,\ J$）满足：

- 稳定性条件：$S \subseteq V$ 是一个子空间，使得 $\operatorname{Im} I \subseteq S$，且 S 是关于 B_1 和 $B_2 \implies S = V$ 的不变子空间。
- 余稳定性条件：$S \subseteq V$ 是一个子空间，使得 $S \subseteq \ker J$，且 S 是关于 B_1 和 $B_2 \implies S = 0$ 的不变子空间。

以下内容在中岛箭图簇的语境中广为人知，但我们在此给出证明。

引理 C.1. 若 (B_1, B_2, I, J) 满足 (C.1) 且 $\hbar \neq 0$，则它们同时满足稳定性和余稳定性条件。

证明。为验证余稳定性条件，假设 $S \subseteq V$ 是 B_1, B_2 不变且包含于$\ker J$。那么，(C.1) 的左侧保持 S不变，并且在其上的作用与 $[B_1, B_2]|_S = [B_1|_S, B_2|_S]$一致，因此取迹可得 $0 = \hbar \dim S$。若 $\hbar \neq 0$，则 $\dim S = 0$。

为验证稳定性条件，假设 $S \subseteq V$是 B_1, B_2不变且包含 $\operatorname{Im} I$。令$\phi \in \operatorname{Ann}(S) \subseteq V^*$；那么，将 ϕ 与 (C.1) 进行复合可得 $\phi \cdot [B_1, B_2] = \hbar\phi$；于是 $\operatorname{Ann}(S)$ 必定承载一个魏尔代数的有限维表示，因此 $\operatorname{Ann}(S) = 0$，或者 $S = V$。 □

以下是稳定性条件的一个有用推论。设 e_i、$i = 1$、.....、r 表示 W 中的任意一组基。

引理 C.2. 当 $\hbar \neq 0$ 时，我们有 $V = \text{张成}(B_2^m B_1^n I(e_i))_{m,\ n\geq 0,\ 1\leq i\leq r}$。

证明。设 $S \subseteq V$ 表示 $B_2^m B_1^n I(e_i)$ 的张成空间。显然，$\operatorname{Im} I \subseteq S$ 和 S 是 B_2-不变的。为证明 S 也是 B_1- 不变的，计算

$$\begin{aligned} B_1 B_2^m B_1^n I(e_i) &= \sum_{k=0}^{m-1} B_2^k [B_1, B_2] B_2^{m-1-k} B_1^n I(e_i) + B_2^m B_1^{n+1} I(e_i) \\ &= \hbar m B_2^{m-1} B_1^n I(e_i) - \sum_{k=0}^{m-1} B_2^k I(J B_2^{m-1-k} B_1^n I(e_i)) + B_2^m B_1^{n+1} I(e_i) \in S \end{aligned} \tag{C.2}$$

其中我们使用了（C.1），以及 e_i 是 W的一组基这一假设。根据稳定性条件，$S = V$。 □

C.0.2 ADHM复形

非交换 ADHM 构造的一项基本断言是，瞬子丛 $\mathcal{E}$ 作为右 $\mathcal{D}_\hbar$-模，与复形的中间上同调相一致

$$C^\bullet := V \otimes \mathcal{D}_\hbar \xrightarrow{\alpha} (V \oplus V \oplus W) \otimes \mathcal{D}_\hbar \xrightarrow{\beta} V \otimes \mathcal{D}_\hbar \tag{C.3}$$

复形中的映射为

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} B_1 - z \\ B_2 - w \\ J \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} -B_2 + w & B_1 - z & I \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

每当元素 z、$w \in \mathcal{D}_\hbar$ 出现在 α 或 β中时，我们将其理解为由这些元素左乘所定义的算子，因此复形中的态射确实是右 $\mathcal{D}_\hbar$-模的态射。注意，$\beta\alpha = 0$ 利用（C.1）和 $[z, w] = -\hbar$。首先有

引理 C.3. 对于 $\hbar \neq 0$，$C^\bullet$ 的上同调完全集中在中间次数，即 $H^0(C^\bullet) = H^2(C^\bullet) = 0$。

证明。 $H^0(C^\bullet)$由满足 $(B_1 - z)f = 0 = (B_2 - w)f$ 的那些 $f(z, w) \in V \otimes \mathcal{D}_\hbar$ 组成，而 $Jf(z, w) = 0$。将 f 在 $\mathcal{D}_\hbar$ 的单项式基中展开，$f(z, w) = \sum_{m,n} f_{m,n} z^m w^n, f_{m,n} \in V$，这些方程意味着 $\mathrm{Span}(f_{m,n})_{m,n\geq 0} \subseteq V$ 是 $\ker J$ 的一个 B_1, B_2 不变子空间。根据余稳定性条件，$S = 0$，并且对于所有 m, n，我们有 $f_{m,n} = 0$，因此 $f(z, w) = 0$。

为证明 $H^2(C^\bullet)$ 的消失，任取 $f(z, w) \in V \otimes \mathcal{D}_\hbar$ 并按上文展开 $f(z, w) = \sum_{m,n} f_{m,n} z^m w^n$。现在应用引理 C.2 得到一个展开

$$f_{m,n} = \sum_{p,q,i} C_{mnpqi} B_2^p B_1^q I(e_i) \in V \tag{C.5}$$

并注意到

$$\begin{aligned} f(z, w) &= \sum_{m,n,p,q,i} C_{mnpqi} (B_2 - w + w)^p B_1^q I(e_i) z^m w^n \\ &= \sum_{m,n,p,q,i} C_{mnpqi} (B_1 - z + z)^q I(e_i) w^p z^m w^n \mod (B_2 - w) V \otimes \mathcal{D}_\hbar \\ &= \sum_{m,n,p,q,i} C_{mnpqi} I(e_i) z^q w^p z^m w^n \mod (B_1 - z) V \otimes \mathcal{D}_\hbar \\ &= 0 \mod I(W \otimes \mathcal{D}_\hbar) \end{aligned} \tag{C.6}$$

这表明 $f(z, w) = 0 \in$ 属于余核 β。由于 f 是任意的，故属于余核 $\beta = 0$。 □

请注意，如果我们考虑一个类似的复形，但将 $\mathcal{D}_\hbar$ 替换为任意一个左$\mathcal{D}_\hbar$-模，其中 $\mathbb{C}$ 上的可数维（特别是任意循环 $\mathcal{D}_\hbar$ 模），同样的论证表明，上同调在中间次数以外均为零（将单项式基出现处替换为该模底层向量空间中任意选取的一组基）。这一观察对于下文命题 C.4的证明很重要。

