由斯皮尔曼脚距、吉尼伽马和肯德尔τ确定的精确区域

DAMJAN A KOKOL BUKOVŠEK, PETRA LAZIĆ, BLAŽ MOJŠKERC, AND NIK STOPAR

Abstract. 一致性度量用于表达随机变量之间关联程度。研究者可能会使用几种不同的一致性度量，以缩小可能的依赖结构范围。因此，近年来，不同（弱）一致性度量之间的关系得到了广泛研究。本文旨在研究肯德尔τ、吉尼伽马和斯皮尔曼脚距之间的关系。具体而言，我们利用 M 的洗牌和 Copula 的序数和，描述由这三种度量确定的精确区域。我们还给出了 Copula 的序数和的五种主要（弱）一致性度量以及 Chatterjee ξ 的公式。

arXiv:2601.07993v1 [math.ST] 12 Jan 2026

1. Introduction

有多种一致性度量可用于描述随机变量之间的关联。给定两个随机变量 X 和 Y，它们之间的一致性度量仅取决于与其联合分布相关联的联结函数。传统上，斯皮尔曼秩相关系数和肯德尔τ是实践中最常用的度量，已有大量文献探讨其性质。后来，人们又提出了其他几种（弱）一致性度量，例如吉尼伽马、Blomqvist β 和斯皮尔曼脚距。本文主要关注肯德尔τ、吉尼伽马与斯皮尔曼脚距之间的关系，因此列出这三种度量的一些参考文献。肯德尔τ见 [9, 11, 12, 30], ， 吉尼伽马见 [3, 10, 21]，斯皮尔曼脚距见 [5, 10, 29, 26]。

每种一致性度量都刻画了关联的某个特定方面，因此实践者往往会使用多种度量，以缩小可能的依赖结构范围。因此，Copula 的不同（弱）一致性度量之间的关系值得关注，并已得到广泛研究。

由斯皮尔曼秩相关系数和肯德尔τ确定的精确区域问题自20世纪60年代以来一直悬而未决，并于 [25]得到解决。Blomqvist β与其他（弱）一致性度量之间的关系相对容易描述（见 [14]），而其他度量之间的关系则更具挑战性。吉尼伽马与斯皮尔曼脚距确定的区域已在 [15]中得到刻画。斯皮尔曼秩相关系数与斯皮尔曼脚距确定的区域问题已在 [18], 中得到部分解决，另见 [28]。该区域的下界已得到精确确定，而上界目前仅有良好的近似结果。肯德尔τ与其他（弱）一致性度量之间的关系见 [17]。斯皮尔曼秩相关系数与吉尼伽马确定的区域仍是一个未解决的问题。

2021年，Chatterjee 秩相关系数（Chatterjee ξ）在[2] 中被提出，并迅速受到广泛关注。它量化了随机变量 X 与 Y之间函数依赖的强度。尽管它不是一致性度量，但仍有人将它与常见的一致性度量进行比较，见 [1, 8, 23]。

2020 数学主题分类。62H05, 62H20, 60E05。关键词与短语。Copula；依赖概念；一致性度量；肯德尔τ；吉尼伽马；斯皮尔曼脚距；Copula 的序数和。

本文 [8]强调了研究该问题高维版本的重要性，即同时刻画两个以上一致性度量之间的联系。关于三个一致性度量——Blomqvist β、斯皮尔曼脚距和吉尼伽马——的首次研究发表于 [16]。本文旨在研究肯德尔τ、斯皮尔曼脚距和吉尼伽马之间的关系。我们首先证明，在给定联结函数的斯皮尔曼脚距和吉尼伽马时，其肯德尔τ的下界和上界。随后，我们给出若干示例，说明这些界可由 M的洗牌达到。结果表明，对于所有联结函数$\phi(C)$ $\gamma(C)$ $\tau(C)$)所构成的三元组集合是一个多面体。 C

为证明我们的结果，我们使用 Copula 的序数和，因此需要给出用各加项的一致性度量表示 Copula 序数和的一致性度量的公式。我们为最常见的五种（弱）一致性度量以及 Chatterjee ξ 推导出这些公式。这些结果本身也可能令读者感兴趣。其中一些结果已在文献中出现，但未附证明。

本文结构如下。第2 节介绍符号记法，给出基本定义，并回顾后文所需的一些结果。第3 节证明 Copula 序数和的一致性度量及 Chatterjee ξ 的公式。第4 节陈述我们的主要结果，即描述由斯皮尔曼脚距、吉尼伽马和肯德尔τ确定的精确区域。此外，我们还给出达到所得区域边界的 Copula 示例。最后，我们对全文作总结，并讨论在给定 Copula 的斯皮尔曼脚距和吉尼伽马时，肯德尔τ可能的取值范围。

2. Preliminaries

设 $\mathbb{I}$ 为单位区间 $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$，且 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ 满足 $u_1 \leq u_2$ 且$v_1 \leq v_2$。区间 $R = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ 的笛卡尔积称为 $\mathbb{I}^2$中的矩形。设 $H : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}$ 为实函数。我们将 R 的 H-体积定义为 $V_H(R) = H(u_2, v_2) - H(u_2, v_1) - H(u_1, v_2) + H(u_1, v_1)$。二元 *Copula* 是函数 $C : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$，具有以下性质：

- $C(0, v) = C(u, 0) = 0$ 对所有 $u, v \in \mathbb{I}$ 成立（C 以零为基准），
- $C(u, 1) = u$ 且 $C(1, v) = v$ 对所有 $u, v \in \mathbb{I}$ 成立（C 具有均匀边缘分布），并且
- $V_C(R) \geq 0$ 对于每个矩形 $R \subseteq \mathbb{I}^2$ (C 均为 2–递增)。

二元 Copula 是连接二元分布函数及其一维边缘分布函数的二元函数，这一著名定理由 Sklar [27] 提出。所有二元 Copula 的集合记为 $\mathcal{C}$。众所周知，该集合在上确界范数下是紧的。对于任意联结函数 C，其对角线记为 δ_C，反对角线记为 ω_C，即 $\delta_C(u) = C(u, u)$，且 $\omega_C(u) = C(u, 1-u)$，对所有 $u \in \mathbb{I}$均成立。

给定两个联结函数 C和 D，若对于所有 $(u, v) \in \mathbb{I}^2$，都有 $C \leq D$，且 $C(u, v) \leqslant D(u, v)$，则记为如此。这就是所谓的联结函数逐点序。对于任意联结函数 C，有 $W \leq C \leq M$，其中 $W(u, v) = \max\{0, u + v - 1\}$和 $M(u, v) = \min\{u, v\}$ 分别是所有联结函数集合的下、上 Fr´échet-Hoeffding 界。此外，任意联结函数 C 诱导出反射 copula C^{σ_1} 和 C^{σ_2}，其定义为 $C^{\sigma_1}(u, v) = v - C(1-u, v)$，以及 $C^{\sigma_2}(u, v) = u - C(u, 1-v)$，对所有 $(u, v) \in \mathbb{I}^2$均成立。注意，$\delta_{C^{\sigma_2}}(u) = u - \omega_C(u)$。

令 $h : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 为一个保测双射，其中 $\mathbb{I}$ 配备了勒贝格测度 λ。那么由下式定义的函数

$$C(u, v) = \lambda\big(\{t \in \mathbb{I} \mid t \leq u, h(t) \leq v\}\big) \tag{1}$$

是一个质量集中在 h图像上的联结函数，即 $\mu_C\big(\{(t,\ h(t))\ \mid t \in \mathbb{I}\}\big) = 1$。这类联结函数的典型例子是所谓的的置换。 M的一个置换

$$C = M(n, J, \pi, \omega)$$

由正整数 n、将区间 $\mathbb{I}$划分为 n 个部分的划分 $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ （其中 $J_i = [u_{i-1}, u_i]$ 和 $0 = u_0 \le u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_{n-1} \le u_n = 1$）决定，简记为（$n-1$）元组的分割点 $J =$(u1, u2, ..., un−1)；一个排列$\pi \in S_n$，记作由像组成的 n元组 $\pi =$(π(1) π(2)....., π(n))；以及一个映射 ω:{1, 2, . . . , n} → {−1, 1}，记作由像组成的 n元组 $\omega =$(ω(1) ω(2)....., ω(n))。 C的质量集中在正方形 $[u_{i-1}, u_i] \times [v_{\pi(i)-1} \times v_{\pi(i)}]$的主对角线上，其中 $0 = v_0 \le v_1 \le v_2 \le \ldots \le v_{n-1} \le v_n = 1$。因此， C由保测双射 h_C: $\mathbb{I} \to \mathbb{I}$定义，具体如下:

$$h_C(u) = \begin{cases} u + v_{\pi(i)-1} - u_{i-1}; & u \in (u_{i-1}, u_i),\ \omega(i) = 1, \\ v_{\pi(i)} + u_{i-1} - u; & u \in (u_{i-1}, u_i),\ \omega(i) = -1, \\ v_i; & u = u_i. \end{cases}$$

此外， C 是均匀分布随机变量 U 和 V 在 $\mathbb{I}$上的联结函数，且具有如下性质 $P(V = h_C(U)) = 1$。更多详情请参见 [22, §3.2.3]。

在 [24] Scarsini 提出了形式化的一致性度量公理。一致性度量是将每个联结函数映射为 $[-1, 1]$ 中的一个实数的映射，旨在衡量随机向量各分量之间的一致或不一致程度。回顾一下，随机向量 (X, Y) 的两个观测值 (x, y) 和 (x', y')，若满足 $(x - x')(y - y') > 0$，则称为一致；若满足 $(x - x')(y - y') < 0$，则称为不一致。关于一致性度量的形式化定义及更多详情，请参阅 [7] 和 [22]。下面给出后文将用到的一致性度量的性质: 若 κ 是一致性度量，则 $\kappa(M) = 1$， $\kappa(C^{\sigma_1}) = \kappa(C^{\sigma_2}) = -\kappa(C)$ 对任意联结函数 $C \in \mathcal{C}$均成立； κ 关于逐点收敛连续，且 κ 关于逐点序单调递增。

许多最重要的二元一致性度量，包括肯德尔τ和吉尼伽马，都可以用所谓的一致性函数 $\mathcal{Q}$来表示，该函数由 Kruskal [19]提出。如果（X_1, Y_1）和（X_2, Y_2）是成对的连续随机变量，那么随机向量（X_1, Y_1）和（X_2, Y_2）的一致性函数仅取决于相应的联结函数 C_1 和 C_2 ，其定义为（见 [22, 定理 5.1。1]）

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(C_1, C_2) = 4 \int_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v)\, dC_1(u, v) - 1. \tag{2}$$

事实证明，一致性函数关于其参数是对称的，即 $\mathcal{Q}$（C_1, C_2） =$\mathcal{Q}$（C_2, C_1），并且还具有若干其他有用性质，见 [22, 推论 5.1。2] 和 [13, §3]。

最重要的一致性度量包括斯皮尔曼秩相关系数、肯德尔τ、吉尼伽马和 Blomqvist β。有了相应的一致性函数，斯皮尔曼秩相关系数可定义为

$$\rho(C) = 3\mathcal{Q}(C, \Pi) = 12 \int_{\mathbb{I}^2} C(u, v)\, du\, dv - 3, \tag{3}$$

肯德尔τ 通过

$$\tau(C) = \mathcal{Q}(C, C) = 4 \int_{\mathbb{I}^2} C(u, v)\, dC(u, v) - 1, \tag{4}$$

和吉尼伽马 由

$$\gamma(C) = \mathcal{Q}(C, M) + \mathcal{Q}(C, W) = 4 \int_0^1 \delta_C(u)\, du + 4 \int_0^1 \omega_C(u)\, du - 2. \tag{5}$$

Blomqvist β 定义为

$$\beta(C) = 4C(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) - 1. \tag{6}$$

若 $h_C\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 是一个保测双射，且 C 是一个质量集中在 h_C的图像上的联结函数，那么 $\tau(C)$ 可表示为

$$\tau(C) = 4\int_0^1 C(u, h_C(u))\,du - 1. \tag{7}$$

在 [20] Liebscher 考虑了弱相合度量，它们是比一致性度量稍微一般一些的映射（一致性度量的正式定义可见 Liebscher 的论文）。弱相合度量最重要的例子是斯皮尔曼脚距，定义为

$$\phi(C) = \tfrac{1}{2}\left(3\mathcal{Q}(C, M) - 1\right) = 6\int_0^1 \delta_C(u)\,du - 2. \tag{8}$$

S斯皮尔曼脚距并非真正的一致性度量，因为其取值范围为 $[-\frac{1}{2}, 1$ -].

