arXiv:2601.08016v1 [math.AC] 12 Jan 2026

S-素理想与 S-极大理想：交换环的平凡环扩张

HWANKOO KIM、NAJIB MAHDOU 和 EL HOUSSAINE OUBOUHOU

Abstract. 本文探讨了平凡环扩张 $A \ltimes M$中 S-素理想和 S-极大理想的研究。通过反例，我们证明，Abstract. 中的 S-素理想（分别为 S-极大理想）不一定是齐次的；而齐次的 S-素理想（分别为 S-极大理想）也不一定具有 $P \ltimes M$的形式，其中 P 是 A的一个 S_0-素理想（分别为 S_0-极大理想）。

此外，我们刻画了平凡环扩张 $A \ltimes M$中的理想 J（不一定是齐次理想）为 S-素理想（分别为 S-极大理想）的条件。另外，我们证明，$A \ltimes M$中的所有 S-素理想（因而也包括 S-极大理想）都具有 $P \ltimes M$的形式，其中P是 A的一个 S_0-素理想，当且仅当 M 是一个 S_0-可除 A-模。

作为应用，我们探讨紧致 S-打包环、互素 S-打包环以及 S-pm-环等概念向平凡环扩张的转移。

这些结果深入揭示了平凡环扩张中 S-素性与 S-极大性的关系，有助于加深对这一背景下理想理论的理解。这项工作不仅丰富了环结构的理论框架，还通过实际示例和应用推动了代数理论这一更广泛领域的发展。

1. Introduction

本文始终只考虑含幺交换环。符号 R 将始终表示这样的环。素理想及其推广的概念在交换代数和代数几何中发挥着重要作用。它们用于刻画多种环，并应用于一般拓扑学、图论、密码学等其他领域。若真理想 $\mathfrak{p}$ 属于 R，则称其为素理想，如果对于某个 $a,\ b \in R$，只要 $ab \in \mathfrak{p}$，就有 $a \in \mathfrak{p}$ 或 $b \in \mathfrak{p}$。R 的所有素理想和极大理想分别记为 $\mathrm{Spec}(R)$ 和 $\mathrm{Max}(R)$。

将经典环和模推广的最重要方法之一，是使用 S R的乘法子集。S 的非空子集 R 称为 R 的乘法子集，如果它满足以下

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13A15, 13F05 , 13G05.
*Key words and phrases.*平凡环扩张， S-素理想， S-极大理想，素理想。

条件： $1 \in S$、 $0 \notin S$，并且对于每个 a， $b \in S$，都有 $ab \in S$。乘法子集的典型例子包括正则元集合 reg(R)，以及对于每个 $P \in$ Spec(R)的 $S_P = R \setminus P$（见 [11]）。给定 R的乘法子集 S ，其饱和定义为集合 $S^* = \{x \in R \mid xy \in S$ ，其中某个 $y \in R\}$成立；该集合本身是 R 的乘法子集，并满足$S \subseteq S^*$。许多作者对这一概念进行了深入研究（例如见 [2, 14, 15, 18, 21, 26]）。

本世纪初，即2002年，Anderson和Dumitrescu在 [3]中引入了 S-*Noetherian*环的概念。若对于环 R 的每个理想 I ，都存在 I 的一个有限生成子理想 K ，使得对于某个 $s \in S$有 $sI \subseteq K$ ，则称环 R 为S-Noetherian环。 [3]中确立了若干基本结果，包括Cohen定理、Eakin-Nagata定理以及针对 S-Noetherian环的Hilbert基定理。然而，在 S-Noetherian环的定义中，确保 $sI \subseteq K$ 的 $s \in S$ 并不统一。因此，Qi等人 [23]引入了一致 S- *Noetherian*环的概念，并得到了适用于这类环的若干结果，例如Eakin-Nagata-Formanek定理和Cartan-Eilenberg-Bass定理。

最近，Sevim等人 [25]研究了 S-素理想的概念。该概念是素理想的推广，并被用于刻画整环、特定的素理想、域以及 S-Noether 环。环 R 的理想 $\mathfrak{p}$ 称为 S-素理想，如果 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ，并且存在一个固定的 $s \in S$ ，使得当 $ab \in \mathfrak{p}$ 对某个 a， $b \in R$时，有 $sa \in \mathfrak{p}$ 或 $sb \in \mathfrak{p}$ [13, 25]。环 R 的所有 S-素理想的集合记为 Spec$_S$(R)。类似地，环 R的理想 $\mathfrak{p}$称为 S-极大理想，如果 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ，并且存在一个固定的 $s \in S$ ，使得当 $\mathfrak{p} \subseteq Q$ 对环 R的某个理想 Q 成立时，有 $sQ \subseteq \mathfrak{p}$ 或 $Q \cap S \neq \emptyset$[29]。环 R 的所有 S-极大理想的集合记为 Max$_S$(R)。最近，Yildiz等人又在 Spec$_S$(R)上构造了一种拓扑，将经典的 Zariski拓扑 [29], 推广开来，并研究了连通性、紧致性和分离公理等拓扑性质。

设 A 为一个环， M 为一个 A-模。以下环构造称为 A 对 M 的平凡扩张（也称为 M的理想化），记作 $A \ltimes M$。它是一个加法结构为外直和 $A \oplus M$的环，乘法定义为

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) := (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$$

对所有 r_1， $r_2 \in A$ 以及所有 m_1， $m_2 \in M$均成立。该构造有时也使用不同的术语或记号表示，例如理想化$A(+)M$。尽管这一构造的确切起源尚不清楚，但其首次系统研究见于 Nagata 的著作 [22]。理想化的目的是将 M 嵌入交换环 R 中，使 M 作为 A-模的结构得以保留为 R的一个理想。

平凡环扩张可用于：

(1) 将有关子模的结果归约到理想的情形；(2) 将环的结果推广到模；

(3) 构造含零因子的交换环的例子。

平凡环扩张的基本性质总结于[12, 16]。首先，平凡环扩张已被证明在解决交换环与非交换环理论中的若干未决问题和猜想方面颇有价值。最著名的例子之一是构造了一个链环 R，它不是赋值整环的商（见 [10, 定理 3.5] 和 [9, X.6]）。这个环 R 是赋值整环 D 由一个非标准单列可除 D-模构成的平凡环扩张，为 Kaplansky 提出的问题提供了一个反例。详情请见 [1, 5, 6, 17]。

注意，$A\ltimes M$是一个分次环，其中（$A\ltimes M$）$_0 = A\ltimes 0$、（$A\ltimes M$）$_1 = 0\ltimes M$，且对于 $n \geq 2$有（$A \ltimes M$）$_n = 0$。根据 [4, 定理 3.3（1）]，回忆可知，$A \ltimes M$的齐次理想具有 $I \ltimes N$的形式，其中 I是 A的一个理想，N是 M的一个子模，且 $IM \subseteq N$。这些理想在研究 $A \ltimes M$ 的性质以及建立 A 与 M的性质之间的联系方面发挥着关键作用。在此背景下，值得特别注意的是，第一个非齐次理想的例子出现在 [17, 例 2.5]中。