C.0.3 计算 *Ext* 群

$\mathcal{D}_\hbar$-模 $\mathcal{E}$ 的 ADHM 描述有助于明确描述本文需要研究的 Ext 群类型。设 $P(z,\ w) \in \mathcal{D}_\hbar$ 是任意一个非零元素。我们有以下右 $\mathcal{D}_\hbar$-模和左 $\mathcal{D}_\hbar$-模:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{O}}_C &:= \mathcal{D}_\hbar / P(z,w)\mathcal{D}_\hbar \\ \widehat{\mathcal{O}}_C^\ell &:= \mathcal{D}_\hbar / \mathcal{D}_\hbar P(z,w). \end{aligned} \tag{C.7}$$

这种记号表示，应将这些模视为仿射曲线 C 的结构层的非交换类比物，其中该曲线由 $P(z,\ w) = 0$ 在 $\hbar \to 0$ 极限下定义。

定义复形

$$C_P^\bullet := V \otimes \widehat{\mathcal{O}}_C^\ell \xrightarrow{\alpha} (V \oplus V \oplus W) \otimes \widehat{\mathcal{O}}_C^\ell \xrightarrow{\beta} V \otimes \widehat{\mathcal{O}}_C^\ell. \tag{C.8}$$

α 以及 β 表示由 ADHM 复形中的映射诱导的自然映射 $C^\bullet$；为简便起见，我们仍将它们称为 α 和 β。注意，根据引理 C.3 后的注记，的上同调在中间次数之外均消失 $C_P^\bullet$.

命题 C.4. 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_C, \mathcal{E}) &= 0 \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_C, \mathcal{E}) &\simeq H^1(C_P^\bullet). \end{aligned} \tag{C.9}$$

证明。 考虑双复形

$$E^{\bullet,\bullet} := \begin{array}{ccccc} V \otimes \mathcal{D}_\hbar & \xrightarrow{\alpha} & (V \oplus V \oplus W) \otimes \mathcal{D}_\hbar & \xrightarrow{\beta} & V \otimes \mathcal{D}_\hbar \\ \downarrow{\scriptstyle \cdot P} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot P} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot P} \\ V \otimes \mathcal{D}_\hbar & \xrightarrow{\alpha} & (V \oplus V \oplus W) \otimes \mathcal{D}_\hbar & \xrightarrow{\beta} & V \otimes \mathcal{D}_\hbar. \end{array} \tag{C.10}$$

竖直箭头由 P的右 乘法给出。有两个谱序列可以计算 $E^{\bullet,\bullet}$的上同调；比较它们即可得出该命题。

首先考虑水平方向的谱序列。应用引理 C.3，可得其 E_1 页

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cdot P} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{C.11}$$

由于次数的原因，我们看到该谱序列在第 E_2 页退化。将$\widehat{\ }$与使用自由分解计算 $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{D}_\hbar}(\mathcal{O}_C, \mathcal{E})$ 的结果进行比较

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_\hbar \xrightarrow{P\cdot} \mathcal{D}_\hbar \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_C \longrightarrow 0 \tag{C.12}$$

（其中映射为由 P 进行左乘法）我们看到，先验上唯一可能非零的上同调是 $H^1(E^{\bullet,\bullet}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_C, \mathcal{E})$，以及 $H^2(E^{\bullet,\bullet}) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_C, \mathcal{E})$。

另一方面，考虑具有垂直定向的谱序列。由于 $\mathcal{D}_\hbar$没有零因子， E_1 页为

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V\otimes\widehat{\mathcal{O}}_C^\ell & \xrightarrow{\alpha} & (V\oplus V\oplus W)\otimes\widehat{\mathcal{O}}_C^\ell & \xrightarrow{\beta} & V\otimes\widehat{\mathcal{O}}_C^\ell. \end{array} \tag{C.13}$$

我们再次看到，出于次数的原因，谱序列在第 E_2 页退化，并且 $H^i(\{\mathrm{v3},\bullet)\simeq H^i(C_P^\bullet)$。利用 $C_P^\bullet$ 的上同调在中间次数之外均消失这一点，即可得到结果。

□

C.0.4 当 $P(z,w)=w$ 时的显式描述

当 C 是 $T_\hbar^*\mathbb{C}$ 中的零截面，即 $P(\{\mathrm{v4},\ w)=w$ 时，我们可以给出相关 Ext 更为明确的描述。在这种情况下，

$$\widehat{\mathcal{O}}_C^\ell\simeq\mathbb{C}[z] \tag{C.14}$$

z 通过乘法作用，而 w 通过 $\hbar\partial_z$ 作用。在这种情况下，有如下结果。

命题 C.5. 我们有一个嵌入 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}},\mathcal{E})\hookrightarrow W[z]\oplus V$，其轨迹为满足 $\xi(B_1)I=B_2\psi_+$ 的$(\xi(z)\ \psi_+)$ $\in W[z]\oplus V$。

这里， $\xi(B_1)I$ 表示如下内容。将 $\xi(z)=\sum_n\xi_n z^n$ 唯一地展开为某个$\xi_n\in W$；那么 $\xi(B_1)I:=\sum_n B_1^nI\xi_n\in V$。

注意，上述嵌入在瞬子模空间上的向量丛层面也成立，也就是说，它给出了一个短正合列

$$0\longrightarrow\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}},\mathcal{E})\longrightarrow\mathcal{W}[z]\oplus\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}\longrightarrow 0 \tag{C.15}$$

其中第二个非零映射为 $(\xi(z)\ \psi_+)\mapsto\xi(B_1)I-B_2\psi_+$，其中 $B_1,\ B_2,\ I$现在解释为相应的典范截面。

证明。 证明归结为分析 $H^1(C_P^\bullet)$ 在 $P(z,\ w)=w$ 的情形。在这种情况下，一个上同调类等同于满足下列方程的三元组 $(\psi_+(z)\ \psi_-(z)\ \xi(z))\in V[z]\oplus V[z]\oplus W[z]$

$$-(B_2-\hbar\partial_z)\psi_+(z)+(B_1-z)\psi_-(z)+I\xi(z)=0 \tag{C.16}$$

并视为模

$$\begin{aligned}\psi_+(z)&\sim\psi_+(z)+(B_1-z)a(z)\\ \psi_-(z)&\sim\psi_-(z)+(B_2-\hbar\partial_z)a(z)\\ \xi(z)&\sim\xi(z)+Ja(z)\end{aligned} \tag{C.17}$$

