arXiv:2601.08028v1 [math.FA] 12 Jan 2026

框架与概率框架的斜对偶之地

DONGWEI CHEN、EMILY J. KING 和 CLAYTON SHONK WILER

摘要。用于信号抽样与重构的函数或分布往往属于不同的域，例如经典采样中的狄拉克δ函数和带限鼓包函数。斜对偶框架将这一现象加以推广。本文提供了研究斜对偶框架的新工具，并引入斜对偶框架的一个概率变体。我们首先提出斜对偶框架势，并证明当且仅当斜对偶与典范斜对偶相一致时，该势达到最小值。随后，我们定义斜对偶概率框架和斜近似对偶概率框架。特别地，我们证明，对于给定的斜对偶概率框架，当且仅当框架为紧框架且斜对偶为典范斜对偶时，相应的斜对偶概率框架势达到最小值。此外，如果将最小化范围限制在推前型斜对偶概率框架内，则可以去除紧性假设。最后，我们研究斜对偶概率框架的扰动，并证明：若某个概率测度在 2-瓦瑟斯坦拓扑下与一对斜对偶概率框架足够接近，则它构成一个斜近似对偶概率框架。

1. 引言

设 $\mathbf{H}$ 是一个可分希尔伯特空间，$W \subset \mathbf{H}$ 是一个闭子空间。称至多可数序列 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I} \subset W$ 为 W 上的**框架**，如果存在常数 $0 < A \le B$，使得对任意 $\mathbf{f} \in W$，

$$A\|\mathbf{f}\|^2 \le \sum_{i\in I} |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{f}\rangle|^2 \le B\|\mathbf{f}\|^2. \tag{1.1}$$

框架 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 称为 W 上的**紧框架**，如果我们可以取 $A = B$ 并且若 $A = B = 1$，则称为**帕塞瓦尔框架**。若式（1.1）中的上界（但下界可能不成立），则 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 称为 **贝塞尔序列**，其所在空间为 W。

给定任意一个 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 在 W中的框架，可以利用对偶框架 从 W中重构向量：存在另一个框架 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$，属于 W，使得对任意$\mathbf{f} \in W$，

$$\mathbf{f} = \sum_{i\in I} \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_i\rangle \mathbf{v}_i = \overbrace{\sum_{i\in I} \underbrace{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i\rangle}_{\text{sampling}} \mathbf{w}_i}^{\text{reconstruction}}. \tag{1.2}$$

特别地，可以使用典范对偶框架 $\{\mathbf{S}^\dagger \mathbf{w}_i\}_{i\in I}$，其中$\mathbf{S}^\dagger$ 是框架算子$\mathbf{S}$ 的摩尔–彭若斯逆：$\mathbf{H} \to \mathbf{H}$，其中 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 由$\mathbf{Sf} = \sum_{i\in I}\langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_i\rangle \mathbf{w}_i$给出，对任意$\mathbf{f} \in \mathbf{H}$均成立。

2020 数学学科分类。42C15。关键词和短语。斜对偶框架；斜对偶概率框架；概率一致重构；斜对偶概率框架势；最优传输；

框架最初由 Duffin 和 Schaeffer 引入，用于分析傅里叶级数的扰动 [16]，并已广泛应用于信号处理 [14, 27, 41, 30, 38]，其中信号被建模为希尔伯特空间中的向量$\mathcal{H}$，信号测量或抽样定义为与框架向量取内积，而信号重构则理解为对样本与对偶（或紧）框架向量的加权求和 [23]。当前大多数框架文献也分别将信号抽样和重构称为信号分析和综合。当 W 为有限维时， W 的框架中向量的数量必然有限，我们称之为有限框架。有兴趣的读者可参阅 [10, 46]，了解有关框架和有限框架的更多细节。

如公式（1.2）所示，对偶框架的抽样和重构过程发生在同一个子空间 W中，因为 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 都包含在 W中。然而，在实际应用中，抽样和重构可以跨不同子空间进行。

例 1.1 ([32, 例 2.1] 和 [33, 例 1])。 定义信号空间$PW_{1/4}$为带宽不超过 $[-1/4, 1/4)$ 的所有带限信号组成的空间。根据惠特克 – 奈奎斯特 – 香农 – 染谷采样定理，存在一个函数 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$，其傅里叶变换 $\hat{\ } \phi$ 满足

$$\hat{\phi}(\gamma) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{4} \le \gamma < \frac{1}{4}, \\ \text{decaying continuously to zero}, & \frac{1}{4} \le |\gamma| < \frac{1}{2}, \\ 0, & |\gamma| \ge \frac{1}{2}, \end{cases}$$

并且对于 $T = 1$ （满足奈奎斯特速率 $2T \cdot 1/4 < 1$），有

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(n)\,\phi(t-n) = \overbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle \mathbf{f}, \delta_n \rangle}_{\text{sampling}}\,\phi(t-n)}^{\text{reconstruction}}, \quad \text{for all} \quad \mathbf{f} \in PW_{1/4}.$$

注意，采样空间是 $\operatorname{span}\{\delta_n : n \in \mathbb{Z}\}$，它是缓增分布空间的一个子空间。然而，重构空间是 $\operatorname{span}\{\phi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(\mathbb{R})$，而不是 $PW_{1/4}$，因为 $\overline{\phi} \notin PW_{1/4}$ 和 $\{\phi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 不是 $PW_{1/4}$的框架。因此，采样向量属于一个分布子空间，而重构向量位于 $L^2(\mathbb{R})$ 中。

在不同空间中进行抽样和重构的进一步示例包括：在非规则采样后进行重构 [2, 24]，，校正传感器问题 [44]，，使用一种类框架构造，其中类框架向量具有某些通常无法实现的“良好”性质（例如光滑性） [32, 12]，，以及分解 Besov 空间 [26]。这些及其他考虑促成了斜对偶 [22, 20, 12, 23, 21]以及相关的子空间伪框架（*PFFS*） [32, 31, 33]的发展。随后，斜对偶框架的发展见于例如 [28, 15, 35, 34]。

从另一个角度来看，考虑一个框架 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$，其对应于 W，且其对偶框架为$\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$，属于 W。于是，由公式（1.2）可知，映射 $\mathbf{P}_W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$定义如下：

$$\mathbf{P}_W \mathbf{f} = \sum_{i\in I} \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{v}_i \tag{1.3}$$

满足 $\mathbf{P}_W^2 = \mathbf{P}_W$，且 值域$(\mathbf{P}_W) = W$和 $W^\perp \subseteq$核$(\mathbf{P}_W)$。特别地，$\mathbf{P}_W$是到 W上的正交投影。一个自然的问题是，能否定义一种斜投影，其公式类似于公式（1.3）。

斜对偶框架的数学设定如下。设 H 是一个可分希尔伯特空间， I 是至多可数的指标集。假设 W 和 V 是 H 的闭子空间，且 $\mathbf{H} = W \oplus V^\perp$，其中 $V^\perp$ 是 V 的正交补。设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I} \subset W$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I} \subset V$ 是 H 中的贝塞尔序列，并进一步假设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 分别是 W 和 V 的框架。那么， $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 是 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 在 V 上的斜对偶框架，如果

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \sum_{i\in I}\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i\rangle \mathbf{w}_i, \quad \text{for all} \quad \mathbf{f} \in \mathcal{H},$$

其中映射

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \mathbf{f} \mapsto \sum_{i\in I}\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i\rangle \mathbf{w}_i$$

是 H 沿 $V^\perp$ 到 W 的斜投影。此外， $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 称为采样（或分析）向量，而 V 是采样空间。类似地， $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 称为重构（或合成）向量，而 W 是重构空间。注意，当 $V = W$ 时，斜对偶框架的定义便归结为标准对偶框架的情形。当 H 是有限维时，这些框架是有限的，且指标集 I 是有限的。

本文的研究重点是斜对偶框架势及其概率对应物。本文组织如下。在第2节中，我们介绍斜对偶框架、概率框架和最优传输的一些背景知识与预备结果；最优传输是研究概率框架的关键工具。在第3节中，我们研究 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n = W \oplus V^\perp$上的斜对偶框架势。在此情形下，设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N \subset W$是$W$上的一个框架，其框架算子为 $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i\mathbf{w}_i^*$；并设 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N \subset V$ 是 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 在 V 上的一个斜对偶框架。在定理 3.3中，我们证明了

$$\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j\rangle|^2 \geq d_W,$$

其中， d_W 是 W的维数。此外，当且仅当 $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^N$是典范斜对偶 $\{\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\}_{j=1}^N$ 时，等号成立。我们进一步证明， $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 与 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 之间的混合相干性满足

$$\max_{i\neq j} |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j\rangle|^2 \geq \frac{d_W(N-d_W)}{N^2(N-1)},$$

其中，取等要求存在一个（N, d_W）等角紧框架。

在第4节中，我们引入斜对偶概率框架的概念，其中$\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$。回顾一下， $\mu \in \mathcal{P}_2(W)$ 称为概率框架，适用于 W 若存在 $0 < A \leq B < \infty$ 使得对任意$\mathbf{x} \in W$,

$$A\|\mathbf{x}\|^2 \leq \int_W |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}) \leq B\|\mathbf{x}\|^2.$$

那么，如果存在传输耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)$，使得……，我们称 $\nu \in \mathrm{P}_2(V)$ 是 μ 在 V 上的斜对偶概率框架

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

其中，$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}$ 是沿着 $V^\perp$到 W的斜投影。进一步地，给定$\epsilon \geq 0$，$\nu \in \mathrm{P}_2(V)$称为 μ 在 V上的斜 ϵ近似对偶概率框架，如果存在 $\gamma \in \Gamma(\mu,\ \nu)$使得

$$\left\| \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} \right\| \leq \epsilon.$$

在第5节中，我们引入斜对偶概率框架势。特别地，在定理 5.5中，我们证明，若 $\mu \in \mathscr{P}_2(W)$ 是W上的概率框架，且其界为 $0 < A \leq B$，并且 $\nu \in \mathscr{P}_2(V)$ 是 μ 在 V上的斜对偶，则

$$\int_W \int_V |\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{y}) \geq \frac{A}{B} d_W,$$

且当且仅当 μ是 W 上的紧概率框架，界为$A > 0$，且 ν是典范斜对偶$(\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger)_{\#}\mu$时，等号成立。此外，正如定理 5.3所示，若在推前型斜对偶框架中取最小值，则可以去掉紧性假设。

最后，在第6节中，我们研究斜对 ϵ近似对偶概率框架。我们证明，若一个概率测度在 2-Wasserstein度量下与一对斜对偶足够接近，则它构成一个斜对 ϵ近似对偶概率框架。特别地，定理6.6表明，给定一个概率框架，其斜对偶概率框架是斜对ϵ近似对偶框架集合在2-Wasserstein拓扑中的内点。

2. 预备知识

全文中，H 是一个可分希尔伯特空间，W 和 V 是 H 的闭子空间，且 $\mathrm{H} = W \oplus V^\perp$，其中 $V^\perp$ 是 V的正交补。此外，$\mathbf{P}_W$ 是 H 到 W的正交投影，$\mathbf{0}$ 表示 H 中的零向量，$\mathbf{0}_{n\times n}$ 表示大小为 $n \times n$的零矩阵，$\mathbf{Id}$ 表示大小为 $n \times n$的单位矩阵。我们还用 $\mathbf{x}^t$ 表示向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$的转置。

2.1.斜投影、斜对偶框架与一致重构。下面的定理给出了直和假设 $\mathrm{H} = W \oplus V^\perp$ 的一些等价刻画，并依赖于子空间 W与 V之间的最大夹角 $\theta_{WV} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 这一概念，其定义如下：

$$\cos(\theta_{WV}) := \inf_{\mathbf{f}\in W,\, \|\mathbf{f}\|=1} \|\mathbf{P}_V \mathbf{f}\|.$$

定理 2.1 ([43, 定理 2.3])。设 W 和 V 是可分希尔伯特空间$\mathcal{H}$中的闭子空间。则以下条件等价：

(1) $\mathcal{H} = W \oplus V^\perp$.(2) $\mathcal{H} = V \oplus W^\perp$.(3) $\cos(\theta_{VW}) > 0$ 和$\cos(\theta_{WV}) > 0$.(4) 存在 *Riesz* 基 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$，分别对应 W 和 V，使得 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 与 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 双正交。

接下来我们回顾斜投影的定义，它也可用于定义斜对偶框架。

定义 2.2。设 $\mathrm{H} = W \oplus V^{\perp}$。则 $\boldsymbol{\pi}_{WV^{\perp}}\colon \mathrm{H} \to W$ 称为 H 沿 $V^{\perp}$ 到 W 的斜投影，若对任意 $\mathbf{w} \in W$ 及任意 $\mathbf{v} \in V^{\perp}$，

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^{\perp}}\mathbf{w} = \mathbf{w} \text{ and } \boldsymbol{\pi}_{WV^{\perp}}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

可以验证，$\boldsymbol{\pi}_{WV^{\perp}}$ 是 $\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}}$ 的伴随算子，即 $\boldsymbol{\pi}_{WV^{\perp}} = (\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}})^{*}$。另请注意，$\boldsymbol{\pi}_{WW^{\perp}} = \mathbf{P}_W$ 是到 W 上的正交投影。此外，下面的引理给出了斜投影的基本恒等式。

引理 2.3 ([28, 引理 2。1])。设 W 和 V 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间，使得 $\mathcal{H} = W \oplus V^{\perp}$。则 $\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}}\mathbf{P}_W = \boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}}$ 且 $\mathbf{P}_W\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}} = \mathbf{P}_W$。

证明。由于 $W^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}})$，我们可知

$$\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}}\mathbf{P}_W = \boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}}(\mathbf{P}_W + \mathbf{P}_{W^{\perp}}) = \boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}}.$$

同理，

$$\mathbf{P}_W\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}} = \mathbf{P}_W(\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}} + \boldsymbol{\pi}_{W^{\perp}V}) = \mathbf{P}_W.$$

□

注意，若 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 是 V 上 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 的斜对偶框架，则 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{P}_W\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 是 W 的对偶框架；类似地，$\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{P}_V\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 是 V [12] 的对偶框架。现在我们可以给出斜对偶框架的几个等价且严谨的定义。

定义 2.4 ([12, 引理 3.1])**.** 设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 分别是 W 和 V 的框架，其中 $\mathrm{H} = W \oplus V^{\perp}$。若 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 满足以下等价条件之一，则称其为 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 在 V 上的斜对偶框架：