已证明，主理想（$a,\ m$）R 是齐次的，当且仅当

$$(a, m)R = Aa \ltimes (Am + aM) = (a, 0)R + (0, m)R,$$

当且仅当 $A \ltimes M$的每个主理想都是齐次的。[4, 定理 3.3 (1)]。设 A为整环，A-模为 M，则 $A \ltimes M$ 的每个理想都是齐次的，当且仅当M 可除。在此情形下，$A \ltimes M$ 的所有理想都具有 $I \ltimes M$ 或$0 \ltimes N$的形式，其中 I是 A 的一个理想，N是 M的一个子模（见 [4,推论 3.4 (1)]）。此外，$A \ltimes M$ 的素理想（分别为极大理想）具有 $P \ltimes M$的形式，其中 P是 A [4,的一个素理想（分别为极大理想）2]定理 3.。

本文进一步研究平凡环扩张中的 S-素理想。我们首先给出三个反例。具体而言：

(1) 我们首先证明，平凡环扩张中的 S-素理想（分别为 S-极大理想）不一定具有 $P \ltimes M$的形式，其中 P是 A的一个 S_0- S_0-极大理想（分别为 S_0-素理想）（见例 2.2）。(2) 在例 2.3 中，我们构造了平凡环扩张中的一个非齐次 S-极大理想（因而也是 S-素理想）。(3) 我们给出平凡环扩张 $A\ltimes M$中的一个非S-素理想 J，其在 A 上的投影是 A的一个 S_0-极大理想（因而也是 S_0-素理想）。

此外，我们刻画了平凡环扩张中的理想 J（不一定是齐次的）为 S-素（分别为 S-极大）的条件。这得出如下刻画：理想 J 在 $R = A \ltimes M$ 中是 S-素，当且仅当 J_0 是 S_0-素，且 M/J_1 是一致 S_0-挠的，其中

$$J_0 = \{x \in A \mid (x, 0) \in J\}, \quad J_1 = \{m \in M \mid (0, m) \in J\}$$

（见定理 2.8 和 2.9）。

作为推论，我们证明，$R = A \ltimes M$ 的所有 S-素理想都具有 $P \ltimes M$ 的形式，其中 P 是 A的一个 S_0-素理想，当且仅当 M 是S_0-可除的（参见推论 2.12 和 2.14）。

作为应用，我们探讨紧致S-打包环、互素 S-打包环以及 S-pm-环这些概念向平凡环扩张的转移（参见定理 3.2、3.5 和 3.8）。

2. S-Prime and S-maximal ideals in trivial ring extensions

回顾 [4, 定理 3.8]，A的饱和乘法子集与 $A \ltimes M$的饱和乘法子集之间存在一一对应关系，由 $S \leftrightarrow S \ltimes M$给出。此外，若 S 是 A 的一个乘法子集，且 N是 M的一个子模，则 $S \ltimes N$ 是 $R \ltimes M$ 的一个乘法子集，其饱和为 $(S \ltimes N)^* = S^* \ltimes M$。此外，若 S 是 $R = A \ltimes M$ 的一个乘法子集，且 S_0 是其在 A上的投影，则乘法子集 S、$S_0 \ltimes N$（其中 N 是 M 的一个子模）和 $S_0 \ltimes M$ 的饱和都相同，即为 $S_0^* \ltimes M$。这也解释了为何在此背景下，作者只关注形式为 $S_0 \ltimes M$的乘法子集，其中 S_0是 A的一个乘法子集。

设 I 是 R 的一个理想，且设 J 是 R的一个非空子集。I 关于 J 的余理想定义为

$$(I : J) = \{x \in R \mid xJ \subseteq I\}.$$

对于单元素集合 $J = \{a\} \subseteq R$，我们使用记号（$I :\ a$），而不使用（$I :\ \{a\}$）。

回顾 [13, 命题 1]：对于带有乘法集 $S \subseteq R$ 的交换环 R，若 $\mathfrak{p}$ 是 R 中与 S 不相交的理想，则 S-素当且仅当存在某个 $s \in S$，使得（$\mathfrak{p} :\ s$）是 R 的素理想。

在本文中，与 S-素理想 $\mathfrak{p}$ 相关的元素 s 将记为 $s_\mathfrak{p}$。

为简化示例的表述，我们将重点讨论平凡环扩张具有 $\mathbb{Z} \ltimes M$ 形式的情形，其中 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模。在这种情况下，根据以下引理，S-素与 S-极大这两个概念是一致的。

引理 2.1。设 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，且 $R = \mathbb{Z} \ltimes M$ 是平凡环扩张。若 S 是 R 的乘法子集，则 R 的理想 $P \nsubseteq Nil(R)$ 是 S-素理想，当且仅当它是 S-极大理想。

证明。假设 P 是 R 的一个 S-素理想，且 $P \nsubseteq Nil(R)$。根据 [13, 命题 1]，存在某个 $s \in S$，使得 $(P :\ s)$ 是 R 的素理想，且 $Nil(R) \subset (P :\ s)$。由于 R 中每个包含 $Nil(R)$ 的素理想都是极大理想（见 [4, 定理 3.2(2)]），因此 $(P :\ s)$ 是 R 的极大理想。因此，根据 [19,定理 2.3]，P 是 S-极大理想。□

回顾一下，根据定理 3.2]，R 的素理想（分别为极大理想）具有 $P \ltimes M$ 的形式，其中 P 是 A的素理想（分别为极大理想）。

值得注意的是，[28] 中的作者在引理 2] 中研究了环的平凡环扩张中的 S-素理想。然而，在以下示例（以及示例 2.4 和 2.17）中，我们将说明这一结果并非普遍成立。

例 2.2. 设 $R = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 且设 $S = \{(2,0)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。则理想 $J = 0 \ltimes 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 是 R的一个 S-素理想。然而，平凡环扩张 $R = A \ltimes M$ 中的 S-素理想不一定具有形式 $P \ltimes M$，其中 P是 R的一个 S_0-素理想。

证明。显然，$S \cap J = \emptyset$。由于 $\mathbb{Z}$ 是一个整环，由 $[4,$ 定理 3.2] 可知，$0 \ltimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 是 R的一个素理想。现在，取 $x, y \in R$使得 $xy \in J \subseteq 0 \ltimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$。因此，我们有 $x \in 0 \ltimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 或 $y \in 0 \ltimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$。令 $s = (2,0)$，可得 $sx \in (2,0)(0 \ltimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = J$ 或 $sy \in (2,0)(0 \ltimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = J$。因此，$J$是 R的一个 S-素理想。□

在下面的例子中，我们进一步构造了平凡环扩张中的一个 S-极大（因而也是 S-素）理想，它不是齐次的。

例 2.3. 令 $R = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，并令 $S = \{(2,0)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。由 $(6,1)$ 生成的主理想 P 是 S 的一个极大理想。然而，P 不是 R 的齐次理想。

