arXiv:2601.08004v1 [math.AG] 12 Jan 2026

几何与表示论中的 BPS 上同调

BEN DAVISON

摘要。本文阐述并综述范畴的 BPS 不变量理论和代数栈的 BPS 上同调，并介绍它们在计数几何和表示论中的应用以及近期进展。

1. 引言

本文中所有概形和代数栈均定义在复数域上。给定一个簇 X，其庞加莱多项式 $\mathrm{p}(X) := \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim(\mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}))q^{i/2}$ 编码了 X 的底层复解析空间的奇异上同调群的秩。这确实是一个多项式，因为对于 $i \notin [0,\dots,2\dim(X)]$，$\mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}) = 0$。

奇异上同调群 $\mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q})$ 可以通过将导出整体截面函子[1] $(X \to \mathrm{pt})_*$ 作用于 X 上的常值层 $\mathbb{Q}_X$ 来定义。我们也可以考虑空间 X 上更一般的有界可构造层复形 $\mathcal{F}$。在这种情况下，定义 $\mathrm{p}(X,\mathcal{F}) := \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim(\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F}))q^{i/2}$ 仍然会得到一个（Laurent）多项式。此类$\mathcal{F}$ 的一个重要例子是对偶化复形 $\mathbb{D}\mathbb{Q}_X$。由于对于簇（或代数栈）之间的一般态射 f，我们有一个自然同构 $f_*\mathbb{D} \cong \mathbb{D}f_!$，因此存在同构 $\mathrm{H}(X,\mathbb{D}\mathbb{Q}_X) \cong \mathrm{H_c}(X,\mathbb{Q})^\vee$，其中目标是紧支撑上同调的（分次）对偶。因此，经过代换 $q^{1/2} \mapsto q^{-1/2}$ 后，多项式 $\mathrm{p}(X,\mathbb{D}\mathbb{Q}_X)$ 就是 X 的紧支撑上同调的庞加莱多项式。

现在令 $\mathfrak{M}$ 为一个阿廷代数栈。一个启发性的例子是，$\mathfrak{M}$ 为某个范畴中的对象栈；具体来说，我们令 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{C}[x,y])$ 为有限维模的栈。我们定义 $\mathfrak{M}_n := \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}[x,y])$ 为由 n 维 $\mathbb{C}[x,y]$-模构成的栈。我们考虑对偶化复形 $\mathbb{D}\mathbb{Q} = \mathbb{D}\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}}$。由于存在分解 $\mathfrak{M} = \coprod_{n\geq 0}\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}[x,y])$，我们有 $\mathrm{p}(\mathfrak{M},\mathbb{D}\mathbb{Q}) = \sum_{n\geq 0}\mathrm{p}(\mathfrak{M}_n,\mathbb{D}\mathbb{Q})$。这个和式的右边没有意义，因为对于某些 i，有无穷多个 n 对 q^i 系数的贡献非零。因此，我们转而考虑配分函数：$\mathcal{Z}_{\mathbb{C}[x,y]}(T) = \mathrm{p}^{\mathbb{N}}(\mathfrak{M},\mathbb{D}\mathbb{Q}) := \sum_{n\geq 0}\mathrm{p}(\mathfrak{M}_n,\mathbb{D}\mathbb{Q})T^n$。$T^n$ 的系数是关于 $q^{1/2}$ 的形式洛朗幂级数。

配分函数 $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}[x,y]}(T)$ 可以用复合指数高效地表示。给定一个形式幂级数 $f(q,T) = \sum_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{Z}} f_{i,n}q^{i/2}T^n$ 满足 $f_{i,n} = 0$ 对于 $n = 0$成立，或者对于 $i \ll 0$成立，具体取决于 n，我们定义$\mathbf{Exp}(f(q,T)) := \prod_{i,n}(1-q^{i/2}T^n)^{-f_{i,n}}$。递归地求解 T 的幂，我们定义 一列形式洛朗幂级数 $\Omega_n(q^{1/2})$，称为 $\mathbb{C}[x,y]$-模范畴的精化*BPS*不变量，其定义方程为

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{C}[x,y]}(T) = \mathbf{Exp}\left(\sum_{n\geq 1} -\Omega_n(q^{1/2})q^{1/2}(1-q)^{-1}T^n\right). \tag{1}$$

反过来，对于所有 n，计算形式幂级数 $\Omega_n(q^{1/2})$，即可确定每个形式级数 $\mathrm{p}(\mathfrak{M}_n,\ \mathbb{D}\mathbb{Q})$。这个例子中的精化BPS不变量异常简单：对于所有 n，我们都有 $\Omega_n(q^{1/2}) = -q^{-3/2}$，因此 $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}[x,y]}(T) = \mathbf{Exp}(\sum_{n\geq 1} q^{-1}(1-q)^{-1}T^n)$。关于“权重”BPS不变量层面的证明，参见 [2]；

[1]本文中的所有函子均假定为导出函子。

而 [13] 给出了将结果转化为此处所述版本的证明。在更一般的问题中，精化BPS不变量并不总是这么容易写出，但至少总是关于 $q^{1/2}$ 的 Laurent 多项式。这称为精化BPS不变量的整性[2]。

一般而言，对于本文中出现的某个范畴里的对象栈 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}$，需要取其导出整体截面的适当层复形 $\mathcal{F}_{\mathscr{A}}$，取决于范畴 $\mathscr{A}$ 的类型。在 $\mathscr{A}=\mathbb{C}[x,y]$-模之外的一大类例子中，我们发现所得配分函数满足整性。事实上，在我们的例子中（以及更广泛的情形下），成立的结果要强得多：存在一个同构

$$\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{H}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}[x,y]),\mathbb{DQ})\cong \mathrm{Sym}\left(\bigoplus_{n\geq 1}\mathbb{Q}[2]\otimes \mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\right), \tag{2}$$

其中 $V[j]$ 通常表示上同调平移：$V[j]^i=V^{i+j}$。(2) 的左边是双分次的：它带有一个由 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}$ 给出的分次；本文中，$\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}$ 表示 $\mathbb{Z}$ 的一份副本，用于记录上同调次数。向量空间 $V=\bigoplus_{n\geq 1}\mathbb{Q}[2]\otimes \mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})$ 也带有一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}$-分次：对于 (i,n)，若 $i\in 2\cdot\mathbb{Z}_{\geq -1}$ 且 $n\geq 1$，则为 $V_n^i=\mathbb{Q}$；否则为 $V_n^i=0$。(2) 的右边是由 V 生成的自由交换 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}$-分次代数。它带有一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}$-分次，其定义是将齐次元素张量的次数 $|a_1\otimes\ldots\otimes a_r|$ 设为 $\sum_{s=1}^r|a_s|$。

（1）与（2）之间的关系来自以下等式：若 V 是一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}_{\geq 1}$ 分次向量空间，其分次分量均为有限维，并且对每个 $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ 都有 $V_n^i=0$，其中 $i\ll 0$，那么

$$\mathbf{Exp}(\mathtt{p}_{\mathbb{N}}(V))=\mathtt{p}_{\mathbb{N}}(\mathrm{Sym}(V));\qquad \mathbf{Exp}(-\mathtt{p}_{\mathbb{N}}(V)q^{1/2}(1-q)^{-1})=\mathtt{p}_{\mathbb{N}}\left(\mathrm{Sym}\left(V\otimes \mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})[-1]\right)\right). \tag{3}$$

本例中的 ***BPS*上同调** 是 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}_{\geq 1}$ 分次向量空间 $\bigoplus_{n\geq 1}\mathbb{Q}[2]$。首先，定义 BPS 上同调、计算它，并证明它符合（2）中的同构，就解决了 $\mathbb{C}[x,y]$-模范畴的整性问题，也为我们提供了一种方法，用更易处理的对象来表示高度无限维的向量空间 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{H}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}[x,y])\ \mathbb{DQ})$。正如我们将在本文中看到的，各种范畴的 BPS 上同调也具有有趣的代数结构，并与组合学、量子群、簇代数、代数几何和非阿贝尔霍奇理论中的问题有着深刻联系。

2. 对象模叠的 BPS 上同调

若 $\mathscr{C}$ 是某个性质足够良好的微分分次范畴，且 $\mathscr{A}$-^{sst} 是 $\mathscr{C}$中半稳定对象的某个子范畴，那么我们可以考虑 $\mathscr{A}$-^{sst}中对象的模叠 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{sst}}$。如上所述，我们可以尝试通过考察该模叠上某个适当的层 $\mathcal{F}_{\mathscr{A}}$ 的导出整体截面，并取复合指数等，来定义和构造 BPS 不变量。我们不直接深入讨论一般$\mathscr{A}$-^{sst} 的理论，而是先以一类具体的例子——代数上的模范畴——展开论述，再讨论如何将其推广到更广泛的范畴类。这类更广泛的范畴例如包括复射影三维卡拉比–丘簇上半稳定相干层的范畴。

设 A 是一个代数，并假设我们已固定 A 的一种如下三种形式之一的表示：

(1) $A=\mathbb{C}Q$，有限箭图在复数域上的路径代数。该代数有一个以 Q 中的路径为基的 $\mathbb{C}$，其中每个顶点 i 都对应一条长度为零、起点为

[2]这一现象被称为整性的原因将在 §3.4 中解释。在 [46] 中，这一性质也称为可容许性。

且终点均为 i 的“惰性”路径。乘法通过在可能时拼接路径来定义，否则结果为零。

(2) $A = \mathbb{C}Q/\langle r_1, \dots, r_l\rangle$，其中每个 r_s 都是Q中长度至少为二的路径的线性组合，且该线性组合 r_s 中的所有路径具有相同的起点和终点。

(3) $A = \mathrm{Jac}(Q, W) := \mathbb{C}Q/\langle \partial W/\partial a \mid a \in Q_1\rangle$，即与箭图 Q和势 $W \in \mathbb{C}Q/[\mathbb{C}Q, \mathbb{C}Q]$相关联的 Jacobi 代数。关于非交换偏导数 $\partial W/\partial a$的定义，参见 [24]；其中还精彩地介绍了 Jacobi 代数以及一般的 Calabi–Yau 代数理论。

从现在起，我们将这些表示分别称为类型 (1)、(2) 和 (3)。我们所考虑的上同调理论以及由此得到的BPS不变量，取决于我们给出的表示类型 A。我们用 Q_0表示 Q的顶点集，用 Q_1表示箭集。我们将 $s(a)$ 和 $t(a)$ 分别定义为 $a \in Q_1$的源点和目标点。 A-模 ρ 的维数向量是元组 $\dim_{Q_0}(\rho) := (\dim(1_i \cdot \rho))_{i\in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$。我们在 $\mathbb{N}^{Q_0}$上定义欧拉形式

$$\chi_Q(\mathbf{d}', \mathbf{d}'') = \sum_{i\in Q_0} \mathbf{d}'_i\mathbf{d}''_i - \sum_{a\in Q_1} \mathbf{d}'_{s(a)}\mathbf{d}''_{t(a)}$$

并定义对称化和反对称化版本

$$(\mathbf{d}', \mathbf{d}'')_Q = \chi_Q(\mathbf{d}', \mathbf{d}'') + \chi_Q(\mathbf{d}'', \mathbf{d}'); \qquad \langle \mathbf{d}', \mathbf{d}''\rangle_Q = \chi_Q(\mathbf{d}', \mathbf{d}'') - \chi_Q(\mathbf{d}'', \mathbf{d}').$$

箭图 Q' 称为对称的，若 $\chi_Q(-, -)$是对称的。在情形 (1) 和 (3) 中，我们首先假设 Q 是对称的。在情形 (2) 中，我们通过引入 l 个新箭 r_s^*构造一个新的箭图 Q^+。r_s^* 的起点与 r_s中所有项的终点相同，而 r_s^* 的终点与 r_s中所有项的起点相同。然后我们假设 Q^+ 是对称的。

2.1. **模栈的上同调**。

注记 2.1（混合霍奇结构）。对于上述三种类型的代数，我们所考虑的上同调都自然地提升到混合霍奇结构范畴。由于在类型 (3) 中我们取的是消失循环上同调，因此应改为考虑 [20] 中所述的单值混合霍奇结构和模。在下文出现 $\mathbb{L}^{n/2}$ 的地方（我们将其定义为纯的、按上同调次数分级的混合霍奇结构 $\mathbb{L} := \mathrm{H}_c(\mathbb{A}^1, \mathbb{Q})$ 的 $n/2$ 次张量幂），我们也应使用单值混合霍奇结构，因为只有在该范畴中，$\mathbb{L}$ 才有张量平方根。除了这一技术性问题之外，下面的混合霍奇结构中很少有真正具有单值[3]的，因此为避免混淆，我们将省略“单值”一词。阅读本文时也可以只考虑按上同调次数分级的向量空间，并将每一处 $\otimes\mathbb{L}^{n/2}$ 替换为$[-n]$。除[4] §5.4 外，我们遇到的所有混合霍奇结构都是纯的，这意味着通过混合霍奇结构定义的精化BPS不变量，与仅记录上同调次数这一较朴素方法所定义的精化BPS不变量一致（比较见 §2.2）。

(1) 对于 $A = \mathbb{C}Q$，以及作为维数向量的$\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$，考虑$\mathbf{d}$维$\mathbb{C}Q$-模的栈 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$。它可以写成全局商栈 $\mathbb{A}_{\mathbf{d}}(Q)/\mathrm{GL}_{\mathbf{d}}$，其中

$$\mathbb{A}_{\mathbf{d}}(Q) := \prod_{a\in Q_1} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{s(a)}}, \mathbb{C}^{\mathbf{d}_{t(a)}}); \qquad \mathrm{GL}_{\mathbf{d}} := \prod_{i\in Q_0} \mathrm{GL}_{\mathbf{d}(i)}(\mathbb{C})$$

且 $\mathrm{GL}_{\mathbf{d}}$ 通过同时进行基变换作用。我们定义 $\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}} := \mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)\ \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}$。由于 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 是一个全局商栈，且 $\mathbb{A}_{\mathbf{d}}(Q)$ 是等变可缩的，因此存在一个同构 $\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}} \cong \mathrm{H}^{\mathrm{GL}_{\mathbf{d}}}(\mathrm{pt}\ \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})}$。引入 $\mathbb{L}$-扭 twist 是为了使定理 2.2 的表述更简洁。

[3]主要的例外是例 3.4 和例 3.5。[4]不过，坦白地说，纯性的这一失效是 §5.4 中该主题最重要的特征之一！

(2) 固定一个表示 $A=\mathbb{C}Q/\langle r_1,\dots,r_l\rangle$。我们考虑由 $\mathbf{d}$ 维 A-模组成的栈 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(A)$。它是 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 的一个闭子栈，同时也是一个全局商栈。它通常是奇异的。我们定义 $\mathcal{H}_A^{\mathrm{BM}},\mathbf{d}:=\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(A)\ \mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{f(\mathbf{d})}$，其中对任意空间 X，我们定义 $\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(X,\mathbb{Q})=\mathrm{H}(X,\mathbb{D}\mathbb{Q}_X)$，即常值层$\mathbb{Q}_X$的 Verdier 对偶的导出整体截面；若我们在混合霍奇结构的层面发展该理论，则将其提升为混合霍奇模复形，如 [58] 中所述。或者，我们有 $\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(X,\mathbb{Q})\cong\mathrm{H}_c(X,\mathbb{Q})^\vee$，即对偶的紧支撑上同调。我们定义 $f(\mathbf{d})=-\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2-\sum_{j=1}^l \mathbf{d}_{s(r_j^*)}\mathbf{d}_{t(r_j^*)}/2$。同样，引入 $\mathbb{L}$-扭 twist 可使定理 2.2 的表述更加简洁。

(3) 固定一个表示 $A=\mathrm{Jac}(Q,W)$。势 W定义了 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 上的函数 $\mathrm{Tr}(W)$，而 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(A)=\mathrm{crit}(\mathrm{Tr}(W))$，视为 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 的闭子栈。我们考虑（关于 perverse 的正合）消失循环函子 $\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}$，并定义 $\mathcal{H}_A^{\mathrm{crit}},\mathbf{d}:=\mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(A)\ \varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)})\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}$。

对于每种类型，同时考虑所有维数向量上的 $\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}}$ 更有启发性，如下述来自 [20] 的定理所示。给定一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}^{Q_0}$-分次向量空间（或混合霍奇结构）$V=\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0},\ n\in\mathbb{Z}}V^n{}_{\mathbf{d}}$，我们将 $\mathrm{Sym}(V)$ 定义为由 V 生成的自由 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}^{Q_0}$-分次超交换代数：我们施加关于上同调分次的 Koszul 符号规则，因此，若 v，v' 的次数分别为 $(n,\mathbf{d})$ 和 $(n',\mathbf{d}')$，则有 $v\cdot v'=(-1)^{nn'}v'\cdot v$。

