arXiv:2601.08032v1 [math.RA] 12 Jan 2026

用于交换（半）环的高阶分离公理与X-拓扑格应用*†‡

Jawad Abuhlail§
abuhlail@kfupm.edu.sa
数学系
法赫德国王石油与矿产大学
31261 宰赫兰，沙特阿拉伯

Abdulmushin Alfaraj
abdulmuhsinalfaraj@hotmail.com
数学科学系
巴斯大学
Celeverton Down，巴斯，BA27AY，英国

2026年1月14日

摘要

我们研究了 X-拓扑格的若干分离公理（即对于给定子集 $X \subseteq L\backslash\{1\}$，存在$L$ 这一格，使其具有类 *Zariski* 拓扑）。这类空间是T_0 的，通常与T_2.相去甚远。我们给出了使X 成为T_2, 正则 （T_3）、完全正则r（$T_{3\frac{1}{2}}$）、正规、完全正规或完全正规 （ T_6 ）的 X- 拓扑格的充分 / 必要条件。我们主要将这些结果应用于交换（半）环的素理想（分别为极大理想、极小理想）谱。我们通过若干例子和反例说明了这些结果。

引言

关于环R 上的模M 所关联的不同素子模谱已有研究（参见 [43], [56]）。许多作者（如 [19], [55]）对这些谱赋予了若干类 *Zariski* 拓扑并加以研究（例如 [41], [47]），其中也包括第一作者（例如 [4]）。这些拓扑还被对偶化为我们所称的对偶类 *Zariski* 拓扑，定义在结合环 $\mathscr{A}$ 上模M 的互素子模谱上（例如 [3], [5]），以及余环 $\mathscr{C}$ 上余模N 的余素子余模谱上（例如[9], [10]）。此外，这类研究还延伸到了半环上的半模的素子模/互素子模谱（例如 [15], [35]）。

*MSC2020：主要分类：06B23，6B30，6B35；次要分类：13C13，16Y60

†**关键词：** 格，X-拓扑格，扎里斯基拓扑，分离公理，正则空间，完全正则空间，正规空间，完全正规空间，完全正规空间，零维（半）环

‡摘自第二作者在 J. Abuhlail 教授指导下完成的硕士论文。§通讯作者

Abuhlail 和 Lomp [8] 引入了X-拓扑格，将其作为一个通用框架，用于研究（余）环上的（余）素模/余模谱上的（对偶）类 Zariski 拓扑，以及（半）环上的（余）素（半）模谱。关于这类拓扑性质的深入研究见 [6], ，其主要关注点是探讨所研究代数结构的相互作用与其所关联的（对偶）类 Zariski 拓扑的拓扑性质之间的关系。

本文是对 [2] 的延续。在该文中，我们研究了 X-顶格的低阶分离公理 $T_{\frac{1}{4}}$，$T_{\frac{1}{2}}$，$T_{\frac{3}{4}}$ 和 T_1。本文研究满足 X 为 T_2 的 X-顶格，以及 X 为正则、完全正则、正规、完全正规或完全正规（perfectly normal）的 X-顶格。遵循 [57], ，我们采用这些正则性/正规性性质的定义版本，它们不要求 T_1 ，因为这一分离公理会迫使 X 成为 Krull 零维[2, 命题 2.9.]。然而，对于每个 X-顶格 L，我们有：X 为 T_0, ，因此 X 正则（分别为完全正则、完全正规）当且仅当 X 为 T_3（分别为 $T_{3\frac{1}{2}}$，T_6）。

在第 1 节中，我们回顾格论 [31], X-顶格[8], 、半环理论 [30], 以及一般拓扑学 [57]）中的一些预备知识。

在第 2 节中，我们研究 X 正规、完全正规和完全正规时的 X-拓扑格。我们尤其探讨 X 的正规性、X 的 pm-性质（即，X 中的每个元素都与唯一一个 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(X)$ 可比较）以及 X 的最大元可收缩性（即，存在一个收缩映射 $\mu : \mathrm{Max}(X) \longrightarrow X$）之间的关系。对于谱空间而言，这三种性质等价（参见命题 2.12）；但我们在例 2.22 中证明，$Y = \mathrm{Max}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))$ 虽然显然具有 pm-性质和最大元可收缩性，却远非正规，因为它是极端非正规（甚至极端非豪斯多夫）的。在命题 2.14 中，我们证明，当 X 余原子时，X 的正规性以及 X 的最大元可收缩性都是 X 具有 pm-性质的充分条件。其逆命题在定理 2.15 中探讨。在定理 2.16 中，我们证明，当 X 余原子、原子，且 Min(X) 和 Max(X) 均为有限集时，这三种性质等价。特别地，X 有限时便属于这种情形（参见推论 2.17）。