其中 $a(z)\in V[z]$。首先注意到，任何等价类都有唯一的代表元，使得 $\psi_+(z)=$为常数：只需展开，例如 $\psi_{+,\ n}\in V$

$$\psi_+(z)=\sum_n\psi_{+,n}z^n=\sum_n(z-B_1+B_1)^n\psi_{+,n}=\sum_n B_1^n\psi_{+,n}+(z-B_1)(\dots) \tag{C.18}$$

这唯一确定了 $a(z)$，因为 $z - B_1 : V[z] \to V[z]$ 是单射。取这个代表元，令 $\psi_+ \in V$ 表示相应的常数。以类似方式展开 $I\xi(z) = \xi(B_1)I + (z - B_1)(\dots)$，我们看到，(C.16) 蕴含 $\xi(B_1)I = B_2\psi_+$，并且 $\psi_-(z)$ 由 $\xi(z)$ 唯一确定：

$$\psi_-(z) = \frac{1}{z - B_1}(I\xi(z) - \xi(B_1)I) \in V[z]. \tag{C.19}$$

□

C.0.5 τ-函数：通过斯莱特行列式

本节利用半无限楔表示的组合学，为命题 3.3 提供一种与正文证明互补的证明。因此，我们沿用正文中的记号。

一个一般性结论（例如参见 [Dij92]，其中有综述和说明）是：若子空间$\mathbb{W}$ 属于 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$的零指标分支的大胞腔，那么作 Miwa代换

$$t_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_i^{-n} \tag{C.20}$$

that

$$\frac{\tau_{\mathbb{W}}(t)}{\tau_{\mathbb{W}}(0)} = \frac{\det_{1\le i,j\le N}(w_{j-1}(x_i))}{\det_{1\le i,j\le N}(x_i^{j-1})} \tag{C.21}$$

其中 $w_j(z)$、 $j = 0$、1、2、.....是 $\mathbb{W}$的任意一组基，满足 $w_j(z) = z^j(1 + O(z^{-1}))$；由于我们假设 $\mathbb{W}$ 属于大胞腔，这样的基确实存在。若将工作范围限制在开子集 $\iota : U' \hookrightarrow M$(1)（其中 det $B_2 \neq 0$），便可将此结论应用于正文中的向量丛 $\mathbb{W}$；特别地，我们有 $\iota^*\mathbb{W}$的一组如下截面基：

$$w_j(z) = z^j + J\frac{1}{z - B_1}B_2^{-1}B_1^j I. \tag{C.22}$$

注意，如果存在一个非零线性组合 $f(z) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j w_j(z)$，使得对 $i = 1, \dots, N$，都有 $f(x_i) = 0$，那么 (C.21) 的右端就会消失。我们可以假设 x_i 两两不同。这样的非零线性组合等价于 $\iota^*\mathbb{W}$ 的一个截面，满足当 $z \to \infty$ 时，$f(z) = O(z^{N-1})$。这个 $f(z)$ 的形式为

$$f(z) = \xi(z) + J\frac{1}{z - B_1}\psi_+ \tag{C.23}$$

其中 $\xi(z) \in \mathcal{O}_{U'} \otimes \mathbb{C}[z]$，$\xi(z)$ 的次数为 $\le N - 1$，且 ψ_+ 是满足 $B_2\psi_+ = \xi(B_1)I$ 的 $\iota^*\mathcal{V}$ 截面。$\xi(z)$ 的次数以及条件 $f(x_i) = 0$ 唯一确定了 $\xi(z)$，其结果为

$$\xi(z) = -\sum_{i=1}^{N} J\frac{1}{x_i - B_1}\psi_+ \prod_{j(\neq i)} \frac{z - x_j}{x_i - x_j} \tag{C.24}$$

通过多项式插值获得。 $\xi(B_1)I = B_2\psi_+$ 变为条件

$$\Big(B_2 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} IJ \frac{1}{x_i - B_1}\Big)\psi_+ = 0 \tag{C.25}$$

因此，存在非零的 $f(z)$ 当且仅当上述矩阵有非平凡核，于是

$$\text{RHS of (C.21)} \propto \det\Big(B_2 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} IJ \frac{1}{x_i - B_1}\Big). \tag{C.26}$$

将 $IJ = \hbar - [B_1, B_2] = \hbar - [B_1 - x_i, B_2]$ 代入上述算子即可对其进行简化，此时括号中的表达式等于

$$B_2 - \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} (B_1 - x_i) B_2 \frac{1}{x_i - B_1} - \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} B_2 + \hbar \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} \frac{1}{x_i - B_1}. \tag{C.27}$$

第三项很容易化简，因为

$$-\sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} = -\sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{z - x_j}{x_i - x_j}\Big|_{z=B_1} = -1 \tag{C.28}$$

注意到这是一个次数至多为 $N-1$ 的多项式，在 N 个点处取值为 -1。我们注意到第二项为

$$-\prod_{k=1}^{N} (B_1 - x_k) B_2 \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{1}{x_i - B_1} \tag{C.29}$$

and

$$\sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{1}{x_i - B_1} = \oint_{\gamma} \frac{du}{2\pi i} \frac{1}{\prod_j (u - x_j)} \frac{1}{u - z}\Big|_{z=B_1} = -\frac{1}{\prod_j (B_1 - x_j)} \tag{C.30}$$

其中 γ 是一条环绕 x_i 的回路，在最后一行中我们将其变形为一条环绕 z 的回路，然后代入 $z = B_1$。接着

$$\begin{aligned} \det\Big(B_2 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} IJ \frac{1}{x_i - B_1}\Big) &= \det\Big(\prod_j (B_1 - x_j) B_2 \frac{1}{\prod_j (B_1 - x_j)} + \hbar \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} \frac{1}{x_i - B_1}\Big) \\ &= \det\Big(B_2 + \hbar \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{B_1 - x_j}{x_i - x_j} \frac{1}{x_i - B_1}\Big) \end{aligned} \tag{C.31}$$