(1) 对任意 $\mathrm{f} \in W$，$\mathrm{f} = \sum_{i\in I}\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle \mathrm{w}_i$。(2) 对任意 $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$，$\boldsymbol{\pi}_{WV^{\perp}}\mathrm{f} = \sum_{i\in I}\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle \mathrm{w}_i$。(3) 对任意 $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$，$\boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}}\mathrm{f} = \sum_{i\in I}\langle \mathrm{f},\ \mathrm{w}_i\rangle \mathrm{v}_i$。(4) 对任意 $\mathrm{f},\ \mathrm{g} \in \mathrm{H}$，$\langle \boldsymbol{\pi}_{WV^{\perp}}\mathrm{f},\ \mathrm{g}\rangle = \sum_{i\in I}\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle\langle \mathrm{w}_i,\ \mathrm{g}\rangle$。(5) 对任意 $\mathrm{f},\ \mathrm{g} \in \mathrm{H}$，$\langle \boldsymbol{\pi}_{VW^{\perp}}\mathrm{f},\ \mathrm{g}\rangle = \sum_{i\in I}\langle \mathrm{f},\ \mathrm{w}_i\rangle\langle \mathrm{v}_i,\ \mathrm{g}\rangle$。

在这种情况下，$\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 被称为一个斜对偶对。

一致重构的概念最早在 [44], 中提出，这为研究斜对偶框架提供了另一种动机。

定义 2.5. 设 $\{\mathrm{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathrm{v}_i\}_{i\in I}$ 分别是 W 和 V 的框架，其中 W 和 V 是 H 的闭子空间，且 $W \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$。如果对于任意 $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$，都有 $\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle = \hat{}\,\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle$，则称 $\{\mathrm{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathrm{v}_i\}_{i\in I}$ 能够执行一致重构，其中每个 i 均成立。这里，$\mathrm{f} = \sum_{i\in I}\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle \mathrm{w}_i$ 是由 f 重构得到的信号。

定理 2.5 中的假设 $W \cap V^{\perp} = \{0\}$ 在一定程度上是为了确保唯一重构：也就是说，对于任意 f、$\mathrm{g} \in W$，如果对所有 i 都有 $\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle = \langle \mathrm{g},\ \mathrm{v}_i\rangle$，那么 $\mathrm{f} = \mathrm{g}$。事实上，如果 $W \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ 且对所有 i 都有 $\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle = \langle \mathrm{g},\ \mathrm{v}_i\rangle$，那么由于 $\{\mathrm{v}_i\}_{i\in I}$ 是 V 的框架，$\mathrm{f} - \mathrm{g} \in V^{\perp}$。因此，$\mathrm{f} - \mathrm{g} \in W \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$，从而 $\mathrm{f} = \mathrm{g}$。反之，如果存在某个非零 $\mathrm{h} \in W \cap V^{\perp}$，那么对于任意 $\mathrm{f} \in W$，不同的向量 f 和 $\mathrm{g} := \mathrm{f} + \mathrm{h} \in W$ 会产生相同的样本：对所有 i 都有 $\langle \mathrm{f},\ \mathrm{v}_i\rangle = \langle \mathrm{g},\ \mathrm{v}_i\rangle$。

注意，一致重构意味着 $\mathrm{H} = W \oplus V^{\perp}$。为此，假设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 在 H 上进行一致重构。那么对于

ˆ 每个$\mathbf{f} \in \mathbf{H}$，我们知道 $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i \rangle$ 对所有 $i \in I$均成立。由于 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$是 V 的一个框架，这意味着 $\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}} \in V^\perp$。这表示每个$\mathbf{f} \in \mathbf{H}$ 都允许以下分解

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} + (\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}) \in W \oplus V^\perp.$$

由于 $W \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$，这意味着 $\mathbf{H} = W \oplus V^\perp$。

下面的定理形式化地阐明了一致重构与斜对偶框架之间的联系。一致重构与斜投影之间的关系也见图 1。

定理 *2.6*（[20, 定理 1]和 [12, 引理 *3.*1]）。设 $\{w_i\}_{i\in I}$ 和 $\{v_i\}_{i\in I}$是 W 的框架，且 V其中 $H = W \oplus V^\perp$。那么， $\{w_i\}_{i\in I}$和 $\{v_i\}_{i\in I}$ 能够进行一致重构，当且仅当 $\{v_i\}_{i\in I}$ 是 $\{w_i\}_{i\in I}$ˆ ˆ在 V上的斜对偶框架：对于任意$f \in H$， $\pi_{WV^\perp} f = f$，其中$f = \sum_{i\in I} \langle f, v_i \rangle w_i$。

此外，O. Christensen 和 Y. C. Eldar [12]给出了固定框架的所有斜对偶框架的参数化形式，其中固定框架属于 W。

定理 2.7 ([12, 定理 3.2])。设 $\mathcal{H} = W \oplus V^\perp$，且令 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 为 W上的一个框架。那么， $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 在 V 上的斜对偶框架恰好是以下各族：

$$\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I} = \left\{ \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{w}_i + \mathbf{h}_i - \sum_{j\in I} \langle \mathbf{S}^\dagger \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \mathbf{h}_j \right\}_{i\in I},$$

其中， $\{\mathbf{h}_i\}_{i\in I} \subset V$是 $\mathcal{H}$ 上的一个贝塞尔序列，且 $\mathbf{S}^\dagger$ 是框架算子 $\mathbf{S}$ 关于 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 的摩尔–彭若斯逆。

框架 $\{\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{w}_i\}_{i\in I}$称为 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$的典范斜对偶 。文献 [20, 12, 23] 还证明，对于给定的 $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$，在所有使得 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \sum_{i\in I} c_i \mathbf{w}_i$的系数 $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ 中，具有最小 ℓ^2能量的系数序列为 $\{\langle \mathbf{f}\ \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{w}_i \rangle\}_{i\in I}$。使用斜对偶框架进行信号处理时的重构误差可见于 [44, 45, 20, 5]：对于任意 $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$,

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{P}_W \mathbf{f}\| \le \|\mathbf{f} - \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} \mathbf{f}\| \le \frac{1}{\cos(\theta_{WV})} \|\mathbf{f} - \mathbf{P}_W \mathbf{f}\|,$$

其中 $\theta_{WV} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 是子空间 W 与 V 之间的最大夹角。该不等式量化了使用不同的抽样子空间和重构子空间所引入的稳定性与误差。此外，它表明，通过 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}$和斜对偶框架进行重构，至少与将 W 上的正交投影一样准确，误差至多相差一个取决于 W 与 V 之间夹角的因子。

下面是在 $\mathbb{R}^2$ 中斜对偶框架的一个简单示例。

例 2.8. 设 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。令 $W = \text{span}\{\mathbf{x}\}$ 和 $V = \text{span}\{\mathbf{y}\}$。则 $V^\perp = \text{span}\{\mathbf{z}\}$ 且 $\mathbb{R}^2 = W \oplus V^\perp$。显然， $\{\mathbf{x}\}$ 是 W 的一个框架，而 $\{\mathbf{y}\}$ 是 V 的一个框架。并且对于任意 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$，其中 $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{f} = a\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x}.$$

因此， $\{\mathbf{y}\}$ 是 V上的 $\{\mathbf{x}\}$ 的斜对偶框架。

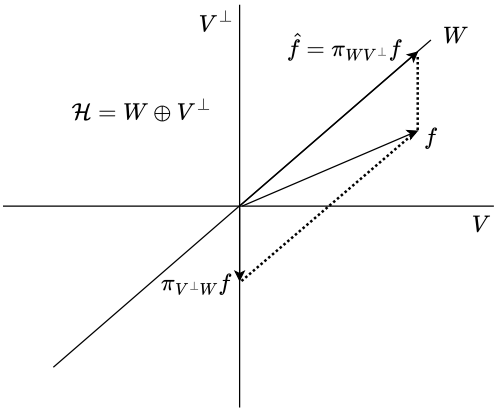


图 1。斜投影与一致重构示意图。这里， W 和 V 是希尔伯特空间 H 的闭子空间，且 H $= W \oplus V^\perp$。 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I} \subset W$和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I} \subset V$不仅是 H 的贝塞尔序列，而且 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in I}$ 分别是 W和 V的框架。此外， $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}$是沿 $V^\perp$将 H 投影到 W 上的斜投影。一致重构要求对于所有$\mathbf{f} \in$H，都有 $\hat{}\,\hat{}\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \mathbf{f}$，其中$\mathbf{f} = \sum_{i\in I}\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i\rangle \mathbf{w}_i$。

2.2. 概率框架与最优传输。 设 P($\mathbb{R}^n$) 为 $\mathbb{R}^n$ 上博雷尔概率测度的集合，$\mathrm{P}_2(\mathbb{R}^n) \subset$ P($\mathbb{R}^n$) 为具有有限二阶矩的博雷尔概率测度集合。也就是说，如果 $\mu \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}^n)$, 则其二阶矩满足

$$M_2(\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|^2 d\mu(\mathbf{x}) < +\infty.$$

$\mu \in$ P($\mathbb{R}^n$) 的支撑定义为

$$\mathrm{supp}(\mu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{for any } r > 0,\, \mu(B_r(\mathbf{x})) > 0\},$$

其中， B_r(**x**) 是以**x** 为中心、半径为 $r > 0$的开球。如果 $\mu \in$ P($\mathbb{R}^n$)和 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是博雷尔可测映射，其中 n 可能不同于 m，那么$f_{\#}\mu \in$ P($\mathbb{R}^m$)称为 μ 在映射 f下的推前，定义为

$$f_{\#}\mu(E) := (\mu \circ f^{-1})(E) = \mu\big(f^{-1}(E)\big) \text{ for any Borel set } E \subset \mathbb{R}^m.$$

如果 f 是线性的，并且相对于某个基由矩阵**A** 表示，那么$\mathbf{A}_{\#}\mu$用于表示 $f_{\#}\mu$。特别地，**(Id** f**)**用于表示从 $\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$的映射，其定义为**x** $\mapsto$**(x** f**(x))**。在这种情况下，**(Id** f**)**$_{\#}\mu$是$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 上的概率测度，其支撑位于 f的图上。

有限框架可以视为离散概率测度。因此，可以使用概率工具（即最优传输）来研究框架。设$\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 是一个具有界 $0 < A \le B$ 的有限框架，其对应子空间为 W，位于欧几里得N空间 $\mathbb{R}^n$中。令 $\mu_f := \frac{1}{N}\sum \delta_{\mathbf{x}_i} \in \mathscr{P}(W)$，则式 （1.1）$_{i=1}$中的框架定义变为

$$\frac{A}{N}\|\mathbf{x}\|^2 \le \int_W |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu_f(\mathbf{y}) \le \frac{B}{N}\|\mathbf{x}\|^2, \text{ for any } \mathbf{x} \in W.$$

受这一观察的启发，Ehler [17]引入了概率框架的概念。随后，Ehler 和 Okoudjou 研究了概率框架势 [18]，并对这一领域进行了综述，特别强调了它与最优传输的联系 [19]。注意，当 $W \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集时（例如子空间），$\mu \in \mathcal{P}(W)$ 表示我们可以将测度扩展为 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 上的测度，方法是将开集 $\mathbb{R}^n \setminus W$ 的测度设为零。我们也用 μ表示这个扩展后的测度。

定义 2.9。设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。$\mu \in \mathrm{P}(W)$ 称为 W 的一个概率框架，如果存在 $0 < A \leq B < \infty$，使得对任意$\mathbf{x} \in W$，

$$A\|\mathbf{x}\|^2 \leq \int_W |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}) \leq B\|\mathbf{x}\|^2.$$

概率框架 μ 称为紧，如果我们可以选取 $A = B$；如果 $A = B = 1$，则称其为帕塞瓦尔。此外，如果上界成立（但下界可能不成立），则 μ 是 W 的贝塞尔概率测度。

对于 W 上的概率框架 μ，也可以将其<格框架算子 $\mathbf{S}_\mu$ 定义为如下对称半正定矩阵

$$\mathbf{S}_\mu := \int_W \mathbf{y}\mathbf{y}^t d\mu(\mathbf{y}).$$

概率框架可以通过其框架算子来刻画。

命题 *2.10*（[19, 定理 *12*.1] 和 [36, 命题 *3*.1]）。设 $\mu \in P(W)$。那么，μ 是 W 上的概率框架，当且仅当 $\mu \in P_2(W)$ 且 $span\{supp(\mu)\} = W$。此外，若 $\mu \in P_2(W)$，则 μ是 W上的概率框架，当且仅当 S_μ 在 W 上的限制是正定的；而 μ 是 W 上界为 $A > 0$ 的紧概率框架，当且仅当 $S_\mu = A\, P_W$，其中 P_W 是将 $\mathbb{R}^n$ 投影到 W上的正交投影。

由于 W 上的概率框架具有有限二阶矩，它们自然属于 $\mathrm{P}_2(W)$，因此可以借助最优传输和 2-瓦瑟斯坦距离 [19, 48]进行研究。给定 W上的两个概率框架 μ和 ν，设 $\Gamma(\mu, \nu)$ 是边缘分布为 μ和 ν的传输耦合集合，即

$$\Gamma(\mu, \nu) := \left\{ \gamma \in \mathcal{P}(W \times W) : \pi_{x\#}\gamma = \mu,\ \pi_{y\#}\gamma = \nu \right\},$$

其中 π_x、π_y 是分别投影到$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 坐标的投影：对于任意 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，$\pi_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$ 且 $\pi_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$。2-瓦瑟斯坦距离 $W_2(\mu, \nu)$ 常用于衡量 μ 与 ν 之间的距离：

$$W_2(\mu, \nu) := \left(\inf_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)} \int_{W \times W} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \, d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right)^{1/2}.$$

即使只关注有限框架，这也很有意义，因为 2-瓦瑟斯坦距离可以衡量由基数不同的有限框架所诱导的概率框架之间的距离。有关最优传输和瓦瑟斯坦距离的详细信息，请参阅 [25]。

令 W 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，且 $\mu \in \mathrm{P}_2(W)$。与上文一样，考虑将 μ（我们也称之为 μ）扩展到 $\mathrm{P}(\mathbb{R}^n)$，并令 $\mathbb{R}^n \setminus W$ 的测度为零。于是，我们可以通过补零将任意可测的 $f : W \to \mathbb{R}$ 扩展到 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，或者

限制任意 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 到 $W \to \mathbb{R}$，从而得到 $L^2(\mu,\ W) \cong L^2(\mu,\ \mathbb{R}^n)$。此外，注意到 $\mu \in \mathrm{P}_2(W)$ 也蕴含 $\mu \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}^n)$，因为