接着，我们研究X 的局部性（即存在唯一的唯一 $\mathfrak{m} \in X$，使得对于所有$x \in X$，均有$x \leq \mathfrak{m}$）与其正规性之间的相互关系。定理 2.19 表明，若X 是余原子且余局部的（例如，$x\sqrt{0_L} \in X$），则X 的局部性等价于X的正规性，而后者又等价于X的超连通性。特别地，这一结论适用于$X = \mathrm{谱}(R)$，其中R 是一个整（半）整环（参见推论 2.21）。

定理 2.28 给出了在以下情形下使此类X 成为完全正规的充要条件：X 是由有限个具有有限基的强不相交 $\bigwedge$-树组成的森林，或者包含一个 $\bigvee$-树 $\curlyvee$，且该树具有有限覆盖。例**??** 阐释了这一结果，而例 2.29 则表明，定理 2.28 (1) 中关于 $\bigwedge$-树强不相交的假设，不能通过将其替换为所涉及 $\bigwedge$-树的标准不相交性来弱化，因为在这种情况下，X 可能不具备正规性，更不必说完全正规性。

在第3节中，我们研究X-拓扑格，其中X是正则的（等价地，满足T_3）。在命题 3.2 中，我们证明，当X是紧空间时，X的正则性等价于T_4（也等价于T_2）。在定理 3.5 中，我们将 X- 拓扑格刻画为满足 X 是 *Stone* 空间的格；这等价于 X 是谱空间且正则（也等价于X 同胚于某个*Jacobson pm-(半)*环的谱(R)）。因此，推论 3.7 将交换 von Neumann 正则环刻画为具有正则素谱的约化环；等价地，它们是具有正规素谱的约化对偶*Jacobson* 交换环。在例 3.8 中，我们给出一个例子，说明这些刻画对于真半环（即非环）并不成立。

受 W. Lewis 的打破结果 [40], 启发，该结果大致指出，每个有限偏序集都可以实现为某个交换环的素谱；本文最后一部分将致力于研究若干有限 偏序集的正则性与正规性，其中给定的格 $\mathscr{L}$ 是拓扑格。此外，我们将其中一些偏序集实现为某些真 半环的素谱。我们还证明，在此语境下，正则性比正规性 更强，具体而言：虽然紧X 的正则性蕴含X 的正规性（由命题 3.2 得出），但我们有一些X-拓扑格的例子，其中X 是有限的（因此是谱的）且正规，却不正则。在例 3.9 中，X 是正规但极端非正则。在例 3.10 中，Y 甚至是T_4^3 且完全正规，但极端非正则。在例3.11中，这些例子中的每一个，X 和Y 都是正规但不完全正规，因为它包含一个 $\mathscr{C}_2$（参见命题 2.31）。

1 预备知识

格

我们回顾格论中的一些相关定义和结果。我们遵循 [31]（除非另有明确说明）。

1.1. 设 $(L, \wedge)$ 是一个完备的交半格，且$B, C \subseteq L$. 我们称$q \in C$ 是**（完全）强B-不可约的，其中** L 当且仅当对于任意$A \subseteq B$ $(A \subseteq B)$，有：$\bigwedge a \leq q \Longrightarrow$有限$_{a\in A} a \leq q$ 对某个$a \in A$.

记$SI^B(C)$（分别地，$CSI^B(C)$) 为C中强B-不可约（分别地，完全强B-不可约）元素的集合. 若上下文清楚，则省略上标B 。

1.2. 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是一个有界格，且$\emptyset \neq X \subseteq A \subseteq L$. 对于$a \in L$, 定义

$$Max(a;X) := \{\mathfrak{m} \in Max(X) \mid a \leq \mathfrak{m}\} \text{ and } Min(a;X) := \{m \in Min(X) \mid m \leq a\}.$$

我们称 A 为

X-**原子的** 当且仅当对每个 $a \in A$，存在 $m \in$最小值(X)，使得 $m \leq a$；X-**余原子的** 当且仅当对每个 $a \in A$，存在 $\mathfrak{m} \in$极大元集(X)，使得 $a \leq \mathfrak{m}$.我们称 / $0 \neq X \subseteq L$ 为

原子的 (余原子的) 当且仅当 X 是 X-原子的（X-余原子的）；
余局部的（局部）当且仅当X是原子的，且 $|\text{最小值}(X)| = 1$（余原子的，且 $\text{极大元集}(X) = 1$）。