定理 2.2. 设 A 如上述情形 *(1)*、*(2)* 或 *(3)* 之一所示，并定义 $\mathcal{H}_A:=\bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}}\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}}$，这是上述引入的三种 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}^{Q_0}$-分次混合霍奇结构之一。存在一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}^{Q_0}$-混合霍奇结构的同构 Φ：$\mathcal{H}_A\cong$对称代数 $\left(\mathtt{BPS}_A\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\right)$，其中 $\mathtt{BPS}_A$ 是一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}^{Q_0}$-分次混合霍奇结构，并满足以下上同调整性 性质：对于每个固定的$\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}$，$\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}$-分次混合霍奇结构$\mathtt{BPS}_{A,\mathbf{d}}$ 是有限维的（遗忘 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}$-分次后）。$\mathtt{BPS}_A$ 称为A-模之栈的***BPS***上同调 。

2.2. **来自 BPS 上同调的 BPS 不变量**。§1 中复合指数的定义可推广到多个变量；为了阐明 BPS 上同调、混合霍奇结构、BPS 不变量与正性之间的一般关系，我们在此列出一些定义。

固定一个有理强凸多面锥 $\sigma\in\mathbb{R}^d$，并令 $N^+=\sigma\cap\mathbb{Z}^d$。在本节中，我们始终令 $N^+=\mathbb{N}^{Q_0}$。映射 $+\colon(N^+)^2\to N^+$ 的纤维有限。固定一个系数环 R。令 $R[T]=R[N^+]$ 为 N^+ 在 R 上的半群代数；作为一个 R-模，它由满足 $\alpha\in N^+$ 的符号 T^α 自由生成。令 I 为 $R[T]$ 中由满足 $\alpha\neq 0$ 的符号 T^α 张成的理想。令 $R[\![T]\!]$ 为 $R[T]$ 在 I 处的完备化，并令 $R[\![T]\!]_+\subset R[\![T]\!]$ 为形式线性组合空间 $\sum_{\alpha\in N^+\setminus\{0\}}f_\alpha T^\alpha$。

我们定义[5] $R=\mathbb{Z}[q_1^{\pm1/2}\dots q_{r-1}^{\pm1/2}](\!(q_r^{1/2})\!)$。我们将 $R[\![T]\!]$ 中的元素写作 $f=\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^r,\alpha\in N^+}f_{\mathbf{n},\alpha}q^{\mathbf{n}/2}T^\alpha$，其中遵循将 $q^{\mathbf{n}/2}=\prod_{i=1}^r q_i^{\mathbf{n}_i/2}$ 写作的标准记号约定。最后，我们定义

$$\mathbf{Exp}\colon R[\![T]\!]_+\to 1+R[\![T]\!]_+;\qquad \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^r,\alpha\in N^+}f_{\mathbf{n},\alpha}q^{\mathbf{n}/2}T^\alpha\mapsto\prod_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^r,\alpha\in N^+}(1-q^{\mathbf{n}/2}T^\alpha)^{-f_{\mathbf{n},\alpha}}.$$

这是一个群同构，其中定义域带有由加法给出的群结构，而目标域带有由乘法给出的群结构。

令 V为一个 $\mathbb{Z}^r\oplus(N^+\setminus\{0\})$-分次向量空间，并假设它还带有上同调分次。假设每个 $\mathbb{Z}^r\oplus N^+$-分次部分的总维数有限，且对于固定的 $\alpha\in N^+$，有 $V_{(n_1,\dots,n_r)\ \alpha}=0$，其中 $n_r\ll 0$；并且除有限多个 n_1外，，……，n_{r-1}，其中固定n_r。我们构造形式洛朗级数 $\chi_{N^+}(V)=\bigoplus_{(\mathbf{n}\ \alpha)\in\mathbb{Z}^r\oplus N^+}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\dim(V^i{}_{\mathbf{n}\ \alpha})q^{\mathbf{n}}T^\alpha\in R[\![T]\!]_+$。

[5]这个环是一个颇为任意的选择，其目的只是足够灵活，能够涵盖本文中的所有内容。更抽象的处理方式是首先令 R 为一个一般的 λ环，或对称张量范畴的格罗滕迪克环。

于是，将 (3) 推广可得：

$$\mathbf{Exp}(\chi_{N^+}(V)) = \chi_{N^+}(\mathrm{Sym}(V)) \tag{4}$$

其中，Sym(V) 是由 V 生成的 $\mathbb{Z}^r \oplus N^+$ 分次自由超对称代数。我们再次对上同调分次施加 Koszul 符号规则。

给定 §2.1 中介绍的 $\mathbb{N}^{Q_0}$ 分次、按上同调次数分级的向量空间 $\mathcal{H}_A$，我们定义其庞加莱级数

$$\mathtt{p}_{\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}_A) \coloneqq \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0};\, i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim(\mathcal{H}^i_{A,\mathbf{d}}) q^{i/2} T^{\mathbf{d}}.$$

请注意，上同调分次在这里身兼两职。在复合指数的一般定义中，我们有一个幺半群 $\mathbb{Z}^r$（目前为 $r=1$），用它为向量空间 V 分次；我们也将 V 视为具有独立的上同调分次。在 χ_{N^+} 的定义中，我们对上同调次数取交错和。然而，在庞加莱级数的定义中，$\mathbb{Z}^r$ 分次就是上同调分次。这带来一个简单的正性性质：对于任意 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}^{Q_0}$ 分次向量空间 $\mathcal{H}$（满足 $\mathcal{H}^i_{\mathbf{d}} = 0$，其中 $i \ll 0$ 取决于$\mathbf{d}$），我们有 $\mathtt{p}_{\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}) \in \mathbb{N}((-q^{1/2}))[\![T]\!]$。

如 §1 所示，我们通过设定来定义精化*BPS*不变量 $\Omega^{\mathrm{coh}}_{A,\mathbf{d}}(q^{1/2})$

$$\mathtt{p}_{\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}_A) = \mathbf{Exp}\left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}\setminus\{0\}} -\Omega^{\mathrm{coh}}_{A,\mathbf{d}}(q^{1/2}) q^{1/2}(1-q)^{-1}\right). \tag{5}$$

于是，由 (4) 和定理 2.2 可知，$\mathtt{p}_{\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathrm{BPS}_A) = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^Q_0/\setminus\{0\}} \Omega^{\mathrm{coh}}_{A,\mathbf{d}}(q^{1/2}) T^{\mathbf{d}}$。特别地，以这种方式定义的所有精化BPS不变量都是系数为正的劳朗多项式。

如备注 2.1 所述，$\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}^{Q_0}$-分次向量空间 $\mathcal{H}_A$ 可以提升为混合霍奇结构。特别地，对于每个 $(i,\mathbf{d})$- 分次部分 $\mathcal{H}^i_{A,\mathbf{d}}$，都存在一个递增的权滤过 $W_\bullet \mathcal{H}^i_{A,\mathbf{d}}$。对于混合霍奇结构 V，我们记 $\mathtt{p}_{\mathrm{wt}}(V) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim(\mathrm{Gr}^n_W(V)) q_1^{n/2}$。对于一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}^{Q_0}$-分次混合霍奇结构 V，我们定义

$$\mathtt{p}_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(V) \coloneqq \sum_{i\in\mathbb{Z};\, \mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}} (-1)^i \mathtt{p}_{\mathrm{wt}}(V^i_{\mathbf{d}}) q_2^{i/2} T^{\mathbf{d}}; \qquad \chi_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(V) \coloneqq \left(\mathtt{p}_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(V)\right)_{\substack{q_1\mapsto q \\ q_2\mapsto 1}}.$$

然后和之前一样，如果我们通过以下方式定义精化BPS不变量

$$\mathtt{p}_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}_A) = \mathbf{Exp}\left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}\setminus\{0\}} -\Omega_{A,\mathbf{d}}(q_1^{1/2}, q_2^{1/2}) q^{1/2}(1-q)^{-1}\right) \tag{6}$$

$$\chi_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}_A) = \mathbf{Exp}\left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}\setminus\{0\}} -\Omega^{\mathrm{wt}}_{A,\mathbf{d}}(q^{1/2}) q^{1/2}(1-q)^{-1}\right) \tag{7}$$

其中我们令 $q = q_1 q_2$，便得到 $\mathtt{p}_{\mathrm{wt},\,\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathrm{BPS}_A) = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^Q_0\setminus\{0\}} \Omega_{A,\,\mathbf{d}}(q_1^{1/2},\ q_2^{1/2}) T^{\mathbf{d}}$ 以及 $\chi_{\mathrm{wt},\,\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathrm{BPS}_A) = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^Q_0\setminus\{0\}} \Omega^{\mathrm{wt}}_{A,\,\mathbf{d}}(q^{1/2}) T^{\mathbf{d}}$。

假设 $\mathcal{H}_A$ 是纯的，也就是说，对于所有满足 $i \neq n$的$\mathbf{d}$，$\mathrm{Gr}^n_W(\mathcal{H}^i_{A,\mathbf{d}}) = 0$。由此可得$\chi_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}_A) = \mathtt{p}_{\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}_A)$，以及$\chi_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathrm{BPS}_A) = \mathtt{p}_{\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathrm{BPS}_A)$。因此，纯性带来的一个巧妙推论是精化BPS不变量的正性。利用纯性，或利用权重精化与上同调精化相等这一事实，证明“动机”DT理论中的多项式实际上是庞加莱多项式，可以用来证明各种正性猜想；其中最早的例子是 Efimov 对称箭图精化BPS不变量正性的证明 [23]。我们将在 Kac 正性

猜想中通过这一思路给出一个（重新）证明，见 §3.2。 [11, 19], 中还展示了这一技巧的其他应用，用以证明量子簇代数和量子 theta 基的正性猜想。

注 2.3. 通常，计算不变量 $\Omega_A^{\mathrm{wt}}{}_{,\mathbf{d}}(q^{1/2})$ 比计算不变量 $\Omega_A^{\mathrm{coh}}{}_{,\mathbf{d}}(q^{1/2})$ 更容易。这在一定程度上是因为权多项式具有动机性（即，对于一个开子栈 $U \subset X$，其闭补集为 Z，我们有 $\chi_{\mathrm{wt}}(\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(U,\mathbb{Q})) + \chi_{\mathrm{wt}}(\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(Z,\mathbb{Q})) = \chi_{\mathrm{wt}}(\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(X,\mathbb{Q}))$）。在许多情况下（包括我们在 §1 中看到的例子），计算 $\Omega_A^{\mathrm{coh}}{}_{,\mathbf{d}}(q^{1/2})$ 的方法是先计算 $\Omega_A^{\mathrm{wt}}{}_{,\mathbf{d}}(q^{1/2})$，然后利用纯性证明 $\Omega_A^{\mathrm{coh}}{}_{,\mathbf{d}}(q^{1/2}) = \Omega_A^{\mathrm{wt}}{}_{,\mathbf{d}}(q^{1/2})$。请注意，精化不变量 $\Omega_A^{\mathrm{wt}}{}_{,\mathbf{d}}(q^{1/2})$ 与 [45], 中所考虑的精化不变量一致；而在缺乏纯性的情况下，$\Omega_A^{\mathrm{coh}}{}_{,\mathbf{d}}(q^{1/2})$ 则未必如此。

2.3. **BPS 层与 BPS上同调**。 定理 2.2 是一个存在性定理。它在同构意义下唯一确定了 BPS_A，使其成为一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}^{Q_0}$-分次的混合霍奇结构。接下来我们给出一个更明确的定义。先从情形 (3) 开始，因此我们固定一个表示 $A = \mathrm{Jac}(Q,\ W)$。记作$\mathbb{C}Q = \mathrm{Jac}(Q,\ 0)$，我们将同时给出情形 (1) 和 (3) 的定义，而情形 (2) 的定义将在 §2.7 中给出。

在 BPS上同调的一般定义中，良模空间发挥着关键作用。关于良模空间的一般定义以及围绕它们发展起来的一些精彩的“现代模空间理论”，请参见 [1]。对于全局商栈 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$，这个良模空间就是 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 的仿射化，也就是代数 $\mathrm{GL}_{\mathbf{d}}$-不变函数的谱，其中这些函数定义在 $\mathbb{A}_{\mathbf{d}}(Q)$上：

$$\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q) \coloneqq \mathrm{Spec}(\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathbf{d}}(Q)})^{\mathrm{GL}_{\mathbf{d}}}).$$

存在一个典范态射 $\mathrm{JH}_{\mathbf{d}}\colon\ \mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q) \to \mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)$。 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 的闭点对应于$\mathbf{d}$维 $\mathbb{C}Q$-模，而 $\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 的闭点对应于半单$\mathbf{d}$维$\mathbb{C}Q$-模。如果 $x \in \mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 对应于$\mathbf{d}$维 $\mathbb{C}Q$-模 ρ，那么 $\mathrm{JH}_{\mathbf{d}}(x)$ 对应于 ρ 的半单化，即直和 $\bigoplus_{i=1}^{l} \rho_i/\rho_{i-1}$，其中 $0 = \rho_0 \subset \rho_1 \subset \ldots \subset \rho_l = \rho$ 是 ρ 的 Jordan–Hölder 滤过。

一般而言，BPS_A 的定义依托于反常层理论，或其提升到混合霍奇模的理论，尤其是 Beilinson–Bernstein–Deligne–Gabber 分解定理 [3] 向良模空间 p 的推广：$\mathfrak{M} \to \mathcal{M}$。BBDG 分解定理表明，如果$p\colon\ X \to Y$ 是从光滑代数簇出发的射影态射，则直接像 $p_*\mathbb{Q}_X$ 首先可以分解为按上同调次数平移的反常层的直和，并且还可以进一步证明，这些反常层中的每一个都是半单层。Saito 对该定理的版本 [59] 将这一论断提升到了混合霍奇模。以下结果表明，分解定理的第一部分[6]对沿 $\mathrm{JH}_{\mathbf{d}}$ 的消失循环复形的直接像成立。参见 [42]，其中给出了对所有良模空间 p 的推广：$\mathfrak{M} \to \mathcal{M}$。

命题 2.4 ([20])。 在 $\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 上的反常层无界复形的导出范畴（或其到混合霍奇模的提升）中存在一个同构

$$\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q} \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2} \cong \bigoplus_{i\geq 1} \mathcal{H}^i\left(\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q} \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}\right)[-i].$$

如果是在可构造复形的层面理解这个同构，那么上同调函子就是 [3] 的反常 上同调函子。该命题表明，反常截断$\tau_{\leq 0}(\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q} \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2})$ 为零，而 $\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q} \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}$ 同构于（无限）个经上同调移位的混合霍奇模的直和（或经上同调移位的反常

[6]第二部分实际上可能不成立。也就是说，命题 2.4 中分解式右侧出现的反常层可能不是半单的，而它们到混合霍奇模的提升也可能不是纯的。

层）。我们定义*BPS*层

$$\mathcal{BPS}_{A,\mathbf{d}} \coloneqq \mathcal{H}^0\Big(\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{(\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})-1)/2}\Big). \tag{8}$$

根据定义，这是 $\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 上的一个混合霍奇模，其支撑包含于 $\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(A)$ 中。如果我们的代数 A 在情形 (1) 中表示为路径代数，我们便定义 $\mathcal{BPS}_{A,\ \mathbf{d}} \coloneqq \mathcal{H}^0\big(\mathrm{JH}_{\mathbf{d},\ *}\,\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{(\chi_Q(\mathbf{d},\ \mathbf{d})-1)/2}\big)$。

根据命题 2.4，有等式 $\mathcal{BPS}_{A,\mathbf{d}}\otimes\mathbb{L}^{1/2} = \tau_{\le 1}(\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2})$。我们定义 $\mathrm{BPS}_{A,\mathbf{d}} \coloneqq \mathrm{H}(\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)\,\mathcal{BPS}_{A,\mathbf{d}})$。我们定义[7] $\mathfrak{n}^+_{A,\mathbf{d}} \coloneqq \mathrm{H}(\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(A)\ \tau_{\le 1}(\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2})) = \mathrm{BPS}_{A,\mathbf{d}}\otimes\mathbb{L}^{1/2}$。此定义隐含了将 A 表示为 Jacobi/路径代数的表示。若要明确写出这一表示，我们将记作 $\mathrm{BPS}_{Q,W}$，$\mathfrak{n}^+_{Q,W}$ 等。自然变换 $\tau_{\le 1}\to\mathrm{id}$ 诱导出一个态射 $\iota\colon \mathcal{BPS}_{A,\mathbf{d}}\otimes\mathbb{L}^{1/2}\to\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}$。将导出整体截面函子应用于 ι，得到一个态射 $\jmath_1\colon \mathfrak{n}^+_{A,\mathbf{d}}\to\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}}$，根据命题 2.4，该态射是单射。这就定义了 A-模范畴的 BPS上同调，并将其（经过上同调平移）规范嵌入为 $\mathcal{H}_A$ 的一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}^{Q_0}$-分次子空间。