最后，我们回顾 Chatterjee ξ 的定义。它不是一致性度量，而是一种非对称相关系数。每个联结函数 $C \in \mathcal{C}$ 在各个变量上都是递增的，因此几乎处处存在偏导数。我们用 $\partial_1 C(u,\ v)$ 表示 C 关于第一变量的偏导数。Chatterjee 秩相关系数的一个等价定义如下（见 [4, 23]）

$$\xi(C) = 6\int_{\mathbb{I}^2} \left(\partial_1 C(u, v)\right)^2 du\,dv - 2. \tag{9}$$

在下一个命题中，我们回顾肯德尔τ、吉尼伽马和斯皮尔曼脚距之间的关系，这些关系将在后文中用到。

命题 2.1 ([15, 17])。 对于任意联结函数 $C \in \mathcal{C}$，有

$$\tfrac{4}{3}\phi(C) - \tfrac{1}{3} \le \gamma(C) \le \min\left\{\tfrac{4}{3}\phi(C) + \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}\phi(C) + \tfrac{1}{3}\right\}, \tag{10}$$

$$\tfrac{4}{3}\phi(C) - \tfrac{1}{3} \le \tau(C) \le \tfrac{2}{3}\phi(C) + \tfrac{1}{3}, \tag{11}$$

$$\max\left\{\tfrac{2}{3}\gamma(C) - \tfrac{1}{3}, 2\gamma(C) - 1\right\} \le \tau(C) \le \min\left\{\tfrac{2}{3}\gamma(C) + \tfrac{1}{3}, 2\gamma(C) + 1\right\}. \tag{12}$$

这些界由 M 的洗牌达到。

3. Concordance measures of an ordinal sum

本节给出 Copula 的序数和的五种（弱）一致性度量（斯皮尔曼秩相关系数、肯德尔τ、斯皮尔曼脚距、吉尼伽马和 Blomqvist β）以及 Chat- terjee 的 xi 的公式。

设 $\{(a_k,\ b_k) \mid k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots n\}$ 是 $\mathbb{I}$ 的不相交开子区间的有限族，且 $\{B_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$ 是联结函数族。则 $\{B_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$ 关于 $\{(a_k,\ b_k) \mid k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n\}$ 的序数和（有时也称为 M-序数和） B 是一个联结函数，其定义为

$$B(u, v) = \begin{cases} a_k + (b_k - a_k)B_k\left(\frac{u-a_k}{b_k-a_k}, \frac{v-a_k}{b_k-a_k}\right); & (u, v) \in [a_k, b_k]^2, k = 1, 2, \ldots, n, \\ \min\{u, v\}; & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{13}$$

（另请参见 [6]，比较 [22, §3.2.2]）。

我们从斯皮尔曼秩相关系数的公式开始。它已经在 [18], 中出现过，但没有给出证明，因此我们在此给出证明。

命题 3.1。 序数和的斯皮尔曼秩相关系数 B，见 （13），为

$$\rho(B) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^3 (1 - \rho(B_k)). \tag{14}$$

证明。 由于 $B(u,\ v) = M(u,\ v)$位于正方形并集 $[a_k, b_k]^2$之外，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{I}^2} B(u,v)\,du\,dv &= \int_{\mathbb{I}^2} M(u,v)\,du\,dv + \int_{\mathbb{I}^2} (B(u,v) - M(u,v))\,du\,dv \\
&= \tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k]^2} (B(u,v) - M(u,v))\,du\,dv \\
&= \tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k]^2} B(u,v)\,du\,dv - \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k]^2} M(u,v)\,du\,dv \\
&= \tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k]^2} B(u,v)\,du\,dv - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2 (\tfrac{2}{3}a_k + \tfrac{1}{3}b_k).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\int_{[a_k,b_k]^2} B(u,v)\,du\,dv &= \int_{[a_k,b_k]^2} \left(a_k + (b_k - a_k) B_k(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k})\right) du\,dv \\
&= a_k(b_k - a_k)^2 + (b_k - a_k)^3 \int_{\mathbb{I}^2} B_k(t,s)\,dt\,ds \\
&= a_k(b_k - a_k)^2 + (b_k - a_k)^3 \cdot \frac{\rho(B_k) + 3}{12},
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\rho(B) &= 12 \int_{\mathbb{I}^2} B(u,v)\,du\,dv - 3 \\
&= 1 + 12 \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k]^2} B(u,v)\,du\,dv - 12 \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2 (\tfrac{2}{3}a_k + \tfrac{1}{3}b_k) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(12a_k(b_k - a_k)^2 - (b_k - a_k)^2(8a_k + 4b_k) + (b_k - a_k)^3(\rho(B_k) + 3)\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(-4(b_k - a_k)^3 + (b_k - a_k)^3(\rho(B_k) + 3)\right) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^3 (1 - \rho(B_k)),
\end{aligned}$$

由此证明完毕。 □

接下来我们给出序数和的肯德尔τ公式。

命题 3.2。 序数和的肯德尔τ B，由 (13)给出，为

$$\tau(B) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2 (1 - \tau(B_k)). \tag{15}$$

*Pro*的值。 由于 $B(u,\ v) = M(u,\ v)$ 位于方块并集 $[a_k, b_k]^2$ 之外，我们计算

$$\begin{aligned}\tau(B) &= -1 + 4\int_{\mathbb{I}^2} B(u,v)\,dB(u,v)\\ &= -1 + 4\sum_{k=1}^{n}\int_{[a_k,b_k]^2} B(u,v)\,dB(u,v) + 4\int_{\mathbb{I}\setminus\cup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} u\,du\\ &= -1 + 4\sum_{k=1}^{n}\int_{[a_k,b_k]^2} B(u,v)\,dB(u,v) + 4\int_0^1 u\,du - 4\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k} u\,du\\ &= 1 + 4\sum_{k=1}^{n}\int_{[a_k,b_k]^2} B(u,v)\,dB(u,v) - 2\sum_{k=1}^{n}(b_k^2 - a_k^2).\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}\int_{[a_k,b_k]^2} B(u,v)\,dB(u,v) &= \int_{[a_k,b_k]^2} \big(a_k + (b_k-a_k)B_k(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k})\big)\,dB(u,v)\\ &= \int_{[a_k,b_k]^2} a_k\,dB(u,v) + (b_k-a_k)\int_{[a_k,b_k]^2} B_k\big(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k}\big)\,dB(u,v)\\ &= \int_{[a_k,b_k]^2} a_k(b_k-a_k)\,dB_k(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k})\\ &\qquad + (b_k-a_k)^2\int_{[a_k,b_k]^2} B_k(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k})\,dB_k(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k})\\ &= a_k(b_k-a_k)\int_{\mathbb{I}^2} dB_k(t,s) + (b_k-a_k)^2\int_{\mathbb{I}^2} B_k(t,s)\,dB_k(t,s)\\ &= a_k(b_k-a_k) + (b_k-a_k)^2\cdot\frac{\tau(B_k)+1}{4}.\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\tau(B) &= 1 + 4\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k-a_k) + 4\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2\cdot\frac{\tau(B_k)+1}{4} - 2\sum_{k=1}^{n}(b_k^2-a_k^2)\\ &= 1 - 2\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(\tau(B_k)+1)\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\tau(B_k)),\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

关于序数和的斯皮尔曼脚距的公式，有一个版本已发表于 [28], ，当时假设闭子区间族的并集 $\{[a_k, b_k]\ |k = 1、2、\ldots\ldots、\ n\}$ 等于整个区间 $\mathbb{I}$。这里我们证明一般情形。

命题 3.3。 序数和的斯皮尔曼脚距 B，见 （13），为

$$\phi(B) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\phi(B_k)). \tag{16}$$

证明。 注意，联结函数 B 的对角线截面 δ_B 等于

$$\begin{aligned}\delta_B(u) &= \begin{cases} a_k + (b_k - a_k)\delta_{B_k}(\frac{u-a_k}{b_k-a_k}); & u \in [a_k, b_k], k = 1, 2, \ldots, n, \\ u; & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= u + \begin{cases} a_k - u + (b_k - a_k)\delta_{B_k}(\frac{u-a_k}{b_k-a_k}); & u \in [a_k, b_k], k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0; & \text{otherwise}, \end{cases}\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \delta_B(u)\,du &= \int_0^1 u\,du + \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \left(a_k - u + (b_k - a_k)\delta_{B_k}(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k})\right) du \\ &= \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(-\tfrac{1}{2}(b_k - a_k)^2 + (b_k - a_k)^2 \int_0^1 \delta_{B_k}(t)\,dt\right) \\ &= \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(-\tfrac{1}{2}(b_k - a_k)^2 + (b_k - a_k)^2 \cdot \frac{\phi(B_k) + 2}{6}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \cdot \frac{\phi(B_k) - 1}{6},\end{aligned}$$

这意味着

$$\phi(B) = 3 + \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2(\phi(B_k) - 1) - 2 = 1 - \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2(1 - \phi(B_k))$$

由此完成证明。 □

注意，在序数和的斯皮尔曼秩相关系数、肯德尔τ和斯皮尔曼脚距公式中，子区间（a_k， b_k）的位置并不重要，重要的只是它们的大小$b_k - a_k$。对于吉尼伽马，情况则不再如此。为了给出吉尼伽马的结果，我们先证明一个简单的引理。

引理 3.4。 对于任意联结函数 $C \in \mathcal{C}$ ，有

$$\gamma(C) = \tfrac{2}{3}(\phi(C) - \phi(C^{\sigma_2})).$$

证明。 对于任意联结函数 C ，有

$$\int_0^1 \delta_{C^{\sigma_2}}(u)\,du = \int_0^1 C^{\sigma_2}(u, u)\,du = \frac{1}{2} - \int_0^1 C(u, 1-u)\,du = \frac{1}{2} - \int_0^1 \omega_C(u)\,du,$$

因此

$$\begin{aligned}\gamma(C) &= 4\int_0^1 \delta_C(u)\,du + 4\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 \delta_{C^{\sigma_2}}(u)\,du\right) - 2 \\ &= 4 \cdot \frac{\phi(C) + 2}{6} - 4 \cdot \frac{\phi(C^{\sigma_2}) + 2}{6} \\ &= \tfrac{2}{3}(\phi(C) - \phi(C^{\sigma_2})),\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

命题 3.5。 设 B 是由 (13)给出的序数和。若 1 2 不属于任何子区间 (a_k, b_k)，则

$$\gamma(B) = 1 - \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2(1 - \phi(B_k)). \tag{17}$$

若 $-\frac{1}{2} \in (a_j, b_j)$ 对某个 $j \in \{1, 2, ..., n\}$ 成立，则

$$\gamma(B) = 4(b_j - a_j)^2 \max\{0, c\}^2 + 4a_j - 4a_j^2 - \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2(1 - \phi(B_k)) + 4(b_j - a_j)^2 \int_{\max\{0,c\}}^{1+\min\{0,c\}} B_j\big(t, 1 + c - t\big)\, dt,$$

其中 $c = \frac{1-a_j-b_j}{b_j-a_j} \in (-1, 1)$。特别地，如果 $a_j + b_j = 1$ 对某个 $j \in \{1, 2, ..., n\}$（即，$\frac{1}{2}$ 位于子区间 (a_j, b_j) 的中点），那么

$$\gamma(B) = 1 - (b_j - a_j)^2(1 - \gamma(B_j)) - \tfrac{2}{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(b_k - a_k)^2(1 - \phi(B_k)). \tag{18}$$