证明。首先，注意到

$$\begin{aligned} P &= \{(k,r)(6,1) \mid (k,r) \in R\} \\ &= \{(6k,k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(12k,0) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(12k+6,1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (*). \end{aligned}$$

因此，我们有 $P \cap S = \emptyset$。现在，取 $s = (4,0)$，并断言 $(P\colon s) = 3\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

令 $x = (3a, e) \in 3\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。由于

$$sx = (4,0)(3a,e) = (12a,0) = (6,1)(2a,0) \in P,$$

我们得出 $x \in (P\colon s)$。因此，$3\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subseteq (P\colon s)$。反过来，令 $(a,e) \in (P\colon s)$。那么

$$(a,e)(4,0) = (4a,0) \in P,$$

这意味着，根据（$*$），$a \in 3\mathbb{Z}$。因此，$(a,\ e) \in 3\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。所以，根据定理 3.2],，$(P\colon s) = 3\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是 R 的素理想，因为 $3\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$的素理想。因此，根据命题 1], ，P 是 R 的 S-素理想，所以根据引理 3.8，P 是 S-极大的。

要证明 P 不是 R的齐次理想，只需证明 $(0,\ 1) \notin P$，如 $[4,$ 定理 3.3 (3)]所述。这可直接由 $(*)$ 得出。□

接下来，我们给出平凡环扩张 $A \ltimes M$ 中一个非-S-素理想 J 的例子。然而，它在 A 上的投影是一个 S_0-极大（因而是 S_0-素）理想 A。

例 2.4. 设 $R = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，且 $S = \{(3,0)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。那么，由 $(2,1)$ 生成的主理想 P 不是 R 的 S-素理想。然而，$\pi_A(P) = 2\mathbb{Z}$ 是 A 的 S_0-素理想。

证明. 与例 2.3 中一样，我们有

$$P = \{(4k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{(4k+2, 1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (*).$$

因此，我们看到

$$(2,0)(2,0) = (4,0) = (2,0)(2,1) \in P.$$

然而，对于每个 $s = (3,0)^n \in S$，我们都有

$$s(2,0) = (3^n 2, 0) \notin P,$$

根据（$*$）。因此，P 不是 S-素理想。然而，$\pi_A(P) = 2\mathbb{Z}$ 是 A的一个S_0-极大理想。□

引理 2.5. 设 R 是一个含幺交换环，S 是 R 的一个乘法子集，其饱和为 S^*，且 I 是 R 的一个理想。那么，I 是 R 的一个 S-素理想，当且仅当 I 是 R的一个 S^*-素理想。

证明。假设 I 是 R的一个 S-素理想。那么 $I \cap S = \emptyset$，且存在 $s \in S$，使得对于所有满足 $ab \in I$的 $a,\ b \in R$，都有 $sa \in I$ 或$sb \in I$。要证明 I 是 R的一个 S^*-素理想，只需验证$I \cap S^* = \emptyset$，因为 $s \in S \subseteq S^*$。

反设存在 $t \in S^* \cap I$。由于 $t \in S^*$，存在 $x \in R$ 使得 $tx \in S$。这意味着 $tx \in S \cap I = \emptyset$，矛盾。

反之，假设 I 是 R 的 S^*-素理想。那么 $I \cap S^* = \emptyset$，根据 [13, 命题 1]，，存在 $t \in S^*$ 使得（$I :\ t$）是 R 的素理想。由于 $I \cap S \subseteq I \cap S^*$，我们得出 $I \cap S = \emptyset$。

另一方面，由于 $t \in S^*$，存在 $r \in S^*$ 使得 $s = tr \in S$。由于 $r \notin (I :\ t)$，且（$I :\ t$）是 R 的素理想，因此可得（$I :\ s$）$=$（$I :\ t$）。因此，I 与 S 不相交，并且存在 $s \in S$ 使得（$I :\ s$）是 R 的素理想。因此，根据 [13, 命题 1]，I 是 R 的 S- 素理想。□

引理 2.6. *(*[27, 定理 1.4。7]*)* 设 I 是环 R 的理想，且 S 是 R 的乘法子集，并满足 $I \cap S = \emptyset$。则存在 R 的素理想 $\mathfrak{p}$，使得 $I \subseteq \mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$。

引理 2.7. 设 R 是一个环，S 是 R 的一个乘法子集，其饱和为 S^*。设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的一个 S_0- 极大理想，则对每个 $t \in S^*$，$t\mathfrak{p}$ 都是 R 的一个 S- 极大理想。

证明。由于 $t\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$，因此 $s\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$。现在设 q 是 R 的一个与 S 不相交的理想，且 $t\mathfrak{p} \subseteq q$。由引理 2.6，存在 R 的一个与 S 不相交的素理想 m，使得 $Q \subseteq m$。因此 $t\mathfrak{p} \subseteq q \subseteq m$。由于 m 与 S 不相交，因此 $t \notin m$（否则，存在 $k \in R$ 使得 $kt \in S \cap m$，矛盾）。因此 $\mathfrak{p} \subseteq m$，因为 m 是 R 的素理想且 $t \notin m$。现在，由于 q 是 R 的一个 S-极大理想，且 m 与 S 不相交，因此 $s_{\mathfrak{p}}m \subseteq \mathfrak{p}$。取 $k \in R$ 使得 $tk \in S$，并令 $s = s_{\mathfrak{p}}tk \in S$。于是

$$sQ \subseteq sm \subseteq tk\mathfrak{p} \subseteq t\mathfrak{p}.$$

因此， $s\mathfrak{p}$是 R的一个 S-极大理想。 □

我们的下一个目标是刻画环 $R = A \ltimes M$ 的理想 J 何时为 S-素理想。为此，我们引入以下记号，这些记号的引入受 R的分次启发。

设 A 为一个环， M 为一个 A-模。定义典范投影映射:

$$\pi_A : A \ltimes M \to A, \quad (a, x) \mapsto a, \quad \text{and} \quad \pi_M : A \ltimes M \to M, \quad (a, x) \mapsto x.$$

对于 R的理想 J，我们定义:

$$J_0 = \pi_A(J \cap R_0) = \{a \in A \mid (a, 0) \in J\}$$

and

$$J_1 = \pi_M(J \cap R_1) = \{x \in M \mid (0, x) \in J\}.$$

容易看出， J_0 是 A 的理想，而 J_1 是 M的子模。

注意，若 $a \in J_0$且 $x \in M$，则（a，0）$\in J$且（0，x）$\in R$。因此，

$$(a, 0)(0, x) = (0, ax) \in J,$$

这意味着 $ax \in J_1$。因此， $J_0M \subseteq J_1$，从而 $J_0 \ltimes J_1$ 是包含于 J中的 R 的齐次理想。