2.4. **相对整性**。定义了 BPS 层之后，我们可以陈述整性定理的一个更强版本。首先，注意 $\mathcal{M}_A$ 是一个幺半群：$\mathcal{M}_A$ 的点对应于半单 A模，并且存在一个有限 [50, 引理 2.1] 概形态射 $+\colon \mathcal{M}_A\times\mathcal{M}_A\to\mathcal{M}_A$，将 $(x,\ y)$ 映到 $x\oplus y$。这在 $\mathrm{Perv}(\mathcal{M}_A)$ 上诱导出一个对称幺半结构：给定一对反常层 $\mathcal{F},\ \mathcal{G}$复形 $\mathcal{F}\boxdot\mathcal{G}\coloneqq +_*(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G})$ 仍然是反常层，这是由态射 $+$ 的有限性所保证的。这个结构可提升为 $\mathcal{M}_A$ 上混合霍奇模范畴（或混合霍奇模复形）上的对称幺半结构，因此我们可以讨论由任意一个此类范畴中的给定对象 $\mathcal{F}$ 生成的自由对称代数 $\mathrm{Sym}_{\boxdot}(\mathcal{F})$。

定理2.5 ([20]定理A)。在 $\mathcal{M}_A$ 上局部有界下方混合霍奇模复形范畴中存在一个同构（对于定义域，我们取代数对象的底层复形）：

$$\mathrm{Sym}_{\boxdot}\Big(\mathcal{BPS}_{A,\mathbf{d}}\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\Big)\to\bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}}\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}.$$

定理 2.2 可由定理2.5 通过取导出整体截面得到。

2.5. **余切滤过**。由命题 2.4 可知，复形态射 $\tau_{\le n}\big(\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}\big)\to\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有一个左逆。取导出整体截面后，作为上同调分次混合霍奇结构的自然态射（推广了 $\jmath_1$）

$$\mathfrak{P}_n\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}} \coloneqq \mathrm{H}\left(\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)\ \tau_{\le n}\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}\right)\xrightarrow{\jmath_n}\mathrm{H}\left(\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q),\mathrm{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}\right)=\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}}$$

因此是单射。我们称 $\mathfrak{P}_n\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}}$ 为 $\mathcal{H}_{A,\mathbf{d}}$ 的余切滤过第 n 项。注意，$\mathfrak{n}^+_A\coloneqq\mathfrak{P}_1\mathcal{H}_A$。

2.6. **3-卡拉比–丘范畴中对象栈的BPS上同调**。令 $\mathscr{C}$ 为一个3-卡拉比–丘（3CY）微分分次范畴。关于精确定义，请参阅 [7]；这里只回顾定义的一个推论：对于满足局部紧致条件[8] 的 $\mathscr{C}$ 中的对象 x,y，存在一个双函子配对 $\mathrm{Ext}^i(x,y)\cong\mathrm{Ext}^{3-i}(y,x)^\vee$，这与3-卡拉比–丘簇上相干层的塞尔对偶类似。我们选取一个阿贝尔心 $\mathscr{A}\subset\mathscr{C}$，并令 $\mathscr{A}$-半稳定$\subset\mathscr{A}$为半稳定对象的满阿贝尔子范畴，使得 $\mathfrak{M}^{\mathrm{sst}}_{\mathscr{A}}\subset\mathfrak{M}_{\mathscr{C}}$（即包含于 $\mathscr{A}$-半稳定中的对象的开子栈）具有良模空间 $p\colon\ \mathfrak{M}^{\mathrm{sst}}_{\mathscr{A}}\to\mathcal{M}^{\mathrm{sst}}_{\mathscr{A}}$（按 [1], 的意义），且欧拉形式

[7]关于这一记号的缘由将在 §4.2 中变得更加清楚。[8] z 的局部紧致性是指，对于所有的 z'，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(z',z)$ 都是有限维的。例如，在非紧致 2CY 曲面上的相干层范畴中，$\mathcal{G}$ 的局部紧致性由 $\mathcal{G}$ 的支撑是射影的这一条件保证。

$\chi_{\mathscr{C}}(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}}(-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i(x,y))$在 $\mathscr{A}$-半稳定中的对象 x,y 上是对称的。我们不再展开这些定义，而是介绍一些启发我们的例子：

(1) $\mathscr{A} = \mathrm{Jac}(Q,\ W)$-模，对应于箭图 Q。若 Q 对称，我们可以选取 $\mathscr{A}$-半稳定$= \mathscr{A}$。否则，我们选取一个一般稳定性条件，并令 $\mathscr{A}^{\mathrm{-sst}}$ 为固定斜率的半稳定模范畴，定义见 §3.3。(2) $\mathscr{A} = \mathrm{Coh}(X)$，对应于拟射影 3CY 簇 X。我们在 X的紧化上选取一般极化 H，并固定 $\mathscr{A}^{\mathrm{-sst}}$ 为 X 上支撑在 X中的 H-半稳定层范畴，其相对于 H具有固定的归一化希尔伯特多项式。(3) 对于没有边界的可定向闭三维流形 M，有 $\mathscr{A}$-半稳定$= \mathscr{A} = \mathbb{C}[\pi_1(M)]$-模。

在上述每个例子中，对象栈在局部都可建模为光滑栈 [4]上某个函数的临界轨迹。因此，我们对 $\mathfrak{M}(\mathrm{Jac}(Q,\ W))$ 的讨论为栈 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}$的整体几何提供了一个局部模型。特别地，在栈 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}$的图表图册 Z_i 上，我们可以定义消失循环层 $\varphi_{f_i}\mathbb{Q}_{U_i}\otimes\mathbb{L}^{-\dim(U_i)/2}$，其中 $Z_i = \mathrm{crit}(f_i)$，而 f_i是定义在光滑栈 U_i上的函数。在上述所有例子中，都可以为对象栈 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}$赋予一种称为定向数据的附加结构，它提供了在所有临界图表之间粘合这些消失循环层所需的数据，从而定义 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}$上的混合霍奇模 $\varphi_{\mathtt{DT}}$ —— 另见 [4]。

在情形（1）中，态射 JH 是良好模空间态射 p （至少当 Q 是对称的时），且 $\varphi_{\mathtt{DT}} = \varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{-\dim(\mathfrak{M}(Q))/2}$；而在情形（2）中，JH 在解析局部意义下刻画 p [67]。注意，偏斜截断函子与取开限制可交换。因此，自然可以像 [68] 中那样定义 BPS 层和 BPS上同调，将（8）推广为：

$$\mathcal{BPS}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}} := \mathcal{H}^0(p_*\varphi_{\mathtt{DT}}\otimes\mathbb{L}^{-1/2}); \qquad \mathtt{BPS}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}} := \mathrm{H}(\mathcal{M}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}, \mathcal{BPS}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}).$$

当然，只有证明 $\mathtt{BPS}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}$和 $\mathcal{BPS}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}$满足定理 2.2 和 2.5 的类比结果，即上同调整性定理，这些定义才有依据。在定向数据和栈 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}$ 满足某些技术条件时，[8]，中证明了这一版本的整性定理，即证明了存在一个混合霍奇模复形的同构

$$\mathrm{Sym}_{\boxdot}\left(\mathcal{BPS}_{\mathscr{A}}^{\mathrm{-sst}}\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\right)\xrightarrow{\cong} p_*\varphi_{\mathtt{DT}} \tag{9}$$

其中该态射使用上同调 *Hall* 归纳，相关讨论见 §4.1。完整细节请参阅 [8] 。

2.7. 维数约化。给定 A 具有类型 (2) 的表示，定义 $B = \mathrm{Jac}(Q^+, W)$，其中$W = \sum_{j=1}^{l} r_j r_j^*$。令 π: $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q^+) \to \mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$为遗忘态射，它将 $\mathbb{C}Q^+$-模映至其底层的 $\mathbb{C}Q$-模。根据维数约化同构 [10, 附录 A] ，存在自然同构 $\pi_*\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_{Q^+}(\mathbf{d},\mathbf{d})/2} \cong (\mathbb{DQ}_{\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(A)})\otimes\mathbb{L}^{f(\mathbf{d})}$。取导出整体截面后，我们得到自然同构 Ψ: $\mathcal{H}_A^{\mathrm{BM}} \cong \mathcal{H}_B^{\mathrm{crit}}$。我们定义 $\mathtt{BPS}_A := \mathtt{BPS}_B := \mathtt{BPS}_{Q^+,W}$，并将 $\mathtt{BPS}_A \subset \mathcal{H}_A$ 与 $\mathtt{BPS}_B \hookrightarrow \mathcal{H}_B^{\mathrm{crit}} \xrightarrow{\Psi^{-1}} \mathcal{H}_A^{\mathrm{BM}}$复合，以此定义嵌入。由定理 2.2 应用于 B，存在一个同构

$$\mathcal{H}_B^{\mathrm{crit}} \cong \mathrm{Sym}\left(\mathtt{BPS}_B\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\right),$$

因此，通过 Ψ^{-1}，我们也可以得出关于 $\mathcal{H}_A^{\mathrm{BM}}$ 的定理 2.2。

设 S 为光滑拟射影曲面，设 $X = \mathrm{Tot}_S(\omega_S)$ 为 S上的典范丛的全空间，并记 ϖ: $X \to S$ 为投影。于是 X 是一个非紧3CY簇。在此背景下，Kinjo [41] 所给出的更精细形式的维数约化同构适用：若 q: $\mathfrak{M}_{\mathrm{Coh}(X)} \to \mathfrak{M}_{\mathrm{Coh}(S)}$ 是由ϖ_*诱导的对象模叠之间的态射，则 $q_*\varphi_{\mathtt{DT}} \cong (\mathbb{DQ}_{\mathfrak{M}_{\mathrm{Coh}(S)}})\otimes\mathbb{L}^{\mathrm{vdim}/2}$，其中在表示相干层 $\mathcal{F}$ 的点处，vdim 为

由 $-\chi(\mathcal{F},\ \mathcal{F})$ 给出。层 $\varphi_{\mathtt{DT}}$ 的构造如§2.6所述。若 S 还是一个2-Calabi–Yau 曲面[9],，则$q^{-1}(\mathfrak{M}^{\mathrm{sst}}_{\mathrm{Coh}(S)}) = \mathfrak{M}^{\mathrm{sst}}_{\mathrm{Coh}(X)}$，因此在取导出整体截面后，我们得到同构 $\mathrm{H}(\mathfrak{M}^{\mathrm{sst}}_{\mathrm{Coh}(X)},\ \varphi_{\mathtt{DT}}) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(\mathfrak{M}^{\mathrm{sst}}_{\mathrm{Coh}(S)},\ \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{\mathrm{vdim}/2} =: \mathcal{H}^{\text{-sst}}_{\mathrm{Coh}(S)}$。如上所述，我们利用这一同构，将 S 上半稳定相干层的模叠的BPS上同调传递为 X上半稳定相干层的模叠的BPS上同调，并由此推出 $\mathcal{H}^{\text{-sst}}_{\mathrm{Coh}(S)}$的上同调整性。

3. 计算精化BPS不变量

3.1. 翻转曲线的例子。 有时可以手工计算 BPS 层，利用 Meinhardt 和 Reineke[10]的以下定理：

定理3.1 ([50])。 设 Q 是一个对称箭图，且 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$。存在一个同构

$$\mathcal{BPS}_{Q,\mathbf{d}} \coloneqq \begin{cases} \mathcal{IC}_{\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)} & \textit{if there exists a simple } \mathbf{d}\textit{-dimensional } \mathbb{C}Q\textit{-module} \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

这里，$\mathcal{IC}_{\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)}$ 是交叉复形：它是在简单 $\mathbf{d}$ 维 $\mathbb{C}Q$-模的（光滑）轨迹上，将常值混合霍奇模 $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}^{\mathrm{simp}}_{\ \mathbf{d}}(Q)} \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}$ 延拓得到的唯一简单混合霍奇模（或层）。通过自然同构[11] $\mathbf{JH}_{\mathbf{d},*}\,\varphi_{\mathrm{Tr}(W)} \cong \varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbf{JH}_{\mathbf{d},*}$我们推得，若存在一个简单的 $\mathbf{d}$ 维$\mathbb{C}Q$-模，则 $\mathcal{BPS}_{Q,W,\mathbf{d}}$ 同构于 $\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\,\mathcal{IC}_{\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)}$；否则为零。

例 3.2：设 $Q^{(0)}$ 为一个只含一个顶点且没有箭的箭图。则 $\mathbb{C}Q^{(0)} = \mathbb{C}$，而一个$\mathbb{C}Q^{(0)}$-模就是一个 $\mathbb{C}$-向量空间。当且仅当$d = 1$时，存在一个简单的 d-维 $\mathbb{C}Q^{(0)}$-模。于是 $\mathcal{M}_d(Q^{(0)}) =$pt，而 $\mathcal{IC}_{\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q^{(0)})} = \mathbb{Q}_{\mathrm{pt}}$，因此

$$\mathtt{BPS}_{A,d} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{if } d = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们推导出存在一个同构 $\mathcal{H}_Q \cong$对称代数 $\left(\mathrm{H}(\mathrm{pt}\ /\mathbb{C}^*,\ \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{1/2}\right)$。转到其底层的$\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}$-分次向量空间后，右侧是一个自由超交换代数的底层 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}$-分次向量空间；该自由超交换代数由一个在度数 $(1,\ 2n+1)$ 中维数为 1 的向量空间（当$n \in \mathbb{N}$时）以及所有其他度数中维数为 0 的向量空间生成。这是一个自由的外代数。转到生成函数后，我们得到量子二重对数

$$\mathtt{p}_{\mathbb{N}}(\mathcal{H}_{Q^{(0)}}) = \sum_{n\geq 0}(-q^{1/2})^{n^2}\prod_{j=1}^{n}(1-q^{2j})^{-1}T^n = \prod_{n\in\mathbb{N}}(1-Tq^{n+1/2}) =: \mathbb{E}(T).$$

更一般地，我们定义 $\mathbb{E}(f(q^{1/2},\ T)) := \mathbf{Exp}(f(q^{1/2},\ T)(-q^{1/2}(1-q)^{-1}))$。

例 3.3。 设 $Q^{(1)}$ 是由一个顶点和一个环 x组成的箭图。那么 $\mathbb{C}Q^{(1)} = \mathbb{C}[x]$。唯一的简单 $\mathbb{C}Q^{(1)}$-模是一维的。此外 $\mathcal{M}_1(Q^{(1)}) \cong \mathbb{A}^1$ 和 $\mathcal{IC}_{\mathcal{M}_1(Q^{(1)})} = \mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1} \otimes \mathbb{L}^{-1/2}$。由此可得同构 $\mathcal{H}_{Q^{(1)}} \cong$ Sym(H(pt $/\mathbb{C}^*, \mathbb{Q})$)。这是一个自由对称代数（集中在偶数上同调次数），其生成函数为 $\mathbb{E}(-q^{-1/2}T)$。

---

[9]在这种情况下，我们假设超平面类 H 来自 S的拉回。[10]事实上，他们在$\overline{\ }\mathcal{M}_{\mathbf{d}}(Q)$上的混合霍奇模层的格罗滕迪克环中类的层面证明了该定理。这里陈述的版本是纯性的直接推论，见 [20]。[11]关于这一同构，见 [50, 第 4 节。3] 关于其向所有良模空间态射的推广，见 [42, 附录 A] 。

例 3.4。设 $Q^{(1)}$ 是上一个例子中的箭图。设 $W = x^{d+1}$。那么 Tr(W) 在空间 $\mathcal{M}_1(Q^{(1)}) \cong \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y])$ 上诱导出函数 y^{d+1}。消失循环上同调带有非平凡的单值作用——我们仅在向量空间层面考察这个问题。存在同构 $\varphi_{y^{d+1}}\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1}[1] \cong \mathbb{Q}_0^{\oplus d}$，且定理3.1意味着存在同构$\mathcal{H}_{Q^{(1)},x^{d+1}} \cong \mathrm{Sym}\left((\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})[-1])^{\oplus d}\right) \cong \mathcal{H}_{Q^{(0)}}^{\otimes d}$。

例3.5。这个例子要复杂得多，van Garderen 在 [69] 中对其进行了详细推导。令$Q^{(2)}$为一个只有一个顶点和两个环的箭图，记作 x，y。取 $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 和 $b \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$。令$W = x^2y - f_{a,\,b}(y)$，其中

$$f_{a,b}(y) = \begin{cases} y^{2a} & b = \infty \\ y^{2a} + y^{2b+1} & b \neq \infty. \end{cases}$$