证明。若 $\frac{1}{2} \notin \cup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$，则 $B(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ 且 $\omega_B = \omega_M$。由此可得 $\delta_{B^{\sigma_2}} = \delta_{M^{\sigma_2}} = \delta_W$ 且 $\phi(B^{\sigma_2}) = \phi(W) = -\frac{1}{2}$。由引理 3.4 和命题 3.3 可得

$$\gamma(B) = \tfrac{2}{3}\phi(B) - \tfrac{2}{3}\phi(B^{\sigma_2}) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2(1 - \phi(B_k)) + \tfrac{1}{3}$$
$$= 1 - \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2(1 - \phi(B_k)).$$

现在假设 $\frac{1}{2} \in (a_j, b_j)$。我们分两种情况讨论。首先假设 $a_j \geq 1 - b_j$。则

$$\omega_B(u) = \begin{cases} u; & 0 \leq u \leq a_j, \\ a_j + (b_j - a_j)B_j\big(\frac{u-a_j}{b_j-a_j}, \frac{1-u-a_j}{b_j-a_j}\big); & a_j < u \leq 1 - a_j, \\ 1 - u; & 1 - a_j < u \leq 1, \end{cases}$$

因此

$$\delta_{B^{\sigma_2}}(u) = \begin{cases} 0; & 0 \leq u \leq a_j, \\ u - a_j - (b_j - a_j)B_j\big(\frac{u-a_j}{b_j-a_j}, \frac{1-u-a_j}{b_k-a_j}\big); & a_j < u \leq 1 - a_j, \\ 2u - 1; & 1 - a_j < u \leq 1. \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \phi(B^{\sigma_2}) &= 6\int_0^1 \delta_{B^{\sigma_2}}(u)\, du - 2 \\ &= -2 + 6\int_{a_j}^{1-a_j} \big(u - a_j - (b_j - a_j)B_j\big(\tfrac{u-a_j}{b_j-a_j}, \tfrac{1-u-a_j}{b_j-a_j}\big)\big)\, du + 6\int_{1-a_j}^{1}(2u - 1)\, du \\ &= 6a_j^2 - 6a_j + 1 - 6(b_j - a_j)\int_{a_j}^{1-a_j} B_j\big(\tfrac{u-a_j}{b_j-a_j}, \tfrac{1-u-a_j}{b_j-a_j}\big)\, du \\ &= 6a_j^2 - 6a_j + 1 - 6(b_j - a_j)^2\int_0^{\frac{1-2a_j}{b_j-a_j}} B_j\big(t, \tfrac{1-2a_j}{b_j-a_j} - t\big)\, dt. \end{aligned}$$

现在假设 $a_j < 1 - b_j$。在这种情况下

$$\delta_{B^{\sigma_2}}(u) = \begin{cases} 0; & 0 \leq u \leq 1 - b_j, \\ u - a_j - (b_j - a_j)B_j\big(\frac{u-a_j}{b_j-a_j}, \frac{1-u-a_j}{b_k-a_j}\big); & 1 - b_j < u \leq b_j, \\ 2u - 1; & b_j < u \leq 1, \end{cases}$$

通过与上文类似的计算可得

$$\begin{aligned}\phi(B^{\sigma_2}) &= 12b_j - 6b_j^2 - 12a_jb_j + 6a_j - 5 \\ &\quad - 6(b_j-a_j)^2 \int_{\frac{1-a_j-b_j}{b_j-a_j}}^{1} B_j\big(t, \tfrac{1-2a_j}{b_j-a_j} - t\big)\, dt \\ &= 6a_j^2 - 6a_j + 1 - 6(1-a_j-b_j)^2 - 6(b_j-a_j)^2 \int_{\frac{1-a_j-b_j}{b_j-a_j}}^{1} B_j\big(t, \tfrac{1-2a_j}{b_j-a_j} - t\big)\, dt.\end{aligned}$$

综合这两种情况，我们得到

$$\begin{aligned}\phi(B^{\sigma_2}) &= 6a_j^2 - 6a_j + 1 - 6\max\{0, 1-a_j-b_j\}^2 - 6(b_j-a_j)^2 \int_{\max\left\{0, \frac{1-a_j-b_j}{b_j-a_j}\right\}}^{\min\left\{1, \frac{1-2a_j}{b_j-a_j}\right\}} B_j\big(t, \tfrac{1-2a_j}{b_j-a_j} - t\big)\, dt \\ &= 6a_j^2 - 6a_j + 1 - 6(b_j-a_j)^2\max\{0,c\}^2 - 6(b_j-a_j)^2 \int_{\max\{0,c\}}^{1+\min\{0,c\}} B_j\big(t, 1+c-t\big)\, dt,\end{aligned}$$

其中 $c = \frac{1-a_j-b_j}{b_j-a_j} \in (-1, 1)$。由引理 3.4 和命题 3.3 可得

$$\begin{aligned}\gamma(B) &= \tfrac{2}{3}\phi(B) - \tfrac{2}{3}\phi(B^{\sigma_2}) \\ &= \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\phi(B_k)) - 4a_j^2 + 4a_j - \tfrac{2}{3} + 4(b_j-a_j)^2\max\{0,c\}^2 \\ &\quad + 4(b_j-a_j)^2 \int_{\max\{0,c\}}^{1+\min\{0,c\}} B_j\big(t, 1+c-t\big)\, dt \\ &= 4(b_j-a_j)^2\max\{0,c\}^2 + 4a_j - 4a_j^2 - \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\phi(B_k)) \\ &\quad + 4(b_j-a_j)^2 \int_{\max\{0,c\}}^{1+\min\{0,c\}} B_j\big(t, 1+c-t\big)\, dt.\end{aligned}$$

特别地，如果 $a_j + b_j = 1$，则可简化为

$$\gamma(B) = 4a_j - 4a_j^2 - \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\phi(B_k)) + 4(b_j-a_j)^2 \int_0^1 B_j(t, 1-t)\, dt.$$

由于

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_j(t,1-t)\, dt = \int_0^1 \omega_{B_j}(t)\, dt &= \int_0^1 (t - \delta_{B_j^{\sigma_2}}(t))\, dt = \tfrac{1}{2} - \int_0^1 \delta_{B_j^{\sigma_2}}(t)\, dt \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}(\phi(B_j^{\sigma_2}) + 2) = \tfrac{1}{6}(1 - \phi(B_j^{\sigma_2})),\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\gamma(B) &= 4a_j - 4a_j^2 - \tfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\phi(B_k)) + \tfrac{2}{3}(b_j-a_j)^2(1-\phi(B_j^{\sigma_2}))\\ &= 4a_j - 4a_j^2 + \tfrac{2}{3}(b_j-a_j)^2(\phi(B_j)-\phi(B_j^{\sigma_2})) - \tfrac{2}{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\phi(B_k))\\ &= 4a_j - 4a_j^2 + (b_j-a_j)^2\gamma(B_j) - \tfrac{2}{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\phi(B_k))\\ &= 1-(b_j-a_j)^2(1-\gamma(B_j)) - \tfrac{2}{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\phi(B_k)),\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

接下来，我们考察序数和的 Blomqvist β。证明很直接，因此略去。

命题 3.6。 设 B 是由 (13)给出的序数和。若 $\frac{1}{2}$ 不属于任何子区间 (a_k, b_k)，则 $\beta(B) = 1$。若对于某个 $j \in \{1,2,...,n\}$， $\frac{1}{2} \in (a_j, b_j)$，则

$$\beta(B) = 4a_j + 4(b_j-a_j)\delta_{B_j}\left(\tfrac{\frac{1}{2}-a_j}{b_j-a_j}\right) - 1.$$

特别地，若对于某个 $j \in \{1,2,...,n\}$， $a_j + b_j = 1$ （即 $\frac{1}{2}$ 位于子区间 (a_j, b_j)的中间），则

$$\beta(B) = 1-(b_j-a_j)(1-\beta(B_j)).$$

最后，我们考察 Copula 的序数和的 Chatterjee ξ。

命题 3.7。 序数和的 *Chatterjee* ξ B，由 (13)给出，为

$$\xi(B) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\xi(B_k)). \tag{19}$$

证明。 注意，联结函数 B 关于第一变量的偏导数 $\partial_1 B$ 等于

$$\partial_1 B(u,v) = \begin{cases}\partial_1 B_k(\frac{u-a_k}{b_k-a_k}, \frac{v-a_k}{b_k-a_k}); & (u,v)\in[a_k,b_k]^2, k=1,2,\ldots,n,\\ 1; & v\geq u, (u,v)\notin \cup_{k=1}^{n}[a_k,b_k]^2,\\ 0; & \text{otherwise},\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{I}^2}(\partial_1 B(u,v))^2\,du\,dv &= \sum_{k=1}^{n}\int_{[a_k,b_k]^2}(\partial_1 B_k(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k}))^2\,du\,dv + \int_{\{(u,v)\in\mathbb{I}^2 | v\geq u\}\setminus\cup_{k=1}^{n}[a_k,b_k]^2} du\,dv\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{[a_k,b_k]^2}(\partial_1 B_k(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k}))^2\,du\,dv + \tfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}(b_k-a_k)^2.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{[a_k,b_k]^2}(\partial_1 B_k(\tfrac{u-a_k}{b_k-a_k}, \tfrac{v-a_k}{b_k-a_k}))^2\,du\,dv &= (b_k-a_k)^2\int_{\mathbb{I}^2}(\partial_1 B_k(s,t))^2\,ds\,dt\\ &= (b_k-a_k)^2\cdot\frac{\xi(B_k)+2}{6},\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\xi(B) &= 6\int_{\mathbb{I}^2}(\partial_1 B(u,v))^2\,du\,dv - 2\\ &= \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(\xi(B_k)+2) + 3 - \sum_{k=1}^{n}3(b_k-a_k)^2 - 2\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2(1-\xi(B_k)),\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

本节最后考察一种特殊的简单序数和，其中仅包含一个位于单位正方形中部的联结函数，后文将用到它。

引理 3.8. 对于任意的 $a \in [0, \frac{1}{2}]$和联结函数 $C \in \mathcal{C}$，令$B_{a,C}$ 为 $\{C\}$ 关于区间 $\{(a, 1-a)\}$的序数和。则

$$\begin{aligned}\rho(B_{a,C}) &= (1-2a)^3\rho(C) + 8a^3 - 12a^2 + 6a,\\ \tau(B_{a,C}) &= (1-2a)^2\tau(C) + 4a - 4a^2,\\ \phi(B_{a,C}) &= (1-2a)^2\phi(C) + 4a - 4a^2,\\ \gamma(B_{a,C}) &= (1-2a)^2\gamma(C) + 4a - 4a^2,\\ \beta(B_{a,C}) &= (1-2a)\beta(C) + 2a, \qquad \textit{and}\\ \xi(B_{a,C}) &= (1-2a)^2\xi(C) + 4a - 4a^2.\end{aligned}$$

证明。 若 $a = \frac{1}{2}$，则 $B_{a,\,C} = M$ 且公式成立。因此，不失一般性，我们可以假设 $a < \frac{1}{2}$。根据命题 3.1、3.2、3.3、3.5、3.6、3.7，我们分别得到

$$\begin{aligned}\rho(B_{a,C}) &= 1-(1-2a)^3(1-\rho(C)) = (1-2a)^3\rho(C) + 8a^3 - 12a^2 + 6a,\\ \tau(B_{a,C}) &= 1-(1-2a)^2(1-\tau(C)) = (1-2a)^2\tau(C) + 4a - 4a^2,\\ \phi(B_{a,C}) &= 1-(1-2a)^2(1-\phi(C)) = (1-2a)^2\phi(C) + 4a - 4a^2,\\ \gamma(B_{a,C}) &= 1-(1-2a)^2(1-\gamma(C)) = (1-2a)^2\gamma(C) + 4a - 4a^2,\\ \beta(B_{a,C}) &= 1-(1-2a)(1-\beta(C)) = (1-2a)\beta(C) + 2a, \qquad \text{and}\\ \xi(B_{a,C}) &= 1-(1-2a)^2(1-\xi(C)) = (1-2a)^2\xi(C) + 4a - 4a^2,\end{aligned}$$