因为与 B_1 对易的项正比于 $\hbar$。最后注意到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j(\neq i)}\frac{B_1-x_j}{x_i-x_j}\frac{1}{x_i-B_1} &= -\oint_\gamma\frac{du}{2\pi i}\prod_j\frac{z-x_j}{u-x_j}\frac{1}{(u-z)^2}\Big|_{z=B_1}\\ &= \frac{d}{du}\Big(\prod_j\frac{z-x_j}{u-x_j}\Big)\Big|_{u=z}\Big|_{z=B_1}\\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i-B_1}.\end{aligned}\tag{C.32}$$

总之，我们有

$$\frac{\tau_{\mathbb{W}}(t)}{\tau_{\mathbb{W}}(0)}=\frac{\det_{1\le i,j\le N}(w_{j-1}(x_i))}{\det_{1\le i,j\le N}(x_i^{j-1})}=C(x_1,\dots,x_N)\det\Big(1+\hbar B_2^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i-B_1}\Big)\tag{C.33}$$

其中，$C(x_1,\dots,x_N)$ 是关于每个 x_i 的有理函数（因为每个 $w_{j-1}(x_i)$ 都是有理函数），且在 x_i 中没有极点。此外，由于 $w_j(z)$ 的归一化，当 $x_i\to\infty$（帽号表示省略第 i 个变量）时，$C(x_1,\dots,x_N)$ 趋于 $C(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_N)$。通过对 N 使用归纳法，我们得出 $C(x_1,\dots,x_N)=1$ 恒成立。再利用命题 3.2 中的归一化条件 $\tau_{\mathbb{W}}(0)=\det(B_2)$，将每个 $(x_i-B_1)^{-1}$ 展开为几何级数并代入 $t_n=-\frac{1}{n}\sum_i x_i^{-n}$，即可得到命题 3.3。

C.0.6 当 $P(z,w)=zw-u$ 时 *Ext* 的显式描述

在本小节中，我们将证明命题 C.5 的一个类似结论，针对正文中我们感兴趣的第二种情形，$P(z,w)=zw-u$。首先值得注意的是

$$\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}=\mathcal{D}_\hbar/\mathcal{D}_\hbar(zw-u)\tag{C.34}$$

其向量空间基为 $\{1,z^n,w^n\}_{n\ge1}$。任意元素 $f(z,w)\in\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}$ 均可唯一地展开为

$$f(z,w)=f^+(z)+wf^-(w)\tag{C.35}$$

其中 $f^+(z)\in\mathbb{C}[z]\subset\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}$，$f^-(w)\in\mathbb{C}[w]\subset\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}$。就本文着重讨论的散射问题而言，$f^+$和 f^-应被视为入射波/出射波。

我们有以下初等

引理 C.6. 设 $P(w)\in V[w]\subset V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}$，$Q(z)\in V[z]\subset V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}$，$R\in V\subset V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}$。则

$$(B_2-w)P(w)+(B_1-z)Q(z)+R=0\tag{C.36}$$

蕴含 $P(w)=Q(z)=R=0$。

证明。对 P 和 Q 的次数进行归纳。 □

命题 C.7。 我们有一个嵌入 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}_{C_u},\mathcal{E})\hookrightarrow W\otimes\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}\oplus V$，其像为$(\xi(z,w)\ \psi_0)\in W\otimes\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}\oplus V$，满足$(u-B_2B_1)\psi_0=\xi(B_1,B_2)I$。

我们通过将 $\xi(z,w) = \xi^+(z) + w\xi^-(w)$ 唯一地写成如上形式，并定义$\xi(B_1,B_2)I := \xi^+(B_1)I + B_2\xi^-(B_2)I$，来定义 $\xi(B_1,B_2)I$；其中，理解为取值于 W 的单变量多项式作用于 I 上，如命题 C.5 所述。注意，此命题对瞬子模空间上的族同样成立，即我们有一个向量丛正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{W}\otimes\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u} \oplus \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow 0. \tag{C.37}$$

证明。照例，根据命题 C.4，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_\hbar}(\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}, \mathcal{E})$ 中的一个类等同于一个三元组

$$(\psi_+(z,w), \psi_-(z,w), \xi(z,w)) \in (V\oplus V\oplus W)\otimes\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}$$

满足方程

$$-(B_2-w)\psi_+(z,w) + (B_1-z)\psi_-(z,w) + I\xi(z,w) = 0 \tag{C.38}$$

并模去

$$\begin{aligned}\psi_+(z,w) &\sim \psi_+(z,w) + (B_1-z)a(z,w)\\ \psi_-(z,w) &\sim \psi_-(z,w) + (B_2-w)a(z,w)\\ \xi(z,w) &\sim \xi(z,w) + Ja(z,w)\end{aligned} \tag{C.39}$$

其中 $a(z,w) \in V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}$。我们将仿照命题 C.5的证明。第一步是唯一地分解

$$a(z,w) = a^+(z) + wa^-(w) \tag{C.40}$$

如上所述，$a^+(z) \in V[z] \subset V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}$, $a^-(w) \in V[w] \subset V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}$。仿照命题 C.5 的证明，对于任意的 $\psi_+(z,w)$，存在唯一的 $a^+(z)$，使得 $\psi_+(z,w) + (B_1-z)a^+(z) \in V[w] \subset V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}$。此外，按 $wa^-(w)$ 移位会保持这一类选择，因为

$$(B_1-z)wa^-(w) = B_1wa^-(w) + w\hbar\partial_w a^-(w) - ua^-(w) \in V[w]. \tag{C.41}$$

接下来，再按照命题 C.5 的证明中的论证，我们看到存在唯一的 $a^-(w)$ 使得

$$\psi_-(z,w) + (B_2-w)wa^-(w) = \psi_0 w + \psi_-(z) \tag{C.42}$$

其中 $\psi_0 \in V \subset V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}$ 且 $\psi_-(z) \in V[z] \subset V\otimes\widehat{\mathcal{O}}^\ell_{C_u}$。同样，按 $a^+(z)$ 移位也保持这一类选择不变。

我们看到，若假设 $\psi_+(z,w) = \psi_+(w) \in V[w]$, $\psi_-(z,w) = \psi_0 w + \psi_-(z)$ with $\psi_0 \in V$, $\psi_-(z) \in V[z]$，则可以省去商，只需解方程

$$-(B_2-w)\psi_+(w) + (B_1-z)(\psi_0 w + \psi_-(z)) + I\xi(z,w) = 0. \tag{C.43}$$