设 $A = \mathrm{Jac}(Q^{(2)},\ W)$。同样，在计算消失循环函子时会出现非平凡的单值现象。[69] 中证明了我们有

$$\mathtt{BPS}_{A,d} = \begin{cases} \mathbb{Q}^{\oplus \min\{2a+1,2b+2\}} & d = 1 \\ \mathbb{Q}^{\oplus a-1} & d = 2 \\ 0 & d = 3 \end{cases}$$

并且 BPS 上同调是纯的。特别地，A 的（精化）BPS不变量为 (min$\{2a+1,\ 2b+2\}$，$a-1$，0，0，...,...)。

尽管表面上纯属代数问题，上述四个例子都源自三维几何；更确切地说，它们涉及不同 Calabi–Yau三维簇中一条有理曲线 C 对这些三维簇的 BPS不变量 $\Omega^{\mathrm{wt}}_{n[C]}(q^{1/2})$ 的贡献：关于这个内容极其丰富的主题，参见 [39, 66, 16, 22] 及其中的参考文献。例3.5 的一个推论是，即使深入探讨这一主题，精化BPS不变量仍然是常数，因此自然会提出如下问题：

猜想3.6。令 A 为有理翻转曲线 C的收缩代数：一种在 [22]中定义的特殊类型的*Jacobi*代数。那么对于所有 $d \in \mathbb{N}$，精化*BPS*不变量$\Omega^{\mathrm{coh}}_{A\,d,}(q^{1/2}) = \Omega^{\mathrm{wt}}_{A,d}(q^{1/2})$都是常数，且等于 C的第 d个*Gopakumar–Vafa*不变量。

3.2. **作为精化BPS不变量的Kac 多项式**。在 [36]中，Victor Kac证明了以下优美结果。关于Kac 多项式及其推广的最新综述，参见 [63] 。

定理3.7。令 Q 为任意箭图（有限，但不一定对称），并选取$\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$。那么存在一个多项式$\mathtt{a}_{Q,\mathbf{d}}(t) \in \mathbb{Z}[t]$，使得若 $\mathbb{F}$ 是含有 q 个元素的有限域，则绝对不可分解的[12] $\mathbf{d}$维 $\mathbb{F}Q$-模的同构类数等于$\mathtt{a}_{Q,\mathbf{d}}(q)$。

给定一个有限箭图 Q，我们通过令 $Q_0 = Q_0$ 和 $Q_1 \coloneqq Q_1 \coprod Q_1^{\mathrm{op}}$，构造其加倍箭图$\overline{Q}$，其中 Q_1^{op} 对每个箭 $a \in Q_1$ 都包含一个箭 a^*，并且令 a^* 与 a 方向相反。$\widetilde{\ }$我们通过为每个 $i \in Q_0$ 添加一个环 ω_i，从 Q 构造三倍箭图 $\widetilde{Q}$，其中 $s(\omega_i) = t(\omega_i) = i$。我们$\widetilde{\ }$考虑预投射代数 $\Pi_Q := \mathbb{C}\overline{Q}/\langle\sum_{a\in Q_1}[a,a^*]\rangle$。$\widetilde{Q}$ 的典范三次势由 $W = (\sum_{a\in Q_1}[a,a^*])(\sum_{i\in Q_0}\omega_i)\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$给出。若令 $A = \mathrm{Jac}(Q,\ W)$，则存在一个同构 $A \cong \Pi_Q[\omega]$，将 $\sum_{i\in Q_0}\omega_i$ 映到 ω。

以下内容结合了 [52], 用于计算动机 BPS 不变量，从而得到 $\Omega^{\mathrm{wt}}_{A,\ \mathbf{d}}(q^{1/2})$，以及 [13]，其中证明了上同调 BPS 不变量的纯性。

定理 3.8。对于任意箭图 Q 和维数向量$\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$，我们有如下等式

$$\mathtt{a}_{Q,\mathbf{d}}(q^{-1}) = -q^{1/2}\Omega^{\mathrm{wt}}_{A,\mathbf{d}}(q^{1/2}) = -q^{1/2}\Omega^{\mathrm{coh}}_{A,\mathbf{d}}(q^{1/2}).$$

[12]一个 $\mathbb{F}$如果 $\rho \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}$ 作为 $\mathbb{F}Q$-模不可分解，则称 ρ 为Q-模绝对不可分解 $\overline{\ }$.

由于 $\mathrm{a}_{Q,\,\mathbf{d}}(q^{-1})$ 是关于 q^{-1} 的多项式，因此 $\mathfrak{n}_A^+$ 完全支撑于偶数负上同调次数。由于 $-q^{1/2}\Omega^{\mathrm{coh}}_{A,\,\mathbf{d}}(q^{1/2})$ 只有正系数，因此 $\mathrm{a}_{Q,\,\mathbf{d}}(q^{-1})$ 的系数均为正。这一正性最初由 Kac 提出猜想，随后由 Hausel、Letellier 和 Rodriguez-Villegas 在 [27] 中首先证明。

3.3. 上同调壁穿越与量子二重对数恒等式。我们讨论（3）型代数，并放宽 Q 为对称的条件。令 $W=0$，这将表示为（1）型的代数作为一个特例纳入其中。

我们引入一个稳定性条件 $\zeta\in\mathbb{Q}^{Q_0}$。我们将非零 A-模 ρ 的斜率定义为

$$\mu^{\zeta}(\rho):=\frac{\zeta\cdot\dim_{Q_0}(\rho)}{\dim(\rho)}.$$

若对所有 $0\neq\rho'\subset\rho$ 都有 $\mu^{\zeta}(\rho')\leq\mu^{\zeta}(\rho)$，则称非零 A-模 ρ 为 ζ-半稳定。我们用 $\mathfrak{M}^{\zeta}\text{-sst }\mathbf{d}\,(A)$ 表示 $\mathbf{d}$ 维 ζ-半稳定 A-模所构成的栈。它等于子栈 $\mathrm{crit}(\mathrm{Tr}(W))$，其中 $\mathrm{Tr}(W)$ 被视为开子栈 $\mathfrak{M}^{\zeta}\text{-sst }\mathbf{d}\,(Q)\subset\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 上的函数，该开子栈由 ζ-半稳定 $\mathbb{C}Q$-模构成。我们将 $\varphi=\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}^{\zeta}\text{-sst }\mathbf{d}\,(Q)}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d})/2}$（即消失循环的混合霍奇模）视为定义在 $\mathfrak{M}^{\zeta}\text{-sst }\mathbf{d}\,(A)$ 上的混合霍奇模（或简称层）。令 $\mathcal{H}^{\mathrm{crit},\zeta}_{A,\mathbf{d}}:=\mathrm{H}(\mathfrak{M}^{\zeta}\text{-sst }\mathbf{d}\,(A),\varphi)$。对于固定的 $\theta\in\mathbb{Q}$，令 $\Lambda^{\zeta}_{\theta}:=\{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}\setminus\{0\}\mid\mu^{\zeta}(\mathbf{d})=\theta\}\cup\{0\}$。我们定义 $\mathcal{H}^{\mathrm{crit},\zeta}_{A,\theta}=\bigoplus_{\mathbf{d}\in\Lambda^{\zeta}_{\theta}}\mathcal{H}^{\mathrm{crit},\zeta}_{A,\mathbf{d}}$。在 $\mathbb{N}^{Q_0}$-分次混合霍奇结构范畴上，我们考虑如下扭曲的幺半结构，如 [20，第 3 节所述。2]

$$\mathcal{F}\otimes^{\mathrm{tw}}\mathcal{G}:=\bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}}\left(\bigoplus_{\mathbf{d}'+\mathbf{d}''=\mathbf{d}}\mathbb{L}^{\langle\mathbf{d}'',\mathbf{d}'\rangle/2}\otimes\mathcal{F}_{\mathbf{d}'}\otimes\mathcal{G}_{\mathbf{d}''}\right).$$

定理3.9 ([20]定理 B)。存在一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus\mathbb{N}^{Q_0}$分次混合霍奇结构的同构

$$\mathcal{H}^{\mathrm{crit}}_{A}\cong\bigotimes^{\theta}_{\infty\to-\infty}\mathcal{H}^{\mathrm{crit},\zeta}_{A,\theta}. \tag{10}$$

由此可知，如果 ζ' 是另一个稳定性条件，则存在一个同构 $\bigotimes^{\theta}_{\infty\to-\infty}\mathcal{H}^{\mathrm{crit},\zeta}_{A,\theta}\cong\bigotimes^{\theta}_{\infty\to-\infty}\mathcal{H}^{\mathrm{crit},\zeta'}_{A,\theta}$。

由于当我们在稳定性条件空间中穿越墙时，这一结果保持不变，因此我们称之为上同调壁穿越定理。

例 3.10。设 Q是如下的 A_2 箭图：它有两个顶点 0 和 1，以及一个从 a出发、以 $s(a)=0$ 和 $t(a)=1$为终点的箭。设 $A=\mathbb{C}Q$。取 $\zeta^+\in\mathbb{Q}^{Q_0}$，使得 $\zeta^+_0=0$ 且 $\zeta^+_1=1$。唯一的ζ^+-半稳定模是完全支撑在 0 或 1 上的模。如例 3.2 中一样，我们得到$\mathcal{H}^{\zeta^+}_{A,\theta}\cong$对称代数 $(V_\theta\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2})$，其中 $V_\theta=\mathbb{Q}_{(1,0)}$是 $\mathbb{N}^{Q_0}$次数 (1，0) 的一个 $\mathbb{Q}$副本（若 $\theta=0$），$\mathbb{Q}_{(0,1)}$ 是 $\mathbb{N}^{Q_0}$次数 (0，1) 的一个 $\mathbb{Q}$ 副本（若 $\theta=1$），否则为 $V_\theta=0$。

现在考虑 $\zeta^-=-\zeta^+$。ζ^--半稳定模要多得多。将 $\mathbb{C}Q$ 的直和视为 $\mathbb{C}Q$-模时，它们是斜率为 $-1/2$ 的 ζ^--稳定模。我们得到 $\mathcal{H}^{\zeta^-}_{A,\,1/2}\cong$对称代数 $(\mathbb{Q}_{(1,1)}\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2})$。定理3.9中的墙穿越同构为

$$\mathrm{Sym}\left(\mathbb{Q}_{(0,1)}\otimes^{\mathrm{tw}}\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\right)\otimes^{\mathrm{tw}}\mathrm{Sym}\left(\mathbb{Q}_{(1,0)}\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\right)\cong$$
$$\mathrm{Sym}\left(\mathbb{Q}_{(1,0)}\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\right)\otimes^{\mathrm{tw}}\mathrm{Sym}\left(\mathbb{Q}_{(1,1)}\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\right)\otimes^{\mathrm{tw}}\mathrm{Sym}\left(\mathbb{Q}_{(0,1)}\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{1/2}\right)$$

转为生成级数后，这就变成了五边形恒等式 $\mathbb{E}(T^{(0,1)})\mathbb{E}(T^{(1,0)})=\mathbb{E}(T^{(1,0)})\mathbb{E}(T^{(1,1)})\mathbb{E}(T^{(0,1)})$，与量子二重对数（如例 3.2 中所介绍的）相关。在这里，形式变量 $T^{\mathbf{d}}$ 满足关系 $T^{\mathbf{d}'}\cdot T^{\mathbf{d}''}=(-q^{1/2})^{\langle\mathbf{d}'',\,\mathbf{d}'\rangle_Q}T^{\mathbf{d}'+\mathbf{d}''}$，因此由于$Q$的非对称性，它们仅 q-交换。

例 3.11。 取数 l_0，$l_1 \in \{0,1\}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。令 Q 为一个有两个顶点 0，1 的箭图，顶点 i处有 l_i 个环，且有 k 个从 0 指向 1 的箭。对于例 3.10 中的稳定性条件 ζ^+，取式 (10) 右侧的示性函数，可得 $\mathbb{E}((-q^{1/2})^{-l_1}T^{(0,1)})\mathbb{E}((-q^{1/2})^{-l_0}T^{(1,0)})$，即两个广义量子对数函数的乘积。与例 3.10 不同，对于 l_0，l_1，k的一般取值，ζ^- 的相应分解包含无穷多个非平凡项 $\mathbb{E}(f_\theta)$，其中 $\theta \in \mathbb{Q}$ 且 $f_\theta = \sum_{d_1/d_2=\theta} f_{d_1,\,d_2}(q^{1/2})T^{(d_1,d_2)}$。通过将 f_θ的系数识别为精化 BPS不变量的庞加莱多项式，可以证明每个$f_{d_1,\,d_2}(q^{1/2})$都属于 $\mathbb{N}[-q^{1/2}]$；再利用递归散射图技术，便足以证明量子 theta 函数环的结构常数具有正性：参见 [19]。

例 3.11 的一个有趣推广似乎也成立，并且运用相同的散射图技巧，这应当意味着量子 theta 函数具有*Lefschetz* 型性质：参见 [19]。这仍是一个猜想，因为迄今为止，该陈述一直难以有效地转化为 BPS上同调的语言。对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，定义（带符号的）量子数 $[\pm n]_q = (-1)^{n+1}(q^{n/2}-q^{-n/2})/(q^{1/2}-q^{-1/2})$。

猜想 *3.12*（[19] 猜想 *1.4*）。取 $n_1, n_2, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。记 $\mathbb{E}([\pm n_1]_q T^{(0,1)})\mathbb{E}([\pm n_2]_q T^{(1,0)}) = \prod_{\infty \xrightarrow{\theta} -\infty} \mathbb{E}(g_\theta)$，其中 $g_\theta = \sum_{d_1/d_2=\theta} g_{d_1,d_2}(q^{1/2})T^{(d_1,d_2)}$，满足 $TdTd' = (-q^{1/2})^{-\langle \mathbf{d}', \mathbf{d}'' \rangle_Q} T^{d+d'}$，其中 Q 如例 *3.11* 中所述（令 $l_0 = l_1 = 0$）。那么每个 $g_{d_1,d_2}(q^{1/2})$ 都是 $\{[\pm n]_q \mid n \geq 1\}$ 中元素的和。

3.4. 为什么是“整数性”？令 Q为一个箭图，我们假设它是对称的。取一个维数向量 $\mathbf{f} \in \mathbb{N}^{Q_0} \setminus \{0\}$。我们按如下方式构造框架箭图 $Q_{\mathbf{f}}$：令 $(Q_{\mathbf{f}})_0 = Q_0 \cup \{\infty\}$，并令 $(Q_{\mathbf{f}})_1 = Q_1 \cup \{r_{i,n} \mid i \in Q_0, 1 \leq n \leq \mathbf{f}_i\}$。令 $s(r_{i,n}) = \infty$，并令 $t(r_{i,n}) = i$。给定一个势 W，它属于Q，也就是说，它是 Q中循环路径的线性组合；同一个循环路径的线性组合定义了 $Q_{\mathbf{f}}$上的一个势，我们仍将其记为 W。我们选取稳定性条件 ζ，使得对所有 $i \in Q_0$ 和 $\zeta_\infty = 1$，都有 $\zeta_i = 0$。给定维数向量 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $(\mathbf{d}\ n)$，并令 $(\mathbf{d}\ n)_\infty = n$，以此扩展 $\mathbf{d}$。一个 $(\mathbf{d}, 1)$ 维的 $\mathbb{C}Q_{\mathbf{f}}$-模 ρ是 ζ-半稳定的，当且仅当它由一维向量空间 $1_\infty \cdot \rho$作为 $\mathbb{C}Q_{\mathbf{f}}$-模生成。存在一个代数栈同构

$$\mathbb{A}^{\zeta\text{-sst}}_{(\mathbf{d},1)}(Q_{\mathbf{f}})/\operatorname{GL}_{(\mathbf{d},1)} \cong (\mathbb{A}^{\zeta\text{-sst}}_{(\mathbf{d},1)}(Q_{\mathbf{f}})/\operatorname{GL}_{\mathbf{d}})/\mathbb{C}^*$$

其中，$\operatorname{GL}_{\mathbf{d}}$ 通过对每个向量空间 $\mathbb{C}^{\mathbf{d}_i}$ 进行基变换而作用于 $i \in Q_0$，而 $\mathbb{C}^*$ 嵌入为$\operatorname{GL}_{(\mathbf{d},1)}$ 中的对角子群，因此其作用是平凡的。商 $(\mathbb{A}^{\zeta\text{-半稳}}_{(\mathbf{d},1)}(Q_{\mathbf{f}})/\operatorname{GL}_{\mathbf{d}})$ 实际上是一个光滑概形，记作 $\mathcal{M}^{\mathbf{f}\text{-fr}}_{\mathbf{d}}(Q)$。取消失循环上同调，得到一个同构

$$\mathcal{H}^{\zeta}_{Q_{\mathbf{f}},W,(\mathbf{d},1)} \cong \mathbb{M}^{\zeta}_{Q,W}(\mathbf{f},\mathbf{d}) \otimes \mathbb{L}^{1/2} \otimes \mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*, \mathbb{Q}); \qquad \mathbb{M}^{\zeta}_{Q,W}(\mathbf{f},\mathbf{d}) := \mathrm{H}(\mathcal{M}^{\mathbf{f}\text{-fr}}_{\mathbf{d}}(Q), \varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q} \otimes \mathbb{L}^{-d/2})$$

其中 $d = \dim(\mathcal{M}^{\mathbf{f}\text{-fr}}_{\mathbf{d}}(Q))$。由此可得 $\chi_{\mathrm{wt}}(\mathcal{H}^{\zeta}_{Q_{\mathbf{f}},W,(\mathbf{d},1)}) = -\chi_{\mathrm{wt}}(\mathbb{M}^{\zeta}_{Q,W}(\mathbf{f},\mathbf{d}))q^{1/2}(1-q)^{-1}$.