由此可知， J 是 R 的齐次理想，当且仅当 $J = J_0 \ltimes J_1$。

回忆 [30] 中的定义，若存在元素 $s \in S$ 使得 $sM = 0$，则称 R-模 M 为一致 S-挠模。

在下列定理中，我们确定平凡环扩张中的理想 J （不一定是齐次理想）成为 S-素（分别为 S-极大）理想的充要条件。

定理 2.8. 设 A 是一个环， M 是一个 A-模。令 $R = A \ltimes M$ 为平凡环扩张，并设 S 是 R的一个乘法子集。那么， R 的理想 J 是 S-素理想，当且仅当 J_0 是 S_0-素理想，且 M/J_1 是一致S_0-挠的。

证明。假设 J 是 S- R的素理想。由于乘法子集 S和 $S_0 \ltimes 0$ 具有相同的饱和（$= S_0^* \ltimes M$），根据引理 2.5可知， J是 R中的（$S_0 \ltimes 0$）-素理想。定义 $s_J =$(s0，0)，其中 $s_0 \in S_0$。由于 J与 $S_0 \ltimes 0$不相交，因此 J_0 与 S_0不相交。

现在，令 a， $b \in A$ 满足 $ab \in J_0$。那么 $(ab, 0) \in J$，这意味着

$$(ab, 0) = (a, 0)(b, 0) \in J.$$

因此，二者必居其一

$$(s_0, 0)(a, 0) = (s_0a, 0) \in J \quad \text{or} \quad (s_0, 0)(b, 0) = (s_0b, 0) \in J.$$

因此， $s_0a \in J_0$ 或 $s_0b \in J_0$，这意味着 J_0 是 A的一个 S_0-素理想。另一方面，对于每个 $x \in M$，我们有

$$(0, x)(0, x) = (0, 0) \in J,$$

这意味着

$$(s_0, 0)(0, x) = (0, s_0x) \in J,$$

即， $s_0x \in J_1$。因此， $sM \subseteq J_1$，这意味着 M/J_1 是一致的 S_0-挠（相对于 s_0）。

反过来，假设 J_0 是 S_0-素的，且 M/J_1 是一致的 S_0-挠。取满足 $s_2M \subseteq J_1$ 的 $s_2 \in S$。

我们首先断言 $J \cap S = \emptyset$。否则，亦即，存在 $(s_0, t) \in J \cap S$。于是 $s_0 \in S_0$，并且我们计算得

$$(s_2, 0)(s_0, t) = (s_0s_2, s_2t) \in J.$$

由于 $s_2t \in s_2M \subseteq J_1$，可得 $(0, s_2t) \in J$。因此，

$$(s_0s_2, 0) = (s_2, 0)(s_0, t) - (0, s_2t) \in J,$$

这意味着 $s_0s_2 \in J_0$。这与 $s_0s_2 \in J_0 \cap S_0 = \emptyset$ 的假设矛盾。

现在，令 $s_1 = s_{J_0}$ 并定义 $s = s_1s_2$。取 $(a, x), (b, y) \in R$，使得

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx) \in J.$$

于是，

$$(s_2, 0)(a, x)(b, y) = (s_2, 0)(ab, ay + bx) = (sab, s_2(ay + bx)) \in J.$$

由于 $s_2(ay + bx) \in sM \subseteq J_1$，我们得到 $(0, s_2(ay + bx)) \in J$。因此，

$$(s_2ab, 0) = (s_2, 0)(a, x)(b, y) - (0, s_2(ay + bx)) \in J,$$

这意味着 $s_2ab \in J_0$。

由于 J_0 是关于 s_1 的 S_0-素理想，且 $s = s_1s_2 \notin J_0$，我们得出 $s_1a \in J_0$ 或 $s_1b \in J_0$。这意味着

$$sa \in J_0 \quad \text{or} \quad sb \in J_0,$$

这意味着 $(sa, 0) \in J$或 $(sb, 0) \in J$。

另一方面，由于 $sM \subseteq s_2M \subseteq J_1$，我们还有 $sx \in J_1$ 和$sy \in J_1$，由此得到 $(0, sx) \in J$和 $(0, sy) \in J$。因此，我们得出

$$(s, 0)(a, x) = (sa, sx) = (sa, 0) + (0, sx) \in J$$

or

$$(s, 0)(b, y) = (sb, sy) = (sb, 0) + (0, sy) \in J.$$

因此， J 是（$S_0 \ltimes 0$）-素的，所以根据引理 2.5，它是 S-素的。 □

定理 2.9。设 A 为一个环， M 为一个 A-模。令 $R = A \ltimes M$ 为平凡环扩张，并设 S 为 R的一个乘法子集。那么， R 的理想 J 是 S-极大的，当且仅当 J_0 是 S_0-极大的，并且 M/J_1 是统一 S_0-挠的。

证明。设 J 是 R的一个 S-极大理想。由 [29,命题 10]可知， J 也是 S-素理想。因此， J_0 是 S_0-素理想，且 M/J_1 是均匀 S_0-挠的。接下来只需证明 J_0 是 A的一个 S_0-极大理想。

设 I 是 A 的一个理想，与 S_0 不相交，且满足 $J_0 \subseteq I$。那么很容易看出，对于某个 $s_1 \in S$，有 $(s_1,0)J \subseteq I \ltimes M$，且满足 $s_1 M \subseteq J_1$。由于 $S \cap (I \ltimes M) = \emptyset$，并且 $(s_1, 0)J$根据引理 2.7也是 S-极大理想，因此

$$(s_0, t)(I \ltimes M) = s_0 I \ltimes (s_0 M + It) \subseteq (s_0, 0)J \subseteq J$$

对于某个 $(s_0, t) \in S$。因此， $s_0 I \subseteq J_0$，这意味着 J_0 是 A的一个 S_0-极大理想。

反过来，假设 J_0 是 S_0-极大的，且 M/J_1 是一致 S_0-挠的。根据定理 2.3], ，存在 $s_1 \in S_0$ ，使得 $(J_1 : s_1)$ 是 A 中所有与 S_0 不相交的理想集合中的极大元。令 $s_2 \in S_0$ 满足 $s_2 M \subseteq J_1$，并定义 $s = s_1 s_2$。由于

$$(J_1 : s_1) \subseteq (J_1 : s) \subseteq (J_1 : s^2),$$

并且由于 $(J_1 : s^2)$ 是 A 中与 S_0 不相交的理想，因此 $(J_1 : s_1) = (J_1 : s) = (J_1 : s^2)$ 是 A 中所有与 S_0 不相交的理想集合中的极大元。

现在，取满足 $(s, t) \in S$ 的 $t \in M$。我们声称

$$(J : (s, t)^2) = (J_0 : s) \ltimes M.$$

首先，注意对每个 $x \in M$，由于 $sx \in J_1$，我们有

$$(0, x)(s, t) = (0, x) \in J,$$

这意味着 $0 \ltimes M \subseteq (J : (s, t)^2)$。此外，对于每个 $a \in (J_0 : s)$，由于$sa \in J_0$，可得

$$(a, 0)(s, t)(s, t) = (as, at)(s, t) = (as^2, 2ast) = (as^2, 0) + (0, s(2at)) \subseteq J.$$