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|^2 d\mu(\mathbf{x}) = \int_W \|\mathbf{x}\|^2 d\mu(\mathbf{x}) < +\infty.$$

因此，对于 $\mu \in \mathrm{P}_2(W)$，其分析算子 $U_\mu\colon\ \mathbb{R}^n \to L^2(\mu,\ W)$ 由 $(U_\mu \mathbf{x})(\cdot) = \langle \mathbf{x}\ \cdot\rangle \in L^2(\mu,\ W)$ 给出，是良定义的（有界的），因为对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，

$$\|U_\mu \mathbf{x}\|^2 = \int_W |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}) \le \|\mathbf{x}\|^2 M_2(\mu).$$

那么，其伴随（合成）算子 $U_\mu^*\colon\ L^2(\mu,\ W) \to \mathbb{R}^n$ 存在，并由下式给出

$$U_\mu^*(\psi) = \int_W \mathbf{x}\psi(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}).$$

可以验证，作为 $\mathbb{R}^n$ 上的映射，框架算子满足 $\mathbf{S}_\mu = U_\mu^* U_\mu$。

与框架类似，可以使用对偶概率框架重构信号，它们也被称为传输对偶 [48]。

定义 2.11。设 μ 是 W 的概率框架。$\nu \in \mathrm{P}_2(W)$ 被称为 μ 在 W 上的对偶概率框架，如果存在 $\gamma \in \Gamma(\mu,\ \nu)$ 使得

$$\int_{W\times W} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{P}_W,$$

这等价于以下陈述：对于任意$\mathbf{f} \in W$, $\int_{W\times W} \mathbf{x}\langle \mathbf{y},\ \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \mathbf{f}$。

注意，$\nu \in \mathrm{P}_2(V)$ 自动蕴含（通过扩张）$\nu \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}^n)$，并且仍可定义 $\Gamma(\mu,\ \nu)$: $= \{\gamma \in \mathrm{P}(W \times V) : \pi_{x\#}\gamma = \mu,\ \ \pi_{y\#}\gamma = \nu\}$。此外，若 $\gamma \in \Gamma(\mu,\ \nu)$，则 $\gamma \in \mathrm{P}_2(W \times V)$ 也蕴含 $\gamma \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，也就是说，

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

设 μ 是 W 的一个概率框架，且 $\mathbf{S}_\mu^\dagger$ 是 $\mathbf{S}_\mu$ 的摩尔–彭若斯逆。于是 $\mathbf{S}_{\mu\#}^\dagger \mu$ 称为 μ 在 W 上的典范对偶框架，因为

$$\int_{W\times W} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d(\mathbf{Id}, \mathbf{S}_\mu^\dagger)_\# \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_W \mathbf{x}\mathbf{x}^t d\mu(\mathbf{x})\ \mathbf{S}_\mu^\dagger = \mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\mu^\dagger = \mathbf{P}_W,$$

其中最后一个等式由定理 2.12得出。类似地，$(\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}}{}_\# \mu$ 称为 μ 在 W 上的规范帕塞瓦尔框架，因为

$$\int_W \mathbf{x}\mathbf{x}^t d(\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}}{}_\# \mu(\mathbf{x}) = (\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{1/2} \mathbf{S}_\mu (\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{1/2} = \mathbf{P}_W.$$

引理 2.12. 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子空间，μ 是 W 的一个概率框架，其框架算子为 $\mathbf{S}_\mu$。则 $\mathrm{Ran}(\mathbf{S}_\mu) = W$ 且 $\mathrm{Ker}(\mathbf{S}_\mu) = W^\perp$。此外，$\mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\mu^\dagger$、$\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{S}_\mu$以及 $(\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{1/2} \mathbf{S}_\mu (\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{1/2}$ 都是从 $\mathbb{R}^n$ 到子空间 W的正交投影。

证明。根据摩尔–彭若斯逆的标准性质，$\mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\mu^\dagger$ 是到 $\mathbf{S}_\mu$ 值域上的正交投影。由于 μ 是 W的概率框架，因此根据 定理 2.10，μ 支撑于 W。于是，对任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{S}_\mu \mathbf{f} = \int_W \langle \mathbf{f},\ \mathbf{x}\rangle \mathbf{x} d\mu\ (\mathbf{x}) \in W.$$

也就是说，值域($\mathbf{S}_\mu$) $\subseteq W$。另请注意， $W^\perp \subseteq$核($\mathbf{S}_\mu$)，因为对任意$\mathbf{f} \in W^\perp$，$\mathbf{S}_\mu\mathbf{f} = \mathbf{0}$。如果我们能证明核($\mathbf{S}_\mu$) $= W^\perp$，那么由秩-零化度定理可得

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ran}(\mathbf{S}_\mu)) + \mathrm{Dim}(W^\perp) = n,$$

从而 Ran($\mathbf{S}_\mu$) $= W$。

现在证明 Ker($\mathbf{S}_\mu$) $= W^\perp$。设 $\mathbf{f} \in$Ker($\mathbf{S}_\mu$)。由于 $\mathbf{f} = \mathbf{f}_W + \mathbf{f}_{W^\perp}$，其中 $\mathbf{f}_W \in W$且 $\mathbf{f}_{W^\perp} \in W^\perp$，我们有 $\mathbf{S}_\mu\mathbf{f}_{W^\perp} = \mathbf{0}$，从而

$$\mathbf{0} = \mathbf{S}_\mu\mathbf{f} = \mathbf{S}_\mu(\mathbf{f}_W + \mathbf{f}_{W^\perp}) = \mathbf{S}_\mu\mathbf{f}_W.$$

由于 μ 是 W的概率框架，因此 $\mathbf{S}_\mu$ 在 W 上的限制映射根据定理 2.10是单射，所以 $\mathbf{0} = \mathbf{S}_\mu\mathbf{f}_W$意味着 $\mathbf{f}_W = \mathbf{0}$。因此，$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{W^\perp} \in W^\perp$，我们得出 $\mathrm{Ker}(\mathbf{S}_\mu) = W^\perp$。

现在我们已经证明 Ran($\mathbf{S}_\mu$) $= W$，因此 $\mathbf{S}_\mu\mathbf{S}_\mu^\dagger$ 是将 $\mathbb{R}^n$ 正交投影到 W上的正交投影。由于 $\mathbf{S}_\mu$ 是对称的，因此 $\mathbf{S}_\mu^\dagger\mathbf{S}_\mu$ 也是到 W上的正交投影。最后，$\mathbf{S}_\mu$ 的谱分解表明，$(\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{1/2}\mathbf{S}_\mu(\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{1/2}$ 是将 $\mathbb{R}^n$ 正交投影到子空间 W上的正交投影。□

我们还需要下面的粘合引理，这是最优传输中的一个标准工具，可用于将两个传输耦合“粘合”在一起。类似于 π_x 和 π_y，令π_{xy} 和π_{yz} 为对应坐标上的正交投影，即对于任意 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\pi_x(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{x},\ \pi_y(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{y},\ \pi_{xy}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \pi_{yz}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

引理 *2.13*（粘合引理 [25, 第 59] 页）。令 W_1、W_2 和 W_3 为$\mathbb{R}^n$ 的子空间，并分别属于 $\mu_1 \in P_2(W_1)$、$\mu_2 \in P_2(W_2)$ 和 $\mu_3 \in P_2(W_3)$。假设$\gamma^{12} \in \Gamma(\mu_1, \mu_2) \subset P(W_1 \times W_2)$ 且 $\gamma^{23} \in \Gamma(\mu_2, \mu_3) \subset P(W_2 \times W_3)$，满足$\pi_{y\#}\gamma^{12} = \mu_2 = \pi_{x\#}\gamma^{23}$。那么存在 $\gamma^{123} \in P(W_1 \times W_2 \times W_3)$，使得$\pi_{xy\#}\gamma^{123} = \gamma^{12}$ 且 $\pi_{yz\#}\gamma^{123} = \gamma^{23}$。

3. 斜对偶框架势

本节中，我们考虑斜对偶框架势，其中 $\mathbf{H}$ 是 n 维复空间 $\mathbb{C}^n$，而 W 和 V 是满足 $\mathbb{C}^n = W \oplus V^\perp$ 的子空间。框架势由 Benedetto 和 Fickus [4]，引入，他们证明有限单位范数紧框架是该势的唯一极值解。框架势是框架 Gram 矩阵各分量的 2-范数；对其他 p-范数以及概率框架的推广见 [18]。内积的这类 p-范数在球面设计中也很有研究价值；例如参见 [40]。对偶框架势由 [11]，引入，作者在那里给出了对偶 2-框架势的一个下界，其极小化者正是典范对偶。随后， [1]，进一步开展了相关研究，他们将对偶框架势称为“交叉框架势”，并将其推广到融合框架。在 [8]，中，研究者引入了概率对偶 2-框架势。

我们的贡献在于研究斜对偶框架上的 p-势；我们得到的一些结果恢复了先前关于对偶框架的结果，因为当 $W = V$时，对偶框架就是斜对偶框架。注意，$\mathbf{v}^*$ 表示向量$\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$的共轭转置， N 表示向量 $\{\mathbf{v}_i\}_i$ （分别为$\{\mathbf{w}_i\}_i$）的数量， d_W表示 W的维数，其中 $d_W \leq \min\{n, N\}$。我们用$\mathbf{S}^\dagger$表示矩阵$\mathbf{S}$的摩尔–彭若斯逆。按照惯例，内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$

在 $\mathbb{C}^n$ 中对第一个输入是线性的，对第二个输入是共轭线性的：对于$\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$，$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^*\mathbf{x}$。因此，秩一算子$\mathbf{w}\mathbf{v}^*$的作用为$\mathbf{f} \mapsto \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \mathbf{w}$。

我们首先从斜对偶 p框架势的定义开始。我们将证明，对于 W上的给定框架，其斜对偶2-框架势由典范斜对偶达到最小值，这推广了 [11, 定理 2。2]关于对偶2-框架势的结论。

定义 3.1。设 $\mathbb{C}^n = W \oplus V^\perp$ 且 $p > 0$。令 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 为 W的一个框架，且 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 为 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 在 V上的一个斜对偶框架。则 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 与 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 之间的斜对偶 p-框架势定义为

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^p.$$

当 $p = 2$ 时，我们通常省略该参数，并将此势称为斜对偶框架势。

下面的引理推广了文献 [1] 中关于对偶框架的命题 24。

引理 3.2。设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 为 W 的一个框架，且 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 为$\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 在 V上的一个斜对偶框架，其中 $\mathbb{C}^n = W \oplus V^\perp$。则

$$\sum_{i=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle|^2 \geq \frac{d_W^2}{N}.$$

此外，当且仅当对每个 i，$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \frac{d_W}{N}$ 时，等号成立。—

证明。由于 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 是 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 的斜对偶框架，因此 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^*$。因此，

$$\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \operatorname{trace}\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^* \right) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}) = d_W.$$

根据柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$\sum_{i=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle|^2 \geq \frac{\left| \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle \right|^2}{N} = \frac{d_W^2}{N},$$

且当且仅当向量 $(\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle)_{i=1}^N$ 是全 1 向量的数乘，即存在常数 C，使得对每个 i，$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle = C$。计算得 $C = \frac{d_W}{N}$。□

—

命题 3.3。设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 是 W 上的一个框架，其框架算子为 $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^*$，且 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 是 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 在 V 上的一个斜对偶框架，其中 $\mathbb{C}^n = W \oplus V^\perp$。则

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^2 \geq d_W,$$

且当且仅当 $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^N$ 是典范斜对偶 $\{\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{w}_j\}_{j=1}^N$。证明。对于任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^n$，[20, 命题 4]表明，在所有满足 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \sum c_i \mathbf{w}_i$ 的系数$_N\{c_i\}_{i=1}^N \in \ell^2(\{1, \ldots, N\})$ 中，系数序列$_{i=1}$

具有最小 ℓ^2-范数的是 $\{\langle \mathbf{f} \ \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_i\rangle\}_{i=1}^N$。换言之，

$$\sum_{i=1}^N |c_i|^2 \geq \sum_{i=1}^N |\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_i\rangle|^2$$

并且，当且仅当对每个 i，$c_i = \langle \mathbf{f} \ \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_i\rangle$ 时，等号成立。由于 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 是 V 上 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 的斜对偶框架，因此，对于任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \sum \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i\rangle \mathbf{w}_i$.$_{i=1}$ 因此，

$$\sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_j\rangle|^2 \geq \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\rangle|^2 \tag{3.1}$$

并且，当且仅当对每个 j，$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$ 时，等号成立。

设 $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_N) \in \mathbb{C}^{n\times N}$，则 $\mathbf{S} = \mathbf{W}\mathbf{W}^*$。在上述等式中令 $\mathbf{f} = \mathbf{w}_i$，并对 i 求和，得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j\rangle|^2 &\geq \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\rangle|^2 = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N |\langle \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{w}_i, \mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\rangle|^2 = \|\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}\|_{\text{Frob}}^2 \\
&= \operatorname{trace}((\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W})^*\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}) = \operatorname{trace}(\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}) \\
&= \operatorname{trace}(\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}) = \operatorname{trace}(\mathbf{W}\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger) = \operatorname{trace}(\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger) = \operatorname{trace}(\mathbf{P}_W) \\
&= d_W,
\end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|_{\text{Frob}}$ 是矩阵弗罗贝尼乌斯范数，等式依据矩阵迹的循环性质，以及以下事实：$\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}^* = \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}$ 且 $\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{P}_W$。（参见引理 2.12 并考虑 $\mu := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{w}_i}$。）当 $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$ 对每个 j 成立时，等号显然成立。反过来，若等号成立，则对每个 $\mathbf{w}_i$，必有

$$\sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\rangle|^2.$$

由等式 (3.1)中的等号条件可知，$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$ 对每个 j 均成立。 □

现在，我们将定理 3.2 和定理 3.3 从斜对偶 2-框架势推广到斜对偶 $2k$-框架势，其中 $k \geq 1$。

推论 3.4。设 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 是 W 的一个框架，其框架算子为 $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i\mathbf{w}_i^*$，且 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 是 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 在 V 上的一个斜对偶框架，其中 $\mathbb{C}^n = W \oplus V^\perp$。另外假设 $p = 2k$，其中 $k \geq 1$。则

$$\sum_{i=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i\rangle|^p \geq N^{1-p}d_W^p \quad \textit{and} \quad \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j\rangle|^p \geq N^{2-p}d_W^{\frac{p}{2}}.$$