现在改为考虑稳定性条件 $\zeta' = -\zeta$。一个 $\mathbb{C}Q_{\mathbf{f}}$-模是 ζ'-半稳定的，当且仅当它的支撑完全位于 Q，或完全位于 ∞。我们考虑定理3.9中的墙穿越同构，并将其限制到与维数向量 $(\mathbf{d},\ 1) \in \mathbb{N}^{(Q_{\mathbf{f}})_0}$ 对应的那些直和项：

$$\mathcal{H}_{Q,W} \otimes^{\mathrm{tw}} \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}} \mathcal{H}^{\zeta}_{Q_{\mathbf{f}},W,(\mathbf{d},1)} \cong \mathcal{H}_{Q_{\mathbf{f}},W,(0\ldots,0,1)} \otimes^{\mathrm{tw}} \mathcal{H}_{Q,W}$$

其中我们将 $\mathcal{H}_{Q,W,\mathbf{d}}$与 $\mathcal{H}_{Q_{\mathbf{f}},W,(\mathbf{d},0)}$对应起来。注意，$\mathfrak{M}_{(0,\ldots,0,1)}(Q_{\mathbf{f}}) \cong \mathrm{pt}/\mathbb{C}^*$。转而考虑生成函数，并除以 $-q^{1/2}(1-q)^{-1}$，我们得到

$$\chi_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(\overline{\mathbb{M}}^{\zeta}_{Q,W}(\mathbf{f},-)) = T_\infty^{-1}(\chi_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}_{Q,W})^{-1} \cdot T_\infty \cdot \chi_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathcal{H}_{Q,W}))$$

其中我们记 $\mathbb{M}^{\zeta}_{Q,W}(\mathbf{f}) = \bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}} \mathbb{M}^{\zeta}_{Q,W}(\mathbf{fd}) \otimes \mathbb{L}^{-\mathbf{f}\cdot\mathbf{d}/2}$。利用交换关系 $T_\infty \cdot T^{\mathbf{d}} = q^{\mathbf{f}\cdot\mathbf{d}} T^{\mathbf{d}} \cdot T_\infty$ 以及定义精化BPS不变量的假设（），我们得到方程

$$\chi_{\mathrm{wt},\mathbb{N}^{Q_0}}(\overline{\mathbb{M}}^{\zeta}_{Q,W}(\mathbf{f},-)) = \mathbf{Exp}\left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}\setminus\{0\}} -q^{1/2}\Omega^{\mathrm{wt}}_{Q,W,\mathbf{d}}(q^{1/2})(1-q^{-\mathbf{f}\cdot\mathbf{d}})/(1-q)T^{\mathbf{d}}\right).$$

由于每个空间 $\mathcal{M}^{\mathbf{f}\,\mathrm{fr}}_{\mathbf{d}}(Q)$ 都是概形，因此每个空间的消失循环上同调都集中在有界次数上，所以我们可以取欧拉示性数，也就是说，可以在 $q^{1/2}=1$ 处计算生成级数 $\chi_{\mathrm{wt},\,\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathbb{M}^{\zeta}_{Q,\,W}(\mathbf{f}\ -))$。由此得到如下无穷欧拉乘积展开

$$\chi_{\mathbb{N}^{Q_0}}(\overline{\mathbb{M}}^{\zeta}_{Q,W}(\mathbf{f},-)) = \prod_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}\setminus\{0\}} (1-T^{\mathbf{d}})^{\omega_{Q,W,\mathbf{d}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{d}}$$

其中 $\omega_{Q,\,W,\,\mathbf{d}} := \Omega_{Q,\,W,\,\mathbf{d}}(1)$ 是未精化BPS不变量。上述推导给出了如下未精化BPS不变量（亦即唐纳森–托马斯不变量）的定义，该定义避免了使用代数栈：将 $\chi_{\mathbb{N}^{Q_0}}(\mathbb{M}^{\zeta}_{Q,\,W}(\mathbf{f}\ -)) = \prod_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}}(1-T^{\mathbf{d}})^{a_{\mathbf{d}}}$ 写成整数 $a_{\mathbf{d}}$ 的形式，并定义 $\omega_{Q,\,W,\,\mathbf{d}} = a_{\mathbf{d}}/(\mathbf{f}\cdot\mathbf{d})$。显然，通过这种方式定义的未精化BPS不变量是否为整数尚不明确。正如上文所示，这种整性由上调调整性定理蕴含。

在更一般的情形下，基本原理也相同（例如，按照 [65, 34] 中的做法，定义 Calabi–Yau三维簇上半稳定相干层范畴的数值DT不变量）：我们首先通过计算某些模空间概形的修正欧拉示性数来定义配分函数 $\mathcal{Z}(T)$，并将 $\mathcal{Z}(T)$ 表示为无穷乘积；再将适当分数的指数定义为 DT 不变量，其中“适当性”（例如上述例子中除以 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{d}$ ）由与栈模问题相关的墙穿越论证决定。如果栈模问题的精化BPS不变量是劳朗多项式，那么所得分数就是整数。

4. BPS上同调与几何表示论

由于定理 2.2 中同构 Φ 右侧是一个代数的底层空间，自然会让人想知道 $\mathcal{H}_A$ 是否具有有趣的代数结构。答案是肯定的，而且它往往比自由超交换代数有趣得多； Φ 更接近庞加莱–伯克霍夫–维特（PBW）型同构[13]，而非真正的代数同构。为了定义*BPS* 李代数，使其发挥类似于 PBW 定理中李代数 $\mathfrak{g}$ 的作用，我们将深入研究上同调 Hall 代数（CoHA）理论。

4.1. 上同调 Hall 归纳。固定一个带势的箭图 Q W，并定义 $A = \mathrm{Jac}(Q,W)$。与上文一样，我们允许 $W=0$ 的情形，此时存在同构 $A\cong\mathbb{C}Q$。给定维数向量 $\mathbf{d}'$、$\mathbf{d}''\in\mathbb{N}^{Q_0}$，我们令 $\mathbf{d}=\mathbf{d}'+\mathbf{d}''$，并将 $\mathbb{A}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q)\subset\mathbb{A}_{\mathbf{d}}(Q)$ 定义为对应于保持 Q_0- 分次部分旗 $0\subset\bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{C}^{\mathbf{d}'_i}\subset\bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{C}^{\mathbf{d}_i}$ 的 $\mathbf{d}$ 维 $\mathbb{C}Q$-模的子空间。保持同一旗的抛物子群 $\mathrm{GL}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}\subset\mathrm{GL}_{\mathbf{d}}$ 的乘积作用于该子空间。我们令 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q) = \mathbb{A}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q)/\mathrm{GL}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}$，它等价于由维数向量分别为 $\mathbf{d}'$、$\mathbf{d}$、$\mathbf{d}''$ 的 $\mathbb{C}Q$-模组成的短正合列 $0\to\rho'\to\rho\to\rho''\to 0$ 的栈。存在态射 π_1,π_2,π_3，从 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q)$ 到代数栈 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}'}(Q)$、$\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)$ 和 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}''}(Q)$；在点的层面上，它们分别将这样的短正合列映至 ρ'、ρ 或 ρ''。

拉回态射 $(\pi_1\times\pi_3)^\star\colon \mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}'}(Q)\ \mathbb{Q})\otimes\mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}''}(Q)\ \mathbb{Q})\to\mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}',\,\mathbf{d}''}(Q)\ \mathbb{Q})$ 是利用 Künneth 同构和上同调的函子性定义的。拉回态射 $\mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}'}(Q)\ \varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q})\otimes\mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}''}(Q)\ \varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q})\to\mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}',\,\mathbf{d}''}(Q)\ \varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q})$ 以相同的方式定义：此时 Thom–Sebastiani 同构 [47]发挥了 Künneth 同构的作用。推前

[13]这个同构告诉我们，在向量空间层面上，将对称张量代入李代数 $\mathfrak{g}$ 的万有包络代数的态射 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})\to\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 是一个同构。

态射 $\mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q)\ \mathbb{Q})\ \to \mathrm{H}(\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)\ \mathbb{Q})$ 是通过伴随态射的 Verdier 对偶 $\pi_{2,*}\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q)} \otimes \mathbb{L}^{-\dim} \to \mathbb{Q}_{\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)} \otimes \mathbb{L}^{-\dim'}$ 定义的，$\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)} \to \pi_{2,*}\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q)}$，并利用态射 π_2 的射影性。上同调次数/Tate 扭转整体发生跳变，其幅度由 π_2 的源和靶的维数之差 $\dim -\dim'$ 给出。利用消失循环函子沿适当态射的交换性，我们得到态射 $\pi_{2,*}\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q)} \otimes \mathbb{L}^{-\dim} \to \varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(Q)} \otimes \mathbb{L}^{-\dim'}$，再通过取导出整体截面得到消失循环上同调中的推前态射。关于这一构造的详情，请参阅 [46, 10]。

结合上述两种运算，我们得到一个态射

$$\pi_\star \circ (\pi_1 \times \pi_3)^\star \colon \mathcal{H}_{A,\mathbf{d}'} \otimes \mathcal{H}_{A,\mathbf{d}''} \to \mathcal{H}_{A,\mathbf{d}}$$

当 Q 为对称对象时，该态射确实保持上同调次数，此外还是混合霍奇结构之间的态射。对所有$\mathbf{d}'$, $\mathbf{d}'' \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 取直和，我们定义运算$\mathbf{m}$: $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_A$。 [46, 第 7] 节证明，该运算使 $\mathcal{H}_A$ 成为一个结合代数，即 *Kontsevich–Soibelman CoHA*。

注 4.1。 这个代数的额外结构来自行列式线丛。对每个$\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$，栈 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(A)$ 都带有一个典范的秩为 $\sum_{i\in Q_0}\mathbf{d}_i$ 的向量丛 V_{taut}，它由典范族中 $\mathbf{d}$ 维 A-模的底层向量空间给出；我们记其行列式为 $\mathrm{Det} = \wedge^{\mathrm{top}}V_{\mathrm{taut}}$。由此得到一个态射 $\mathfrak{M}_{\mathbf{d}}(A) \to \mathrm{pt}/\mathbb{C}^*$；取上同调后，$\mathbb{Q}[u] = \mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*, \mathbb{Q})$ 便通过导子作用在 $\mathcal{H}_A$ 上。这里，u 通过乘以 $c_1(\mathrm{Det})$ 起作用。用 [8], 的术语来说，Det 提供了一个全局等变参数。

例 4.2. 设 $W = 0$。在这种情况下，$\mathcal{H}_A$ 上的混合霍奇结构是纯的，且为 Tate 型，因此我们忽略它，将 $\mathcal{H}_Q$ 仅视为一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}^{Q_0}$-分次向量空间。随后（对 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}^{Q_0}$-分次向量空间范畴上的通常幺半结构作符号扭转后），[46]证明代数 $\mathcal{H}_Q$ 是一个超交换代数，而例 3.2 和 3.3 中的同构都是代数[14]的同构。

上述构造实际上是 Kinjo、Park 和 Safronov 在 [44] 中构造的上同调 *Hall* 归纳 的一个非常特殊的情形。在 [同上], , 作者展示了如何为 §2.6 中的例子 (1)、(2)、(3) 分别赋予混合霍奇结构 $\mathrm{H}(\mathfrak{M}^{\mathrm{sst}}_{\mathscr{A}}, \varphi_{\mathrm{DT}})$ 一种结合代数结构；他们通过解决这一问题的一个更一般版本来做到这一点：针对 DT 层的上同调 Hall 归纳问题，其中对应图由 Halpern–Leistner 所发展的框架中的分次/滤过点给出。详情见 [44, 26] 。

4.2. **PBW 定理与 BPS 李代数。** 固定一个带势 W 的对称箭图 Q，并令$A = \mathrm{Jac}(Q, W)$。我们按照 §2.5 定义 $\mathcal{H}_A^{\mathrm{crit}}$ 上的余切滤过。$c_1(\mathrm{Det})$ 的作用将$\mathfrak{P}_j\mathcal{H}_A$ 映到 $\mathfrak{P}_{j+2}\mathcal{H}_A$。$\mathbb{Q}[u]$ 作用限制为一个单射态射 $\mathfrak{n}_A^+ \otimes \mathbb{Q}[u] \hookrightarrow \mathcal{H}_A$。

定理 4.3 ([20])。 乘法$\mathbf{m}$保持 $\mathcal{H}_A$上的余切滤过。伴随分次代数$\mathrm{Gr}^{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}_A)$ 是一个自由超交换代数，而由 $\mathcal{H}_A$ 上的代数结构构造的态射对称代数 $\left(\mathfrak{n}_A^+ \otimes \mathbb{Q}[u]\right) \to \mathcal{H}_A$是 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}^{Q_0}$分次混合霍奇结构的同构。

根据定理的第一部分，交换子李括号 $[-,-]$ 在伴随分次代数 $\mathrm{Gr}^{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}_A)$ 中为零，因此，交换子李括号作用于 $\mathfrak{P}_1\mathcal{H}_A \otimes \mathfrak{P}_1\mathcal{H}_A$ 的像属于 $\mathfrak{P}_1\mathcal{H}_A = \mathfrak{n}_A^+$。换言之，混合霍奇结构 $\mathfrak{n}_A^+ \subset \mathcal{H}_A$ 在交换子李括号下封闭；由于它恰好是编码 A-模范畴的精化BPS不变量的子空间，我们称之为*BPS* 李代数。

定理4.3存在一个相对版本。回顾一下，直和态射 $+\colon\ \mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ 使得混合霍奇模（或反常层）的（局部下有界）复形范畴

[14]例 3.4 和 3.4 也是如此：证明这一点是一项很有启发性的练习。提示：证明在这些例子中，下文引入的余切滤过与上同调滤过一致。

sheaves) on $\mathcal{M}_A$ into a 对称张量范畴。然后 $\mathcal{A}_A := \bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}} \mathrm{JH}_{\mathbf{d},\,*}\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}\mathbb{Q}\otimes\mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\,\mathbf{d})/2}$ 是该范畴中的一个代数对象，也就是说，存在一个态射 $\mathcal{A}_A \boxdot \mathcal{A}_A \to \mathcal{A}_A$ 满足结合代数的通常公理。然后，[20, 定理C]表明，定理2.5中的同构可以通过在该代数对象内部求值来实现。根据构造，这个相对PBW定理是“(9)是一个同构”这一陈述的特例。

4.3. 具有零维支撑的层的 CoHA。 令 $Q = Q^{(1)}$ 为例3.3中的 Jordan 箭图 $\tilde{}$ $\tilde{}$。§3.2 中定义的三倍箭图 Q 有三个环 $x,\ x^*,\ \omega$，以及 $W = [x, x^*]\omega$。$\tilde{}$ $\tilde{}$令 $A = \mathrm{Jac}(Q,\ W)$，则有 $A \cong \mathbb{C}[x, x^*, \omega]$。通过维数约化，存在一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}$-分次混合霍奇结构的同构 $\mathcal{H}^{\mathrm{crit}}_{\mathbb{C}[x,x^*,\omega]} \cong \mathcal{H}^{\mathrm{BM}}_{\mathbb{C}[x,x^*]^\wp}$ Schiffmann 和 Vasserot 在 [61], 中为对象 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}[x,x^*]}$ 赋予了 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}$-分次结合代数结构，并且可以证明 [57, 71]，事实上（对符号作一些轻微的扭曲后），维数约化同构将 $\mathcal{H}^{\mathrm{crit}}_{\mathbb{C}[x,x^*,\omega]}$ 上的 Kontsevich–Soibelman 乘积映为 $\mathcal{H}^{\mathrm{BM}}_{\mathbb{C}[x,x^*]}$上的 Schiffmann–Vasserot 乘积。