由于 $s(2at) \in sM \subseteq J_1$ 且 $as^2 \in J_0$，我们得到

$$(J_0 : s) \ltimes 0 \subseteq (J : (s, t)^2).$$

因此，

$$(J_0 : s) \ltimes M = (J_0 : s) \ltimes 0 + 0 \ltimes M \subseteq (J : (s, t)^2).$$

对于反向包含，设 $(a, x) \in (J : (s, t)^2)$。则

$$(a, x)(s, t)^2 = (a, x)(s^2, 2st) = (as^2, 2ast + s^2 x) \in J.$$

因此，

$$(as^2, 0) = (as^2, 2ast + s^2 x) - (0, s(2at + sx)) \in J$$

由于 $s(2at + sx) \in J_1$。因此， $as^2 \in J_0$，所以 $x \in (J_0 : s^2) = (J_0 : s)$。因此，

$$(J : (s, t)^2) = (J_0 : s) \ltimes M.$$

要证明 J 是 S-极大理想，且属于 R，只需证明 $(J : (s, t)^2) = (J_0 : s) \ltimes M$ 是 R 的所有理想中与 S 不相交的理想集合中的极大元。为此，设 K 是一个与 S 不相交的 R 的理想，使得

$$(J : (s, t)^2) = (J_0 : s) \ltimes M \subseteq K.$$

由于 $0 \ltimes M \subseteq (J_0 : s) \ltimes M \subseteq K$，由定理 3.1] 可知，对于 A 的某个理想 I，有 $K = I \ltimes M$ [4, 。另一方面，由于 $K = I \ltimes M$ 与 S 不相交，我们有 I 与 S_0 不相交。由 $(J_0 : s)$ 的极大性可知，$(J_0 : s) = I$ （注意，$(J_0 : s) \subseteq I$ 可通过包含映射 $(J_0 : s) \ltimes M \subseteq K = I \ltimes M$ 投影到 A 上得到）。因此，

$$(J : (s, t)^2) = (J_0 : s) \ltimes M = I \ltimes M = K.$$

□

推论 2.10。设 A 为一个环， M 为一个 A-模。令 $R = A \ltimes M$ 为平凡环扩张，并设 S 为 R的一个乘法子集。设 J为 R的一个理想。则下列断言等价：

(1) J 是 R的一个 S-素（分别为 S-极大）理想；*(2)* $J_0 \ltimes J_1$ 是 R的一个 S-素（分别为 S-极大）理想；*(3)* J_0 是 S_0-素（分别为 S_0-极大）的，且 M/J_1 是一致 S_0-挠的。

推论 2.11。设 A 为一个环， M 为一个 A-模。令 $R = A \ltimes M$ 为平凡环扩张，并设 S 为 R的一个乘法子集。设 I为 A 的一个理想， N 为 M 的一个子模，且满足 $IM \subseteq N$。则下列断言等价：

(1) $I \ltimes N$ 是 S-素（分别为 S-极大）理想；*(2)* I 是 S_0-素（分别为 S_0-极大），且 M/N 是一致 S_0-挠的。

设 S 是环 R的一个乘法子集， M 是一个 R-模。回顾 [27, 定义 1.6. 10] ，若对于任意$s \in S$ 和任意 $x \in M$，都存在 $y \in M$ 使得 $sy = x$，等价地$sM = M$，则称 M 为 S-可除 。

推论 2.12。设 A是一个环， M 是一个 S_0-可除的 A-模。令$R = A \ltimes M$为平凡环扩张，并设 S是 R的一个乘法子集。那么， R 的所有 S-素（分别为 S-极大）理想都具有形式 $P \ltimes M$，其中 P 是 A的一个 S_0-素（分别为 S_0-极大）理想。

证明。令 P 为 R 的一个 S-素理想。根据定理 2.8， P_0 是 S_0-素的，且 M/P_1 是一致 S_0- 挠的。因此，存在 $s \in S$ 使得 $sM \subseteq P_1 \subseteq M$。由于 M 是一个 S_0-可除的 A-模，可得 $sM = M$，从而 $P_1 = M$。因此， $J = P_0 \ltimes M$，其中 P_0 是 A 的一个 S_0-素理想。同样的推理也适用于 S-极大理想。□

当 S 是 R的单位子集时，我们可以得到以下经典结果。

推论 2.13. *(*[4, 定理 3.2]*)* 设 A 是一个环， M 是一个 A-模。令 $R = A \ltimes M$ 为平凡环扩张。那么， R 的所有素（分别为极大）理想都具有 $P \ltimes M$ 的形式，其中 P是 A的素（分别为极大）理想。

推论 2.14. 设 A 为一个环， M 为一个 A-模。令 $R = A \ltimes M$ 为平凡环扩张，并设 S 为 R的一个乘法子集。若 R 的所有S-素理想均具有形式 $P \ltimes M$，其中 P是A的一个 S_0-素理想，则 M 是 S_0-可除的。

证明. 由于 S_0 是 A的一个乘法子集，引理 2.6 保证存在一个与 S_0不相交的 A 的素理想 P。因此， $P \ltimes M$ 是 R 的一个与 $S_0 \ltimes 0$不相交的素理想，故它是 R的一个$(S_0 \ltimes 0)$-素理想。

设 $s \in S$。由于 $(s,0) \in S_0 \ltimes 0$，由 [13, 命题 2（1）]可得

$$(s,0)P \ltimes M = sP \ltimes sM$$

结合引理 2.5 和 [4, 定理 3.8]可知，是 R 的一个 S-素理想。根据假设，这意味着 $sM = M$。因此， M 是 S_0-可除的。□

注 2.15. 通过另一种证明，我们也可以将前一推论中的陈述“ R 的 S-素理想具有如下形式： $P \ltimes M$，其中 P 是 A的一个 S_0-素理想”替换为关于 S-极大理想的类似结果：“ R 的 S-极大理想具有如下形式： $p \ltimes M$，其中 P 是 A的一个 S_0-极大理想。”

推论 2.16. 设 A 为一个环， M 为一个一致 S_0-挠 A-模。令 $R = A \ltimes M$ 为平凡环扩张，并设 S 为 R的一个乘法子集。那么， R 的一个理想 J 是 S-素理想（分别为 S-极大理想），当且仅当 J_0 是 A的一个 S_0-素理想（分别为 S_0-极大理想）。

我们以如下例子结束本节，该例展示了平凡环扩张中的一个非齐次S-素理想。

例 2.17。 令 $R = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，并设 $S = \{(2,\ 0)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。则主理想 $J = (6,\ 1)R$ 是 R 的一个 S-素理想，但不是齐次的。

证明。 首先，注意到 $n \in J_0$ 当且仅当 $(n,\ 0) \in J$，这意味着存在 $(m,\ x) \in R$ 使得

$$(n,0) = (6,1)(m,x) = (6m, 6x+m).$$

因此， $J_0 \subseteq 6\mathbb{Z}$。然而，注意到 $6 \notin J_0$，因为如果 $6 \in J_0$，那么将存在 $(m,\ x) \in R$ 使得

$$(6,0) = (6,1)(m,x) = (6m, 6x+m).$$

这迫使 $m = 1$，从而得到等式 $6x + 1 = 0$，即 $6x + 1 \in 4\mathbb{Z}$，这是一个矛盾。

另一方面，由于

$$(12,0) = (6,1)(2,1) \in J,$$

可得 $12 \in J_0$。因此，我们得出 $J_0 = 12\mathbb{Z}$，它与 $S_0 = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 不相交。