此外，当 $k > 1$ 时，左侧不等式取等当且仅当 $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i\rangle = \frac{d_W}{N}$ 对所有 i 均成立；右侧不等式取等当且仅当 $|\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j\rangle|$ 对所有 i 和 j 均为常数，并且对每个 j 都有 $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$。

证明。 我们只证明右侧不等式。左侧不等式的证明几乎完全相同，但使用定理 3.2来分析取等。由于映射 $|\cdot|^k:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 是凸的，詹森不等式和 定理 3.3 推出

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|^p = N^2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N^2}|\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|^{2k}$$

$$\geq N^{2-2k}\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|^2\right|^k \tag{3.2}$$

$$\geq N^{2-2k}d_W^k = N^{2-p}d_W^{\frac{p}{2}}. \tag{3.3}$$

当 $k>1$时，映射 $|\cdot|^k:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 是严格凸的。当且仅当 3.2) 取等时，$|\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|$ 对任意 i 和 j均为常数；而 3.3) 取等可由定理 3.3推出。 □

下一个定理的灵感来自 [11, 定理 2.3 和命题 2.4], ，其中作者为对偶框架的混合相干性给出了一个下界。我们将他们的结果推广到斜对偶框架的情形，并完善了标准对偶情形下的证明。若一族单位范数向量 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^N$ 属于 $\mathbb{C}^n$ ，则称其为 (N,n)-等角紧框架 (ETF)，如果 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^N$ 是紧框架，且存在一个 $\alpha\geq 0$，使得对任意 $i\neq j$，$|\langle \mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j\rangle|^2=\alpha$。对于 $\mathbb{C}^n$ 中任意一组单位范数向量$\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^N$，其中 $N\geq n$，其相干性 为 $\max_{i\neq j}|\langle \mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j\rangle|^2$。已有研究表明（例如， [47]） ，相干性满足

$$\max_{i\neq j}|\langle \mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j\rangle|^2\geq\frac{N-n}{n(N-1)}, \tag{3.4}$$

且等号成立当且仅当 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^N$ 是一个 ETF。(3.4) 中的不等式称为 *Welch-Rankin* 界。ETF 在编码理论 [37],、通信系统 [41], 和量子信息处理中有应用 [49, 39]。ETF 的构造与存在性受到了广泛关注 [42, 29, 6, 3],，其中包括著名的 Zauner 猜想，即关于存在由 n^2 个向量组成的 ETF 的猜想，向量属于 $\mathbb{C}^n$ [49, 3]。在下述定理中，我们证明，斜对偶的混合相干性达到等号，当且仅当存在一个$(N,\ d_W)$-ETF，且该斜对偶为典范斜对偶。

定理 3.5。 设 W和 V是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间，且满足 $\mathbb{C}^n=W\oplus V^\perp$。令 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 为 W 的一个框架，其框架算子为 $\mathbf{S}$，且 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 是 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 在 V上的一个斜对偶框架，满足 $\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_i\rangle=\langle \mathbf{w}_j,\mathbf{v}_j\rangle$ 对所有 i 和 j均成立。则

$$\max_{i\neq j}|\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|^2\geq\frac{d_W(N-d_W)}{N^2(N-1)}.$$

此外，当且仅当以下任一等价条件成立时，等式成立：

(1) 对于任意 $i\neq j$, $|\langle \mathbf{w}_i,\ \mathbf{v}_j\rangle|$ 是常数，且$\mathbf{v}_j=\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$，对每个 j均成立。
(2) $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 与 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 之间的混合格拉姆矩阵$\mathbf{G}=(\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle)_{ij}$ 为

$$\mathbf{G}=\frac{d_W}{N}\left(\mathbf{Id}_{N\times N}+\sqrt{\frac{N-d_W}{d_W(N-1)}}\mathbf{Q}\right),$$

其中，$\mathbf{Id}_{N\times N}$ 是大小为 $N\times N$ 的单位矩阵，而$\mathbf{Q}$ 是广义符号矩阵（自伴、对角线为零，且对角线外的元素模为一）。

(3) 对每个 i，定义 $\boldsymbol{\psi}_i := \sqrt{\frac{N}{d_W}}(\mathbf{S}^\dagger)^{\frac{1}{2}}\mathbf{w}_i$。那么，对于每个 j，$\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^N$ 是 W 上的一个 (N, d_W)-等角紧框架，且 $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$。

证明。由于 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 是 V 上 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 的斜对偶，且 $\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_i\rangle$ 为常数，因此对每个 i，有 $\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_i\rangle = \frac{d_W}{N}$，因为

$$\sum_{i=1}^N\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_i\rangle = \operatorname{trace}\left(\sum_{i=1}^N\mathbf{w}_i\mathbf{v}_i^*\right) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}) = d_W.$$

因此，

$$\begin{aligned}\max_{i\neq j}|\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|^2 &\geq \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j}|\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|^2\\ &= \frac{1}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N|\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|^2 - \sum_{i=1}^N|\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_i\rangle|^2\right)\\ &\geq \frac{1}{N(N-1)}\left(d_W - \frac{d_W^2}{N}\right) = \frac{d_W(N-d_W)}{N^2(N-1)},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 定理 3.3 和 $d_W \geq \frac{d_W^2}{N}$(因为 $d_W \leq N$) 得出。因此，当且仅当 $|\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|$ 对所有 $i\neq j$ 均为常数，且（根据 定理 3.3中的等号条件）$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$ 对每个 j均成立，其中$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N\mathbf{w}_i\mathbf{w}_i^*$。因此，等号成立等价于 (1)。

进而，(1) 蕴含 $|\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle| = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{d_W}{(N-d_W)N-1}}$对任意 $i\neq j$均成立，因此 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 与 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 之间的混合格拉姆矩阵$\mathbf{G}$ 可写为

$$\mathbf{G} = \frac{d_W}{N}\left(\mathbf{Id}_{N\times N} + \sqrt{\frac{N-d_W}{d_W(N-1)}}\mathbf{Q}\right),$$

其中$\mathbf{Id}_{N\times N}$ 是大小为 $N\times N$ 的单位矩阵，$\mathbf{Q}$ 是一个对角线为零、非对角线元素模为一的矩阵。此外，(1) 得出混合格拉姆矩阵的 i,j 项为

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathbf{w}_i,\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\right\rangle = \left\langle\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{w}_i,\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\right\rangle = \left\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j\right\rangle\\ &= \left\langle(\mathbf{S}^{1/2})^\dagger\mathbf{w}_i,(\mathbf{S}^{1/2})^\dagger\mathbf{w}_j\right\rangle = \overline{\left\langle(\mathbf{S}^{1/2})^\dagger\mathbf{w}_j,(\mathbf{S}^{1/2})^\dagger\mathbf{w}_i\right\rangle} = \overline{\langle\mathbf{w}_j,\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_i\rangle},\end{aligned}$$

因此$\mathbf{Q}$ 是自伴的，且 (1) 蕴含 (2)。反过来，若$\mathbf{G}$如 (2) 所示给定，则对任意 $i\neq j$, $|\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle| = \frac{d_W}{N}\sqrt{\frac{N-d_W}{d_W}\frac{}{N-1}}$()均成立。因此

$$\max_{i\neq j}|\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|^2 = \frac{d_W(N-d_W)}{N^2(N-1)},$$

这就推出了 (1)。

最后，我们来证明 (2) 和 (3) 等价。定义矩阵 $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_N)$,$\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_N)$, 以及 $\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{\psi}_1,\cdots,\boldsymbol{\psi}_N)$，其中 $\boldsymbol{\Psi} = \sqrt{\frac{N}{d_W}}(\mathbf{S}^\dagger)^{\frac{1}{2}}\mathbf{W}$。因此，

$\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi} = \frac{N}{d_W}\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}$。若 (2) 成立，则等式成立，因此对每个 j，都有 $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$。因此 $\mathbf{V} = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}$，并且

$$\frac{d_W}{N}\left(\mathbf{I}_{N\times N} + \sqrt{\frac{N-d_W}{d_W(N-1)}}\mathbf{Q}\right) = \mathbf{G} = \mathbf{V}^*\mathbf{W} = \mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger(\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{W}) = \mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}.$$

因此，$\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^N$ 的 Gram矩阵为

$$\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi} = \tfrac{N}{d_W}\mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W} = \mathbf{Id}_{N\times N} + \sqrt{\frac{N-d_W}{d_W(N-1)}}\mathbf{Q} \tag{3.5}$$

而3.4）的 Welch界取等条件意味着 $\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^N$ 是一个(N, d_W)-等角紧框架。反过来，若(3) 成立，则 $\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^N$是一个$(N, d_W)$-等角紧框架，其 Gram矩阵为方程 (3.5)。由于对每个$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$，因此 j，$\mathbf{V} = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}$，从而

$$\begin{aligned}\mathbf{G} = \mathbf{V}^*\mathbf{W} &= \mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger(\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{W}) = \mathbf{W}^*\mathbf{S}^\dagger\mathbf{W}\\ &= \frac{d_W}{N}\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi} = \frac{d_W}{N}\left(\mathbf{Id}_{N\times N} + \sqrt{\frac{N-d_W}{d_W(N-1)}}\mathbf{Q}\right).\end{aligned}$$

□

最后一个推论的灵感来自 [1, 定理 26] 和定理 3.3。注意，定理 3.5 和定理 3.6 中对每个 i，$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i\rangle$ 为常数的条件，在定理1.1中也成立：对每个 j, $\langle \delta_j, \phi_j\rangle = \phi(j-j) = \phi(0)$，其中 δ_j 是位于 j处的狄拉克分布，且 $\phi_j(t) = \phi(t-j)$。此外，定理 3.5 和定理 3.6 中的一个等号条件使斜对偶框架 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 和 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$成为等角的，也就是说，对任意 $i \neq j$，$|\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j\rangle|$ 为常数。

推论3.6。设 W和 V是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间，且满足 $\mathbb{C}^n = W \oplus V^\perp$。令 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 是 W 的一个框架，其框架算子为$\mathbf{S}$，并令 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ 是 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 在 V 上的一个斜对偶框架，使得对所有 i 和 j，均有 $\langle \mathbf{w}_i、\mathbf{v}_i\rangle = \langle \mathbf{w}j、\mathbf{v}_j\rangle$ 。此外，假设 $p = 2k$，其中 $k \geq 1$。那么

$$\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j\rangle|^p \geq \frac{|d_W - \frac{d_W^2}{N}|^{\frac{p}{2}}}{N^{\frac{p}{2}-1}(N-1)^{\frac{p}{2}-1}} + \frac{d_W^p}{N^{p-1}}.$$

此外，当 $k > 1$ 时，等号成立当且仅当对于任意 $i \neq j$, $|\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_j\rangle|$为常数，并且 $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{w}_j$，对每个 j 都成立。

证明。 根据 定理 3.5 的证明，我们知道 $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \frac{d_W}{N}$对每个 i—由于映射 $|\cdot|^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ 是凸的，詹森不等式表明

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^p &= N(N-1) \sum_{i \neq j} \frac{1}{N(N-1)} |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^{2k} \\
&\geq \frac{|\sum_{i \neq j} |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^2|^k}{N^{k-1}(N-1)^{k-1}} \qquad (3.6) \\
&= \frac{|\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^2 - \sum_{i=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle|^2|^k}{N^{k-1}(N-1)^{k-1}} \\
&= \frac{|\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^2 - \frac{d_W^2}{N}|^{\frac{p}{2}}}{N^{\frac{p}{2}-1}(N-1)^{\frac{p}{2}-1}}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^p &= \sum_{i \neq j} |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^p + \sum_{i=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle|^p \\
&\geq \frac{|\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|^2 - \frac{d_W^2}{N}|^{\frac{p}{2}}}{N^{\frac{p}{2}-1}(N-1)^{\frac{p}{2}-1}} + \frac{d_W^p}{N^{p-1}} \qquad (3.7) \\
&\geq \frac{|d_W - \frac{d_W^2}{N}|^{\frac{p}{2}}}{N^{\frac{p}{2}-1}(N-1)^{\frac{p}{2}-1}} + \frac{d_W^p}{N^{p-1}}, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

其中（3.7）由（3.6）以及以下事实推出：$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \frac{d_W}{N}$对每个 i，而（3.8）由 定理 3.3 和 $d_W \geq \frac{d_W^2}{N}$得到。 —

当 $k > 1$ 映射 $|\cdot|^k$： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ 是严格凸的，因此（3.6）中的等号成立，当且仅当 $|\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle|$ 对任意 $i \neq j$均为常数。这进一步推出（3.7）的等号条件。对于（3.8）的取等，根据定理 3.5 ，我们已经知道$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{w}_j$对每个 j均成立。 □

本节最后，我们比较定理 3.4、定理 3.5 和定理 3.6 中的常数。在定理 3.4 中，如果 $p > 2$ 且右侧不等式取等，那么计算表明，对于任意 i 和 j,—$|\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle| = \sqrt{\frac{d_W}{N}}$。根据定理 3.5 和定理 3.6 的证明，我们知道，如果对于每个 i，$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle$ 均为常数，那么 $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \frac{d_W}{N}$ 对每个 i均成立；而当定理 3.5 中等号成立时，其证明表明

$$|\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle| = \frac{d_W}{N} \sqrt{\frac{N - d_W}{d_W(N-1)}}, \text{ for any } i \neq j,$$

类似地，对于定理3.6。

4. 斜对偶概率框架

本节中，我们将介绍斜对偶概率框架，它将斜对偶框架推广到概率框架情形。在后续各节中，H 表示欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ ，而 W 和 V 是满足$\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$ 的子空间。从现在起，内积采用 $\mathbb{R}^n$中的标准点积。我们用 $(\cdot)^t$ 表示向量或矩阵的转置，并用 d_W 表示

的维数其中 $1 \le d_W \le n$。首先，我们给出一个刻画，其灵感来自 [12,引理 3。1]。

引理 4.1. 设 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$。令 $\mu \in \mathcal{P}_2(W)$ 和 $\nu \in \mathcal{P}_2(V)$ 为贝塞尔概率测度，其界分别为 $B_\mu > 0$ 和 $B_\nu > 0$，且 $\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)$。则下列条件等价：

(1) 对任意 $\mathbf{f} \in W$，$\mathbf{f} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$。(2) 对任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$。(3) 对任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{f} = \int_{W\times V} \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}\rangle \mathbf{y} d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$。(4) 对任意 $\mathbf{f},\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_{W\times V} \langle \mathbf{x},\mathbf{g}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$。(5) 对任意 $\mathbf{f},\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_{W\times V} \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{g}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$。