令 $\mathrm{W}^+_{1+\infty} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(z^m D^a \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, a \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 为所示 $\mathbb{C}^*$ 上微分算子在 $\mathbb{Q}$ 上的张成空间，其中 $D = z(d/dz)$。这是一个李代数，其李括号为 $[z^m D^a, z^n D^b] = z^{m+n}((D+n)^a D^b - D^a(D+m)^b)$。我们通过设定 $F_i W^+_{1+\infty} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(z^m D^a \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, 0 \leq a \leq (i+2)/2)$，为 $\mathrm{W}^+_{1+\infty}$ 赋予一个递增的 $\mathbb{Z}$-滤过。设 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathrm{Gr}_F(W^+_{1+\infty})$。那么，存在一个代数同构 $\mathcal{H}^{\mathrm{crit}}_{\mathbb{C}[x,x^*,\omega]} \cong \mathrm{U}(\hat{\mathfrak{g}})$，因此通过维数约化，存在一个代数同构 $\mathcal{H}^{\mathrm{BM}}_{\mathbb{C}[x,x^*]} \cong \mathrm{U}(\hat{\mathfrak{g}})$。参见 [12]及其中的参考文献，或参见 [51]了解下文的推广。

通过对任意光滑拟射影曲面 S 的构造，可以关联一个 $\mathbb{N}$分次的 CoHA $\mathcal{H}^{\mathrm{BM}}_S$，其中第 n个分量是零维支撑且长度为 n的层的栈的 Borel–Moore 同调。假设 S 的上同调本身是纯的[15]，那么这一 CoHA 已在 [51]中得到完整描述。如果 S 具有平凡典范丛（如 $\mathbb{A}^2$的情形），描述会有所简化：定义李代数 $\mathfrak{w}^+(S) = \hat{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{H}(S,\ \mathbb{Q})$，其李括号为 $[g\otimes x, g'\otimes x'] = [g, g'] \otimes xx'$。于是存在代数同构 $\mathcal{H}^{\mathrm{BM}}_S \cong \mathrm{U}(\mathfrak{w}^+(S))$。如果 ω_S 并非平凡，则 $\mathcal{H}^{\mathrm{BM}}_S$的描述见 [51]；在这种情况下，它是一个变形的万有包络代数。

鉴于这一描述，我们自然会想到 Minets 关于 3-Calabi–Yau簇上零维层的临界上同调霍尔代数的如下猜想（该代数由 Kinjo–Park–Safronov定理 [44]定义）：

猜想4.4。 设 X 为一个拟射影*3-Calabi–Yau*簇。设$\mathrm{W}^+(X)$ 为由符号 $T^+_m(\lambda)$ 生成的代数，其中 $m \in \mathbb{N}$和 $\lambda \in \mathrm{H}(X, \mathbb{Q})$，并满足关系式 $T^+_m(x\lambda) = xT^+_m(\lambda)$，对$x \in \mathbb{Q}$ 和

$$
\begin{aligned}
&[T^+_m(\lambda\mu), T^+_n(\nu)] = [T^+_m(\lambda), T^+_n(\nu\mu)];\\
&[T^+_m(\lambda), T^+_{n+3}(\mu)] - 3[T^+_{m+1}(\lambda), T^+_{n+2}(\mu)] + 3[T^+_{m+2}(\lambda), T^+_{n+1}(\mu)] - [T^+_{m+3}(\lambda), T^+_n(\mu)]\\
&- [T^+_m(\lambda), T^+_{n+1}(c_2(X)\mu)] - [T^+_{m+1}(\lambda), T^+_n(c_2(X)\mu)] + \{T^+_m, T^+_n\}(\Delta_X\lambda\mu) = 0;\\
&\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_3} \pi\cdot[T^+_{m_3}(\lambda_3), [T^+_{m_2}(\lambda_2), T^+_{m_1+1}(\lambda_1)]] = 0
\end{aligned}
$$

其中 $\mathfrak{S}_3$ 是对称代数群，而 $\{T^+_m, T^+_n\}(\Delta_X\lambda\mu)$如 [51,第3节。1]所述。于是 $\mathcal{H}^{\mathrm{crit}}_X \cong \mathrm{W}^+(X$).

我们也可以考虑等变的 CoHA $\mathcal{H}^{\mathrm{crit},\ T}_{\mathbb{A}^3}$，其中 $T \subset (\mathbb{C}^*)^3$ 是保持 Calabi–Yau三形式 $dx\wedge dy\wedge dz$不变的二阶环面。该猜想预言，$\mathcal{H}^{\mathrm{crit},\ T}_{\mathbb{A}^3} \cong \mathcal{Y}^+_{t_1,\ t_2,\ t_3}(\widehat{\mathfrak{gl}\ 1}(\ ))^+$，其中右端是仿射杨代数的正半部。事实确实如此，参见例如 [12]及其中的参考文献。

[15]人们预期可以去掉这一条件，而不改变后续任何陈述。

4.4. 来自稳定带框架表示的模。 我们介绍一类由稳定带框架表示构造的 CoHA 表示。更完整的介绍参见例如 [64] 。

设 Q 是一个箭图，并设 Q^+ 是在 Q 中添加一个新顶点 ∞，以及有限条从 ∞ 到 Q_0、从 Q_0 到 ∞ 的箭后得到的。§3.4 中的配对 $(Q_{\mathbf{f}}, Q)$ 是这一设置的一个特例，其中所有新箭都从 ∞ 指向 Q_0。我们通过令 $\zeta_i = 0$ 对于 $i \in Q_0$ 和 $\zeta_\infty = 1$，来固定稳定性条件 $\zeta \in \mathbb{Q}^{Q_0^+}$。我们按 §3.4 中的方式定义 $(\mathbf{d}\ n) \in \mathbb{N}^{Q_0^+}$。一个维数为 $(\mathbf{d}, 1)$ 的 $\mathbb{C}Q^+$-模 ρ 是 ζ-半稳定的，当且仅当 $\mathbb{C}Q^+ \cdot (1_\infty \cdot \rho) = \rho$，也就是说，$\rho$ 作为 $\mathbb{C}Q^+$-模由向量空间 $1_\infty \cdot \rho$ 生成。若 $\rho \to \rho''$ 是 $\mathbb{C}Q^+$-模之间的一个满射，且 $\dim^{Q_0^+}(\rho) = (\mathbf{d}, 1)$，$\dim^{Q_0^+}(\rho'') = (\mathbf{d}'', 1)$，其中 $\mathbf{d}$、$\mathbf{d}'' \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 为某些数，并且 ρ 是 ζ-半稳定的，那么 ρ'' 也如此。令 $\mathcal{M}^{\zeta\text{-fr}}_{\mathbf{d},\mathbf{d}''}(Q)$ 表示由这类满射与一个平凡化[16] $1_\infty \cdot \rho \cong \mathbb{C}$组成的配对之栈，其中记 $\mathbf{d}' = \mathbf{d} - \mathbf{d}''$。等价地，我们将 $\mathcal{M}^{\zeta\text{-fr}}_{\mathbf{d},\mathbf{d}''}(Q)$ 定义为 $\mathbb{C}Q^+$-模的短正合列之栈

$$0 \to \rho' \to \rho \to \rho'' \to 0$$

维数向量 $(\mathbf{d}', 0), (\mathbf{d}, 1), (\mathbf{d}'', 1)$，分别对应如下情况：$\rho$和 ρ''是 ζ-半稳定的，而 $1_\infty \cdot \rho \cong \mathbb{C}$已平凡化。我们将 $\mathcal{M}^{\zeta\text{-fr}\,\mathbf{d}''}(Q)$定义为由一对对象构成的模叠，其中包括一个 ζ-半稳定的、维数为$(\mathbf{d}'',1)$的$\mathbb{C}Q^+$-模 ρ''，以及一个平凡化 $1_\infty \cdot \rho''$。如§3.4所述，这个栈可以写成整体商$\mathbb{A}^{\zeta\text{-sst}\,(\mathbf{d},1)}/\mathrm{GL}_{\mathbf{d}}$，并且实际上是一个光滑的模概形。我们考虑对应图

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{d}'}(Q) \times \mathcal{M}^{\zeta\text{-fr}}_{\mathbf{d}''}(Q) \xleftarrow{\pi_1 \times \pi_3} \mathcal{M}^{\zeta\text{-fr}}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(Q) \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{M}^{\zeta\text{-fr}}_{\mathbf{d}}(Q)$$

类似于用于定义 Kontsevich–Soibelman 霍尔积的图。我们在定义消失循环上同调的推前时所用到的该图的关键性质是 π_2 是 proper。由于上述关于满射 $\rho \to \rho''$的事实，这里也同样成立。

设 W^+ 是 Q^+的一个势，即 Q^+中循环路径的线性组合。通过舍弃所有并非完全包含在 Q中的循环路径，我们得到 Q的一个势W。我们定义

$$\mathbb{M} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}} \mathrm{H}(\mathcal{M}^{\zeta\text{-fr}}_{\mathbf{d}}(Q), \varphi_{\mathrm{Tr}(W^+)}\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d}) - \mathbf{d}\cdot\mathbf{f}}$$

其中$\mathbf{f}_i$ 是从 ∞ 到 $i \in Q_0$的箭的数量。仿照 Kontsevich– Soibelman CoHA 的构造，复合$\pi_{2,\star} \circ (\pi_1 \times \pi_3)^\star$ 给出一个态射$\mathcal{H}_{Q,W} \otimes \mathbb{M} \to \mathbb{M}$，使 $\mathbb{M}$成为$\mathcal{H}_{Q,W}$上的一个模。

4.5. Nakajima箭图簇。 设 Q为一个箭图，设$\mathbf{f}$ 为一个维数向量，并考虑 $\widetilde{\ }$箭图 $Q_{\mathbf{f}}$，它由 Q按§3.4和§3.2所述先进行框架化再三倍化得到；设 $W_{\mathbf{f}}$ 为该箭图的典范三次势。现在移除环 ω_∞，并将 W^+记为通过从 $W_{\mathbf{f}}$中移除所有经过 ω_∞的循环路径而得到的势-$\widetilde{\ }$。我们考虑$\mathbb{M}_{\mathbf{f},\mathbf{d}}(Q) = \mathrm{H}(\mathcal{M}^{\zeta\text{-fr}\,\mathbf{d}}(\tilde{Q}), \varphi_{\mathrm{Tr}(W^+)}\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{\chi_Q(\mathbf{d},\mathbf{d}) - \mathbf{d}\cdot\mathbf{f}}$如上所述，并注意到 $\tilde{Q}$ 是从 Q^+ 中移除 ∞及其所有关联箭后得到的箭图。

定义 §3.2 中的预投射代数 $\Pi_{Q_{\mathbf{f}}}$，并将 $\mathcal{N}_Q(\mathbf{f}, \mathbf{d}) := \mathcal{M}^{\zeta\text{-半稳定}\,(\mathbf{d},\,1)}(\Pi_{Q_{\mathbf{f}}})$ 记作 ζ-半稳定（$\mathbf{d}$, 1）维模的精细模空间。该模空间是光滑的辛簇，是一个*Nakajima* 箭图簇 [54]的例子。通过维数约化，可得到如下来自 [13, 第 6 节2]的同构：

$$\mathbb{M}_{\mathbf{f},\mathbf{d}}(Q) \cong \mathrm{H}(\mathcal{M}^{\zeta\text{-sst}}_{(\mathbf{d},1)}(\Pi_{Q_{\mathbf{f}}}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{-\dim/2}$$

[16]在将这个栈描述为全局商栈时，纳入这一平凡化的数据，其效果等同于不纳入规范群 $\mathrm{GL}^{(\mathbf{d},1)}$ 中在顶点 ∞ 处通过基变换起作用的分量 $\mathbb{C}^*$。请与 §3.4 中模空间概形 的构造进行比较。

其中，dim 是光滑簇 $\mathcal{M}^{\zeta\text{-半稳定}}(\mathbf{d},\,1)(\Pi_{Q_{\mathbf{f}}})$ 的维数。注意，将 W^{+}限制到 $\tilde{Q}$上所得的正是 §3.2 中定义的典范三次势。因此，作为 §4.4 所述构造的特例，我们得到 Nakajima 箭图簇的上同调构成 CoHA $\mathcal{H}_{\tilde{Q},\,\tilde{W}}$上的模；也就是说，对于每个$\mathbf{f}\in\mathbb{N}^{Q_0}$，直和 $\mathbb{M}_{\mathbf{f}}(Q):=\bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}}\mathbb{M}_{\mathbf{f},\,\mathbf{d}}(Q)$ 构成 CoHA $\mathcal{H}_{\tilde{Q},\,\tilde{W}}$上的一个模。

5. 2-Calabi–Yau范畴的BPS上同调

设 $\mathscr{C}$ 是一个2-Calabi–Yau范畴。我们还假设已为这个微分分次范畴选定一个阿贝尔心 $\mathscr{A}$。为了能够定义一个良模空间 $p\colon\ \mathfrak{M}_{\mathscr{A}}^{\text{-sst}}\to\mathcal{M}_{\mathscr{A}}$（按 [1]的意义），我们还将研究范围限定在由半稳定对象构成的一个阿贝尔子范畴 $\mathscr{A}^{\text{-sst}}$ 内。关于下文定理5.1的确切适用范围，我们暂且请读者参见 [18], ；这里先列举几个例子。

(1) 设 Q 是一个箭图[17], ，并定义 $\mathscr{A}=\Pi_Q$-模为 Π_Q上的有限维模范畴。我们可以将范围限定在斜率固定的半稳定模子范畴内，也可以考虑所有模。(2) 设 C 是一条光滑射影曲线，并设 $\mathscr{A}^{\text{-sst}}=\mathcal{H}$iggs$_{\theta}^{\text{-sst}}(C)$为 C上斜率 $\theta\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ 固定的半稳定Higgs层范畴。(3) 设 Σ_g 是一条亏格为 g 的黎曼曲线，并设 $\mathscr{A}$为有限维 $\mathbb{C}[\pi_1(\Sigma_g)]$-模范畴。我们选取平凡的稳定性条件：所有模均为半稳定模，稳定模则是简单模。(4) 设 S 是一个K3曲面或阿贝尔曲面。令 $\mathscr{A}$ =Coh(S)。取 S的一个极化 H，以及一个次数至多为2的首一多项式 $p(t)\in\mathbb{Q}[t]$ 。 $\mathscr{A}^{\text{-sst}}$ 中的对象是归一化希尔伯特多项式等于 $p(t)$的Gieseker半稳定对象。

我们定义 $N^{+}=\mathrm{K}^{\mathrm{eff}}(\mathscr{A})$，即 $\mathscr{A}$ 的数值Grothendieck群中有效类构成的半群，并令 N 为 $\mathscr{A}$ 的数值Grothendieck群，配备对称双线性型 $\chi(-,-)$，其由 Euler配对 $\chi(x,y)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\dim(\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{C}}(x,y))$ 给出。在例子 $\mathscr{A}=\Pi_Q$-mod 中，我们有 $N^{+}=\mathbb{N}^{Q_0}$, $N=\mathbb{Z}^{Q_0}$ 和 $\chi(x,y)=(\dim_{Q_0}(x),\dim_{Q_0}(y))_Q$。若 $\alpha\in N^{+}$ 我们分别以 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A},\alpha}^{\text{-sst}}$ 和 $\mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha}$ 表示 $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}^{\text{-sst}}$ 与 $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}$ 中相应连通分支的并。

我们定义 $\mathcal{H}_{\mathscr{A}}:=\bigoplus_{\alpha\in N^{+}}\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(\mathfrak{M}_{\mathscr{A},\,\alpha}^{\text{-sst}},\,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{L}^{\mathrm{vdim}/2}$。存在一种统一的构造，可将 $\mathcal{H}_{\mathscr{A}}$ 赋予结合的 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus N^{+}$-分次代数结构；参见 [61, 60, 9, 38]。对于范畴 $\mathscr{A}=\Pi_Q$-mod，这就是 §4 中所考虑代数的维数约化。

我们将 $\Sigma_{\mathscr{A}}^{+}$ 定义为 本原正根的集合，即使简单对象的子簇$\mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha}^{\mathrm{simp}}\subset\mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha}$非空的那些 α 的集合。注意，在归一化希尔伯特多项式固定的半稳定相干层范畴中，或在斜率固定的半稳定 Higgs 丛范畴中，简单对象恰好就是稳定对象。根据 $\dim(\mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha}^{\mathrm{simp}})=0,2,d>2$，这些根分别称为实根、各向同性根或双曲根。我们将简单正根 $\Phi_{\mathscr{A}}^{+}$定义为 $\Sigma_{\mathscr{A}}^{+}$与所有各向同性根的倍数之并。在 $\mathscr{A}=\Pi_Q$-模的情形下，我们有 $N=\mathbb{N}^{Q_0}$，欧拉形式 $\chi(-,-)$ 可识别为 $(-,-)_Q$，而各种根的定义都变成纯粹的组合定义 [18, 第 5 节1]。对于更一般的 2-Calabi–Yau 范畴，这种更抽象的定义之所以合理，一个原因是它们在局部都“看起来像” Π_Q-模范畴：见 [15]。

5.1. 广义 Kac–Moody（GKM）李代数。我们选取上述 2CY 范畴之一，并继续设 $N^{+}=\mathrm{K}^{\mathrm{eff}}(\mathscr{A})$。令 V为一个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus N^{+}$-分次向量空间。我们假设，当 α 是一个实简单根时，$V_\alpha=\mathbb{Q}$（集中在上同调次数零），而对于 $\alpha\notin\Phi_{\mathscr{A}}^{+}$， $V_\alpha=0$。设 $\mathfrak{h}=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$，并赋予其 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}}\oplus N$-次数 $(0,0)$。我们将 $\mathfrak{g}_V$定义为由 $V\oplus\mathfrak{h}\oplus V^{\vee}$ 生成、模去以下关系后的自由李代数

- $[h,h']=0$ for $h,h'\in\mathfrak{h}$.