分别得到，由此完成证明。 □

4. Exact region phi-gamma-tau

本节将求出由斯皮尔曼脚距、吉尼伽马和肯德尔τ所确定的精确区域

$$\Omega_{\phi,\gamma,\tau} = \big\{(\phi(C),\gamma(C),\tau(C)) \in [-\tfrac{1}{2},1]\times[-1,1]\times[-1,1] \mid C \in \mathcal{C}\big\}.$$

第一个引理给出了联结函数的肯德尔τ界限，前提是已知其斯皮尔曼脚距和吉尼伽马。

引理 4.1. 对于任意联结函数 $C \in \mathcal{C}$ 我们有

$$\max\left\{\tfrac{4}{3}\phi(C)-\tfrac{1}{3},\ -\tfrac{2}{3}\phi(C)+\gamma(C)-\tfrac{1}{3}\right\} \le \tau(C) \le \min\left\{\tfrac{2}{3}\phi(C)+\tfrac{1}{3},\ -\tfrac{4}{3}\phi(C)+2\gamma(C)+\tfrac{1}{3}\right\}.$$

证明。 由（11），我们只需证明

$$-\tfrac{2}{3}\phi(C)+\gamma(C)-\tfrac{1}{3} \le \tau(C) \le -\tfrac{4}{3}\phi(C)+2\gamma(C)+\tfrac{1}{3}.$$

对于任意联结函数 $C \in \mathcal{C}$ 根据引理 3.4 可得

$$\phi(C^{\sigma_2}) = \phi(C) - \tfrac{3}{2}\gamma(C). \tag{20}$$

再次利用（11），我们推得

$$\tau(C) = -\tau(C^{\sigma_2}) \leq -(\tfrac{4}{3}\phi(C^{\sigma_2}) - \tfrac{1}{3}) = -\tfrac{4}{3}(\phi(C) - \tfrac{3}{2}\gamma(C)) + \tfrac{1}{3} = -\tfrac{4}{3}\phi(C) + 2\gamma(C) + \tfrac{1}{3},$$

and

$$\tau(C) = -\tau(C^{\sigma_2}) \geq -(\tfrac{2}{3}\phi(C^{\sigma_2}) + \tfrac{1}{3}) = -\tfrac{2}{3}(\phi(C) - \tfrac{3}{2}\gamma(C)) - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{2}{3}\phi(C) + \gamma(C) - \tfrac{1}{3},$$

至此证明完成。 □

我们在 $\mathbb{R}^3$ 中定义一个多面体 Ω:

$$\begin{aligned} \Omega = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \mathbb{R}^3 \mid & -2\phi \leq 1, \\ & -8\phi + 6\gamma \leq 1, \\ & -2\phi + 3\gamma \leq 1, \\ & 4\phi - 3\tau \leq 1, \\ & -2\phi + 3\tau \leq 1, \\ & -2\phi + 3\gamma - 3\tau \leq 1, \\ & 4\phi - 6\gamma + 3\tau \leq 1\}. \end{aligned} \tag{21}$$

根据 ϕ（C），$\geq -\frac{1}{2}$方程（10）和引理 4.1可知，对于任意联结函数$C \in \mathcal{C}$，点（ϕ（C） γ（C） τ（C））都位于多面体 Ω 中。注意，多面体 Ω 有 6 个顶点

$$P_1(-\tfrac{1}{2},-1,-1),\ P_2(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}),\ P_3(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0),\ P_4(1,1,1),\ P_5(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},0),\ P_6(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),$$

7 个面

$$\begin{aligned} F_1 &:= P_1P_2P_3 = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \Omega \mid -2\phi = 1\}, \\ F_2 &:= P_1P_2P_5 = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \Omega \mid -2\phi + 3\gamma - 3\tau = 1\}, \\ F_3 &:= P_1P_3P_4 = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \Omega \mid 4\phi - 6\gamma + 3\tau = 1\}, \\ F_4 &:= P_1P_4P_5 = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \Omega \mid 4\phi - 3\tau = 1\}, \\ F_5 &:= P_2P_3P_5P_6 = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \Omega \mid -8\phi + 6\gamma = 1\}, \\ F_6 &:= P_3P_4P_6 = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \Omega \mid -2\phi + 3\tau = 1\}, \\ F_7 &:= P_4P_5P_6 = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \Omega \mid -2\phi + 3\gamma = 1\}, \end{aligned}$$

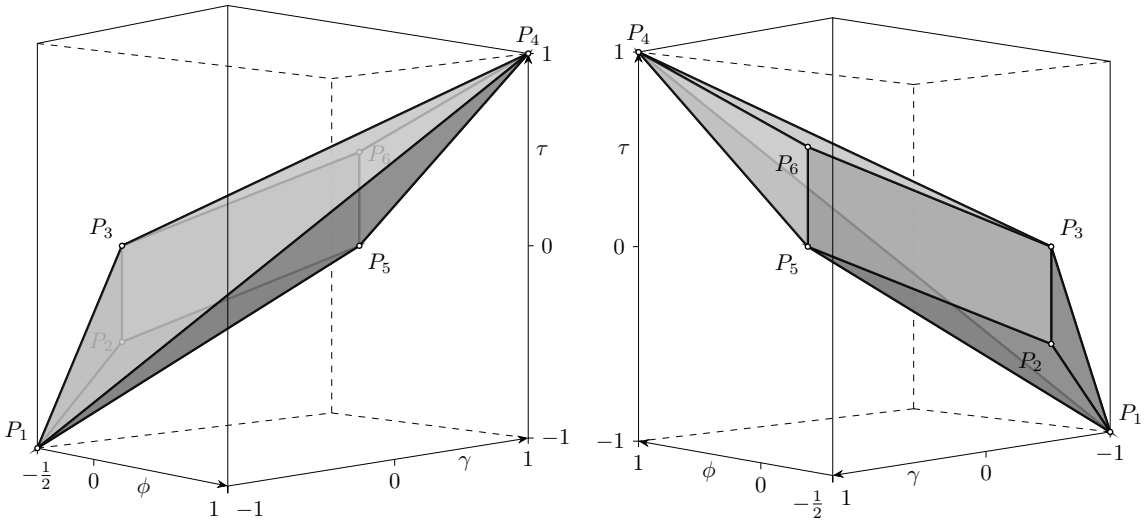


FIGURE 1. 式（21）定义的多面体 Ω。定理 4.7 表明，Ω 恰好是由 ϕ、 γ 和 τ确定的区域。

和 11 条棱

$$
\begin{aligned}
P_1P_2 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid -2\phi = 1,\ -2\phi+3\gamma-3\tau = 1\},\\
P_1P_3 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid -2\phi = 1,\ 4\phi-6\gamma+3\tau = 1\},\\
P_1P_4 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid 4\phi-3\tau = 1,\ 4\phi-6\gamma+3\tau = 1\},\\
P_1P_5 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid 4\phi-3\tau = 1,\ -2\phi+3\gamma-3\tau = 1\},\\
P_2P_3 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid \phi = -\tfrac{1}{2},\ \gamma = -\tfrac{1}{2}\},\\
P_2P_5 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid -8\phi+6\gamma = 1,\ -2\phi+3\gamma-3\tau = 1\},\\
P_3P_4 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid -2\phi+3\tau = 1,\ 4\phi-6\gamma+3\tau = 1\},\\
P_3P_6 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid -8\phi+6\gamma = 1,\ -2\phi+3\tau = 1\},\\
P_4P_5 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid -2\phi+3\gamma = 1,\ 4\phi-3\tau = 1\},\\
P_4P_6 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid -2\phi+3\gamma = 1,\ -2\phi+3\tau = 1\},\\
P_5P_6 &= \{(\phi,\gamma,\tau)\in\Omega \mid \phi = \tfrac{1}{4},\ \gamma = \tfrac{1}{2}\}.
\end{aligned}
$$

图 1 从两个不同视角展示了多面体 Ω。

还要注意，多面体 Ω 在 $\phi\gamma$-平面上的投影是四边形 $P_1'(-\frac{1}{2},-1)P_4'(1,1)P_5'(\frac{1}{4},\frac{1}{2})P_2'(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，即由斯皮尔曼脚距和吉尼伽马确定的精确区域（见 [15]）；多面体 Ω 在 $\phi\tau$-平面上的投影是三角形 $P_1''(-\frac{1}{2},-1)P_4''(1,1)P_3''(-\frac{1}{2},0)$，即由斯皮尔曼脚距和肯德尔τ确定的精确区域（见 [17]）；多面体 Ω 在$\gamma\tau$-平面上的投影是四边形 $P_1'''(-1,-1)P_3'''(-\frac{1}{2},0)P_4'''(1,1)P_5'''(\frac{1}{2},0)$，即由吉尼伽马和肯德尔τ确定的精确区域（见 [17]）。

由于 γ 和 τ 都是一致性度量，我们有

$$\gamma(C^{\sigma_2}) = -\gamma(C) \qquad \text{and} \qquad \tau(C^{\sigma_2}) = -\tau(C).$$

此外，引理 3.4 意味着 $\phi(C^{\sigma_2}) = \phi(C) - \frac{3}{2}\gamma(C)$。因此，反射映射$C \mapsto C^{\sigma_2}$ 诱导出一个线性对合

$$\mathcal{A}\colon (\phi,\gamma,\tau) \mapsto (\phi-\tfrac{3}{2}\gamma,-\gamma,-\tau).$$

特别地，对于任意联结函数 $C\in\mathcal{C}$，我们有

$$\mathcal{A}(\phi(C),\gamma(C),\tau(C)) = (\phi(C^{\sigma_2}),\gamma(C^{\sigma_2}),\tau(C^{\sigma_2})). \tag{22}$$

下面的引理很容易验证。

引理 4.2. 线性映射 $\mathcal{A}$具有以下性质

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(P_1) &= P_4, & \mathcal{A}(F_1) &= F_7,\\
\mathcal{A}(P_2) &= P_6, & \mathcal{A}(F_2) &= F_6,\\
\mathcal{A}(P_3) &= P_5, & \mathcal{A}(F_3) &= F_4,\\
\mathcal{A}(P_4) &= P_1, & \mathcal{A}(F_4) &= F_3,\\
\mathcal{A}(P_5) &= P_3, & \mathcal{A}(F_5) &= F_5,\\
\mathcal{A}(P_6) &= P_2, & \mathcal{A}(F_6) &= F_2,\\
& & \mathcal{A}(F_7) &= F_1.
\end{aligned}$$

此外，映射 $\mathcal{A}$保持多面体 Ω。

在以下引理中，我们将证明，面 F_2、 F_3、 F_4 和 F_6 上的点都可由某些 Copula 取得。

引理 4.3. 对于多面体 Ω的面 F_6 上的任意点 T

$F_6 = P_3P_4P_6 = \{(\phi,\gamma,\tau) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{1}{2} \le \phi \le 1,\ \phi \le \gamma \le \min\{\frac{4}{3}\phi+\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\phi+\frac{1}{3}\},\ \tau = \frac{2}{3}\phi+\frac{1}{3}\}$

there exists a copula $C \in \mathcal{C}$ *such that* $(\phi(C),\gamma(C),\tau(C)) = T$.