现在，由于 $(J_0 : 4) = 3\mathbb{Z}$ 是 A 的素理想，因此根据 [13, 命题 1]，它是一个 S_0-素理想。因此，根据推论 2.16， J 是 S-素的。

为了证明 J 不是 R 的齐次理想，只需验证 $(6, 0) \notin J$，如 [4, 定理 3.3 (3)] 所述。然而，这一点已经得到证明。□

3. Transfer of compactly S-packed、 coprimely S-packed and S-pm-Property to Trivial Ring Extension

如果对于 R 的某个理想 Q 以及 R 的一族素理想 $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in\Gamma}$，只要满足 $Q \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} \mathfrak{p}_i$，就存在 $i \in \Gamma$ 使得 $Q \subseteq \mathfrak{p}_i$ [24]，则称环 R 为紧致打包环。另一方面，Erdo˘gdu [8] 提出了互素紧致环这一概念，它是紧致打包环的推广。如果对于 R 的某个理想 Q 以及 R 的一族素理想 $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in\Gamma}$，只要满足 $Q + \mathfrak{p}_i = R$，就有$Q \nsubseteq \bigcup_{i\in\Gamma} \mathfrak{p}_i$，则称环 R 为互素紧致环。请注意，每个紧致打包环都是互素紧致环。当 R 是一个克鲁尔维数为一的整环时，这一结论的逆命题成立，见 [8, 命题 2.2]。在 [28], 中，Yavuz 等人介绍了紧致 S-打包环和互素紧致 S-打包环的概念，定义如下：

定义 3.1. 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。那么

(1) 若 $Q \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} P_i$，其中 Q 是 R 的一个理想，且 $\{P_i\}_{i\in\Gamma}$ 是 R的 S-素理想族，则存在 $k \in \Gamma$ 和 $s \in S$ 使得 $sQ \subseteq P_k$，称 *(*[28, 定义 2]*)* R 为紧致 S-打包环。*(2)* 若对于 R 的某个理想 Q 以及 R的一个 S-素理想族$\{P_i\}_{i\in\Gamma}$，只要$Q + P_i = R$，就有 $sQ \nsubseteq \bigcup_{i\in\Gamma} P_i$ 对每个 $s \in S$ 均成立，则称 *(*[28, 定义 3]*)* R 为余素 S-打包环。

此外，他们还将这些概念转移到了环的平凡扩张中（参见 [28, 定理 8 和 10]）。然而，他们的证明依赖于 [28, 引理 2],，该引理指出， $A \ltimes M$ 的所有 S-素理想都具有 $P \ltimes M$ 的形式，其中 P 是 A的一个 S_0-素理想。这个结论并非普遍成立（见例 2.2、2.3 和 2.17）。不过，在 M 是 S_0-可除的特定情况下， [28, 引理 2] 成立（见推论 2.12），因此， [28, 定理 8 和 10]在此情形下也成立。这引出了一个自然的问题：这些定理在一般情形下是否仍然成立？本节旨在研究平凡扩张成为紧致 S-打包环（分别为互素 S-打包环）的条件。作为推论，我们将证明 [28, 定理 8 和 10]成立。

定理 3.2。 设 M 是一个 A-模，且 S 是平凡环扩张 $R = A \ltimes M$的一个乘法子集。则以下命题等价：

(1) A是紧致 S_0-打包环；*(2)* R 是紧致 S-打包环。

证明。 1) $\Rightarrow$ 2) 假设 A 是紧致 S_0-打包环。设对于 $A \ltimes M$的某个理想 Q 和一族 $A \ltimes M$中的 S-素理想$\{P_i\}_{i\in\Gamma}$，有 $Q \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} P_i$。对每个 $i \in \Gamma$，取 $\mathfrak{p}_i = (P_i : s_{P_i})$。那么 $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in\Gamma}$是 R 中与 S不相交的一族素理想。因此，对于每个 $i \in \Gamma$，由 [4, 定理 3.2]，存在 A 的某个素理想 I_i 使得$\mathfrak{p}_i = I_i \ltimes M$。现在，由于对所有 $i \in \Gamma$，$\mathfrak{p}_i = I_i \ltimes M$与 S 不相交，可知 $I_i \cap S_0 = \emptyset$。因此，所有 I_i 都是 A中与 S_0 不相交的素理想，所以所有 I_i 都是 A的 S_0-素理想。另一方面，我们有

$$Q \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} P_i \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} \mathfrak{p}_i = \bigcup_{i\in\Gamma} I_i \ltimes M = (\bigcup_{i\in\Gamma} I_i) \ltimes M.$$

因此，通过投影到 A，我们得出

$$q := \pi_A(Q) \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} I_i = \pi_A(\bigcup_{i\in\Gamma} \mathfrak{p}_i).$$

由于 A 是紧致 S-打包环，存在 $s \in S$，使得对于某个 $i \in \Gamma$，有 $sq \subseteq I_i$。因此

$$(s,t)q \ltimes M = sq \ltimes (qt + sM) \subseteq sq \ltimes M \subseteq I_i \ltimes M = \mathfrak{p}_i.$$

注意，由于 $q := \pi_A(Q)$，因此 $Q \subseteq q \ltimes M$。于是

$$(s,t)Q \subseteq (s,t)q \ltimes M \subseteq \mathfrak{p}_i.$$

由于 $\mathfrak{p}_i$ 是 R 中与 S 不相交的素理想，且$(s,\ t) \in S$（因此$(s,\ t) \notin S$），可得 $Q \subseteq \mathfrak{p}_i = (P_i : s_{P_i})$。因此

$$s_{P_i} Q \subseteq s_{P_i}(P_i : s_{P_i}) \subseteq P_i.$$

因此，$A \ltimes M$是紧致 S-打包环。

2) $\Rightarrow$ 1) 假设 $A \ltimes M$是紧致 S-打包环。设对于 A 的某个理想 q 及 A 的一个 S_0-素理想族 $\{p_i\}_{i\in\Gamma}$，有$q \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} p_i$。那么，根据定理 2.8，对所有 $i \in \Gamma$，$q \ltimes M \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} (p_i \ltimes M)$，其中$(p_i \ltimes M)$是$A \ltimes M$的 S-素理想。由于 $A \ltimes M$是紧致S-打包环，存在$(s,\ t) \in S$，使得

$$sq \ltimes (sM + qm) = (s,m)(q \ltimes M) \subseteq p_i \ltimes M$$

对某个 $i \in \Gamma$。因此，通过投影到 A，我们得出 $sq \subseteq p_i$ 和 $s \in S_0$。因此，A 是一个紧致 S_0-打包环。□