[17]如果 Q 是 Dynkin 型，就需要格外小心。在这种情况下，选取 $\mathscr{C}$ 为由 导出 预投射代数上的模构成的微分分次范畴。但无论哪种 情况，阿贝尔心 $\mathscr{A}$ 都是由通常的预投射代数上的模构成的通常范畴。

- $[h,g]=\chi(h,\alpha)g$ 对于 $\alpha\in N$ 成立；若 $g\in(V\oplus V^\vee)_\alpha$ 且 $h\in\mathfrak{h}$，则
- $[v,v']=v'(v)\alpha\in\mathfrak{h}$ 关于 $v\in V_\alpha$ 和 $v'\in V^\vee$。
- （Serre关系）：$[g,-]^{1-(\alpha,\alpha')_Q}(g')=0$ 若 $(\alpha,\alpha')_Q=0$ 或 α 是实简单根。

存在一个三角分解 $\mathfrak{g}_V=\mathfrak{n}_V^-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_V^+$，其中 $\mathfrak{n}_V^\pm$ 的 N-度为 $\pm N^+\setminus\{0\}$。注意，$\mathfrak{n}_V^-$ 和 $\mathfrak{n}_V^+$ 是分别由 $V^\vee$（以及 V）生成、且仅受 Serre关系约束的自由李代数。GKM 李代数自然出现在与带环箭图相关的晶体图理论中；参见 [37, 6, 30]。

Perv($\mathcal{M}_{\mathscr{A}}$)上的卷积张量积使其成为一个 N^+分次张量范畴，这意味着每个对象 $\mathcal{F}$ 都可分解为直和 $\mathcal{F}=\bigoplus_{\alpha\in N^+}\mathcal{F}_\alpha$，且 $(\mathcal{F}\boxdot\mathcal{G})_\alpha=\bigoplus_{\alpha'+\alpha''=\alpha}\mathcal{F}_{\alpha'}\boxdot\mathcal{G}_{\alpha''}$。尽管相对于 N分次不存在负分次对象，我们仍可在此范畴中定义李代数对象 $\mathfrak{n}_V^+$ 的类似物。我们不从 V出发，而是先取一个层 $\mathcal{G}\in\mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\mathscr{A}})$，使其满足性质：若 α 是单根，则 $\mathcal{G}_\alpha=\mathbb{Q}_{\mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha}}$（注意，这意味着 $\mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha}\cong\mathrm{pt}$），并且若 $\alpha\notin\Phi^+_{\mathscr{A}}$，则 $\mathcal{G}_\alpha=0$。我们将 $\mathfrak{n}^+_{\mathcal{G}}$ 定义为 Perv($\mathcal{M}_{\mathscr{A}}$)这一对称张量范畴中满足上述 Serre关系的自由李代数对象；构造细节见 [18, 第3节5]。

若令 $V=\mathrm{H}(\mathcal{M}_{\mathscr{A}},\mathcal{G})$，则存在一个同构 $\mathrm{H}(\mathcal{M}_{\mathscr{A}},\mathfrak{n}^+_{\mathcal{G}})\cong\mathfrak{n}^+_V$。特别地，$\mathfrak{n}^+_{\mathcal{G}}$ 的导出整体截面带有李代数结构，并且存在一个自然的李代数嵌入 $\mathrm{H}(\mathcal{M}_{\mathscr{A}},\mathfrak{n}^+_{\mathcal{G}})\hookrightarrow\mathfrak{g}_V$，将其嵌入一个双李代数中，而该双李代数是一个 GKM 李代数。

5.2. **2-Calabi–Yau 范畴的BPS李代数**。

定理 **5.1 定理** ([18])。设 $\mathscr{C}$、$\mathscr{A}$、$\mathscr{A}$-稳定 如 *§5* 开头所述。我们定义 $\mathcal{G}$ 如下

$$\mathcal{G}_\alpha=\begin{cases}\mathcal{IC}_{\mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha}} & \text{if there exists a simple object in } \mathscr{A}\text{-sst of class } \alpha\\ +_{n,*}\mathcal{IC}_{\mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha'}} & \text{if } \alpha=n\alpha' \text{ with } \alpha'\in\Sigma^+_{\mathscr{A}} \text{ isotropic}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中 $+_n\colon\ \mathcal{M}_{\mathscr{A},\alpha'}\to\mathcal{M}_{\mathscr{A},n\alpha'}$ 是将 x 映到 $x^{\oplus n}$的态射。于是存在一个 *PBW* 同构

$$\Phi\colon\mathrm{Sym}_{\boxdot}\left(\mathfrak{n}^+_{\mathcal{G}}\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\right)\to\bigoplus_{\alpha\in N^+}p_*\mathbb{D}\mathbb{Q}_{\mathfrak{M}_{\mathscr{A},\alpha}}\otimes\mathbb{L}^{\mathrm{vdim}/2}$$

对 Φ 取整体截面后，我们推得 $\mathcal{H}_{\mathscr{A}}$ 满足上同调整性：存在 *PBW* 同构 对称代数 $\left(\mathfrak{n}^+_V\otimes\mathrm{H}(\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*,\mathbb{Q})\right)\to\mathcal{H}_{\mathscr{A}}$，其中 *BPS*上同调由 $\mathfrak{n}^+_V\otimes\mathbb{L}^{-1/2}$给出。

由此可知，BPS 李代数 $\mathfrak{n}^+_V$ 是某个 GKM 李代数的正半部，我们将其记作$\mathfrak{g}_{\mathscr{A}}$。

5.3. **Maulik–Okounkov 杨量**。我们将注意力限制在 Π_Q-模上。与 §4.3 一样，我们考虑一种等变理论：考虑 $T=(\mathbb{C}^*)^2$ 对 Π_Q 的作用，其中第一个 $\mathbb{C}^*$ 因子对所有箭 $a\in Q_1$ 进行缩放，第二个因子对所有箭 a^*进行缩放。我们记 $\mathrm{H}_T:=\mathrm{H}(\mathrm{pt}/T,\mathbb{Q})$。与 §4.3 一样，我们考虑等变 CoHA $\mathcal{H}^T_{\Pi_Q}$。定义 $\mathbb{M}^T_{\mathbf{f},\mathbf{d}}$ 为 Nakajima 箭图簇 $\mathcal{N}_Q(\mathbf{f},\mathbf{d})$ 的 T- 等变上同调。与 §4.5 一样，直和 $\mathbb{M}^T_{\mathbf{f}}(Q)\cong\bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}}\mathbb{M}^T_{\mathbf{f},\mathbf{d}}(Q)$ 构成等变 CoHA $\mathcal{H}^T_{\Pi_Q}$ 上的模。可以将 Nakajima [55]、Grojnowski [25] 和 Varagnolo [70] 研究的 Nakajima 箭图簇上同调上的升算子，与 $\mathcal{H}^T_{\Pi_Q}$中显式元素的作用对应起来；不过，对于一般的 Q，代数 $\mathcal{H}^T_{\Pi_Q}$ 中除了这些升算子之外，还包含许多其他升算子。

在 [48] Maulik 和 Okounkov 定义了一种新的杨量型代数 $\mathcal{Y}^{\mathtt{MO}}_Q$，它通过稳定包络理论及由此得到的 R 矩阵，在每个 $\mathbb{M}^T_{\mathbf{f}}(Q)$ 上以升算子（和降算子）的形式作用。与简单李代数对应的杨算子代数的情形相同，存在一个 PBW 型同构 $\Phi:\mathrm{Sym}^{\mathrm{H}_T}(\mathfrak{g}^{\mathtt{MO}}_Q\otimes\mathbb{Q}[u])\cong\mathcal{Y}^{\mathtt{MO}}_Q$。这里 $\mathfrak{g}^{\mathtt{MO}}_Q$是一个（自由）$\mathrm{H}_T$-模，因此 $\mathfrak{g}^{\mathtt{MO}}\otimes\mathbb{Q}[u]$ 具有 H_T-模结构，而 Φ 的定义域是由该模生成的自由代数对象（位于张量范畴中，

其对象为 H_T-模，张量结构为 $\otimes_{\mathrm{H}_T}$）。与（广义）Kac–Moody李代数类似，存在三角分解 $\mathfrak{g}_Q^{\mathrm{MO}} \cong \mathfrak{n}^{\mathrm{MO},\,Q^-} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^{\mathrm{MO},\,Q^+}$。我们将 $\mathcal{Y}^{\mathrm{MO},\,Q^+}$ 定义为 $\mathrm{Sym}^{\mathrm{H}_T}(\mathfrak{n}^{\mathrm{MO},\,Q^+} \otimes \mathbb{Q}[u])$ 在 Φ下的像。它是 $\mathcal{Y}_Q^{\mathrm{MO}}$的一个子代数。

在 [5] 中，我们证明了存在一个同构 $\psi\colon \mathfrak{g}_{\Pi_Q}^T\text{-模} \cong \mathfrak{g}^{T,\,Q^{\mathrm{MO}}}$。由 [18,推论 11.9] 可知，$\mathfrak{g}^{T,\,Q^{\mathrm{MO}}}$ 实际上可以定义在 $\mathbb{Q}$上：存在一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的李代数 $\mathfrak{g}_Q^{\mathrm{MO}}$，以及李代数同构 $\mathfrak{g}^{T,\,Q^{\mathrm{MO}}} \cong \mathfrak{g}_Q^{\mathrm{MO}} \otimes \mathrm{H}_T$，其中 $[g\otimes\lambda, g'\otimes\lambda'] = [g,g']\otimes\lambda\lambda'$。此外，由第 5.2 节我们得到了 $\mathfrak{g}_Q^{\mathrm{MO}}$作为 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{Z}^{Q_0}$-分次 GKM 代数的完整描述。由定理 3.8，我们推导出以下等式，该等式由 Okounkov 猜想，并由 [62]独立证明：$\mathrm{p}(\mathfrak{g}_Q^{\mathrm{MO}},\,\mathfrak{d}) = \mathfrak{a}_{Q,\,\mathfrak{d}}(q^{-1})$。此外，$\Psi$ 延拓为一个同构 $\mathcal{H}_{\Pi_Q}^T \cong \mathcal{Y}^{\mathrm{MO},\,Q^+}$ [5, 62]，因此我们可以通过对 $\mathcal{H}_{\Pi_Q}^T$的完整描述来完整描述杨氏量子群。对于循环箭图的情形，Jindal [33]完成了这一策略。

5.4. 非阿贝尔霍奇同构。 固定一个光滑射影曲线 C，并令 Σ_g 为其底层黎曼曲面。首先，我们考虑斜率为 $\theta = 0$的半稳定 Higgs 丛；为了处理其他斜率，在非阿贝尔霍奇对应的 Betti 侧，应考虑 $\pi_1(\Sigma_g)$的扭曲表示，即穿孔黎曼曲面 $\Sigma_g \setminus \{p\}$ 的表示，其中绕 p 的单值是乘以预先指定的单位根。我们将秩为 r、次数为 d 的半稳定 Higgs 丛的模叠记为 $\mathfrak{M}_{r\,d}^{\mathrm{Dol}}$，将粗模空间记为 $\mathcal{M}_{r\,d}^{\mathrm{Dol}}$，并将 r维 $\pi_1(\Sigma_g)$-表示的模叠和粗模空间分别记为 $\mathfrak{M}_r^{\mathrm{Betti}}$和 $\mathcal{M}_r^{\mathrm{Betti}}$。

我们记 $\mathcal{H}^{\mathrm{Betti}} = \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(\mathfrak{M}_\bullet^{\mathrm{Betti}},\ \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{\mathrm{vdim}/2}$和 $\mathcal{H}^{\mathrm{Dol}} = \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}(\mathfrak{M}_{\bullet\,0}^{\mathrm{Dol}},\ \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{L}^{\mathrm{vdim}/2}$。根据定理 5.1，这两个 $\mathbb{Z}_{\mathrm{coh}} \oplus \mathbb{N}$-分次向量空间分别由 $\mathcal{M}^{\mathrm{Betti}}$ 和$\mathcal{M}^{\mathrm{Dol}}$ 的交叉上同调决定。通过经典的非阿贝尔霍奇对应，这些空间彼此同胚，因此可得一个分次向量空间的同构 [17]： $\mathcal{H}^{\mathrm{Betti}} \cong \mathcal{H}^{\mathrm{Dol}}$ （参见 [29]，其中将其提升为代数同构）。

这个同构不能提升为混合霍奇结构的同构。χ无关性定理 [43] 指出，视为滤过向量空间，并采用相对于希钦系统基底上的直接像、通过偏斜滤过函子定义的滤过时，存在一个同构 $\mathrm{BPS}_r^{\mathrm{Dol}} \cong \mathrm{H}(\mathcal{M}_{r\,1}^{\mathrm{Dol}},\ \mathbb{Q})[-2(1-g)r^2]$。由此可得按上同调次数分级的向量空间之间存在同构 $\mathrm{BPS}_r^{\mathrm{Betti}} \cong \mathrm{H}(\mathcal{M}^{\mathrm{Betti},\,r\ \ \mathrm{tw}},\ \mathbb{Q})[-2(1-g)r^2]$，其中目标空间是扭曲特征簇的上同调。该上同调构成 P=W 猜想的一侧，该猜想将此上同调与 $\mathcal{M}_{r\,1}^{\mathrm{Dol}}$ 的上同调联系起来。P=W 猜想如今已成为定理 [28, 49, 32]。综合以上结果，自然可以提出如下内容：

猜想5.2。 Λ 将 $\mathcal{H}^{\mathrm{Betti}}$ 上的权滤过映射为 $\mathcal{H}^{\mathrm{Dol}}$上的（加倍）余切滤过。

关于 $\mathcal{H}^{\mathrm{Dol}}$上余切滤过的精确定义、猜想的具体形式，以及与 de Cataldo 和 Maulik 的 PI=WI 猜想之间的关系，请参阅 [14] [21]。

6. 对象模栈之外的BPS上同调

许多值得关注的代数栈并非线性范畴中对象的模叠。例如，设 M是一个无边界的实定向闭三维流形，并考虑连通约化群 G （不等于 GL_n）的 G-局部系统栈 $\mathfrak{M}_G(M)$。根据 [56], ，该栈具有(-1)-移位辛结构；根据 [53] ，它带有定向数据，因此我们可以像 §2.6 中那样定义 DT层 φ_{DT}。如何为 $\mathfrak{M}_G(M)$定义 BPS层或整性，目前并不显而易见。例如，如果G 是半单的，那么 $p_*\varphi_{\mathrm{DT}}$ 分解为上同调平移的混合霍奇模时，从次数零开始，而不是从一开始，其中 $p\colon \mathfrak{M}_G(M) \to \mathcal{M}_G(M)$ 是良好模空间态射。

尽管如此，仍然存在适用于该栈的一个版本的 BPS上同调与整性定理，它是关于(-1)-移位叠的一般整性定理的特例；所有细节以及关于(0)-移位叠和光滑叠的类似结果，请参阅 [8, 31]。对于有限型（定向的）(-1)-移位辛栈 $\mathfrak{M}$，若其良模空间为 $p\colon \mathfrak{M}\to\mathcal{M}$，命题 2.4 的对应版本如下：

命题 6.1 ([8] 命题 7.2.9)。 **</style}在上的无界混合霍奇模复形的导出范畴中，存在一个同构 crk(**$\mathfrak{M}$) $\mathcal{H}^i\left(p_*\varphi_{\mathtt{DT}}\right)[-i]$。

这里，crk($\mathfrak{M}$) 是最大的 r，使得存在一个 pt $/T$ 对 $\mathfrak{M}$ 的作用，其中 T 是一个秩为 r 的环面，且该作用不能经由一个秩更低的 pt $/T'$ 对 T' 的作用分解。该命题引出了以下定义

$$\mathcal{BPS}_{\mathfrak{M}}:=\mathcal{H}^0(p_*\varphi_{\mathtt{DT}}\otimes\mathbb{L}^{-\mathrm{crk}(\mathfrak{M})/2});\qquad \mathtt{BPS}_{\mathfrak{M}}:=\mathrm{H}(\mathcal{M},\mathcal{BPS}_{\mathfrak{M}}).$$

记 $c_G=$crk($\mathfrak{M}_G(M)$)。那么， $\mathfrak{M}_G(M)$ 的上同调整性同构表明，存在一个同构 $\bigoplus_{L\subset G}\left(\mathtt{BPS}_{\mathfrak{M}_L(M)}\otimes\mathbb{L}^{c_L/2}\otimes\mathrm{H}(\text{pt }/(\mathbb{C}^*)^{c_L},\mathbb{Q})\right)^{W_L}\cong\mathrm{H}(\mathfrak{M}_G(M)\ \varphi_{\mathtt{DT}})$，其中$W_L$ 是 L的相对韦伊群，而求和遍历 G的列维子群的共轭类。详情请参见 [8, 第 10 节3] 。该同构的存在性首先在 $\mathfrak{M}_G(M)$的切权满足某种正交性假设的条件下于 [8]中得到证明，随后在 [31]中证明了无需该假设也成立。

我们预期，对三维流形上局部系统代数栈的 BPS上同调的研究，将为定义和理解低维拓扑中的计数不变量提供强有力的工具。例如，最后我们以 Pavel Safronov 提出的以下猜想作结，它将贝蒂朗兰兹对偶与对这种广义 BPS上同调的研究联系起来：

猜想 6.2. 对于（G、 $G^\vee$）朗兰兹对偶群，存在一个同构$\mathtt{BPS}_{\mathfrak{M}_G}(M)\cong\mathtt{BPS}_{\mathfrak{M}_{G^\vee}}(M)$。

对于 $M=(S^1)^3$，Kaubrys [40] 证明了当 $G=\mathrm{SL}_p$ 且 p 为素数时的猜想；Hennecart 和 Kinjo 即将发表的工作则证明了更多朗兰兹对偶群对的情形。

ACKNOWLEDGMENTS.