证明。 设 $b \in [0, \frac{1}{4}]$，并令 C_b 为 M的一个 shuffle

$$C_b = M\big(6, (b, \tfrac{1}{2}-b, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}+b, 1-b), (3,5,1,6,2,4), (1,1,1,1,1,1)\big).$$

联结函数 C_b 由保测双射定义

$$h_{C_b}(u) = \begin{cases} u+\frac{1}{2}-b; & 0 \le u \le b,\\ u+\frac{1}{2}; & b < u \le \frac{1}{2}-b,\\ u-\frac{1}{2}+b; & \frac{1}{2}-b < u \le \frac{1}{2},\\ u+\frac{1}{2}-b; & \frac{1}{2} < u \le \frac{1}{2}+b,\\ u-\frac{1}{2}; & \frac{1}{2}+b < u \le 1-b,\\ u-\frac{1}{2}+b; & 1-b < u \le 1. \end{cases}$$

我们有

$$C_b(u, h_{C_b}(u)) = \begin{cases} u; & 0 \le u \le \frac{1}{2}-b,\\ h_{C_b}(u); & \frac{1}{2}-b < u \le \frac{1}{2},\\ u; & \frac{1}{2} < u \le \frac{1}{2}+b,\\ h_{C_b}(u); & \frac{1}{2}+b < u \le 1. \end{cases}$$

利用方程（7），我们得到

$$\tau(C_b) = 8b^2.$$

此外，我们有

$$\delta_{C_b}(u) = \begin{cases} 0; & 0 \le u \le \frac{1}{2}-b,\\ 2u-1+2b; & \frac{1}{2}-b < u \le \frac{1}{2},\\ 2b; & \frac{1}{2} < u \le \frac{1}{2}+b,\\ 2u-1; & \frac{1}{2}+b < u \le 1, \end{cases}$$

and

$$\omega_{C_b}(u)=\begin{cases}u; & 0\le u\le \frac{1}{4},\\ \frac{1}{2}-u; & \frac{1}{4}<u\le \frac{1}{2}-b,\\ u+2b-\frac{1}{2}; & \frac{1}{2}-b<u\le \frac{1}{2},\\ 2b+\frac{1}{2}-u; & \frac{1}{2}<u\le \frac{1}{2}+b,\\ u-\frac{1}{2}; & \frac{1}{2}+b<u\le \frac{3}{4},\\ 1-u; & \frac{3}{4}<u\le 1,\end{cases}$$

利用方程（8）和（5），我们得到

$$\phi(C_b)=12b^2-\tfrac{1}{2},\quad \text{and}\quad \gamma(C_b)=16b^2-\tfrac{1}{2}.$$

联结函数 C_b 的质量分布以及函数 δ_{C_b} 和 ω_{C_b} 的图像如图 2所示。

现在令 $A_{a,b}=B_{a,C_b}$为 $\{C_b\}$关于区间 $\{(a,1-a)\}$的序数和。根据引理 3.8，有

$$\begin{aligned}\tau(A_{a,b})&=8(1-2a)^2b^2-4a^2+4a,\\ \phi(A_{a,b})&=12(1-2a)^2b^2-6a^2+6a-\tfrac{1}{2},\ \text{and}\\ \gamma(A_{a,b})&=16(1-2a)^2b^2-6a^2+6a-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{3}\phi(A_{a,b})+\tfrac{1}{3}&=\tfrac{2}{3}\big(12(1-2a)^2b^2-6a^2+6a-\tfrac{1}{2}\big)+\tfrac{1}{3}\\ &=8(1-2a)^2b^2-4a^2+4a=\tau(A_{a,b}).\end{aligned}$$

由于点 $(\phi(A_{a,b})\ \gamma(A_{a,b})\ \tau(A_{a,b}))$ 位于多面体 Ω 中，因此对于任意 $a\in[0,\frac{1}{2}]$ 和 $b\in[0,\frac{1}{4}]$，它都位于面 F_6 上。此外，$A_{\frac{1}{2},b}=M$，因此对于任意 $b\in[0,\frac{1}{4}]$，点 $(\phi(A_{\frac{1}{2},b})\ \gamma(A_{\frac{1}{2},b})\ \tau(A_{\frac{1}{2},b}))$ 是多面体 Ω 的点 P_4，

$$\tfrac{4}{3}\phi(A_{0,b})+\tfrac{1}{6}=\tfrac{4}{3}\phi(C_b)+\tfrac{1}{6}=\tfrac{4}{3}(12b^2-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{6}=16b^2-\tfrac{1}{2}=\gamma(C_b)=\gamma(A_{0,b}),$$

使得点 $(\phi(A_{0,\ b})\ \gamma(A_{0,\ b})\ \tau(A_{0,\ b}))$ 对任意 $b\in[0,\frac{1}{4}]$ 都位于多面体 Ω 的棱 P_3P_6 上，

$$\phi(A_{a,0})=-6a^2+6a-\tfrac{1}{2}=\gamma(A_{a,0}),$$

使得点 $(\phi(A_{a,\ 0})\ \gamma(A_{a,\ 0})\ \tau(A_{a,\ 0}))$ 对任意 $a\in[0,\frac{1}{2}]$ 都位于多面体 Ω 的棱 P_3P_4 上，并且

$$\tfrac{2}{3}\phi(A_{a,\frac{1}{4}})+\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3}(-3a^2+3a+\tfrac{1}{4})+\tfrac{1}{3}=-2a^2+2a+\tfrac{1}{2}=\gamma(A_{a,\frac{1}{4}}),$$

使得点 $(\phi(A_{a,\ \frac{1}{4}})\ \gamma(A_{a,\ \frac{1}{4}})\ \tau(A_{a,\ \frac{1}{4}}))$ 对任意 $a\in[0,\frac{1}{2}]$ 都位于多面体 Ω 的棱 P_4P_6 上。对于任意固定的 $a\in[0,\frac{1}{2}]$，点集

$$\big\{(\phi(A_{a,b}),\gamma(A_{a,b}),\tau(A_{a,b}))\mid b\in[0,\tfrac{1}{4}]\big\}$$

是一条位于面 F_6 上的曲线，连接棱 P_3P_4 上的一点和棱 P_4P_6 上的一点。由于 $\phi(A_{a,\ b})\ \gamma(A_{a,\ b})\ \tau(A_{a,\ b})$ 是关于 a，b 的连续函数，这意味着对于面 F_6 上的任意点 T，都存在 $a\in[0,\frac{1}{2}]$ 和 $b\in[0,\frac{1}{4}]$，使得 $(\phi(A_{a,\ b})\ \gamma(A_{a,\ b})\ \tau(A_{a,\ b}))=T$。□

引理4.4。对于多面体 Ω 的面上的任意点 T F_2

$$F_2=P_1P_2P_5=\big\{(\phi,\gamma,\tau)\in\mathbb{R}^3\mid -\tfrac{1}{2}\le\phi\le\tfrac{1}{4},\ 2\phi\le\gamma\le\tfrac{4}{3}\phi+\tfrac{1}{6},\ \tau=-\tfrac{2}{3}\phi+\gamma-\tfrac{1}{3}\big\}$$

存在一个联结函数 $C\in\mathcal{C}$，使得 $(\phi(C)\ \gamma(C)\ \tau(C))=T$。

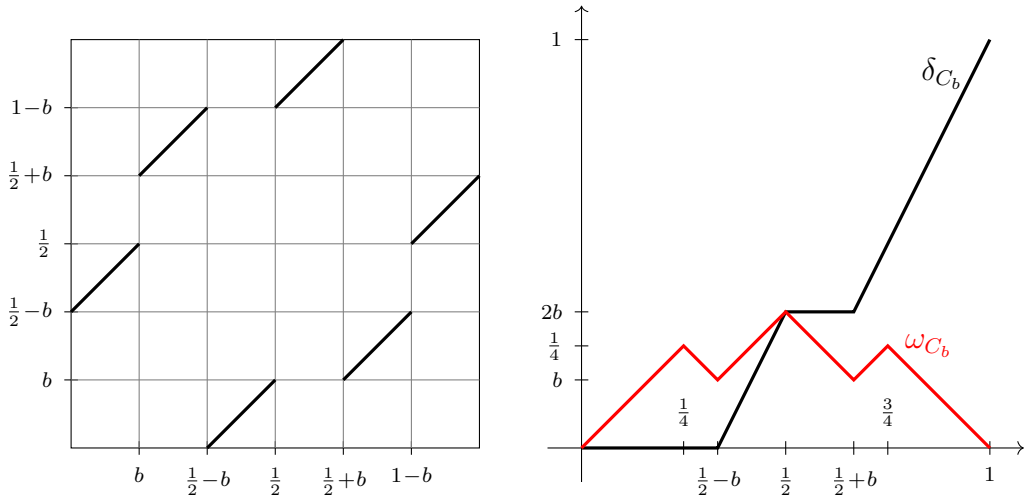


FIGURE 2. 联结函数的质量分布 C_b （左）以及函数 δ_{C_b} 和 ω_{C_b} （右）的图像，取自引理4.3的证明。

证明。设 $T(\phi,\gamma,\tau)$ 是 F_2 中任意一点。根据引理 4.2，点 $T'(\phi-\frac{3}{2}\gamma,-\gamma,-\tau) = \mathcal{A}(T)$ 位于面 F_6 上。将引理 4.3 应用于点 T'，可得一个联结函数 $C\in\mathcal{C}$，使得 $(\phi(C)\ \gamma(C)\ \tau(C)) = T'$。由方程 (22) 得到 $T = (\phi(C^{\sigma_2})\ \gamma(C^{\sigma_2})\ \tau(C^{\sigma_2}))$，证毕。□

引理 4.5。 对于多面体 Ω 的面 F_4 上的任意点 T

$$F_4 = P_1P_4P_5 = \left\{(\phi,\gamma,\tau)\in\mathbb{R}^3 \mid -\tfrac{1}{2}\le\phi\le 1,\ \tfrac{4}{3}\phi-\tfrac{1}{3}\le\gamma\le\min\{2\phi,\tfrac{2}{3}\phi+\tfrac{1}{3}\},\ \tau=\tfrac{4}{3}\phi-\tfrac{1}{3}\right\}$$

存在一个联结函数 $C\in\mathcal{C}$，使得 $(\phi(C)\ \gamma(C)\ \tau(C)) = T$。

证明。设 $b\in[0,\frac{1}{2}]$，并设 D_b 是 M 的一个洗牌

$$D_b = M\big(3,(b,1-b),(1,2,3),(-1,1,-1)\big).$$

联结函数 D_b 由以下保测双射定义

$$h_{D_b}(u) = \begin{cases} b-u; & 0\le u\le b,\\ u; & b<u\le 1-b,\\ 2-b-u; & 1-b<u\le 1.\end{cases}$$

我们有

$$D_b(u,h_{D_b}(u)) = \begin{cases} 0; & 0\le u\le b,\\ u; & b<u\le 1-b,\\ 1-b; & 1-b<u\le 1.\end{cases}$$

利用方程（7），我们得到

$$\tau(D_b) = 1-4b^2.$$

此外，我们有

$$\delta_{D_b}(u) = \begin{cases} 0; & 0\le u\le \frac{b}{2},\\ 2u-b; & \frac{b}{2}<u\le b,\\ u; & b<u\le 1-b,\\ 1-b; & 1-b<u\le 1-\frac{b}{2},\\ 2u-1; & 1-\frac{b}{2}<u\le 1,\end{cases}$$

and

$$\omega_{D_b}(u) = \begin{cases} u; & 0 \le u \le \frac{1}{2}, \\ 1-u; & \frac{1}{2} < u \le 1, \end{cases}$$