如果任一等价条件成立，那么 μ 和 ν 分别是 W 和 V 上的概率框架，其下界分别为 $\frac{1}{B_\nu}$ 和 $\frac{1}{B_\mu}$。此外，μ 和$\mathbf{P}_{W\#}\nu$是 W的对偶框架，而$\mathbf{P}_{V\#}\mu$和 ν是 V的对偶框架。

证明。 显然，(2)蕴含(1)。为证明(1)蕴含(2)，假设(1)成立，并令$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$。那么 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} \in W$，因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} &= \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \boldsymbol{\pi}^*_{WV^\perp}\mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &= \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

此外，(2)等价于 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$。对两边取伴随可得

$$\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} = \boldsymbol{\pi}^*_{WV^\perp} = \int_{W\times V} \mathbf{y}\mathbf{x}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

这等价于(3)。

接下来，显然(2)蕴含(4)。另一方面，若(4)成立，则对于任意$\mathbf{f},\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\langle \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} - \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}), \mathbf{g} \right\rangle = 0,$$

这蕴含(2)。(3)和(5)以类似方式等价。

如果满足任一等价条件，那么由 (4) 可知，对于任意 $\mathbf{f} \in W$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}\|^4 = \left| \int_{W\times V} \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right|^2 &\le \int_W |\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) \int_V |\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle|^2 d\nu(\mathbf{y}) \\ &\le B_\nu \|\mathbf{f}\|^2 \int_W |\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

因此，μ是 W 的概率框架，下界为 $\frac{1}{B_\nu}$，上界为$M_2(\mu)$。类似地，由 (5) 可知，ν 是 V 的概率框架，下界为$\frac{1}{B_\mu}$，上界为 $M_2(\nu)$。此外，由 (1) 可知，对于任意 $\mathbf{f} \in W$,

$$\mathbf{f} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{P}_W\mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_{W\times W} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\tilde{\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

其中 $\tilde{\gamma} := (\mathbf{恒等算子}, \mathbf{P}_W)_\#\gamma \in \Gamma(\mu, \mathbf{P}^{W\#}\nu)$。因此，$\mu$ 和 $\mathbf{P}^{W\#}\nu$ 是 W 的对偶框架。类似地，可以利用 (3) 证明，相对于耦合 $(\mathbf{P}_V, \mathbf{恒等算子})_\#\gamma \in \Gamma(\mathbf{P}_{V\#}\mu, \nu)$，$\mathbf{P}_{V\#}\mu$ 和 ν 是 V 的对偶框架。□

我们给出斜对偶概率框架的如下定义。

定义 4.2. 设 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$ and $\mu \in \mathrm{P}_2(W)$。若存在 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$，使得 $\nu \in \mathrm{P}_2(V)$ 称为 μ 在 V 上的斜对偶概率框架，则

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

当然，在这个定义中，我们也可以使用定理 4.1中的任何一个等价条件。

下文中，我们常将斜对偶概率框架称为斜对偶框架，或简称斜对偶。特别地，若 $T : W \to V$ 可测，且 $T_{\#}\mu$ 是 μ 关于 $(\mathbf{Id}\ T)_{\#}\mu \in \Gamma(\mu, T_{\#}\mu)$ 的斜对偶，则称 $T_{\#}\mu$ 为推前型斜对偶概率框架。

推前型斜对偶包括有限框架的所有斜对偶。为说明这一点，设 $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{w}_i}$ 是关于 W、T 的概率框架：$W \to V$ 是可测的，并且

$$\nu = T_{\#}\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{T(\mathbf{w}_i)}$$

是关于 V 的概率框架。若 ν 是相对于 $(\mathbf{Id}\ T)_{\#}\mu$ 的 μ 的斜对偶，则

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} = \int_W \mathbf{x}\,(T(\mathbf{x}))^t\, d\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i \left(\frac{1}{N}T(\mathbf{w}_i)\right)^t,$$

这意味着 $\{\frac{1}{N}T(\mathbf{w}_i)\}_{i=1}^N$ 是 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^N$ 在 V 上的斜对偶框架。在这种解释下，对于斜对偶框架的一致重构，我们仍然需要直和结构 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$。此外，对于任意信号$\mathbf{f} \in\mathbb{R}^n$，若将重构信号 $\mathbf{f}$ 记为

$$\hat{\mathbf{f}} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{f}, T(\mathbf{w}_i)\rangle \mathbf{w}_i,$$

则必有 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \mathbf{f}$，这等价于由 定- 理 2.6给出的一致重构。类似于 定理 2.5，我们有以下关于概率一致重构的定义，它刻画了斜对偶概率框架。

定义4.3。设 μ 和 ν 分别是 W 和 V 的概率框架，其中 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$。若存在 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$，使得对于任意$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$，$\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle$，对于 ν-几乎处处的$\mathbf{z} \in V$，其中$\mathbf{f}$ 是由下式给出的重构信号，则称 μ 和 ν 执行概率一致重构：

$$\hat{\mathbf{f}} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

定理4.4。设 μ 和 ν 分别是 W 和 V 的概率框架，其中$\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$。当且仅当 ν 是 V上的 μ 的斜对偶概率框架时，μ 和 ν 执行概率一致重构。

证明。设 ν 是 V上的 μ 斜对偶概率框架。那么存在 $\gamma \in \Gamma(\mu,\ \nu)$，使得

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

ˆ 因此，对于任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$、$\mathbf{f} = \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}$以及所有 $\mathbf{z} \in V$，

$$\langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{z}\rangle = \langle \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle,$$

这意味着 μ 和 ν 进行概率一致重构。

反之，若 μ 和 ν 进行概率一致重构，则存在ˆ $\tilde{\gamma} \in \Gamma(\mu, \nu)$，使得对任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ 以及对 ν 几乎所有的 $\mathbf{z} \in V$，都有 $\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle$，其中

$$\hat{\mathbf{f}} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

ˆ 对于给定的 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$，令 $\mathscr{A}_\mathbf{f} := \{\mathbf{y} \in V\colon \langle \mathbf{f}, \mathbf{y}\rangle \neq \langle \mathbf{f}, \mathbf{y}\rangle\}$。根据概率一致重构的假设，我们有 $\nu(\mathscr{A}_\mathbf{f}) = 0$。由于 $\tilde{\gamma} \in \Gamma(\mu, \nu)$，因此 ˆ$\tilde{\gamma}(W \times \mathscr{A}_\mathbf{f}) = \nu(\mathscr{A}_\mathbf{f}) = 0$。两个函数 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle$ 和 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle$仅在 $\tilde{\gamma}$-零测集 $W \times \mathscr{A}_\mathbf{f}$ 上不同，因此

$$\int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \hat{\mathbf{f}}\rangle \, d\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle \, d\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{4.1}$$

现在令

$$\mathbf{F} := \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

ˆ 于是，对于任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{f}$，以及

$$\mathbf{F}^2\mathbf{f} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{f}} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \hat{\mathbf{f}}\rangle d\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{F}\mathbf{f},$$

其中第三个等号正是式（4.1）。因此，$\mathbf{F}$是一个投影。

现在我们的目标是证明 $\mathbf{F} = \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}$，这等价于 $\mathrm{Ran}(\mathbf{F}) = W$和 $\mathrm{Ker}(\mathbf{F}) = V^\perp$。由于 $\tilde{\gamma} \in \Gamma(\mu, \nu)$，$\mu$的支撑包含于 W，且 ν的支撑包含于 V，我们知道 $V^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{F})$ 且 $\mathrm{Ran}(\mathbf{F}) \subseteq W$。

我们首先断言 $\mathrm{Ker}(\mathbf{F}) = V^\perp$。为此，设 $\mathbf{f}_0 \in \mathrm{Ker}(\mathbf{F})$。若存在$\mathbf{z}_0 \in \mathrm{supp}(\nu)$，使得 $\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{z}_0\rangle \neq 0$，则由内积的连续性可知，存在 $\mathbf{z}_0$ 的一个开邻域 $B_{\mathbf{z}_0}$，满足 $\nu(B_{\mathbf{z}_0}) > 0$（因为 $\mathbf{z}_0 \in \mathrm{supp}(\nu)$），使得对任意 $\mathbf{z} \in B_{\mathbf{z}_0}$，$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{z}\rangle \neq 0$。另一方面，概率一致重构意味着对于 ν-几乎所有的 $\mathbf{z} \in V$，

$$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{z}\rangle = \langle \hat{\mathbf{f}}_0, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{F}\mathbf{f}_0, \mathbf{z}\rangle = 0.$$

由此矛盾可得，对于 $\mathrm{supp}(\nu)$ 中的所有 $\mathbf{z}$，$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{z}_0\rangle = 0$。由于 $\mathrm{span}(\mathrm{supp}(\nu)) = V$，这意味着 $\mathbf{f}_0 \in V^\perp$。于是 $\mathrm{Ker}(\mathbf{F}) = V^\perp$。

根据秩-零化度定理，

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ran}(\mathbf{F})) + \mathrm{Dim}(V^\perp) = n.$$

由于 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$ 且 $\mathrm{Ran}(\mathbf{F}) \subset W$，这意味着 $\mathrm{Ran}(\mathbf{F}) = W$。因此，

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

这意味着 ν 是 V 上 μ 的概率斜对偶框架。 □

下面的引理表明，一旦我们得到了给定测度 μ 和 ν的重构公式，就可以在任意满足 $\mathbb{R}^n = W \oplus K^\perp$的子空间 K 上构造 μ 的斜对偶框架。特别地，如果 μ 是 W 的框架，且 ν 是 V上的 μ 的斜对偶框架，那么可以在任意满足 $\mathbb{R}^n = W \oplus K^\perp$的子空间 K 上构造 μ 的斜对偶。

引理 4.5. 设 $W \subset \mathbb{R}^n$ 是一个子空间。假设 $\mu \in \mathscr{P}_2(W)$， $\nu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$，且存在 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$，使得对于任意 $\mathbf{f} \in W$，

$$\mathbf{f} = \int_{W \times \mathbb{R}^n} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

那么，对于任意满足 $\mathbb{R}^n = W \oplus K^\perp$、 $\boldsymbol{\pi}_{KW^\perp \#}\nu$ 是 K上的 μ的斜对偶概率框架的子空间 K。

证明。 注意，对于任意 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{\pi}_{WK^\perp}\mathbf{g} \in W$。于是根据假设，

$$\boldsymbol{\pi}_{WK^\perp}\mathbf{g} = \int_{W \times \mathbb{R}^n} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}_{WK^\perp}\mathbf{g}\rangle d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{W \times \mathbb{R}^n} \mathbf{x}\langle \boldsymbol{\pi}_{KW^\perp}\mathbf{y}, \mathbf{g}\rangle d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

现在令 $\tilde{\gamma} := (\mathbf{Id}\ \boldsymbol{\pi}_{KW^\perp})_\# \gamma \in \Gamma(\mu,\ \boldsymbol{\pi}_{KW^\perp \#}\nu) \subset \mathrm{P}(W \times K)$。那么，对于任意 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$，

$$\boldsymbol{\pi}_{WK^\perp}\mathbf{g} = \int_{W \times K} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{g}\rangle d\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

根据 定理 4.1， $\boldsymbol{\pi}_{KW^\perp \#}\nu$ 是 K上的 μ 的斜对偶概率框架。□

回顾一下，定理 2.7给出了对给定框架在 W中的所有斜对偶框架的参数化。在下面的引理中，我们给出所有推前型斜对偶概率框架的类似参数化。此外，$(\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger)_\# \mu$ 称为 典范斜对偶概率框架 μ。

命题 4.6。 设 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$，且 $\mu \in \mathscr{P}_2(W)$ 是 W 的一个概率框架，其框架算子为 $\mathbf{S}_\mu$。假设 $T_\# \mu$ 是 μ在 V上的一个斜对偶框架，其中 $T: W \to V$ 可测。那么对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$， T 恰好满足

$$T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}) - \int_W \langle \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle h(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}),$$

其中 $h:\ W \to V$满足 $h_\# \mu \in \mathscr{P}_2(V)$。

证明。 首先注意，若 $T: W \to V$属于上述类型，则 $T_\# \mu \in \mathrm{P}_2(V)$。现在定义 $\gamma = (\mathbf{Id}\ T)_\# \mu \in \Gamma(\mu, T_\# \mu) \subset \mathrm{P}(W \times V)$。于是

$$\begin{aligned}\int_{W \times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_W \mathbf{x}T(\mathbf{x})^t d\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\mu^\dagger \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} + \int_W \mathbf{x}h(\mathbf{x})^t d\mu(\mathbf{x}) \\ - \int_W \mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y}h(\mathbf{y})^t d\mu(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\mu^\dagger$ 是到 W 上的正交投影（参见 定理 2.12）。因此，$T_\# \mu$ 是 μ的斜对偶框架。

反之，如果 $T_\# \mu$ 是 μ的斜对偶，那么

$$\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} = \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}^* = \int_W T(\mathbf{y})\mathbf{y}^t d\mu(\mathbf{y}).$$

注意，对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned}T(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) \\ &= \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}) - \int_W \langle \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle T(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

由于 $T_\# \mu$ 是 V上的 μ 的斜对偶，因此 $T_\# \mu \in \mathrm{P}_2(V)$。令 $h = T$ 可知， $T: W \to V$ 具有所需的类型。□

我们给出另一个推论；其证明与定理 4.6类似。

推论 4.7. 设 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$，且 $\mu \in \mathscr{P}_2(W)$ 是W 上的一个概率框架，其框架算子为 $\mathbf{S}_\mu$。假设 $T_\#\mu$ 是 V 上 μ 的一个斜对偶框架，其中$T\colon W \to V$ 可测。那么对于任意$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$， T 精确地满足

$$T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}),$$

其中 $h\colon W \to V$满足条件： $h_\#\mu \in \mathscr{P}_2(V)$ 且 $\int_W \mathbf{x}h(\mathbf{x})^t d\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{n\times n}$。

下面的例子表明，给定 W上的一个概率框架，其斜对偶概率框架不一定是推前型，并且可以同时包含离散测度和绝对连续测度。

例 4.8. 设 W =张成空间 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ 且 V =张成空间 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$。则 $V^\perp$ =张成空间 $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ 且 $\mathbb{R}^2 = W \oplus V^\perp$。相应的斜投影 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}$将 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 映射到 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，并将 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$映射到 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ 给出，因此$\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$。现在假设

$$\mu = \delta_{(1,0)} \text{ and } \nu = \frac{1}{2}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{2}\delta_{(2,2)}.$$