注记 1.3. 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是一个有界格。

(1) 若 $\emptyset \neq X \subseteq L$ 是有限的，则X 是原子的且余原子的。

(2) 我们对X 的局部性的概念，不应与局部格（一个**框架**）的概念相混淆；后者是指交对任意并满足分配律的完备格（参见 [30,第 7]页）。

X-拓扑格

我们回顾一下《X-拓扑格理论。》中的一些定义和记号。我们遵循 [8]（除非另有明确说明）。

记号。 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是一个完备格，且$\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$。对任意 $a \in L$，定义

$$V_X(a) := \{x \in X \mid a \leq x\},\ D_X(a) := X\backslash V_X(a) \text{ and } U_X(a) := \{x \in X \mid x \leq a\}.$$

我们称 $V_X(a)$ 为 a 在 X中的簇。 此外，定义

$$V_X(\mathscr{L}) := \{V_X(a) \mid a \in L\} \text{ and } \tau_X(\mathscr{L}) = \{D_X(a) \mid a \in L\}.$$

若上下文明确，我们省略下标 X。

定义 1.4。 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是一个完备格，且$\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$.。我们称$\emptyset \neq A, B \subseteq X$强不相交，当且仅当 $V\,a\,V\,b) = /0$。 $\quad (\bigwedge_{a\in A}) \cap (\bigwedge_{b\in B}$

1.5. 设 $\mathscr{L} = (\mathrm{L}; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是一个完备格，且$\emptyset \neq \mathrm{X} \subseteq \mathrm{L}\backslash\{1\}$.。注意，$\mathrm{V}(0) = \mathrm{X}$，$\mathrm{V}(1) = /0$，且 $\mathrm{V}(\mathscr{L})$ 对任意交封闭，因为对于任意 $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{L}$，$\bigcap_{a\in A}(\mathrm{V}(a)) = \mathrm{V}(\bigvee_{a\in A} a)$。我们称 $\mathscr{L}$ 是一个 X-顶格 [8]，当且仅当 $\mathrm{V}(\mathscr{L})$ 对有限并封闭。考虑$\emptyset \neq \mathrm{X} \subseteq \mathrm{L}\backslash\{1\}$。对于任意 $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ 和 $\mathrm{a} \in \mathrm{L}$，定义

$$I_X(Y) := \bigwedge_{y\in Y} y \text{ and } \sqrt[x]{a} := I_X(V_X(a)) \text{ and } C^X(\mathscr{L}) := \{a \in L \mid a = \sqrt[x]{a}\}.$$

若上下文明确，我们省略上标 X。显然，$\emptyset \neq X \subseteq C^X(\mathscr{L})$ 和 $(C^X(\mathscr{L}) \wedge)$ 是交半格。

现在，我们回顾 Abuhlail 和 Lomp[8] 对 X-拓扑格的一个基本刻画。

定理 1.6。 ([8, 定理 *2.2*]) 设 $\mathscr{L} = (L;\ \vee,\ 0;\ \wedge,\ 1)$ 是一个完备格，且$\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$。那么，$\mathscr{L}$是 X-顶格，当且仅当 $X = SI^{C^X(\mathscr{L})}(X)$。

以下是定理 1.6 的一个直接但非常有用的推论，尤其适用于构造例子与反例。

推论 1.7。 ([2,推论 1.9]) 设 $\mathscr{L}=(L;\ \vee,\ 0;\ \wedge,\ 1)$ 是某个$\emptyset\neq X\subseteq L\backslash\{1\}$. 的 X-顶格。如果$\emptyset\neq Y\subseteq X$，则 L 是一个 Y-顶格，且 Y 上对应的拓扑是诱导子空间拓扑。

半环

我们回顾半环理论中的一些定义和例子。我们遵循 [30]（除非另有明确说明）。

1.8. 半环**R** 大致上是一个不一定带有减法的环。我们假设 hat 0_R 是吸收元（即，对于所有 $r\in R$，$0\cdot r=0=r\cdot 0$），并且 $0_R\neq 1_R$.。此外，如果幺半群（R ·）是交换的，我们称R 为交换半环。我们称没有非零零因子的（交换）半环为**整** [30]（半整环）。每个非零元素都有乘法逆元的整半环（半整环）称为除半环（半域）。不是环的半环称为真半环。

例 1.9. ([11], [30,例 1.8]) 考虑 $B(n,i):=(\{0,1,2,...,n-1\},\oplus,0,\odot,1)$,其中

(1) 若 $x+y\leq n-1$，则 $x\oplus y=x+y$；否则，$x+y=u$，其中 u 是满足 $i\leq u\leq n-1$ 且 $x+y\equiv u \bmod (n-i)$ 的唯一正整数；(2) 若 $xy\leq n-1$，则 $x\odot y=xy$；否则，$xy=v$，其中 v 是满足 $i\leq v\leq n-1$ 且 $xy\equiv v \bmod (n-i)$ 的唯一正整数。