利用方程（8）和（5），我们得到

$$\phi(D_b) = 1 - 3b^2, \quad \text{and} \quad \gamma(D_b) = 1 - 2b^2.$$

联结函数 D_b 的质量分布以及函数 δ_{D_b} 和 ω_{D_b} 的图像如图 3所示。

现在令 $E_{a,b} = B_{a,D_b^{\sigma_2}}$为关于区间 $\{D_b^{\sigma_2}\}$ 的 $\{(a, 1-a)\}$的序数和，并令 $F_{a,b} = E_a^{\sigma_2}$、$_{b}$。利用引理 3.8 和 3.4 可得

$$\begin{aligned} \tau(F_{a,b}) &= (1-2a)^2\tau(D_b) + 4(a^2-a) = -4(1-2a)^2b^2 + 8a^2 - 8a + 1, \\ \phi(F_{a,b}) &= (1-2a)^2\phi(D_b) + 2(a^2-a) = -3(1-2a)^2b^2 + 6a^2 - 6a + 1, \text{ and} \\ \gamma(F_{a,b}) &= (1-2a)^2\gamma(D_b) + 4(a^2-a) = -2(1-2a)^2b^2 + 8a^2 - 8a + 1. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3}\phi(F_{a,b}) - \tfrac{1}{3} &= \tfrac{4}{3}(-3(1-2a)^2b^2 + 6a^2 - 6a + 1) - \tfrac{1}{3} \\ &= -4(1-2a)^2b^2 + 8a^2 - 8a + 1 = \tau(F_{a,b}). \end{aligned}$$

由于点 $(\phi(F_{a,b})\ \gamma(F_{a,b})\ \tau(F_{a,b}))$ 位于多面体 Ω 中，这意味着对于任意 $a, b \in [0, \frac{1}{2}]$，该点都位于面 F_4 上。此外，$F_{\frac{1}{2},b} = W$，因此对于任意 $b \in [0, \frac{1}{2}]$，点 $(\phi(F_{\frac{1}{2},b})\ \gamma(F_{\frac{1}{2},b})\ \tau(F_{\frac{1}{2},b}))$ 是多面体 Ω 的点 P_1，

$$\tfrac{2}{3}\phi(F_{0,b}) + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}\phi(D_b) + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}(1-3b^2) + \tfrac{1}{3} = 1 - 2b^2 = \gamma(D_b) = \gamma(F_{0,b}),$$

使得对于任意 $b \in [0, \frac{1}{2}]$，点 $(\phi(F_{0,b})\ \gamma(F_{0,b})\ \tau(F_{0,b}))$ 位于多面体 Ω 的棱 P_4P_5 上，

$$\tfrac{4}{3}\phi(F_{a,0}) - \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}(6a^2 - 6a + 1) - \tfrac{1}{3} = 8a^2 - 8a + 1 = \gamma(F_{a,0}),$$

使得对于任意 $a \in [0, \frac{1}{2}]$，点 $(\phi(F_{a,0})\ \gamma(F_{a,0})\ \tau(F_{a,0}))$ 位于多面体 Ω 的棱 P_1P_4 上，并且

$$2\phi(F_{a,\frac{1}{2}}) = 6a^2 - 6a + \tfrac{1}{2} = \gamma(F_{a,\frac{1}{2}}),$$

使得对于任意 $a \in [0, \frac{1}{2}]$，点 $(\phi(F_{a,\frac{1}{2}})\ \gamma(F_{a,\frac{1}{2}})\ \tau(F_{a,\frac{1}{2}}))$ 位于多面体 Ω 的棱 P_1P_5 上。对于任意固定的 $a \in [0, \frac{1}{2}]$，点集

$$\left\{(\phi(F_{a,b}), \gamma(F_{a,b}), \tau(F_{a,b})) \mid b \in [0, \tfrac{1}{2}]\right\}$$

是一条位于面 F_4 上的曲线，连接棱 P_1P_4 上的一个点和棱 P_1P_5 上的一个点。由于 $\phi(F_{a,b})\ \gamma(F_{a,b})\ \tau(F_{a,b})$ 是关于 a，b 的连续函数，这意味着对于面 F_4 上的任意点 T，都存在 a，$b \in [0, \frac{1}{2}]$，使得 $(\phi(F_{a,b})\ \gamma(F_{a,b})\ \tau(F_{a,b})) = T$。□

引理4.6. 对于多面体 Ω的面 F_3 上的任意点 T

$$F_3 = P_1P_3P_4 = \left\{(\phi, \gamma, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid -\tfrac{1}{2} \le \phi \le 1,\ \tfrac{4}{3}\phi - \tfrac{1}{3} \le \gamma \le \phi,\ \tau = -\tfrac{4}{3}\phi + 2\gamma + \tfrac{1}{3}\right\}$$

存在一个联结函数 $C \in \mathcal{C}$使得 $(\phi(C)\ \gamma(C)\ \tau(C)) = T$。

证明。根据引理 4.2，线性映射 $\mathcal{A}$将 F_3映射到 F_4，因此对于 F_3中的任意点 $T(\phi, \gamma, \tau)$，点 $T'(\phi - \frac{3}{2}\gamma, -\gamma, -\tau) = \mathcal{A}(T)$ 位于面 F_4上。根据引理 4.5，存在一个联结函数 $C \in \mathcal{C}$使得 $(\phi(C)\ \gamma(C)\ \tau(C)) = T'$。因此，根据方程 (22)，我们有 $(\phi(C^{\sigma_2})\ \gamma(C^{\sigma_2})\ \tau(C^{\sigma_2})) = T$。□

现在我们可以证明主定理了。

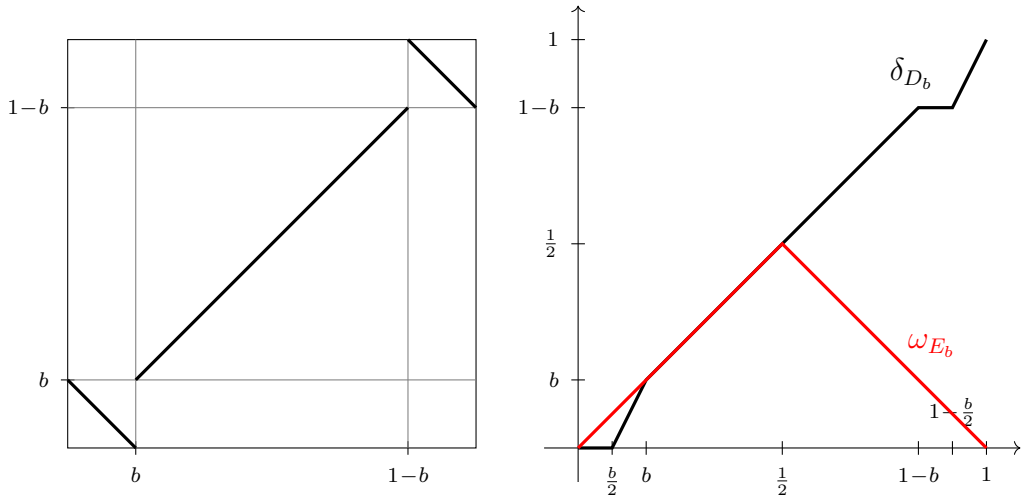


FIGURE 3. 联结函数的质量分布 D_b （左）以及函数图像 δ_{D_b} 和 ω_{D_b} （右），取自引理4.5的证明。

定理4.7。 由斯皮尔曼脚距、吉尼伽马和肯德尔τ确定的精确区域

$$\Omega_{\phi,\gamma,\tau} = \{(\phi(C),\gamma(C),\tau(C)) \in [-\tfrac{1}{2},1]\times[-1,1]\times[-1,1] \mid C \in \mathcal{C}\}$$

是多面体Ω，定义于(21)。

证明。由方程（10）和引理 4.1 可知 $\Omega_{\phi,\gamma,\tau} \subseteq \Omega$。我们需要证明，对于任意点 $T \in \Omega$，都存在一个联结函数 $C \in \mathcal{C}$，使得 $(\phi(C)\ \gamma(C)\ \tau(C)) = T$。设 $T(a,b,c) \in \Omega$。竖直直线 $\{(a,b,\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\}$ 与多面体 Ω 相交于线段 AB，其中点 $A(a,b,\tau_0)$ 位于面 F_2 和 F_4 的并集中，而点 $B(a,b,\tau_1)$ 位于面 F_3 和 F_6的并集中。由引理 4.3、4.4、4.5 和 4.6，存在联结函数 C_0 和 C_1，使得 $(\phi(C_0)\ \gamma(C_0)\ \tau(C_0)) = A(a,b,\tau_0)$，且 $(\phi(C_1)\ \gamma(C_1)\ \tau(C_1)) = B(a,b,\tau_1)$。现在，对于任意 $t \in \mathbb{I}$，令 C_t 为联结函数 C_0 和 C_1的凸组合，即 $C_t = tC_1 + (1-t)C_0$。我们有 $\phi(C_t) = t\phi(C_1) + (1-t)\phi(C_0) = a$，且 $\gamma(C_t) = t\gamma(C_1) + (1-t)\gamma(C_0) = b$。此外，$\tau(C_0) = \tau_0 \le c \le \tau_1 = \tau(C_1)$ 和 $\tau(C_t)$ 关于 t 是连续函数，因此存在 $t \in \mathbb{I}$，使得 $\tau(C_t) = c$，从而$T = (\phi(C_t)\ \gamma(C_t)\ \tau(C_t))$。□

引理4.3、4.4、4.5和4.6 表明，面并集 F_2、 F_3、 F_4和F_6 中的任意一点都可以通过对 M进行混洗而得到。以下例子表明，剩余各面 F_1、 F_5和 F_7 上的点也可以通过对 M进行混洗而得到。

例4.8。 设 $b \in [0,\frac{1}{4}]$，并设 G_b 是 M的一个混洗

$$G_b = M\big(6,(b,\tfrac{1}{2}-b,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}+b,1-b),(3,2,1,6,5,4),(1,-1,1,1,-1,1)\big).$$

联结函数 G_b 由保测双射定义

$$h_{G_b}(u) = \begin{cases} u+\frac{1}{2}-b; & 0 \le u \le b, \\ \frac{1}{2}-u; & b < u \le \frac{1}{2}-b, \\ u-\frac{1}{2}+b; & \frac{1}{2}-b < u \le \frac{1}{2}, \\ u+\frac{1}{2}-b; & \frac{1}{2} < u \le \frac{1}{2}+b, \\ \frac{3}{2}-u; & \frac{1}{2}+b < u \le 1-b, \\ u-\frac{1}{2}+b; & 1-b < u \le 1. \end{cases}$$

我们有

$$G_b(u, h_{G_b}(u)) = \begin{cases} u; & 0 \le u \le b, \\ 0; & b < u \le \frac{1}{2} - b, \\ h_{G_b}(u); & \frac{1}{2} - b < u \le \frac{1}{2}, \\ u; & \frac{1}{2} < u \le \frac{1}{2} + b, \\ \frac{1}{2}; & \frac{1}{2} + b < u \le 1 - b, \\ h_{G_b}(u); & 1 - b < u \le 1. \end{cases}$$

利用方程（7），我们得到

$$\tau(G_b) = 8b^2.$$

此外，我们有

$$\delta_{G_b}(u) = \begin{cases} 0; & 0 \le u \le \frac{1}{4}, \\ 2u - \frac{1}{2}; & \frac{1}{4} < u \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}; & \frac{1}{2} < u \le \frac{3}{4}, \\ 2u - 1; & \frac{3}{4} < u \le 1, \end{cases}$$

and

$$\omega_{G_b}(u) = \begin{cases} u; & 0 \le u \le \frac{1}{2}, \\ 1 - u; & \frac{1}{2} < u \le 1, \end{cases}$$

联结函数 G_b 的质量分布以及函数 δ_{G_b} 和 ω_{G_b} 的图像如图4所示。利用方程（8）和（5），我们得到

$$\phi(G_b) = \tfrac{1}{4}, \quad \text{and} \quad \gamma(G_b) = \tfrac{1}{2}.$$

现在，对于任意 $a \in [0, \frac{1}{2}]$，令$H_{a,\,b} = B_{a,\,G_b}$ 是 $\{G_b\}$ 关于区间 $\{(a,\ 1-a)\}$的序数和。根据引理3.8，我们有

$$\begin{aligned} \tau(H_{a,b}) &= 8(1-2a)^2b^2 - 4a^2 + 4a, \\ \phi(H_{a,b}) &= -3a^2 + 3a + \tfrac{1}{4}, \text{ and} \\ \gamma(H_{a,b}) &= -2a^2 + 2a + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