显然， μ 是 W的概率框架， ν 是 V的概率框架，并且不存在映射 $T\colon W \to V$ 使得 $\nu = T_\#\mu$。然而， ν 是关于乘积测度 $\mu \otimes \nu$的 μ 的斜对偶概率框架，因为

$$\int_W \int_V \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\mu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}.$$

此外，如果 μ 是 W上的标准高斯测度，那么 μ 是 W的概率框架，且从 μ 中抽取的样本为$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}$，其中 $X \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$。那么框架算子及其对应的摩尔–彭若斯逆分别为$\mathbf{S}_\mu = \int_W \mathbf{x}\mathbf{x}^t\, d\mu(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ 和$\mathbf{S}_\mu^\dagger = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$。现在考虑典范斜对偶 $\nu := (\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger)_\#\mu$。对于$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}$，

$$(\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger)(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix} \in V.$$

因此， ν 是一个支撑于 V的高斯测度，其均值为 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$；显然，当 V时，它相对于勒贝格测度绝对连续。

5. 斜对偶概率框架势

回顾一下，给定 $\mathbf{f} \in \mathrm{H} = W \oplus V^\perp$ 和框架 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$in W， [20, 命题 4]和 [23, 命题 5.1] 表明，在所有系数序列 $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ 中

满足

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \sum_{i\in I} c_i \mathbf{w}_i,$$

具有最小 ℓ^2 能量的系数序列为 $\{\langle \mathbf{f} \ \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}^\dagger \mathbf{w}_i\rangle\}_{i\in I}$，它由典范斜对偶框架诱导。

接下来，我们为概率框架证明一个类似的结果，其中用函数$\omega \in L^2(\mu, W)$替代系数序列。

命题 5.1。设 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$ 和 $\mu \in \mathscr{P}_2(W)$ 是W的一个概率框架，其框架算子为$\mathbf{S}_\mu$。对于固定的$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$，假设 $\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \int_W \mathbf{x}\omega(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x})$对某个 $\omega \in L^2(\mu, W)$成立。那么

$$\int_W |\omega(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) = \int_W |\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) + \int_W |\omega(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}).$$

因此，

$$\int_W |\omega(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) \geq \int_W |\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}),$$

且当且仅当对 μ-几乎所有$\mathbf{x} \in W$， $\omega(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{f} \ \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle$ 时，等号成立。

证明。由于 $\mu \in \mathrm{P}_2(W)$，我们可以将 μ 视为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，并且 $\mu \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}^n)$。相应的分析算子 $U_\mu\colon \mathbb{R}^n \to L^2(\mu, W)$ 定义为 $(U_\mu \mathbf{x})(\cdot) = \langle \mathbf{x} \ \cdot\rangle \in L^2(\mu, W)$，是良定义的（有界的）。因此，相关的（伴随）合成算子$U_\mu^*\colon L^2(\mu, W) \to \mathbb{R}^n$存在，且定义为 $U_\mu^*(\psi) = \int_W \mathbf{x}\psi(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x})$。于是我们有核$(U_\mu^*)$ =(值域(U_μ))$^\perp$，其中值域(U_μ)是 U_μ的值域，而核(U_μ^*)是 U_μ^* 的核，定义如下：

$$\mathrm{Ker}(U_\mu^*) := \left\{\psi \in L^2(\mu, W) : U_\mu^*(\psi) = \int_W \mathbf{x}\psi(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\right\}.$$

对于给定的 $\omega \in L^2(\mu, W)$，

$$\omega(\cdot) = \omega(\cdot) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle.$$

由于

$$\begin{aligned} U_\mu^*(\omega(\cdot) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle) &= \int_W \mathbf{x}\omega(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x}) - \int_W \mathbf{x}\langle \mathbf{S}_\mu^\dagger \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}, \mathbf{x}\rangle d\mu(\mathbf{x}) \\ &= \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} - \mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\mu^\dagger \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} - \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

其中等式由定理 2.12 得出：$\mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\mu^\dagger$ 是正交投影 -
将 $\mathbb{R}^n$投影到 W上。因此， $\omega(\cdot) - \langle \mathbf{f} \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle \in$核$(U_\mu^*)$ =(值域(U_μ))$^\perp$。

由于 $\langle \mathbf{f} \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle = \langle \mathbf{S}_\mu^\dagger \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f} \ \cdot\rangle \in$值域$(U_\mu)$，可知 $\omega(\cdot) - \langle \mathbf{f} \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle$与 $\langle \mathbf{f} \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle$在 $L^2(\mu, W)$ 中正交。于是，根据勾股定理，

$$\|\omega\|^2_{L^2(\mu,W)} = \|\omega - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle\|^2_{L^2(\mu,W)} + \|\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle\|^2_{L^2(\mu,W)}.$$

换句话说，

$$\int_W |\omega(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) = \int_W |\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) + \int_W |\omega(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}).$$

因此，

$$\int_W |\omega(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) \geq \int_W |\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}),$$

当且仅当.....时，等号成立

$$\int_W |\omega(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) = 0,$$

当且仅当 $\omega(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{f}\ \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{x}\rangle$ 对于 μ-几乎所有的 $\mathbf{x} \in W$时，该结论成立。 □

当 $W = V$ 时，定理 5.1 告诉我们，对于 μ 上的概率框架 W 和 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$，在所有满足 $\mathrm{P}_W \mathbf{f} = \int_W \mathbf{x}\omega(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$ 的 $\omega \in L^2(\mu, W)$ 中，由典范对偶概率框架诱导的函数 $\langle \mathbf{f}, \mathrm{S}_\mu^\dagger(\cdot)\rangle$ 具有最小的 $L^2(\mu, W)$ 能量。这得到了相关结果 [8, 命题 3.4]。

现在我们给出斜对偶概率框架势的如下定义。

定义 5.2。设 $\mu \in \mathrm{P}_2(W)$ 是 W 上的概率框架，且 $\nu \in \mathrm{P}_2(V)$ 是 μ 在 V 上的斜对偶框架。那么 μ 与 ν 之间的斜对偶概率框架势定义为

$$\int_W \int_V |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{y}).$$

注意，若 $T_{\#}\mu$ 是 V上的 μ，其中 $T\colon\ W \to V$可测，则 μ与 $T_{\#}\mu$ 之间的斜对偶概率框架势为

$$\int_W \int_W |\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y})\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{y}).$$

给定 W的一个概率框架 μ，我们将证明：当且仅当对几乎所有 μ下的 $\mathbf{y}$，$T(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y} \in W$时，其斜对偶概率框架势在所有推前型斜对偶 $T_{\#}\mu$中取最小值；也就是说，除去一个 μ-零测集，$T_{\#}\mu$ 是典范斜对偶 $(\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_\mu^\dagger)_{\#}\mu$。这推广了定理 3.3 中关于斜对偶框架势、[11, 定理 2.2] 中关于对偶框架势，以及 [8, 定理 3.5] 中关于概率对偶框架势的类似结果。

定理 5.3. 设 W和 V是子空间，满足 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$，其中 W的维数为 d_W。假设 $\mu \in \mathscr{P}_2(W)$ 是 W的概率框架，且 $T_{\#}\mu$ 是 V上的 μ 的斜对偶框架，其中 $T\colon\ W \to V$可测。那么

$$\int_W \int_W |\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y})\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{y}) \geq d_W,$$

且当且仅当对几乎所有 μ意义下的 $(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y} \in W$，等号成立。

证明。由于 $T_{\#}\mu$ 是 μ的斜对偶框架，对于任意固定的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} \mathbf{x} = \int_W \mathbf{y} \langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y})\rangle d\mu(\mathbf{y}).$$

注意，由于 $\langle \mathbf{x}\ T(\cdot)\rangle \in L^2(\mu,\ W)$,

$$\int_W |\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y})\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\|^2 \int_W \|T(\mathbf{y})\|^2 d\mu(\mathbf{y}) < +\infty.$$

因此，根据定理 5.1，我们知道，对于任意固定的$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_W |\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y})\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}) \geq \int_W |\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}), \tag{5.1}$$

且当且仅当对 μ-几乎所有$\mathbf{y} \in W$， $\langle \mathbf{x}\ T(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}\ \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y}\rangle$ 时等号成立。因此，

$$\begin{aligned}
\int_W \int_W |\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y})\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{x}) &\geq \int_W \int_W |\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_W \int_W |\langle \mathbf{x}, \mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{y}) \\
&= \int_W \int_W |\langle (\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}, (\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{y}) \\
&= \int_W \|(\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}\|^2 d\mu(\mathbf{y}) \qquad (5.3) \\
&= d_W, \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

这是因为（5.3）这一事实： $(\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}} \#\mu$ 是 $W = \mathrm{Ran}((\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}})$的帕塞瓦尔框架。定理 2.12 给出（5.4），因为

$$\int_W \|(\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}\|^2 d\mu(\mathbf{y}) = \mathrm{trace}\left((\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_\mu (\mathbf{S}_\mu^\dagger)^{\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{trace}(\mathbf{P}_W) = d_W.$$

若 $T(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y}$对于 μ几乎所有$\mathbf{y} \in W$，则（5.2）中的不等式为等式。反过来，若（5.2）为等式，则对于 μ几乎所有$\mathbf{x} \in W$，

$$\int_W |\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y})\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}) = \int_W |\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{y}).$$

因此，对于 μ几乎每个$\mathbf{x} \in W$， （5.1）中等号成立，因此

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}_W(T(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y})\rangle = 0, \text{ for } \mu\text{-almost all } \mathbf{y} \in W.$$

换言之，我们已经证明，定理陈述中的等号成立意味着 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}_W(T(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y})\rangle = 0$对于 μ几乎每个 $\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$都属于 W。于是，对于 μ几乎所有的 $\mathbf{y} \in W$，

$$A_\mu \|\mathbf{P}_W(T(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y})\|^2 \leq \int_W |\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}_W(T(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger \mathbf{y})\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) = 0,$$

其中 $A_\mu > 0$ 是 $\mu \in \mathrm{P}_2(W)$ 的下框架界。因此，对于 μ-几乎所有的 $\mathbf{y} \in W$，$\mathrm{P}_W($ $T(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathrm{S}_\mu^\dagger \mathbf{y}) = \mathbf{0}$。由于 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$ 等价于 $\mathbb{R}^n = V \oplus W^\perp$（见定理 2.1），可得对于 T-几乎所有的 $\mathbf{y}$ $-\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}(\mathbf{y})_\mu^\dagger \mathrm{S} \in W^\perp \cap V = \{\mathbf{0}\}\mathbf{y}$ μ。因此，对于 $\in W$-几乎所有的 $\mathbf{y}$ μ， $\in W(\mathbf{y})$ $T\mathrm{S} = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{y}$。 $^\dagger_\mu$

以下引理是关于近似对偶概率框架的一个更一般结果的特例 [9, 引理 4.2]。

引理 5.4. 设 μ 是 W 的概率框架，且上框架界为 $B > 0$。若 $\nu \in \mathscr{P}_2(W)$ 是 μ 的对偶概率框架，则 ν 是W 的概率框架，其框架界为 $\frac{1}{B}$ 和 $M_2(\nu)$。

现在我们准备证明定理 5.5，该定理涉及斜对偶概率框架势。对于给定的概率框架 W，其界为$0 < A \leq B$，我们证明斜对偶概率框架势以下界为 $d_W \frac{A}{B}$。由于 $A \leq B$，该下界满足

$$d_W \frac{A}{B} \leq d_W,$$

其中 d_W 恰好是定理 5.3中，在所有推前型斜对偶的斜对偶概率框架势的下界。这是因为存在非推前型的斜对偶框架（见定理 4.8），并且定理 5.5中斜对偶概率框架势的最小化所涉及的集合，相较于定理 5.3中的情形更大。然而，当给定的概率框架是紧的（$A = B$）时，非推前型斜对偶框架的影响变得可以忽略不计，因为这两个下界均为 d_W。

定理 5.5. 设 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$。假设 $\mu \in \mathscr{P}_2(W)$ 是 W 上的一个概率框架，其界为 $0 < A \le B$，且 $\nu \in \mathscr{P}_2(V)$ 是 μ 在 V 上的一个斜对偶。那么

$$\int_W \int_V |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{y}) \ge \frac{A}{B} d_W,$$

且当且仅当 μ 是 W 上的一个紧概率框架，其界为$A > 0$，并且 $\nu = (\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_\mu^\dagger)_\# \mu$时，等号成立。

证明。 注意到

$$\int_W \int_V |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{y}) = \int_W \int_V \operatorname{trace}(\mathbf{x}\mathbf{x}^t \mathbf{y}\mathbf{y}^t) d\mu(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{y}) = \operatorname{trace}(\mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\nu).$$

由于 μ 是 W 上的一个概率框架，其界为 $0 < A \le B$，因此

$$A\mathbf{P}_W \preceq \mathbf{S}_\mu \preceq B\mathbf{P}_W,$$

其中 $\mathbf{P}_W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 W上的正交投影。由于 $\mathbf{S}_\mu - A\mathbf{P}_W$ 和 $\mathbf{S}_\nu$均为半正定，

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(\mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\nu - A\mathbf{P}_W \mathbf{S}_\nu) &= \operatorname{trace}((\mathbf{S}_\mu - A\mathbf{P}_W)\mathbf{S}_\nu) \\ &= \|\mathbf{S}_\nu^{1/2} (\mathbf{S}_\mu - A\mathbf{P}_W)^{1/2}\|_{\mathrm{Frob}}^2 \ge 0, \end{aligned} \tag{5.5}$$

因此

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(\mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\nu) &\ge A \operatorname{trace}(\mathbf{P}_W \mathbf{S}_\nu) = A \operatorname{trace}(\mathbf{P}_W \mathbf{S}_\nu \mathbf{P}_W) \\ &= A \int_V \|\mathbf{P}_W \mathbf{y}\|^2 d\nu(\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

由于 ν 是 V上的 μ 的斜对偶框架，根据定理 4.1 和定理 5.4，$\mathbf{P}_{W\#}\nu$是 W上关于某个 $\gamma \in \Gamma(\mu, \mathbf{P}_{W\#}\nu)$ 的 μ的对偶概率框架，其下框架界为 $\frac{1}{B}$。现在设 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{d_W}$是 W的标准正交基。那么

$$\int_V \|\mathbf{P}_W \mathbf{y}\|^2 d\nu(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{d_W} \int_W |\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{y}\rangle|^2 d\mathbf{P}_{W\#}\nu(\mathbf{y}) \ge \sum_{i=1}^{d_W} \frac{1}{B} \|\mathbf{e}_i\|^2 = \frac{1}{B} d_W. \tag{5.7}$$