推论 3.3. *(*[28, 定理 8]*)* 设 M 是一个 A-模，且 S 是 A 的一个乘法子集。则以下命题等价：

(1) A 是紧致 S_0-包环；*(2)* R 是紧致($S \ltimes 0$)-包环；

(3) R 是紧致$(S \ltimes M)$-包环。

当 S 是 R 的单位子集时，我们得到以下结果：

推论 3.4。 设 M 是一个 A-模。则以下命题等价：

（*1*） A 是一个紧致打包环； （*2*）
R 是一个紧致打包环。

定理 3.5。 设 M 是一个 A-模，且 S 是平凡环扩张 $R = A \ltimes M$ 的一个乘法子集。则以下命题等价：

(1) A是一个余素 S_0-*packed* 环；
(2) R 是一个余素 S-*packed* 环。

证明。 1) $\Rightarrow$ 2) 假设 R 是一个余素 S_0-packed 环。设对于环 $A \ltimes M$ 的某个理想 Q 以及一族 $A \ltimes M$的 S-素理想 $\{P_i\}_{i\in\Gamma}$，有 $Q + P_i = A \ltimes M$。对每个 $i \in \Gamma$，取 $\mathfrak{p}_i = (P_i : s_{P_i})$。那么， $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in\Gamma}$是 R 中与 S不相交的一族素理想。因此，对每个 $i \in \Gamma$，根据定理 3.2], 存在环 A 的某个素理想 I_i，使得 $\mathfrak{p}_i = I_i \ltimes M$。现在，由于对所有 $i \in \Gamma$， $\mathfrak{p}_i = I_i \ltimes M$ 与 S 不相交，可知 $I_i \cap S_0 = \emptyset$。因此，所有 I_i 都是 A中与 S_0 不相交的素理想，所以所有 I_i 都是 R的 S_0-素理想。取 $J = \pi_A(Q)$，则 $Q \subseteq J \ltimes M$。因此

$$A \ltimes M = Q + P_i \subseteq Q + \mathfrak{p}_i \subseteq J \ltimes M + I_i \ltimes M = (J + I_i) \ltimes M$$

对所有 $i \in \Gamma$均成立。因此， $J + I_i = A$。由于 A 是一个互素 S_0 紧致环，且所有 I_i 都是 A 的 S_0-素理想，我们得到对所有 $s_0 \in S_0$均有 $s_0 J \nsubseteq \bigcup_{i\in\Gamma} I_i$。现在，我们断言，对于所有 $(s, m) \in S$，$(s, t)Q \nsubseteq \bigcup_{i\in\Gamma} P_i$。若不然，则存在 $(s, t) \in S$，使得

$$(s,t)Q \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} P_i \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} (P_i : s_{P_i}) = \bigcup_{i\in\Gamma} \mathfrak{p}_i = \bigcup_{i\in\Gamma} I_i \ltimes M.$$

因此，对于每个 $x \in J$，根据 J 的描述，存在 $m \in M$ 使得 $(x, m) \in Q$，于是

$$(s,t)(x,m) = (sx, sm + xt) \in (s,t)Q \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} I_i \ltimes M.$$

因此 $sx \in \bigcup_{i\in\Gamma} I_i$，即 $sJ \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} I_i$，矛盾。因此， $A \ltimes M$ 是一个互素 S紧致环。

2) $\Rightarrow$ 1) 假设 $A \ltimes M$是一个余素 S-紧环。设$q + p_i = A$ 对于环 A 的某个理想 q 以及一族 S_0- 素理想 $\{p_i\}_{i\in\Gamma}$ 成立，其中这些理想属于 A。取 $Q = q \ltimes M$ 和 $P_i = p_i \ltimes M$。那么， $Q + P_i = A \ltimes M$，并且根据定理 2.8， $\{P_i\}_{i\in\Gamma}$是 $A \ltimes M$的一族 S-素理想。因此，根据假设，对于每个 $s = (s_0, t) \in S$

$$sq \ltimes (sM + qM) = (s,t)Q \nsubseteq \bigcup_{i\in\Gamma} P_i = (\bigcup_{i\in\Gamma} p_i) \ltimes M.$$

因此，对于每个 $s \in S_0$， $sq \notin \bigcup_{i\in\Gamma} p_i$。所以， A 是一个余素 S_0-紧环。□

推论 3.6. *(*[28, 定理 10]*)* 设 M 是一个 A-模，且 S 是 A的一个乘法子集。那么以下命题等价：

(1) A是一个余素 S-*packed* 环；*(2)* $A \ltimes M$ 是一个余素$(S \ltimes 0)$-*packed* 环；*(3)* $A \ltimes M$ 是一个余素$(S \ltimes M)$-*packed* 环。

当 S 是 R的单位子集时，我们得到以下结果

推论 3.7。 设 M 是一个 A-模。则以下陈述等价：

(1) A是一个互素 S-紧致环；*(2)* $A \ltimes M$ 是一个互素紧致环。

在 [7], 中，De Marco 和 Orsatti 引入了 pm-环的概念，即每个素理想都包含于唯一一个极大理想中的环。这类环包含正则环、局部环、零维环、函数环等。他们研究了 pm-环的素谱 $Spec(R)$ 和极大谱 $Max(R)$ 的一些性质；此外， pm-环的各种拓扑性质和代数性质也已得到研究（例如参见 [7, 20]）。

类似地，具有乘法子集 S 的环 R 称为 S-pm-环，若 R 的每个 S-素理想都包含于 R的唯一一个 S-极大理想中。

定理 3.8。 设 M 是一个 A-模， S 是平凡环扩张 $R = A \ltimes M$的一个乘法子集。则以下陈述等价：

(1) R 是一个 S-pm-环；*(2)* A是一个 S_0-pm-环，且 M 是一个 S_0-可除的 A-模。

1) $\Rightarrow$ 2) 假设 $R = A \ltimes M$ 是一个 S-pm-环。设 $s \in S_0$ 和 $\mathfrak{p}$是 A的一个 S_0-极大理想，则根据引理 2.7， $s\mathfrak{p}$ 也是 R 的一个 S_0-极大理想。因此

$$(s, 0)p \ltimes M = s\mathfrak{p} \ltimes sM \subseteq \mathfrak{p} \ltimes M.$$

根据定理 2.9， $s\mathfrak{p} \ltimes sM$和 $\mathfrak{p} \ltimes M$是 R的 S-极大理想；又因为 R是一个 S-pm-环，我们得出 $s\mathfrak{p} \ltimes sM = \mathfrak{p} \ltimes M$。因此，对每个 $s \in S_0$都有 $sM = M$，由此 M 是 S_0-可除的。设 p 是 A的一个 S_0-素理想，并设 m 是 A 的一个 S-极大理想，使得 $p \subseteq m$。则根据定理 2.8， $p \ltimes M$ 是 R 的一个S-素理想；根据定理 2.9， $m \ltimes M$是 R的一个 S-极大理想，且 $p \ltimes M \subseteq m \ltimes M$。由于 R是 S-pm-环，因此 $m \ltimes M$是包含素理想 $p \ltimes M$的 R 的唯一 S-极大理想。因此， m 是包含素理想 p的 A 的唯一 S_0-极大理想。因此， A是一个 S-pm-环。