注意，

$$\tfrac{2}{3}\phi(H_{a,b}) + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}(-3a^2 + 3a + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{3} = -2a^2 + 2a + \tfrac{1}{2} = \gamma(H_{a,b}),$$

因此，对于任意 $a \in [0, \frac{1}{2}]$ 和 $b \in [0, \frac{1}{4}]$，点 $(\phi(H_{a,\,b})\ \gamma(H_{a,\,b})\ \tau(H_{a,\,b}))$ 位于多面体 Ω 的面 F_7上。此外，$H_{\frac{1}{2},\,b} = M$，因此，对于任意 $b \in [0, \frac{1}{4}]$，点 $(\phi(H_{\frac{1}{2},\,b})\ \gamma(H_{\frac{1}{2},\,b})\ \tau(H_{\frac{1}{2},\,b}))$ 是多面体 Ω 的点 P_4，

$$\phi(H_{0,b}) = \phi(G_b) = \tfrac{1}{4} \quad \text{and} \quad \gamma(H_{0,b}) = \gamma(G_b) = \tfrac{1}{2},$$

因此，对于任意 $b \in [0, \frac{1}{4}]$，点 $(\phi(H_{0,\,b})\ \gamma(H_{0,\,b})\ \tau(H_{0,\,b}))$ 位于多面体 Ω 的棱 P_5P_6 上，

$$\tfrac{4}{3}\phi(H_{a,0}) - \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}(-3a^2 + 3a + \tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{3} = -4a^2 + 4a = \tau(H_{a,0}),$$

因此，对于任意 $a \in [0, \frac{1}{2}]$，点 $(\phi(H_{a,\,0})\ \gamma(H_{a,\,0})\ \tau(H_{a,\,0}))$ 位于多面体 Ω 的棱 P_4P_5 上，并且

$$\tfrac{2}{3}\phi(H_{a,\frac{1}{4}}) + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}(-3a^2 + 3a + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{3} = -2a^2 + 2a + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(1-2a)^2 - 4a^2 + 4a = \tau(H_{a,\frac{1}{4}}),$$

因此，对于任意 $a \in [0, \frac{1}{2}]$，点 $(\phi(H_{a,\,\frac{1}{4}})\ \gamma(H_{a,\,\frac{1}{4}})\ \tau(H_{a,\,\frac{1}{4}}))$ 都位于多面体 Ω 的棱 P_4P_6上。与引理 4.3 的证明类似，我们证明，对于面 F_7上的任意点 T，都存在 $a \in [0, \frac{1}{2}]$和 $b \in [0, \frac{1}{4}]$，使得 $(\phi(H_{a,\,b})\ \gamma(H_{a,\,b})\ \tau(H_{a,\,b})) = T$。

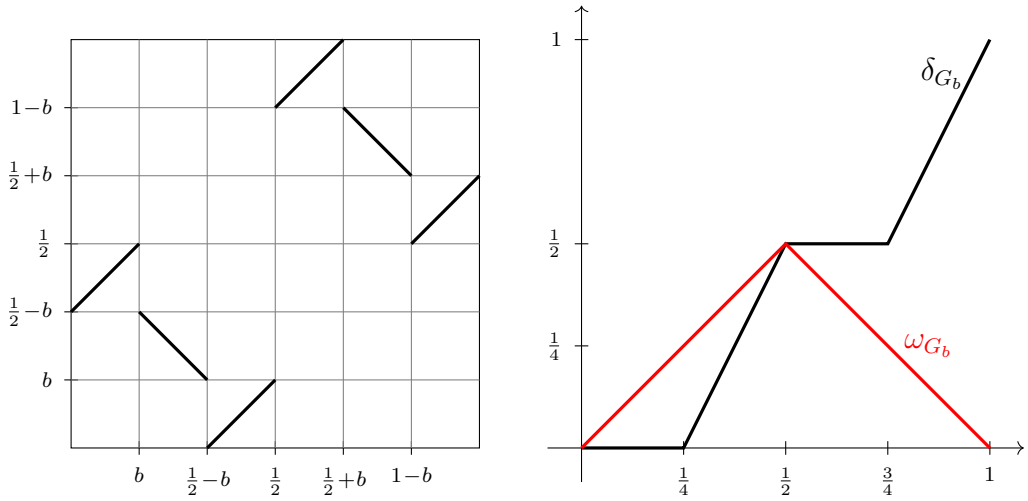


FIGURE 4. 联结函数的质量分布 G_b （左）以及函数图像 δ_{G_b} 和 ω_{G_b} （右），均出自例4.8。

例4.9。 考虑联结函数 $K_{a,\,b} = H_{a,\,b}^{\sigma_2}$，其中 $H_{a,\,b}$ 是例4.8中的联结函数。与引理 4.4的证明类似，我们可以证明点集

$$\left\{(\phi(K_{a,b}), \gamma(K_{a,b}), \tau(K_{a,b})) \mid (a,b) \in [0, \tfrac{1}{2}] \times [0, \tfrac{1}{4}]\right\}$$

等于多面体 Ω 的面 $F_1 = P_1P_2P_3$ 。

例 4.10。 令 a，$b \in [0, \frac{1}{4}]$ 满足 $a \le b$ 且令 $L_{a,\,b}$ 为 M 的一个洗牌

$$L_{a,b} = M\big(10, (a, b, \tfrac{1}{2}-b, \tfrac{1}{2}-b+a, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}+b-a, \tfrac{1}{2}+b, 1-b, 1-a),\\ (7,5,8,10,2,9,1,3,6,4), (-1,1,1,-1,1,1,-1,1,1,-1)\big).$$

联结函数 $L_{a,\,b}$ 由保测双射定义

$$h_{L_{a,b}}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}+b-u; & 0 \le u \le a, \\ u+\frac{1}{2}-b; & a < u \le b, \\ u+\frac{1}{2}; & b < u \le \frac{1}{2}-b, \\ \frac{3}{2}-b-u; & \frac{1}{2}-b < u \le \frac{1}{2}-b+a, \\ u-\frac{1}{2}+b; & \frac{1}{2}-b+a < u \le \frac{1}{2}, \\ u+\frac{1}{2}-b; & \frac{1}{2} < u \le \frac{1}{2}+b-a, \\ \frac{1}{2}+b-u; & \frac{1}{2}+b-a < u \le \frac{1}{2}+b, \\ u-\frac{1}{2}; & \frac{1}{2}+b < u \le 1-b, \\ u-\frac{1}{2}+b; & 1-b < u \le 1-a, \\ \frac{3}{2}-b-u; & 1-a < u \le 1. \end{cases}$$

我们有

$$L_{a,b}(u,h_{L_{a,b}}(u))=\begin{cases}0; & 0\le u\le a,\\ u-a; & a<u\le b,\\ u; & b<u\le \frac{1}{2}-b,\\ \frac{1}{2}-b; & \frac{1}{2}-b<u\le \frac{1}{2}-b+a,\\ u-\frac{1}{2}+b-a; & \frac{1}{2}-b+a<u\le \frac{1}{2},\\ u-a; & \frac{1}{2}<u\le \frac{1}{2}+b-a,\\ 0; & \frac{1}{2}+b-a<u\le \frac{1}{2}+b,\\ u-\frac{1}{2}; & \frac{1}{2}+b<u\le 1-b,\\ u-\frac{1}{2}+b-a; & 1-b<u\le 1-a,\\ \frac{1}{2}-b; & 1-a<u\le 1.\end{cases}$$

利用方程（7），我们得到

$$\tau(L_{a,b})=16(b-a)^2-8b^2.$$

此外，我们有

$$\delta_{L_{a,b}}(u)=\begin{cases}0; & 0\le u\le \frac{1}{2}-b+a,\\ 2u-1+2b-2a; & \frac{1}{2}-b+a<u\le \frac{1}{2},\\ 2b-2a; & \frac{1}{2}<u\le \frac{1}{2}+b-a,\\ 2u-1; & \frac{1}{2}+b-a<u\le 1,\end{cases}$$

and

$$\omega_{L_{a,b}}(u)=\begin{cases}u; & 0\le u\le \frac{1}{4},\\ \frac{1}{2}-u; & \frac{1}{4}<u\le \frac{1}{2}-b+a,\\ u+2b-2a-\frac{1}{2}; & \frac{1}{2}-b+a<u\le \frac{1}{2},\\ 2b-2a+\frac{1}{2}-u; & \frac{1}{2}<u\le \frac{1}{2}+b-a,\\ u-\frac{1}{2}; & \frac{1}{2}+b-a<u\le \frac{3}{4},\\ 1-u; & \frac{3}{4}<u\le 1,\end{cases}$$

利用方程（8）和（5），我们得到

$$\phi(L_{a,b})=12(b-a)^2-\tfrac{1}{2},\quad \text{and}\quad \gamma(L_{a,b})=16(b-a)^2-\tfrac{1}{2}.$$

联结函数$L_{a、b}$的质量分布以及函数$\delta_{L_{a、b}}$和$\omega_{L_{a、b}}$的图像如图5所示。

请注意

$$\tfrac{4}{3}\phi(L_{a,b})+\tfrac{1}{6}=\tfrac{4}{3}\big(12(b-a)^2-\tfrac{1}{2}\big)+\tfrac{1}{6}=16(b-a)^2-\tfrac{1}{2}=\gamma(L_{a,b}),$$

因此，对于任意满足 $a\le b$ 的 $a、b\in[0,\frac{1}{4}]$，点 $(\phi(L_{a,b})\ \gamma(L_{a,b})\ \tau(L_{a,b}))$ 位于面 F_5上。此外，$L_{0、b}=C_b=A_{0、b}$，因此对于任意 $b\in[0,\frac{1}{4}]$、 $\phi(L_{b,b})=\gamma(L_{b,b})=-\frac{1}{2}$，点 $(\phi(L_{0,b})\ \gamma(L_{0,b})\ \tau(L_{0,b}))$ 位于多面体 Ω 的棱 P_3P_6 上；对于任意 $b\in[0,\frac{1}{4}]$，点 $(\phi(L_{b,b})\ \gamma(L_{b,b})\ \tau(L_{b,b}))$ 位于多面体 Ω 的棱 P_2P_3 上，并且

$$\gamma(L_{a,\frac{1}{4}})=16a^2-8a+\tfrac{1}{2}=\tau(L_{a,\frac{1}{4}}),$$

从而，对于任意固定的 $b\in[0,\frac{1}{4}]$，点 $(\phi(L_{a,14})\ \gamma(L_{a,14})\ \tau(L_{a,14}))$ 位于线段 P_2P_6 上。点集

$$\big\{(\phi(L_{a,b}),\gamma(L_{a,b}),\tau(L_{a,b}))\mid a\in[0,b]\big\}$$

是一条位于面 F_5 上、连接棱 P_3P_6 上一点与棱 P_2P_3 上一点的曲线。由于 $\phi(L_{a,b})\ \gamma(L_{a,b})\ \tau(L_{a,b})$ 作为 a,b 的函数是连续的，这意味着

对于三角形 $P_2P_3P_6$ 上的任意点 T，都存在 $a, b \in [0, \frac{1}{4}]$，并且存在 $a \le b$ 使得 $(\phi(L_{a,b}), \gamma(L_{a,b}), \tau(L_{a,b})) = T$。

最后，令 $M_{a,b} = L_a^{\sigma_2}{}_{,b}$。根据引理 4.2，线性映射 $\mathcal{A}$ 将三角形 $P_2P_3P_6$ 映射到三角形 $P_6P_5P_2$ 上。因此，根据方程（22），对于三角形 $P_2P_5P_6$ 上的任意点 T，存在 a、$b \in [0, \frac{1}{4}]$，使得 $a \le b$，从而 $(\phi^-(M_{a,b}), \gamma(M_{a,b}), \tau(M_{a,b})) = T$。