撰写

$$\begin{aligned}(B_1-z)\psi_0 w &= wB_1\psi_0 - \psi_0 u = -(B_2-w)B_1\psi_0 + (B_2B_1-u)\psi_0\\ I\xi(z,w) &= I\xi^+(z) + wI\xi^-(w) = \xi^+(B_1)I + B_2\xi^-(B_2)I + (B_1-z)(\dots) + (B_2-w)(\dots)\end{aligned} \tag{C.44}$$

其中括号内的表达式是关于 z 和 w的多项式，引理 C.6 应用于 (C.43) 得出

$$\begin{aligned}(B_2B_1-u)\psi_0+\xi^+(B_1)I+B_2\xi^-(B_2)I=0\\ \psi_+(w)+B_1\psi_0+\frac{1}{w-B_2}(wI\xi^-(w)-B_2\xi^-(B_2)I)=0\\ \psi_-(z)-\frac{1}{z-B_1}(I\xi^+(z)-\xi^+(B_1)I)=0.\end{aligned}\tag{C.45}$$

最后两个方程只是说明，$\psi_+(w)$ 和 $\psi_-(z)$ 由满足第一个方程的一对 $(\xi,\ \psi_0)$ 唯一确定，这正是我们想要证明的。 □

C.0.7 $\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}$ 的函数实现

作为命题 5.1 证明的进一步准备，有必要描述 $\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}$ 的两种函数实现。定义一个左 $\mathcal{D}_\hbar$-模

$$\mathcal{O}^{\text{in}}:=\mathbb{C}[z,z^{-1}]\tag{C.46}$$

其中 z 通过 乘法作用，而 w 通过 $\hbar\partial_z+uz^{-1}$ 作用。同样，定义一个左 $\mathcal{D}_\hbar$ 模 e

$$\mathcal{O}^{\text{out}}:=\mathbb{C}[w,w^{-1}]\tag{C.47}$$

其中 w 通过乘法作用，而 z 通过 $-\hbar\partial_w+(u+\hbar)w^{-1}$ 作用。

不难验证，这些态射

$$\begin{aligned}\phi_z:\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}\to\mathcal{O}^{\text{in}}\\ \phi_w:\widehat{\mathcal{O}}^{\ell}_{C_u}\to\mathcal{O}^{\text{out}}\end{aligned}\tag{C.48}$$

由以下方式定义（Γ表示伽马函数）

$$\begin{aligned}&\phi_z(z^n)=z^n\\ &\phi_z(w^n)=z^{-u/\hbar}(\hbar\partial_z)^n z^{u/\hbar}=\frac{u(u-\hbar)\dots(u-(n-1)\hbar)}{z^n}=\hbar^n\frac{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+1)}{\Gamma(\frac{u}{\hbar}-n+1)}z^{-n}\\ &\phi_w(z^n)=w^{u/\hbar+1}(-\hbar\partial_w)^n w^{-u/\hbar-1}=\frac{(u+\hbar)\dots(u+n\hbar)}{w^n}=\hbar^n\frac{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+n+1)}{\Gamma(\frac{u}{\hbar}+1)}w^{-n}\\ &\phi_w(w^n)=w^n\end{aligned}\tag{C.49}$$

只要满足 $u\notin\hbar\mathbb{Z}$，便定义了 $\mathcal{D}_\hbar$-模之间的同构。注意，$\phi_w\circ\phi_z^{-1}$本质上就是傅里叶变换。

C.0.8 命题5.1 的证明

现在我们将在熟悉C.0.6和C.0.7的内容的前提下，给出命题5.1的证明。

利用命题 $\mathbb{V}_u$ 中对C.4的描述，以及C.0.7节的函数实现，实质上只有一个态射

$$\mathbb{V}_u \to \mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)} \otimes (\mathcal{H}_{\text{in}} \oplus \mathcal{H}_{\text{out}}) \tag{C.50}$$

可以写成如下形式：它将 $(\psi_+,\ \psi_-,\ \xi) \mapsto (f_{\text{in}}(z)\ f_{\text{out}}(w))$ 映射为

$$\begin{aligned} f_{\text{in}}(z) &= J\frac{1}{z-B_1}\phi_z(\psi_+) + \phi_z(\xi) \in \mathcal{H}_{\text{in}} \\ f_{\text{out}}(w) &= J\frac{1}{w-B_2}\phi_w(\psi_-) + \phi_w(\xi) \in \mathcal{H}_{\text{out}} \end{aligned} \tag{C.51}$$

其中，我们将 f_{in}，f_{out} 理解为 $\mathcal{H}_{\text{in}}$中的元素，并通过在 $z \to \infty$ 处展开映射到 $\mathcal{H}_{\text{out}}$。

首先需要验证的断言是：如果 $u \notin \hbar\mathbb{Z}$，则该映射是向量丛嵌入。为此，考虑将 $\mathbb{V}_u$ 按照命题 C.7中的描述表示，这样我们可以假设 $\psi_+ = \psi_+(w),\quad \psi_- = \psi_-(z) + \psi_0 w$，满足方程（C.45），且不受任何商关系约束。

为验证这是一个嵌入，设 $(f_{\text{in}},\ f_{\text{out}}) = 0$。则

$$\begin{aligned} \phi_z(\xi) &= -J\frac{1}{z-B_1}\phi_z(\psi_+(w)) \\ \phi_w(\xi) &= -J\frac{1}{w-B_2}\phi_w(\psi_0 w + \psi_-(z)). \end{aligned} \tag{C.52}$$

注意，由于 $\phi_z(\psi_+(w)) = O(1)$ 当 $z \to \infty$ 时，第一行的右端是 $O(z^{-1})$，其中$z \to \infty$。根据分解的唯一性 $\xi = \xi^+(z) + w\xi^-(w)$ 以及 ϕ_z 是同构这一事实，这意味着 $\xi^+(z) = 0$。同样，第二行的右端在 $w \to \infty$ 时为 $O(1)$，从而有 $\xi^-(w) = 0$。于是，由（C.45）可得 $\psi_-(z) = 0,\quad \psi_+(w) = -B_1\psi_0$，$(u - B_2B_1)\psi_0 = 0$，并且我们有

$$\begin{aligned} J\frac{1}{z-B_1}B_1\psi_0 &= 0 \\ J\frac{w}{w-B_2}\psi_0 &= 0 \end{aligned} \tag{C.53}$$