撰写本文期间，我获得了英国皇家学会大学研究奖学金（编号 221040）的资助。

多年来，许多人在这一主题上的启发性工作、交流与合作都让我受益良多，我谨此致谢。他们包括 Tommaso Botta、Tom Bridgeland、Jim Bryan、Chenjing Bu、Francesca Carocci、Kevin Costello、Tudor Dimofte、Camilla Felisetti、Ezra Getzler、Victor Ginzburg、Tamás Hausel、Lucien Hennecart、Victoria Hoskins、Andrés Ibáñez Núñez、Shivang Jindal、David ̆Jordan、Dominic Joyce、Sar ̄unasKaubrys、Bernhard Keller、Tasuki Kinjo、Maxim Kontsevich、Kentaro Nagao、Naoki Koseki、Travis Mandel、Davesh Maulik、Mirko Mauri、Michael McBreen、Anton Mellit、Sven Meinhardt、Sasha Minets、Andrei Neguţ、Andrei Okounkov、Tudor Pădurariu、Andrea Ricolfi、Pavel Safronov、Francesco Sala、Olivier Schiffmann、Sebastian Schlegel Mejia、Junliang Shen、Vivek Shende、Yan Soibelman、Balázs Szendrői、Richard Thomas、Yukinobu Toda、Okke van Garderen、Michel van Garrel、Eric Vasserot、Michael Wemyss 和 Dimitri Wyss。

参考文献

[1] J. ALPER，*Artin* 代数栈的良模空间，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，63（2013年），第2349–2402页。[2] K. Behrend、J. Bryan 和 B. Szendrői，动机零次唐纳森–托马斯不变量，《数学发明》，192（2013年），第111–160页。[3] A. Beilinson、J. Bernstein、P. Deligne 和 O. Gabber，反常层，Astérisque，（2018年），第vi页+180。[4] O. Ben-Bassat、C. Brav、V. Bussi 和 D. Joyce，关于导出 *Artin* 范畴栈上移位辛结构的“达布定理”及其应用，《几何与拓扑》，19（2015年），第1287–1359页。[5] T. M. Botta 和 B. Davison，通过 *BPS* 李代数验证 *Okounkov* 猜想。http://arxiv.org/abs/231214008，2023年。。

[6] *T. Bozec*，带环箭图与广义晶体，组合数学，*152*（*2016*年），第*1999–2040*页。[7] *C. Brav* 和 *T. Dyckerhoff*，相对卡拉比-丘结构，组合数学，*155*（*2019*年），第*372–412*页。[8] *C. Bu*、*B. Davison*、*A. Ibáñez Núñez*、*T. Kinjo* 和 *T. Pădurariu*，对称栈的上同调。*http://arxiv.org/abs/2502.04253*，*2025*年。[9] *B. Davison*，上同调 *Hall* 代数与特征簇，*Internat. J. Math.*，*27*（*2016*年），第*1640003*页，共*18*页。[10] *B. Davison*，带势箭图的临界上同调霍尔代数，*Q. J. Math.*，*68*（*2017*年），第*635–703*页。[11] *B. Davison*，量子簇代数的正性，数学年刊（*2*），*187*（*2018*年），第*157–219*页。[12] *B. Davison*，仿射*BPS*代数、*W*代数与 $\mathbb{A}^2$的上同调 *Hall* 代数。*http://arxiv.org/abs/2209.05971*，*2022*年。[13] *B. Davison*，整性猜想与预射影栈的上同调，纯粹与应用数学杂志，*804*（*2023* 年），第 *105–154* 页。[14] *B. Davison*，栈上的非阿贝尔霍奇理论与栈化 $P=W$ 猜想，*Adv. Math.*，*415*（*2023*年），论文编号*108889*，共*61*页。[15] *B. Davison*，纯性与*2*-卡拉比-丘范畴，《数学发明》，*238*（*2024*年），第*69–173*页。[16] *B. Davison*，翻转曲线的精化不变量与有限维雅可比代数，代数几何，*11*（*2024*年），第*757–795*页。[17] *B. Davison*、*L. Hennecart* 和 *S. Schlegel Mejia*，全负*2*-卡拉比-丘范畴的*BPS*李代数及栈上的非阿贝尔霍奇理论。*http://arxiv.org/abs/2212.07668*，*2022*年。[18] *B. Davison*、*L. Hennecart* 和 *S. Schlegel Mejia*，来自*2-Calabi–Yau*范畴的*BPS*代数与广义卡茨–穆迪代数。*http://arxiv.org/abs/2303.12592*，*2024*年。[19] *B. Davison* 和 *T. Mandel*，量子簇代数量子 *theta* 基的强正性，《数学发明》，*226*（*2021*年），第*725–843*页。[20] *B. Davison* 和 *S. Meinhardt*，带势箭图的上同调 *Donaldson-Thomas* 理论与量子包络代数，《数学发明》，*221*（*2020*年），第*777–871*页。[21] *M. A. A. de Cataldo* 和 *D. Maulik*，希钦纤维化的余切滤过是局部常值的，*Pure Appl. Math. Q.*，*16*（*2020*年），第*1441–1464*页。[22] *W. Donovan* 和 *M. Wemyss*，非交换变形与翻转，*Duke Math. J.*，*165*（*2016*年），第*1397–1474*页。[23] *A. I. Efimov*，对称箭图的上同调 *Hall* 代数，组合数学，*148*（*2012*年），第*1133–1146*页。[24] *V. Ginzburg*，卡拉比–丘代数。*http://arxiv.org/abs/0612139*，*2006*年。[25] *I. Grojnowski*，瞬子与仿射代数。*I.* 希尔伯特概形与顶点算子，*Math. Res. Lett.*，*3*（*1996*年），第*275–291*页。[26] *D. Halpern-Leistner*，论模空间理论中不稳定性的结构。*http://arxiv.org/abs/1411.0627*，*2014*年。[27] *T. Hausel*、*E. Letellier* 和 *F. Rodriguez-Villegas*，*Kac* 多项式与箭图*DT*不变量的正性，数学年刊（*2*），*177*（*2013*年），第*1147–1168*页。[28] *T. Hausel*、*A. Mellit*、*A. Minets* 和 *O. Schiffmann*，$P=W$ $\mathcal{H}_2$ 2209 05429, *via* 。2022 *http://arxiv.org/abs/* 。。[29] *L. Hennecart*，栈的非阿贝尔霍奇同构与上同调 *Hall* 代数。*http://arxiv.org/abs/2307.09920*，*2023*年。[30] *L. Hennecart*，箭图幺幂包络代数的几何实现，*Adv. Math.*，*441*（*2024*年），论文编号*109536*，共*59*页。[31] *L. Hennecart* 和 *T. Kinjo*，对称栈的强上同调整性。*http://arxiv.org/abs/2509.21298*，*2025*年。[32] *V. Hoskins*，两种证明 $P=W$ 猜想 /（依据 *Maulik-Shen* 和 *Hausel-Mellit-Minets-Schiffmann*）/，*Astérisque*，（*2024*年），第*1213*号报告，第*127–201*页。[33] *S. Jindal*，循环箭图的*CoHA*与仿射杨代数的整形式。*http://arxiv.org/abs/2408 02618*，*2024*年。。[34] *D. Joyce* 和 *Y. Song*，广义唐纳森-托马斯不变量理论，*Mem. Amer. Math. Soc.*，*217*（*2012*年），第*iv*页+199。[35] *D. Joyce* 和 *M. Upmeier*，*Calabi-Yau* 三维簇上相干层模空间的定向数据，*Adv. Math.*，*381*（*2021*年），论文编号*107627*，共*47*页。[36] *V. G. Kac*，根系、箭图表示与不变量理论，载于《不变量理论》（蒙特卡蒂尼，*1982*年），《数学讲义》*996*卷，*Springer*，柏林，*1983*年，第*74–108*页。[37] *S.-J. Kang*、*M. Kashiwara* 和 *O. Schiffmann*，量子广义卡茨-穆迪代数晶体基的几何构造，*Adv. Math.*，*222*（*2009*年），第*996–1015*页。[38] *M. Kapranov* 和 *E. Vasserot*，曲面上同调 *Hall* 代数与因子化上同调，*J. Eur. Math. Soc.*（*JEMS*），*25*（*2023* 年），第*4221–4289*页。

[39] *S. Katz*，《可缩曲线的属零 *Gopakumar-Vafa* 不变量》，微分几何杂志，*79*（*2008*），第 *185–195* 页。[40] *S. Kaubrys*，《三维环面上局部系统的上同调 *Donaldson-Thomas* 理论》。*http://arxiv.org/abs/ 2409.16013*，*2024*年。[41] *T. Kinjo*，《上同调 *Donaldson-Thomas* 理论中的维数约化》，组合数学，*158*（*2022*），第 *123–167* 页。[42] *T. Kinjo*，《良好模空间态射的分解定理》。*http://arxiv.org/abs/2407.06160*，*2024*年。[43] *T. Kinjo* 和 *N. Koseki*，《希格斯丛的上同调 χ-独立性与 *Gopakumar–Vafa* 不变量》。*http://arxiv.org/abs/2112.10053*，*2021*年。[44] *T. Kinjo*、*H. Park* 和 *P. Safronov*，《三维 *Calabi-Yau* 范畴的上同调 *Hall* 代数》。*http://arxiv. org/abs/2406.12838*，*2024*年。[45] *M. Kontsevich* 和 *Y. Soibelman*，《稳定性结构、动机 *Donaldson–Thomas* 不变量与簇变换》。*http://arxiv.org/abs/0811.2435*，*2008*年。[46] *M. Kontsevich* 和 *Y. Soibelman*，《上同调 *Hall* 代数、指数 *Hodge* 结构与动机 *Donaldson-Thomas* 不变量》，*Commun. Number Theory Phys.*，*5*（*2011*），第 *231–352* 页。[47] *D. B. Massey*，《导出范畴中的 *Sebastiani-Thom* 同构》，组合数学，*125*（*2001*），第 *353–362* 页。[48] *D. Maulik* 和 *A. Okounkov*，《量子群与量子上同调》，*Astérisque*，（*2019*），第 *ix*+209 页。[49] *D. Maulik* 和 *J. Shen*，《GL_n 的 $P = W$ 猜想》，数学年刊（第 *2* 辑），*200*（*2024*），第 *529–556* 页。[50] *S. Meinhardt* 和 *M. Reineke*，《*Donaldson-Thomas* 不变量与箭图模空间的交叉上同调》，纯粹与应用数学杂志，*754*（*2019*），第 *143–178* 页。[51] *A. Mellit*、*A. Minets*、*O. Schiffmann* 和 *E. Vasserot*，《曲面上的相干层、上同调霍尔代数与变形的 $W_{1+\infty}$-代数》。*http://arxiv.org/abs/2311.13415*，*2023*年。[52] *S. Mozgovoy*，《动机 *Donaldson-Thomas* 不变量与 *McKay* 对应》。*http://arxiv.org/abs/1107. 6044*，*2011*年。[53] *F. Naef* 和 *P. Safronov*，《挠率体积形式》。*http://arxiv.org/abs/2308.08369*，*2023*年。[54] *H. Nakajima*，《*ALE* 空间上的瞬子、箭图簇与 *Kac-Moody* 代数》，*Duke Math. J.*，*76*（*1994*），第 *365–416* 页。[55] *H. Nakajima*，《箭图簇与 *Kac-Moody* 代数》，*Duke Math. J.*，*91*（*1998*），第 *515–560* 页。[56] *T. Pantev*、*B. Toën*、*M. Vaquié* 和 *G. Vezzosi*，《移位辛结构》，*Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，*117*（*2013*），第 *271–328* 页。[57] *J. Ren* 和 *Y. Soibelman*，《二维 *Calabi-Yau* 范畴的上同调霍尔代数、半典范基与 *Donaldson-Thomas* 不变量》（附录由 *Ben Davison* 撰写），载于《*21*世纪的代数、几何与物理》，数学进展丛书第 *324* 卷，*Birkhäuser/Springer*，*Cham*，*2017*，第 *261–293* 页。[58] *M. Saito*，《混合霍奇模导论》，第 *179-180* 号，*1989*年。《*Hodge* 理论研讨会论文集》（*Luminy*，*1987*）。[59] *M. Saito*，《混合霍奇模》，*Publ. Res. Inst. Math. Sci.*，*26*（*1990*），第 *221–333* 页。[60] *F. Sala* 和 *O. Schiffmann*，《曲线上希格斯层的上同调霍尔代数》，代数几何，*7*（*2020*），第 *346–376* 页。[61] *O. Schiffmann* 和 *E. Vasserot*，《*Cherednik* 代数、*W* 代数与 A^2，上瞬子模空间的等变上同调》，*Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，*118*（*2013*），第 *213–342* 页。[62] *O. Schiffmann* 和 *E. Vasserot*，《箭图的上同调霍尔代数与杨算子代数》。*http://arxiv.org/abs/ 2312.15803*，*2023*年。[63] *O. G. Schiffmann*，《与箭图和曲线相关的 *Kac* 多项式与李代数》，载于《国际数学家大会论文集——里约热内卢 *2018*。第二卷：特邀报告》，*World Sci. Publ.*，*Hackensack*，*NJ*，*2018*，第 *1393–1424* 页。[64] *Y. Soibelman*，《关于上同调霍尔代数及其表示的若干评注》，载于《波恩工作会议 *2013*》，数学进展丛书第 *319* 卷，*Birkhäuser/Springer*，*Cham*，*2016*，第 *355–385* 页。[65] *R. P. Thomas*，《*Calabi-Yau* 三维簇的全纯 *Casson* 不变量及纤维化上的丛》，微分几何杂志，*54*（*2000*），第 *367–438* 页。 $K3$ *Y. Toda*，《非交换宽度与 *Gopakumar-Vafa* 不变量》，*Manuscripta Math.*，*148*（*2015*），第 *521–533* 页。[66] *Y. Toda*，《半稳定层的模叠与 *Ext* 箭图的表示》，《几何与拓扑》，*22*（*2018*），第 *3083–3144* 页。[67] *Y. Toda*，《*Gopakumar-Vafa* 不变量与墙穿越》，微分几何杂志，*123*（*2023*），第 *141–193* 页。[68] *O. van Garderen*，《长度二翻转的 *Donaldson-Thomas* 不变量》。*http://arxiv.org/abs/2008.02591*，*2020*年。[69] *M. Varagnolo*，《箭图簇与杨氏量子群》，数学物理通讯，*53*（*2000*），第 *273–283* 页。[70] *Y. Yang* 和 *G. Zhao*，《论两个上同调霍尔代数》，*Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*，*150*（*2020*），第 *1581–1607* 页。