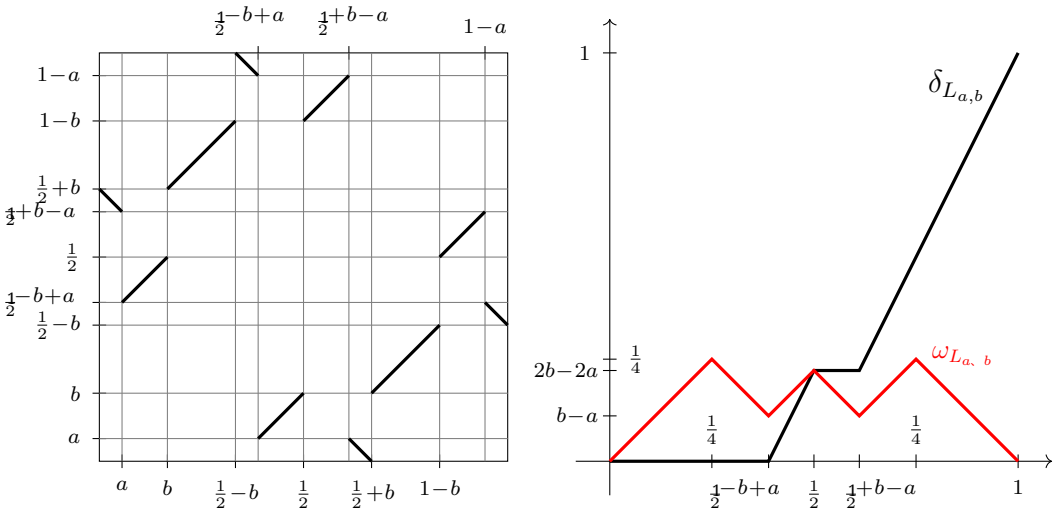


FIGURE 5. 联结函数 L_a的质量分布（b 左）以及函数图像$\delta_{L_{a,b}}$ 和ω_{L_a}（b 右），来自例 4.10。

5. CONCLUDING REMARKS

本文描述了由斯皮尔曼脚距、吉尼伽马和肯德尔τ确定的精确区域 $\Omega_{\phi,\gamma,\tau}$。这是图 1所示的多面体 Ω，具有 6 个顶点、11 条棱和 7 个面。我们证明了 Ω 边界上的每个点都可以通过 M的洗牌来实现。

多面体 $\Omega_{\phi,\gamma,\tau}$ 的体积为 $\mathrm{vol}(\Omega_{\phi,\gamma,\tau}) = \frac{3}{16} = 0.1875$，相当于（$\phi$，$\gamma$，$\tau$）盒体积的 $\frac{1}{32} = 0.03125$。在 [16], 中，作者计算了 $\Omega_{\beta,\phi,\gamma}$ 的体积，即 $\mathrm{vol}(\Omega_{\beta,\phi,\gamma}) = \frac{19}{40} = 0.475$，相当于（$\beta$，$\phi$，$\gamma$）盒体积的 $\frac{19}{240} \approx 0.07916$。

命题 2.1 表明，对于任意给定取值 C 的联结函数 $\phi(C)$，$\tau(C)$ 的跨度，即 $\tau(C)$ 可能取值的最大值与最小值之差，至多为 1。平均而言，给定 $\tau(C)$ 时，$\phi(C)$ 的跨度为

$$\frac{\mathrm{area}(\Omega_{\phi,\tau})}{\mathrm{length}([-\frac{1}{2}, 1])} = \frac{1}{2},$$

由于面积$(\Omega_{\phi,\tau}) = \frac{3}{4}$，参见 [17]。同样，给定 $\gamma(C)$ 的值，$\tau(C)$ 的跨度至多为 $\frac{2}{3}$。平均而言，给定 $\gamma(C)$ 时，$\tau(C)$ 的跨度同样为

$$\frac{\mathrm{area}(\Omega_{\gamma,\tau})}{\mathrm{length}([-1, 1])} = \frac{1}{2},$$

因为面积$(\Omega_{\gamma,\tau}) = 1$，见 [17]。如果已知 $\phi(C)$ 和 $\gamma(C)$，那么 $\tau(C)$ 的最大跨度仍为 $\frac{2}{3}$。事实上，若 $\phi(C) = \gamma(C) = 0$，则根据引理 4.1，$\tau(C) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$。给定 $\phi(C)$ 和 $\gamma(C)$ 时，$\tau(C)$ 的平均离散度为

$$\frac{\mathrm{vol}(\Omega_{\phi,\gamma,\tau})}{\mathrm{area}(\Omega_{\phi,\gamma})} = \frac{1}{3},$$

因为面积$(\Omega_{\phi,\ \gamma}) = \frac{9}{16}$，见 [15]。利用 [16], 的结果，给定 $\beta(C)$ 时$\phi(C)$ 和 $\gamma(C)$ 的平均离散度为

$$\frac{\mathrm{vol}(\Omega_{\beta,\phi,\gamma})}{\mathrm{area}(\Omega_{\phi,\gamma})} = \frac{38}{45} \approx 0.8444.$$

我们得出结论， $\tau(C)$的值与 $\phi(C)$和 $\gamma(C)$的值之间的关系，比 $\beta(C)$的值与它们之间的关系更为密切。

Acknowledgments

作者感谢 ARIS（斯洛文尼亚研究与创新局）提供的经费支持，包括核心研究经费 P1-0222、核心研究经费 P1- 0448，以及项目 J1-50002。Petra Lazi´c 的研究也得到了克罗地亚科学基金会 2277 号资助。

References

1. J. Ansari 和 M. Rockel，精确区域及 *Chatterjee* 秩相关与 *Spearman* 秩相关系数之间的一个不等式，2025，https://arxiv.org/abs/2506.15897。2. S. Chatterjee，一种新的相关系数，《美国统计学会杂志》**116**（2021年），第 536 期，2009–2022。MR 4353729 3. P. L. Conti 和 Y. Y. Nikitin，一类独立性秩检验的收敛速率，《圣彼得堡数学研究所科学札记》（POMI）**260** （1999），概率论与统计学第 3 期，155–163，319–320。MR 1759160 4. H. Dette、K. F. Siburg 和 P. A. Stoimenov，基于 *Copula* 的非参数回归依赖性度量，《斯堪的纳维亚统计学杂志》**40** （2013年），第 1 期，21–41。MR 3024030 5. P. Diaconis 和 R. L. Graham，作为混乱度量的斯皮尔曼脚距，《英国皇家统计学会杂志B辑》**39**（1977），第 2 期，262–268。MR 652736 6. F. Durante、E. P. Klement、S. Saminger-Platz 和 C. Sempi，序数和：从三角范数到二元及多元 *Copula*，《模糊集与系统》**451** （2022），28–64。MR 4516367 7. F. Durante 和 C. Sempi，*Copula* 理论原理，CRC 出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2016。MR 3443023 8. S. Fuchs、C. Limbach 和 F. Sch¨urrer，下半线性 *Copula* 的一致性度量与 *Chatterjee* 秩相关之间的精确区域，《国际近似推理杂志》**189**（2026年），论文编号 109588。MR 4983344 9. S. Fuchs 和 K. D. Schmidt，关于顺序统计量与肯德尔τ，《统计与概率通讯》**169** （2021年），论文编号 108972，7 页。MR 4168327 10. C. Genest、J. Neˇslehov´a 和 N. Ben Ghorbal，*Spearman* 脚规和 *Gini gamma*：综述与补充，《非参数统计学杂志》**22** （2010），第 8 期，937–954。MR 2738876 11. S. Jadhav 和 S. Ma，基于肯德尔τ的函数型数据关联检验，《多元分析杂志》**184** （2021年），论文编号 104740，9 页。MR 4233414 12. N. Kamnitui、C. Genest、P. Jaworski 和 W. Trutschnig，关于固定斯皮尔曼秩相关系数或肯德尔τ值的二元极值 *Copula* 类的规模，《数学分析与应用杂志》**472** （2019），第 1 期，920–936。MR 3906404 13. D. Kokol Bukovˇsek、T. Koˇsir、B. Mojˇskerc 和 M. Omladiˇc，*Copula* 的非交换性与一致性度量之间的关系，《数学分析与应用杂志》**487**（2020），第 1 期，123951，26 页。MR 4066734 14. ，*Spearman* 脚规和 *Gini gamma*：二元 *Copula* 的局部界及相对于 *Blomqvist* β 的精确区域，《计算与应用数学杂志》**390**（2021年），论文编号 113385，23 页。MR 4205170 15. D. Kokol Bukovˇsek 和 B. Mojˇskerc，由斯皮尔曼脚距和吉尼伽马确定的精确区域，《计算与应用数学杂志》**410** （2022），论文编号 114212，13 页。MR 4395320 16. ，由 *Blomqvist* β、斯皮尔曼脚距和吉尼伽马确定的精确区域，《计算与应用数学杂志》**473**（2026年），论文编号 116861，13 页。MR 4925866 17. D. Kokol Bukovˇsek 和 N. Stopar，由肯德尔τ及其他一致性度量确定的精确区域，《地中海数学杂志》**20** （2023），第 3 期，论文编号 147，16 页。MR 4554107 18. ，由斯皮尔曼秩相关系数和斯皮尔曼脚距确定的精确区域，《计算与应用数学杂志》**437** （2024），论文编号 115463，23 页。MR 4622519 19. W. H. Kruskal，关联的序数度量，《美国统计学会杂志》**53** （1958），814–861。MR 100941

20. L. Liebscher，基于Copula的依赖度量，《依赖建模》2（2014），第 1 期，49–64。21. R. B. Nelsen，一致性与 Gini关联度量，《非参数统计学杂志》9（1998），第 3 期，227–238。MR 1649514 22.，Copula导论，第 2 版，施普林格统计学丛书，施普林格，纽约，2006。MR 2197664 23. M. Rockel，关于 Chatterjee 秩相关与斯皮尔曼脚距之间的精确区域，2025，https://arxiv.org/abs/2509.07232。24. M. Scarsini，关于一致性度量，《随机学》8（1984），第 3 期，201–218。MR 796650 25. M. Schreyer、R. Paulin 和 W. Trutschnig，关于由肯德尔 τ 和斯皮尔曼 ρ确定的精确区域，《英国皇家统计学会杂志B辑：统计方法学》79（2017），第 2 期，613–633。MR 3611762 26. P. K. Sen、I. A. Salama 和 D. Quade，斯皮尔曼脚距：应用中的渐近性质，《智利统计学杂志》2（2011），第 1 期，3–20。MR 2820015 27. M. Sklar，n ´维分布函数及其边缘分布，《巴黎大学统计研究所刊物》8（1959），229–231。MR 125600 28. M. Tschimpke、M. Schreyer 和 W. Trutschnig，重新审视由斯皮尔曼 ρ 和斯皮尔曼脚距 ϕ 确定的区域，《计算与应用数学杂志》457（2025），论文编号 116259，18 页。MR 4797201´29. M. Ubeda Flores，Blomqvist β 和斯皮尔曼脚距的多元版本，《统计数学研究所年刊》57（2005），第 4 期，781–788。30. W. Wysocki，n维阿基米德 Copula 的肯德尔τ和斯皮尔曼秩相关系数及其渐近性质，《非参数统计学杂志》27（2015），第 4 期，442–459。MR 3406321

University of Ljubljana, School of Economics and Business, and Institute of Mathe-matics, Physics and Mechanics, Ljubljana, Slovenia电子邮箱：Damjana.Kokol.Bukovsek@ef.uni-lj.si
University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics, Ljubljana, Slovenia,and University of Zagreb, Faculty of Science, Department of Mathematics, Zagreb,Croatia电子邮箱：Petra.Lazic@fmf.uni-lj.si
University of Ljubljana, School of Economics and Business, and Institute of Mathe-matics, Physics and Mechanics, Ljubljana, Slovenia电子邮箱：Blaz.Mojskerc@ef.uni-lj.si
University of Ljubljana, Faculty of Civil and Geodetic Engineering, University ofLjubljana, Faculty of Mathematics and Physics, and Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, Ljubljana, Slovenia电子邮箱：Nik.Stopar@fgg.uni-lj.si