由（C.52）以及 ξ 的消失。按 z^{-1} 和 w^{-1} 展开，可得 $J\psi_0 = JB_1^n\psi_0 = JB_2^n\psi_0 = 0$，因此 $S =$ 张成$(\psi_0,\ B_1^n\psi_0,\ B_2^n\psi_0)_{n\geq 1} \subseteq \ker J$。 S既是 B_1不变的，也是 B_2 不变的，因为对于 $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} B_2B_1^n\psi_0 &= \left[B_2, B_1^{n-1}\right]B_1\psi_0 + B_1^{n-1}B_2B_1\psi_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} B_1^k[B_2,B_1]B_1^{n-2-k}B_1\psi_0 + uB_1^{n-1}\psi_0 \\ &= -\hbar(n-1)B_1^{n-1}\psi_0 + \sum_{k=0}^{n-2} B_1^k I J B_1^{n-1-k}\psi_0 + uB_1^{n-1}\psi_0 \\ &= (u-(n-1)\hbar)B_1^{n-1}\psi_0 \end{aligned} \tag{C.54}$$

同理 $B_1B_2^n\psi_0=(u+\hbar n)B_2^{n-1}\psi_0$，通过类似的计算可得。引理 C.1 进而推出 $S=0$，因此 $\psi_0=0$ 证得单射性。

接下来，我们研究诱导投影 $\mathbb{V}_u\to\mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)}\otimes\mathcal{H}_+$ 的核，其中 $\mathcal{H}_+=W[z]\oplus wW[w]$。在命题 C.7 中对 $\mathbb{V}_u$ 的描述里，此映射被识别为 $(\xi,\psi_0)\mapsto(\phi_z(\xi^+(z))\ \phi_w(w\xi^-(w))$，因此其核恰好由满足$\xi=0$ 的对 (ξ,ψ_0) 构成；根据命题 C.7，这些对等同于满足 $(B_2B_1-u)\psi_0=0$ 的 ψ_0，从而得到

$$\ker(\mathbb{V}_u\to\mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)}\otimes\mathcal{H}_+)\simeq\ker(u-B_2B_1). \tag{C.55}$$

最后，我们需要刻画余核$(\mathbb{V}_u\to\mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)}\otimes\mathcal{H}_+)$。注意，赋值

$$\mathcal{H}_+\ni(p^+(z),wp^-(w))\mapsto p^+(B_1)I+B_2p^-(B_2)I\in\operatorname{coker}(u-B_2B_1) \tag{C.56}$$

$\widetilde{\ }$（由命题 C.7）诱导出 M 上的层的单射同态（r）

$$\operatorname{coker}(\mathbb{V}_u\to\mathcal{O}_{\widetilde{M}(r)}\otimes\mathcal{H}_+)\longrightarrow\operatorname{coker}(u-B_2B_1);$$

借助稳定性条件和引理C.2，可以通过与命题3.1的证明中基本相同的论证确立满射性。

参考文献

[Aga+05] M. Aganagic 等。《拓扑弦与可积层级》。载于《数学物理通讯》261.2（2005年10月），第451–516页。ISSN：1432- 0916。DOI：10.1007/s00220-005-1448-9。URL：http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1448-9。[Aga+17] M. Aganagic 等。拓扑切恩-西蒙斯/物质理论。2017。arXiv：1706.09977 [hep-th]。URL：https://arxiv.org/abs/1706.09977。[AH88] M. F. Atiyah 和 N. Hitchin。《磁单极子的几何与动力学》

普林斯顿大学出版社，1988年。网址：http :/ / www .jstor. org/ stable/j . ctt7zv206.[AO17] M. Aganagic 和 A. Okounkov。拟映射计数与贝特本征函数。2017年。arXiv：1704.08746 [math-ph]。网址：https://arxiv.org/abs/1704.08746.[AS12] N. Arbesfeld 和 O. Schiffmann。变形 $W_{1+\infty}$ 代数的一种表示。2012年。arXiv：1209. 0429 [math.RT]。网址：https://arxiv.org/abs/1209.0429.[Ash24] M. Ashwinkumar。五维陈-西蒙斯理论与扭曲 M 理论中的费曼图给出的 R 矩阵。2024年。arXiv：2408 . 15732 [hep-th]。网址：https : //arxiv.org/abs/2408.15732.[Ati+78] M. Atiyah 等。“瞬子的构造”。载于：《物理快报 A》65 (3 1978)，第185–187页。[Ati84] M. F. Atiyah。“二维与四维中的瞬子”。载于：Commun. Math. Phys. 93 (1984)，第437–451页。[BDG15] M. Bullimore、T. Dimofte 和 D. Gaiotto。三维 $\mathcal{N} = 4$理论的库仑分支。2015年。arXiv：1503.04817 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/ 1503.04817.[BF 10] A. Braverman 和 M. Finkelberg。“探索双仿射格拉斯曼量 I：通过 Ak 奇点上的瞬子构造横截切片”。载于：杜克数学杂志 152.2（2010年4月）。ISSN：0012-7094。DOI：10.1215/00127094-2010-011。网址：http://dx.doi.org/10.1215/00127094-2010-011.[BFG12] A. Braverman、M. Finkelberg 和 D. Gaitsgory。通过仿射李代数构造乌伦贝克空间。2012年。arXiv: math /0301176 [math.AG]。网址：https : / / arxiv . org / abs/math/0301176.[BFN18] A. Braverman、M. Finkelberg 和 H. Nakajima。 $3d\ \mathcal{N} = 4$箭图规范理论的库仑分支与仿射格拉斯曼量中的切片（附录作者：Alexander Braverman、Michael Finkelberg、Joel Kamnitzer、Ryosuke Kodera、Hiraku Nakajima、Ben Webster 和 Alex Weekes）。2018年。arXiv：1604 . 03625[math.RT]。网址：https://arxiv.org/abs/1604.03625.[BGK01] V. Baranovsky、V. Ginzburg 和 A. Kuznetsov。箭图簇与非交换 $\mathbb{P}^2$。2001年。arXiv：math/0103068 [math.AG]。网址：https://arxiv. org/abs/math/0103068。