结合上述结果，我们得到

$$\int_W \int_V |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{y}) \ge A \int_V \|\mathbf{P}_W \mathbf{y}\|^2 d\nu(\mathbf{y}) \ge \frac{A}{B} d_W.$$

对于等式，若 μ 是 W 的紧框架，框架界为 A且 $\nu = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_{\mu\#}^\dagger \mu$，则 $\mathbf{S}_\mu = A\mathbf{P}_W$并且 $\mathbf{S}_\mu^\dagger = \frac{1}{A}\mathbf{P}_W$。由定理 2.3，

$$\mathbf{P}_{W\#}\nu = (\mathbf{P}_W \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \mathbf{S}_\mu^\dagger)_\# \mu = (\frac{1}{A}\mathbf{P}_W)_\# \mu.$$

因此，$\mathbf{P}^{W\#^{\nu}}$ 是 W 的紧框架，框架界为 $\frac{1}{A}$，因为

$$\mathbf{S}_{\mathbf{P}^{W\#^{\nu}}} = \frac{1}{A}\mathbf{P}_W\mathbf{S}_\mu\frac{1}{A}\mathbf{P}_W = \frac{1}{A}\mathbf{P}_W.$$

因此，(5.6) 和 (5.7) 中的不等式都变为等式，从而

$$\int_W\int_V |\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) = A\,\mathrm{trace}(\mathbf{P}_W\mathbf{S}_\nu) = A\sum_{i=1}^{d_W}\frac{1}{A}\|\mathbf{e}_i\|^2 = d_W.$$

反之，若等式成立，则 (5.5) 和 (5.7) 中必有等式：

$$\|\mathbf{S}_\nu^{1/2}(\mathbf{S}_\mu - A\mathbf{P}_W)^{1/2}\|_{\mathrm{Frob}}^2 = 0 \quad \text{and} \quad \int_V \|\mathbf{P}_W\mathbf{y}\|^2 d\nu(\mathbf{y}) = \frac{1}{B}d_W. \tag{5.8}$$

第一条意味着 $\mathbf{S}_\nu^{1/2}(\mathbf{S}_\mu - A\mathbf{P}_W)^{1/2} = \mathbf{0}_{n\times n}$，因此

$$\mathbf{S}_\nu(\mathbf{S}_\mu - A\mathbf{P}_W) = \mathbf{S}_\nu^{1/2}\mathbf{S}_\nu^{1/2}(\mathbf{S}_\mu - A\mathbf{P}_W)^{1/2}(\mathbf{S}_\mu - A\mathbf{P}_W)^{1/2} = \mathbf{0}_{n\times n}.$$

因此，$\mathrm{Ran}(\mathsf{S}_\mu - A\mathsf{P}_W) \subset \mathrm{Ker}(\mathsf{S}_\nu)$。由于 ν 是V的概率框架，定理 2.12 蕴含 $\mathrm{Ker}(\mathsf{S}_\nu) = V^\perp$，从而 $\mathrm{Ran}(\mathsf{S}_\mu - A\mathsf{P}_W) \subset V^\perp$。由于 $\mathrm{Ran}(\mathsf{S}_\mu - A\mathsf{P}_W) \subset W$ 且 $W \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$，我们得出 $\mathrm{Ran}(\mathsf{S}_\mu - A\mathsf{P}_W) = \{\mathbf{0}\}$。因此 $\mathsf{S}_\mu = A\mathsf{P}_W$，这表明 μ 是 W 的紧框架，其界为 $A > 0$。

此外，由于$\mathbf{P}^{W\#^{\nu}}$ 是关于$\gamma \in \Gamma(\mu, \mathbf{P}^{W\#^{\nu}})$、定义在 W 上且以 μ 为对偶的概率框架，因此

$$\mathbf{P}_W = \int_{W\times W}\mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

对等式两边取迹，并两次使用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned} d_W = \mathrm{trace}(\mathbf{P}_W) &= \int_{W\times W}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &\le \int_{W\times W}\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad (5.9) \\ &\le \sqrt{\int_W \|\mathbf{x}\|^2 d\mu(\mathbf{x})\int_W \|\mathbf{y}\|^2 d\mathbf{P}_{W\#}\nu(\mathbf{y})}. \qquad (5.10) \end{aligned}$$

由于 μ 是 W 的紧框架，框架界为 $A = B$，因此

$$\int_W \|\mathbf{x}\|^2 d\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d_W}\int_{\mathbb{W}}|\langle \mathbf{e}_i,\mathbf{x}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d_W} A\|\mathbf{e}_i\|^2 = A\ d_W.$$

因此，

$$\int_V \|\mathbf{P}_W\mathbf{y}\|^2 d\nu(\mathbf{y}) \ge \frac{1}{A}d_W = \frac{1}{B}d_W.$$

将此结果与式（5.8）中的第二个等式结合起来，可知上述柯西–施瓦茨不等式中的等号成立（即，式（5.9）和（5.10）中的等号均成立。

对（5.10）取等，意味着函数 $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}\|$ 和 $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{y}\|$ 在 $L^2(\gamma, W\times W)$ 中线性相关，即存在一个常数 $c \ge 0$，使得对于 γ-几乎所有的 $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in W\times W$，$\|\mathbf{y}\| = c\|\mathbf{x}\|$。此外，对（5.9）取等表明，对于 γ-几乎所有的 $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in W\times W$，$\mathbf{y} = c_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$，其中 $c_{\mathbf{x}} \ge 0$ 是一个可能依赖于 $\mathbf{x}$ 的常数。因此，对于 γ- 几乎所有的 $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in W\times W$，

$$\|\mathbf{y}\| = c\|\mathbf{x}\| \text{ and } \mathbf{y} = c_{\mathbf{x}}\mathbf{x}.$$

若 $\mathbf{x}$ 非零，则 $c_{\mathbf{x}} = c$；若 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$，令 $c_{\mathbf{0}} := c$，也不会影响上述两个等式的成立。因此，对于 γ-几乎所有的 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W \times W$，$\mathbf{y} = c\mathbf{x} = c\mathrm{P}_W\mathbf{x}$，这意味着 $\gamma = (\mathrm{Id}\ c\mathrm{P}_W)_{\#}\mu \in \Gamma(\mu, \mathrm{P}_W\#\nu)$。于是 $\mathrm{P}_W\#\nu = (c\mathrm{P}_W)_{\#}\mu$。由于 $\mathrm{P}_W\#\nu$ 是 μ 在 W 上关于 $\gamma = (\mathrm{Id}\ c\mathrm{P}_W)_{\#}\mu$ 的对偶框架，

$$\mathbf{P}_W = \int_{W\times W} \mathbf{x}\mathbf{y}^t\, d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_W \mathbf{x}(c\mathbf{x})^t\, d\mu(\mathbf{x}) = c\mathbf{S}_\mu = cA\mathbf{P}_W.$$

因此，$c = \frac{1}{A} > 0$ 且 $\mathbf{P}_W\#\nu = \left(\frac{1}{A}\mathbf{P}_W\right)_{\#}\mu$。最后，定理 2.3 以及 ν 的支撑位于 V 给出

$$\nu = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\#\nu = (\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{P}_W)_{\#}\nu = \left(\frac{1}{A}\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{P}_W\right)_{\#}\mu = (\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{S}_\mu^\dagger)_{\#}\mu,$$

其中，最后一个等式是因为 $\mathbf{S}_\mu^\dagger = \frac{1}{A}\mathbf{P}_W$。 □

当 $W = V$ 时，斜对偶概率框架就是对偶概率框架。因此，定理 5.5 告诉我们，对于给定的概率框架 μ 在 W 上，其对偶概率框架势达到最小，当且仅当 μ 是一个紧框架，且对偶框架为典范对偶，这恢复了 [8,定理 3。7]。

6. 斜近似对偶概率框架

本节引入斜近似对偶概率框架的概念。关于近似对偶框架和近似对偶概率框架的先前研究分别见 [13]和 [9], 。在本节中，始终设 $\mathbb{R}^n = W \oplus V^\perp$，其中 W 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

定义 6.1。设 $\mu \in \mathrm{P}_2(W)$ 和 $\nu \in \mathrm{P}_2(V)$ 分别是 W 和 V 上的概率框架。若 $\epsilon \geq 0$，则称 ν 为 μ 在 V 上的斜 ϵ-近似对偶概率框架，如果存在 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$ 使得

$$\left\| \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} \right\| \leq \epsilon,$$

其中，上述矩阵范数是由欧几里得范数诱导的算子范数。

显然，当 $\epsilon = 0$ 时，斜对偶 ϵ-近似对偶概率框架就是斜对偶框架。我们还可以将概率一致重构推广到斜近似对偶框架。

定义 6.2。设 μ 和 ν 分别是 W 和 V 上的概率框架。给定 $\epsilon \geq 0$，若存在 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$，使得对任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$，则称 μ 和 ν 执行概率 ϵ-一致重构，

$$\|\langle \mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}, \cdot\rangle\|_{L^2(\nu,V)} = \left(\int_V |\langle \mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{z}\rangle|^2 d\nu(\mathbf{z}) \right)^{1/2} \leq \epsilon\|\mathbf{f}\|,$$

其中 $\hat{\mathbf{f}} = \int_{W\times V} \mathbf{x}\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$ 是重构信号。

注意，当 $\epsilon = 0$，$\|\langle \mathbf{f} - \mathbf{f}\cdot\rangle\|_{L^2(\nu,V)} = 0$ 时，因此 $\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle$ 对于 ν-几乎所有 $\mathbf{z} \in V$ 均成立，这意味着 μ 和 ν 实现了概率一致重构。我们还给出以下引理，阐述斜 ϵ-近似对偶框架与概率 ϵ-一致重构之间的关系。

命题 6.3。设 μ 和 ν 分别是 W 和 V 的概率框架。

(1) 若 ν 是 μ 在 V上的一个斜 ϵ-近似对偶，则 μ 和 ν 进行概率$\sqrt{B\epsilon}$-一致重构，其中 $B>0$ 是 ν的上界。(2) 反之，若 μ 和 ν 进行概率 α-一致重构，则 ν 是 μ在 V上的一个斜 ϵ-近似对偶，其中 $\epsilon=\alpha\sqrt{M_2(\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{S}_{\nu\#}^\dagger\nu)}$。

证明。 如果 ν 是 V上 μ 的斜 ϵ-近似对偶框架，那么存在$\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)$，使得

$$\left\|\int_{W\times V}\mathbf{x}\mathbf{y}^t d\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})-\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\right\|\le\epsilon.$$

对于任意$\mathbf{f}\in\mathbb{R}^n$，令 $\hat{}\mathbf{f}=\int_{W\times V}\mathbf{x}\langle\mathbf{y},\ \mathbf{f}\rangle d\gamma(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\in W$。则 $\|\hat{}\mathbf{f}-\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}\|\le\epsilon\|\mathbf{f}\|$。因此，

$$\begin{aligned}\int_V|\langle\mathbf{f}-\hat{\mathbf{f}},\mathbf{z}\rangle|^2d\nu(\mathbf{z})=\int_V|\langle\mathbf{f}-\hat{\mathbf{f}},\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{z}\rangle|^2d\nu(\mathbf{z})&=\int_V|\langle\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}-\hat{\mathbf{f}},\mathbf{z}\rangle|^2d\nu(\mathbf{z})\\&\le B\|\hat{\mathbf{f}}-\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}\|^2\le B\epsilon^2\|\mathbf{f}\|^2,\end{aligned}$$

这意味着 μ 和 ν 执行概率$\sqrt{B\epsilon}$-一致重构。

反之，如果 μ 和 ν 执行概率 α-一致重构，那么存在 $\gamma'\in\Gamma(\mu,\nu)$，使得对于任意$\mathbf{f}\in\mathbb{R}^n$，

$$\int_V|\langle\mathbf{f}-\hat{\mathbf{f}},\mathbf{z}\rangle|^2d\nu(\mathbf{z})\le\alpha^2\|\mathbf{f}\|^2,$$

其中 $\hat{}\mathbf{f}=\int_{W\times V}\mathbf{x}\langle\mathbf{y},\ \mathbf{f}\rangle d\gamma'(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\in W$。由于 $(\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{S}_\nu^\dagger)_\#\nu$ 是 ν 在 W 上关于 $\tilde{\gamma}=(\mathbf{Id}\ \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{S}_\nu^\dagger)_\#\nu\in\Gamma(\nu,\ (\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{S}_\nu^\dagger)_\#\nu)$ 的典范斜对偶，因此

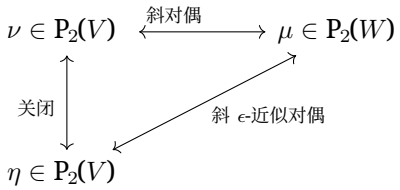
$$\int_{V\times W}\mathbf{z}\mathbf{u}^t d\tilde{\gamma}(\mathbf{z},\mathbf{u})=\boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}=\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}^*.$$

因此，对于任意 $\mathbf{f}\in\mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned}\left\|\int_{W\times V}\mathbf{x}\langle\mathbf{y},\mathbf{f}\rangle d\gamma'(\mathbf{x},\mathbf{y})-\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{f}\right\|^2=\|\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}(\hat{\mathbf{f}}-\mathbf{f})\|^2&=\left\|\int_{V\times W}\mathbf{u}\langle\mathbf{z},\hat{\mathbf{f}}-\mathbf{f}\rangle d\tilde{\gamma}(\mathbf{z},\mathbf{u})\right\|^2\\&=\left\|\int_V\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{S}_\nu^\dagger\mathbf{z}\ \langle\mathbf{z},\hat{\mathbf{f}}-\mathbf{f}\rangle d\nu(\mathbf{z})\right\|^2\\&\le\int_V\|\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{S}_\nu^\dagger\mathbf{z}\|^2d\nu(\mathbf{z})\ \int_V|\langle\mathbf{f}-\hat{\mathbf{f}},\mathbf{z}\rangle|^2d\nu(\mathbf{z})\\&\le M_2(\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{S}_{\nu\#}^\dagger\nu)\ \alpha^2\ \|\mathbf{f}\|^2=\epsilon^2\|\mathbf{f}\|^2,\end{aligned}$$

其中 $\epsilon=\alpha\sqrt{M_2(\boldsymbol{\pi}_{WV^\perp}\mathbf{S}_{\nu\#}^\dagger\nu)}$。于是，$\nu$ 是 μ 在 V 上关于 $\gamma'\in\Gamma(\mu,\ \nu)$ 的 ϵ-近似斜对偶。□