2) $\Rightarrow$ 1) 由于 M 是一个 S_0-可除的 A-模。因此

$$\mathrm{Spec}_S(R) = \{P \ltimes M \mid P \in \mathrm{Spec}_{S_0}(A)\}$$

and

$$\mathrm{Max}_S(R) = \{m \ltimes M \mid m \in \mathrm{Max}_{S_0}(A)\}$$

根据推论 2.12。因此，容易看出 R 是一个 S-pm-环，因为 A 是一个 S_0-pm-环。□

显然，如果环 R 是一个 S-pm-环，那么 R_S是一个 pm-环。然而，下面的例子表明，反之一般并不成立。

例 3.9。设 $R(\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z})_{2\mathbb{Z}\ltimes\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}_2$ 和 $S = \{(2,0)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$，则 R 是一个 pm-环（因此 R_S），因为 R 是一个局部环。然而，根据定理 *3.8*， R不是一个 S-pm-环，因为 $\mathbb{Z}_2$ 不是 S_0-可除的，其中 $S_0 = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。

资助信息： H. Kim 得到了韩国国家研究基金会（NRF）通过教育部资助的基础科学研究计划的支持（2021R1I1A3047469）。

利益冲突： 作者声明不存在利益冲突。

References

1. J. Abuhlail、V. Jarrar 和 S. Kabbaj, *Commutative rings in which every finitely generated ideal is quasi-projective* 215 2011 2504 2511 ，《纯粹与应用代数杂志》，（），–。2. F. Almahdi、E. M. Bouba 和 M. Tamekkante, *On weakly S-prime ideals of commutative rings* 29 2021 173 186 ，《奥维迪乌斯康斯坦察大学年刊》，（），–。3. D. D. Anderson 和 T. Dumitrescu, *S-Noetherian rings*, 《代数通讯》，30(9)（2002年），4407–4416。4. D. D. Anderson 和 M. Winders, *Idealization of a module*, 《交换代数杂志》，1(1)（2009），3–56。5. C. Bakkari, S. Kabbaj 和 N. Mahdou, *Trivial extensions defined by Prüfer conditions* 214 1 2010 53 60 ，《纯粹与应用代数杂志》，（）（），–。6. F. Couchot, *Gaussian trivial ring extensions and fqp-rings*, 《代数通讯》，43(7)（2015），2863–2874。7. G. De Marco 和 A. Orsatti, *Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal* 30 1971 459 466 ，《美国数学会会刊》，（）–。8. V. Erdo˘gdu, *Coprimely packed rings*。《数论杂志》，28（1988），1–5。9. L. Fuchs 和 L. Salce, *Modules over Non-Noetherian Domains*, 《数学调查与专著》，第 84 卷，美国数学会，普罗维登斯，2001年。10. L. Fuchs 和 L. Salce, *Modules over Valuation Domains*, 《纯粹与应用数学讲义》，第97卷，Marcel Dekker，纽约，1985年。11. R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker，纽约，1972年。12. S. Glaz, *Commutative Coherent Rings*, 《数学讲义》，第1371卷，Springer-Verlag，1989年。13. A. Hamed 和 A. Malek, *S-prime ideals of a commutative ring*, 《代数与几何论文集》，61（2019），533–542。14. A. Hamed, *On S-Mori domains*, 《代数及其应用杂志》，17(9)（2018），1850171。15. A. Hamed, *S-Noetherian spectrum condition*, 《代数通讯》，46(8)（2018），3314–3321。16. J. A. Huckaba, *Commutative Rings with Zero Divisors*, Marcel Dekker，纽约，1988年。

17. S. Kabbaj 和 N. Mahdou, *Trivial extensions defined by coherent-like conditions*, 《交换代数通讯》, 32(1) (2004), 3937–3953。18. H. Kim、M. O. Kim 和 J. W. Lim, *On S-strong Mori domains*, 《代数杂志》, 416 (2014), 314–332。19. H. Kim、N. Mahdou 和 E. H. Oubouhou, *On the S-Krull dimension of a commutative ring* 2024 2650045 , 《代数及其应用杂志》, ( ), 。20. N. Mahdou、A. Mimouni 和 M. A. S. Moutui, *On PM-rings rings of finite character*, , 《代数及其应用杂志》, ( ) ( ), 。21. N. Mahdou、A. Mimouni 和 Y. Zahir, *On 1-1-absorbing prime and weakly 1-absorbing prime ideals* 46 1 2022 101 115 , 《数学问题》, ( ) ( ), –。22. M. Nagata, *Local Rings*, Wiley-Interscience, 纽约, 1962。23. W. Qi、H. Kim、F. G. Wang、M. Z. Chen 和 W. Zhao, *Uniformly S-Noetherian rings* 47 5 2023 1019 1038 , 《数学问题》, ( ) ( ), –。24. C.M. Reis 和 T.M. Viswanathan, *A compactness property for prime ideals in Noetherian rings* 25 1970 353 356 。《美国数学会会刊》, ( ), –。25. E. S. Sevim、T. Arabaci、U. Tekir 和 S. Koc, *On S-prime submodules*, 《土耳其数学杂志》, 43(2) (2019), 1036–1046。26. E. S. Sevim、U. Tekir 和 S. Koc, *S-Artinian rings and finitely S-cogenerated rings*, 《代数及其应用杂志》, 19(3) (2020), 2050051。27. F. Wang 和 H. Kim, *Foundations of Commutative Rings and Their Modules*, 《代数与应用》, 第22卷, Springer, 新加坡, 2016。28. S. Yavuz、B. A. Ersoy、 ̈U. Tekir 和 E. Yetkin C ̧elikel, *On S-2-Prime Ideals of Commutative Rings* 12 11 2024 1636 , 《数学》, ( ) ( ), 。29. E. Yildiz、B. A. Ersoy、 ̈U. Tekir 和 S. Koc, *On S-Zariski topology*, 《交换代数通讯》, 49(3) (2021), 1212–1224。30. X. L. Zhang 和 W. Qi, *Characterizing S-projective modules and S-semisimple rings by uniformity* 15 1 2023 139 149 , 《交换代数杂志》, ( ) ( ), –。

Hwankoo Kim Division of Computer Engineering Hoseo University Asan , , , , 31499 Republic of Korea.
Email address: hkkim@hoseo.edu

Najib Mahdou Department of Mathematics Faculty of Science and Tech- , , , , , nology of Fez Box 2202 University S.M. Ben Abdellah Fez Morocco.
Email address: mahdou@hotmail.com

El Houssaine Oubouhou Department of Mathematics Faculty of Science , , , , , and Technology of Fez Box 2202 University S.M. Ben Abdellah Fez Mo- *Email address*: rocco.
hossineoubouhou@gmail.com