[BGK02] V. Baranovsky、V. Ginzburg 和 A. Kuznetsov。Wilson 格拉斯曼流形与非交换二次曲面。2002年。arXiv：math/0203116 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/math/0203116.[BN03] D. Ben-Zvi 和 T. Nevins。从孤子到多体系统。2003年。arXiv：math/0310490 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/math/0310490.[BT] T. M. Botta 和 S. Tamagni。准备中。[CG84] E. Corrigan 和 P. Goddard。“瞬子与磁单极子解的构造及互反性”。载于：《物理学年鉴》154 (1 1984)，第253–279页。[CGY21] K. Costello、D. Gaiotto 和 J. Yagi。Q 算子就是 't Hooft 线。2021年。arXiv：2103.01835 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/2103.01835.[Cos13] K. Costello。超对称规范理论与 Yangian。2013年。arXiv：1303.2632 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/1303.2632.[Cos16] K. Costello。Ω 背景中的 M 理论与五维非交换

e

规范理论。2016年。arXiv：1610.04144 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/1610.04144.[CWY18] K. Costello、E. Witten 和 M. Yamazaki。“规范理论与可积性（一）”。载于：《国际华人数学家大会会刊》6.1（2018年），第46–119页。ISSN：2326-4845。DOI：10.4310/iccm.2018.v6.n1.a6。网址：http://dx.doi.org/10.4310/ICCM.2018.v6.n1.a6.[Del+99] P. Deligne 等编。量子场与弦：数学家课程。第2卷。美国数学会，1999年。ISBN：978-0-8218-2012-4.[DHS09] R. Dijkgraaf、L. Hollands 和 P. Sułkowski。“量子曲线与 $\mathcal{D}$-模”。载于：《高能物理学杂志》2009.11（2009年11月），第047–047页。ISSN：1029- 8479。DOI：10.1088/1126-6708/2009/11/047。网址：http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/11/047.[Dij+08] R. Dijkgraaf 等。“超对称规范理论、相交膜与自由费米子”。载于：《高能物理学杂志》2008.02（2008年2月），第106– 106页。ISSN：1029-8479。DOI：10 . 1088 / 1126 - 6708 / 2008 / 02 / 106。网址：http : //dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/02/106.[Dij92] R. Dijkgraaf。交叉理论、可积层级与拓扑场论。1992年。arXiv：hep-th/9201003 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/hep-th/9201003.[Don84] S. K. Donaldson。“Nahm 方程与磁单极子的分类”。载于：《数学物理通讯》96（1984年），第387–407页。[Dub81] B. Dubrovin。“θ 函数与非线性方程”。载于：《俄罗斯数学评论》36（2，1981年），第11页。网址：https : / / doi . org / 10 . 1070 / RM1981v036n02ABEH002596.[Fad95] L. D. Faddeev。“Bethe 拟设的代数方面”。载于：《国际现代物理学杂志 A》10.13（1995年5月），第1845–1878页。ISSN：1793-656X。DOI：10 . 1142 / s0217751x95000905。网址：http : / / dx . doi . org / 10 . 1142 / S0217751X95000905。

[Fei+11] B. Feigin 等。“量子连续 $\mathfrak{gl}_\infty$：表示的半无限构造”。载于：《京都数学杂志》51.2（2011年1月）。ISSN：2156-2261。DOI：10 . 1215 / 21562261 - 1214375。网址：http : / / dx . doi . org / 10 . 1215 / 21562261-1214375.[FPT22] R. Frassek、V. Pestun 和 A. Tsymbaliuk。“来自反主导移位杨算子和量子仿射代数的 Lax 矩阵：A 型”。载于：《数学进展》401（2022年6月），第108283页。ISSN：0001-8708。DOI：10.1016/j.aim.2022. 108283。网址：http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2022.108283.[Ger+05] A. Gerasimov 等。“关于 Yangian 的一类表示与磁单极子模空间”。载于：《数学物理通讯》260.3（2005年8月），第511–525页。ISSN：1432-0916。DOI：10.1007/s00220-005-1417-3。网址：http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1417-3.[GR20] D. Gaiotto 和 M. Rapcak。Miura 算子、退化场与 M2-M5 交。2020年。arXiv：2012 . 04118 [hep-th]。网址：https : / / arxiv .org/ abs/2012.04118.[GRZ24] D. Gaiotto、M. Rapčák 和 Y. Zhou。变形双流代数、矩阵扩展的 $\mathcal{W}_\infty$ 代数、余积，以及来自 M2-M5 交的交织算子。2024年。arXiv：2309.16929 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/2309. 16929.[Hit82] N. J. Hitchin。“磁单极子与测地线”。载于：《数学物理通讯》83（1982年），第579–692页。[HJ24] N. Haouzi 和 S. Jeong。作为来自 M 膜交的 R 矩阵的 Miura 算子。2024年。arXiv：2407.15990 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/2407. 15990.[Hur85] J. Hurtubise。“磁单极子与有理映射：关于 Donaldson 定理的注记”。载于：《伦敦数学学会会刊》77（1998年），第170–192页。[IJZ25] N. Ishtiaque、S. Jeong 和 Y. Zhou。“五维陈-西蒙斯理论中的 R 矩阵与 Miura 算子”。载于：《SciPost 物理核心》8.1（2025年1月）。ISSN：2666- 9366。DOI：10.21468/scipostphyscore.8.1.003。网址：http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhysCore.8.1.003.[Jar98] S. Jarvis。“欧几里得单极子与有理映射”。载于：《伦敦数学学会会刊》77（1998年），第170–192页。[KKO01] A. Kapustin、A. Kuznetsov 和 D. Orlov。“非交换瞬子与扭量变换”。载于：《数学物理通讯》221.2（2001年7月），第385–432页。ISSN：0010-3616。DOI：10 . 1007 / pl00005576。网址：http : //dx.doi.org/10.1007/PL00005576.[KN16] R. Kodera 和 H. Nakajima。Jordan 箭图规范理论的量子化库仑分支与分圆有理 Cherednik 代数。2016年。arXiv：1608 . 00875[math.RT]。网址：https://arxiv.org/abs/1608.00875。