在本节余下部分，我们考虑受扰动概率框架的斜近似对偶框架。我们声称，若一个概率测度与某个斜对偶对中的一个概率框架足够接近，那么当 $0<\epsilon<1$ 时，该概率测度就是此斜对偶对中另一个概率框架的斜 ϵ-近似对偶，具体如下面的示意图所示。



特别地，由于概率框架可以通过有限个原子的原子测度任意精确地逼近（例如通过抽样），且这类测度可以视为经典框架，因此这意味着每个概率框架都有一个斜 ϵ-近似对偶，而该近似对偶是经典框架。

注意， V 上的概率框架集合在 $\mathrm{P}_2(V)$ 中关于 2-Wasserstein 拓扑是开集，这意味着框架性质在小扰动下保持不变。

命题 6.4 ([7, 命题 1.2，推论 1。3])。 设 $\nu \in \mathscr{P}_2(V)$ 是子空间 V 的一个概率框架，其下界为 $A > 0$。若存在 $\eta \in \mathscr{P}_2(V)$和 $\gamma \in \Gamma(\nu, \eta)$ 使得

$$\lambda := \int_{V\times V} \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|^2 d\gamma(\mathbf{y},\mathbf{z}) < A,$$

那么 η 是 V的一个概率框架，其框架界为$(\sqrt{A}-\sqrt{\lambda})^2$ 和 $M_2(\eta)$。此外，若 $W_2(\nu,\eta) < \sqrt{A}$，则 η 是 V 的一个概率框架，其框架界为 $(\sqrt{A}-W_2(\nu,\eta))^2$ 和 $M_2(\eta)$。

基于这一结果，我们建立如下引理。

引理 6.5。 假设 $\mu \in \mathscr{P}_2(W)$ 是 W 的一个概率框架，其上界为$C > 0$；且 $\nu \in \mathscr{P}_2(V)$ 是 μ 在 V上的一个斜对偶框架，其下界为 $A > 0$和 $AC \le 1$。若 $0 < \epsilon < 1$ 且存在 $\eta \in \mathscr{P}_2(V)$ 及 $\gamma \in \Gamma(\nu,\eta)$ 使得

$$\int_{V\times V} \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|^2 d\gamma(\mathbf{y},\mathbf{z}) \le A\epsilon^2,$$

那么， η 是 V上 μ 的斜 ϵ-近似对偶概率框架。

证明。根据定理 6.4， η 是的概率框架。由于 ν 是的斜对偶概率框架，因此存在 $\gamma' \in \Gamma(\mu, \nu)$ 使得

$$\int_{W\times V} \mathbf{y}\mathbf{x}^t d\gamma'(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} = \boldsymbol{\pi}^*_{WV^\perp}.$$

根据定理 2.13，存在 $\tilde{\pi} \in \mathrm{P}(W\times V\times V)$，使得 $\pi_{xy\#}\tilde{\pi} = \gamma'$, $\pi_{yz\#}\tilde{\pi} = \gamma$，其中 π_{xy}和 π_{yz} 分别是到 (x, y) 和 (y, z) 坐标的投影。现在令 $\tilde{\gamma} := \pi_{xz\#}\tilde{\pi} \in \Gamma(\mu,\eta)$。那么，对于任意 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{W\times V} \mathbf{z}\langle \mathbf{x},\mathbf{f}\rangle d\tilde{\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z}) - \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp}\mathbf{f} \right\|^2 &= \left\| \int_{W\times V} \mathbf{z}\langle \mathbf{x},\mathbf{f}\rangle d\tilde{\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z}) - \int_{W\times V} \mathbf{y}\langle \mathbf{x},\mathbf{f}\rangle d\gamma'(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right\|^2 \\
&= \left\| \int_{W\times V\times V} (\mathbf{z}-\mathbf{y})\langle \mathbf{x},\mathbf{f}\rangle d\tilde{\pi}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \right\|^2 \\
&\le \int_{V\times V} \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|^2 d\gamma(\mathbf{y},\mathbf{z}) \int_W |\langle \mathbf{x},\mathbf{f}\rangle|^2 d\mu(\mathbf{x}) \\
&\le AC\epsilon^2\|\mathbf{f}\|^2 \le \epsilon^2\|\mathbf{f}\|^2,
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式是由三角不等式和柯西–施瓦茨不等式得到的。于是

$$\left\| \int_{W\times V} \mathbf{x}\mathbf{z}^t d\tilde{\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z}) - \boldsymbol{\pi}_{WV^\perp} \right\| = \left\| \int_{W\times V} \mathbf{z}\mathbf{x}^t d\tilde{\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z}) - \boldsymbol{\pi}_{VW^\perp} \right\| \leq \epsilon,$$

因此，η 是 μ 在 V 上相对于 $\tilde{\gamma} \in \Gamma(\mu, \eta)$的斜 ϵ-近似对偶。□

有人可能会担心，下框架界 A 对于 ν 以及上框架界 C 对于 μ 满足 $AC \leq 1$这一条件。然而，定理 4.1 表明，如果 μ 具有上贝塞尔界 $C > 0$，那么 ν 总可以选择使其下框架界为$A = \frac{1}{C}$。此时我们得到等式 $AC = 1$。更一般地，如果 ν的下框架界恰好较小，为 $A \leq \frac{1}{C}$，那么 $AC \leq 1$。

此外，若上述引理中的 $\gamma \in \Gamma(\nu, \eta)$是 $W_2(\nu, \eta)$的一个最优传输耦合，则有以下推论。

推论 *6.6.* 设 $0 < \epsilon < 1$。假设 $\mu \in P_2(W)$是 W 上的概率框架，且上界为 $C > 0$；$\nu \in P_2(V)$是在 V 上与 μ构成斜对偶框架的框架，其下界为 $A > 0$ 且 $AC \leq 1$。若存在 $\eta \in P_2(V)$使得 $W_2(\nu, \eta) \leq \sqrt{A}\epsilon$，则 η 是在 V上与 μ 构成斜 ϵ-近似对偶框架。因此，对于 W上的给定概率框架，其在 V 上的斜对偶概率框架是 $P_2(V)$ 上 2-瓦瑟斯坦拓扑下斜 ϵ-近似对偶框架集合的内点。

致谢

作者谨感谢 Kasso A. Okoudjou 提供的宝贵意见。本研究部分获得美国国家科学基金会（DMS–2107700）的支撑。

参考文献

[1] Roza Aceska 和 McKenna Kaczanowski。交叉框架势。数值泛函分析与优化，43(15):1707–1731，2022。[2] Akram Aldroubi。平移不变空间和小波空间中的非均匀加权平均采样与重构。应用与计算调和分析，13 161，2002 2 151( ): – 。[3] Marcus Appleby、Steven T. Flammia 和 Gene S. Kopp。通过 Stark 猜想建设性地研究 Zauner 猜想。*arXiv*预印本 *arXiv:2501.03970*，2025。[4] John J. Benedetto 和 Matthew Fickus。有限归一化紧框架。计算数学进展，18(2):357–385，2003。[5] Peter Berger、Karlheinz Gröchenig 和 Gerald Matz。利用斜投影在不同子空间中进行采样与重构。《傅里叶分析与应用杂志》，25(3):1080–1112，2019。[6] B. G. Bodmann、V. I. Paulsen 和 M. Tomforde。由包含单位的立方根的复 Seidel 矩阵构造等角紧框架。线性代数及其应用，430(1):396–417，2009。[7] Dongwei Chen。概率框架的 Paley–Wiener 定理。*arXiv*预印本 *arXiv:2310.17830*，2023。[8] Dongwei Chen。概率对偶框架与对偶框架势的最小化。*arXiv*预印本 *arXiv:2502.17760*，2025。[9] Dongwei Chen、Emily J. King 和 Clayton Shonkwiler。近似对偶框架和伪对偶概率框架。*arXiv*预印本 *arXiv:2505.13885*，2025。[10] Ole Christensen。《框架与里斯基底导论》。《应用与数值调和分析》。施普林格，Cham，2016。

[11] Ole Christensen、Somantika Datta 和 Rae Young Kim。等角框架以及 Welch界向对偶框架对的推广。线性与多重线性代数，68(12):2495–2505，2020。[12] Ole Christensen 和 Yonina C. Eldar。斜对偶框架和平移不变空间。应用与计算调和分析，17(1):48–68，2004。[13] Ole Christensen 和 Richard S. Laugesen。希尔伯特空间中的近似对偶框架及其在 Gabor框架中的应用。信号与图像处理中的采样理论，9(1–3):77–90，2010。[14] Ingrid Daubechies。十讲小波。CBMS–NSF应用数学区域会议丛书第61卷。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，美国，1992。[15] Jorge P. Díaz、Sigrid B. Heineken 和 Patricia M. Morillas。近似斜对偶框架。应用数学与计算，452:128015，2023。[16] Richard J. Duffin 和 Albert C. Schaeffer。一类非调和傅里叶级数。美国数学会会刊，72(2):341–366，1952。[17] Martin Ehler。随机紧框架。《傅里叶分析与应用杂志》，18(1):1–20，2012。[18] Martin Ehler 和 Kasso A. Okoudjou。概率 p-框架势的最小化。统计规划与推断杂志，142(3):645–659，2012。[19] Martin Ehler 和 Kasso A. Okoudjou。概率框架：综述。有限框架：理论与应用，第415–436页，2013。[20] Yonina C. Eldar。利用任意采样空间和重构空间以及斜对偶框架向量进行采样。《傅里叶分析与应用杂志》，9(1):77–96，2003。[21] Yonina C. Eldar 和 Ole Christensen。斜对偶框架对的刻画。EURASIP信号处理进展杂志，2006(1):092674，2006。[22] Yonina C. Eldar 和 Alan V. Oppenheim。利用任意采样空间和重构空间进行非冗余采样与冗余采样。载于：第26届 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议，2001。[23] Yonina C. Eldar 和 Tobias Werther。希尔伯特空间中一致采样的一般框架。国际小波、多分辨率与信息处理杂志，3(04):497–509，2005。[24] Hans G. Feichtinger 和 Karlheinz Gröchenig。从非规则采样值迭代重构多元带限函数。SIAM数学分析杂志，23(1):244–261，1992。[25] Alessio Figalli 和 Federico Glaudo。《最优传输、Wasserstein距离与梯度流导论》。EMS数学教材第22卷。EMS出版社，柏林，德国，2021。[26] Michael Frazier 和 Björn Jawerth。Besov 空间的分解。印第安纳大学数学杂志，34(4):777–799，1985。[27] Karlheinz Gröchenig。《时频分析基础》。《应用与数值调和分析》。Birkhäuser，波士顿，马萨诸塞州，美国，2001。[28] Sigrid B. Heineken 和 Patricia M. Morillas。斜对偶融合框架。数值泛函分析与优化，39(7):800–824，2018。[29] R. B. Holmes 和 V. I. Paulsen。擦除情形下的最优框架。线性代数及其应用，377:31–51，2004。[30] Gitta Kutyniok 和 Demetrio Labate，编。《剪切波：多元数据的多尺度分析》。《应用与数值调和分析》。Birkhäuser，波士顿，马萨诸塞州，美国，2012。[31] Shidong Li 和 Hidemitsu Ogawa。子空间伪框架及其应用。载于：SPIE会议录，第3458卷，1998。[32] Shidong Li 和 Hidemitsu Ogawa。子空间伪框架理论及其应用。技术报告，东京工业大学，1998。TR98-0014。[33] Shidong Li 和 Hidemitsu Ogawa。子空间伪框架及其应用。《傅里叶分析与应用杂志》，10(4):409–431，2004。[34] Yun-Zhang Li 和 Rui-Qi Dong。Krein空间中的近似斜对偶框架。应用科学中的数学方法，2025。[35] Yun-Zhang Li 和 Li-Juan Wu。构造更多近似斜对偶框架对。泛函分析年刊，15(2):23，2024。

[36] Mostafa Maslouhi 和 Soulaymane Loukili。概率紧框架与正算子值测度的表示。应用与计算调和分析，47(1):212–225，2019。[37] J. L. Massey 和 T. Mittelholzer。码分多址系统的 Welch 界与序列集。载于 R. Capocelli、A. De Santis 和 U. Vaccaro 编，《序列II：通信、安全与计算机科学方法》，第 63–78 页。施普林格出版社，纽约，1991。[38] R. Ramu Naidu 和 Chandra R. Murthy。利用主化-最小化构造用于压缩感知的酉模紧框架。《信号处理》，172:107516，2020。[39] J. M. Renes、R. Blume-Kohout、A. Scott 和 C. M. Caves。对称信息完备量子测量。《数学物理学杂志》，45(6):2171–2180，2004。[40] J. J. Seidel。球面设计的定义。《统计规划与推断杂志》，95(1-2):307–313，2001。[41] T. Strohmer 和 R. W. Heath, Jr.。格拉斯曼框架及其在编码和通信中的应用。《应用与计算调和分析》，14(3):257–275，2003。[42] M. A. Sustik、J. A. Tropp、I. S. Dhillon 和 R. W. Heath。等角紧框架的存在性。《线性代数及其应用》，426(2–3):619–635，2007。[43] Wai-Shing Tang。希尔伯特空间中的斜投影、双正交Riesz基与多小波。《美国数学会会刊》，128(2):463–473，2000。[44] Michael Unser 和 Akram Aldroubi。针对非理想采集设备的一般采样理论。《IEEE信号处理汇刊》，42(11):2915–2925，2002。[45] Michael Unser 和 Josiane Zerubia。广义采样：稳定性与性能分析。《IEEE信号处理汇刊》，45(12):2941–2950，2002。[46] Shayne F. D. Waldron。《有限紧框架导论》。施普林格，2018。[47] L. Welch。信号最大互相关的下界（通信）。《IEEE信息论汇刊》，20(3):397–399，1974。[48] Clare Georgianna Wickman。《框架理论中若干问题的最优传输方法》。博士论文，马里兰大学帕克分校，2014。[49] Gerhard Zauner。《非交换设计理论纲要》。博士论文，维也纳大学，1999。

科罗拉多州立大学数学系，美国科罗拉多州福特柯林斯，80523电子邮箱地址：dongwei.chen@colostate.edu 科罗拉多州立大学数学系，美国科罗拉多州福特柯林斯，80523电子邮箱地址：emily.king@colostate.edu 科罗拉多州立大学数学系，美国科罗拉多州福特柯林斯，80523电子邮箱地址：clayton.shonkwiler@colostate.edu