[KP21] V. Krylov 和 I. Perunov。《几乎占优广义切片及其上的卷积图》。2021年。arXiv：1903.08277 [math.RT]。网址：https://arxiv. org/abs/1903.08277。[Kro85] P. Kronheimer。《单极子与 Taub-NUT度量》。1985年。网址：https://people.math.harvard.edu/~kronheim/MSc-Thesis-Oxford-1985.pdf。[KW07] A. Kapustin 和 E. Witten。《电磁对偶与几何朗兰兹纲领》。2007年。arXiv：hep-th/0604151 [hep-th]。网址：https://arxiv. org/abs/hep-th/0604151。[LN21] N. Lee 和 N. Nekrasov。《量子自旋系统与超对称规范理论。第一部分》。载于：《高能物理学杂志》2021年第3期（2021年3月）。ISSN：1029-8479。doi：10.1007/jhep03(2021)093。网址：http://dx.doi.org/10. 1007/JHEP03(2021)093。[MJD00] T. Miwa、M. Jimbo 和 E. Date。《孤子：微分方程、对称性与无限维代数》。剑桥数学专著。剑桥大学出版社，2000年。ISBN：9780521561617。网址：https : / / books . google.com/books?id=kQDw1ZcqLjUC。[MO18] D. Maulik 和 A. Okounkov。《量子群与量子上同调》。2018年。arXiv：1211.1287 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/1211.1287。[MRV14] G. W. Moore、A. B. Royston 和 D. Van den Bleeken。《奇异单极子 $\mathbb{R}^3$的参数计数》。载于：《高能物理学杂志》2014年第10期（2014年10月）。ISSN：1029-8479。doi：10.1007/jhep10(2014)142。网址：http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2014)142。[Mul94] M. Mulase。《KP方程的代数理论》。载于：《数学物理学展望》。1994年。网址：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:1736764。[MV02] I. Mirković 和 M. Vybornov。《关于 A 型箭图簇与仿射格拉斯曼流形》。2002年。arXiv：math/0206084 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/math/0206084。[Nek01] N. A. Nekrasov。《非交换规范理论中的孤子：的里雅斯特讲义》。载于：《超弦及相关议题》。世界科学出版社，2001年4月，第141–205页。doi：10.1142/9789812810274_0004。网址：http://dx.doi.org/ 10.1142/9789812810274_0004。[Nek02] N. A. Nekrasov。《由瞬子计数得到的 Seiberg-Witten预势》。2002年。arXiv：hep - th / 0206161 [hep-th]。网址：https: //arxiv .org/ abs/ hep - th/0206161。[Nek20] N. Nekrasov。《将瞬子与反瞬子联系起来》。2020年。arXiv：1802.04202[hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/1802.04202。[NO14] N. Nekrasov 和 A. Okounkov。《膜与层》。2014年。arXiv：1404.2323[math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/1404.2323。

[NP23] N. Nekrasov 和 V. Pestun。《四维 $\mathcal{N}$ =2箭图规范理论的塞伯格–维滕几何》。载于：《对称性、可积性与几何：方法与应用》（2023年7月）。ISSN：1815-0659。doi：10.3842/sigma.2023.047。网址：http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2023.047。[NS98] N. Nekrasov 和 A. Schwarz。《非交换 $\mathbb{R}^4$上的瞬子，以及(2,0) 超共形六维理论》。载于：《数学物理学通讯》198.3（1998年11月），第689–703页。ISSN：1432-0916。doi：10 .1007 / s002200050490。网址：http://dx.doi.org/10.1007/s002200050490。[NT] S. Nair 和 S. Tamagni。准备中。[Pol19] A. P. Polychronakos。《费曼关于卡洛杰罗运动积分可交换性的证明》。载于：《物理学年鉴》403（2019年4月），第145–151页。ISSN：0003-4916。doi：10.1016/j.aop.2019.02.005。网址：http://dx.doi.org/10. 1016/j.aop.2019.02.005。[Pro19] T. Procházka。《瞬子 R矩阵与 $\mathcal{W}$对称性》。载于：《高能物理学杂志》2019年第12期（2019年12月）。ISSN：1029-8479。doi：10.1007/jhep12(2019) 099。网址：http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2019)099。[SW85] G. Segal 和 G. Wilson。《环群与 KdV 型方程》。载于：《高等科学研究院数学出版物》（ 1985 年）。[SW99] N. Seiberg 和 E. Witten。《弦理论与非交换几何》。载于：《高能物理学杂志》1999年第09期（1999年9月），第032–032页。ISSN：1029- 8479。doi：10.1088/1126-6708/1999/09/032。网址：http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/032。[Tam24] S. Tamagni。《非阿贝尔移位算子与移位 Yangian 代数》。2024年。arXiv：2412.17906 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/2412.17906。[Ton18] D. Tong。《规范理论讲义》。2018年。网址：https://www.damtp.cam.ac. uk/user/tong/gaugetheory/gt.pdf。[Tsy17] A. Tsymbaliuk。《重新审视 $\mathfrak{gl}_1$ 的仿射Yangian》。载于：《数学进展》304（2017年1月），第583–645页。ISSN：0001-8708。doi：10.1016/j.aim.2016.08. 041。网址：http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2016.08.041。[VPM96] A. Álvarez Vázquez、J. M. Muñoz Porras 和 F. J. Plaza Martín。《任意基域上孤子方程的代数形式体系》。1996年。arXiv：alg-geom/9606009 [alg-geom]。网址：https://arxiv.org/abs/alg-geom/9606009。[Wil98] G. Wilson。《卡洛杰罗–莫泽粒子的碰撞与一个阿代尔格拉斯曼流形（附 I. G. Macdonald 撰写的附录）》。载于：《数学创刊》（1998年）。[Wit09] E. Witten。《来自六维的几何朗兰兹纲领》。2009年。arXiv：0905.2720[hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/0905.2720。[Wit84] E. Witten。《二维中的非阿贝尔玻色化》。载于：《数学物理通讯》92（1984年），第455–472页。

[Wit88] E. Witten。《量子场论、格拉斯曼流形与代数曲线》。载于：《数学物理通讯》113（1988），第529–600页。[Yag14] J. Yagi。《Ω 变形与量子化》。载于：《高能物理学杂志》2014年8期（2014年8月）。ISSN：1029-8479。DOI：10 . 1007/ jhep08(2014) 112。网址：http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2014)112。[Zen23] Y. Zenkevich。《螺旋膜与 R 矩阵》。2023年。arXiv：2312.16990 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/2312.16990。[Zen24] Y. Zenkevich。《螺旋膜、仿射 qq-特征与椭圆可积系统》。2024年。arXiv：2412.20926 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/2412. 20926。