那么 $B(n,i)$ 是一个交换半环。注意，$B(2,1)=\mathbb{B}$，即具有 $1+1=1$,和 $B(n,0)=\mathbb{Z}_n$，其中 $n\geq 2$. 半环 $B(n,i)$ 是半整域，当且仅当 $i\geq 1$，或者 $i=0$ 且 n 是素数。我们称 $i\geq 1$ 的 $B(n,i)$ 为 **Alarcon-Anderson 半整域**。

1.10. 设 R 为一个（半）环，并考虑 Ideal(R)，即由 R 的所有理想构成的完备格，其中对于 R 的理想 I、J，$I\vee J:=I+J$ 且 $I\wedge J:=I\cap J$。对于$\emptyset\neq X\subseteq$Ideal(R)$\backslash\{R\}$，若 Ideal(R) 是一个 X-顶格，我们称 R 为 X-顶（半）环。例如，R 是一个 Spec(R)-顶（半）环，且 Spec(R) 上的拓扑是 R 的素理想谱上的通常扎里斯基拓扑（例如，[13]）。此外，对于任意$\emptyset\neq Y\subseteq$Spec(R)，由推论 1.7，R 是一个 Y-顶（半）环。特别地，R 是一个 Max(R)-顶（半）环和一个 Min(R)-顶（半）环，其中 Max(R)（分别地，Min(R)）是 R 的极大理想谱（分别地，极小素理想谱）。

定义 1.11。 （参见 [58], [39]）若交换（半）环 R有唯一的极大理想，则称R为**局部** 的。

一般拓扑学

下文中，我们回顾一般拓扑学中的一些定义和基本结果。除非另有明确说明，我们遵循 [57] 。

记号。设 X 为一个拓扑空间。对于 Y $\subseteq$X，我们用 $\mathscr{O}$(Y)（分别用 $\mathscr{C}$(Y),$\mathscr{CO}$(Y), $\mathscr{D}$(Y) $\mathscr{K}$(Y) $\mathscr{KO}$(Y) $\mathscr{KC}$(Y) $\mathscr{KCO}$(Y) $\mathscr{I}$(Y) $\mathscr{IC}$(Y)）表示 X 中所有包含 Y 的开（分别为闭、开闭、连通、紧、紧开、紧闭、紧开闭、不可约闭、极大不可约闭）子集的集合。滥用记号（与 Y $=/0$ 的记号对比），我们用 $\mathscr{O}$(X)（分别用 $\mathscr{C}$(X),$\mathscr{CO}$(X), $\mathscr{D}$(X) $\mathscr{K}$(X) $\mathscr{KO}$(X) $\mathscr{KC}$(X) $\mathscr{KCO}$(X) $\mathscr{I}$(X) $\mathscr{IC}$(X)）表示 X 中所有开（分别为闭、开闭、连通、紧、紧开、紧闭、紧开闭、不可约闭、极大不可约闭）子集的集合。

分离公理

定义 1.12。 我们称拓扑空间 X 是

(1) **连通** 当且仅当 $X \neq /0$，且不能写成两个不相交的真 开（闭）子集的并；(2) **超连通** （**不可约**）当且仅当 X 不能写成两个真闭子集的并；等价地，X 中任意两个非空开 子集都不相交；(3) **超连通** 当且仅当 X 中任意两个非空闭 子集都不相交。

1.13。 设X 是一个拓扑空间，并令

$$\mathscr{S}(T_2;X) := \{(x,y) \in (X \times X)\backslash\Delta(X) \mid \exists\, U \times V \in \mathscr{O}(x) \times \mathscr{O}(y) \text{ s.t. } U \cap V = \emptyset\}.$$

我们称 X为**极端非豪斯多夫**（分别称为**反豪斯多夫**），当且仅当 $|X| \geq 2$且 $\mathscr{S}$(T_2；X) $=/0$（分别地，($Y \subseteq X$ 是$T_2 \Longrightarrow |Y| \leq 1$）。

注 1.14。 我们所称的极端非豪斯多夫 空间（定义见 1.13）在 [42, 定理 4.2] 中以反豪斯多夫 空间之名出现。然而，我们保留**反**T_2这一称谓，以使其与 Bankston[18], 提出的**反 P** 空间概念保持一致。后者大致指那些几乎遗传地非**-P**。的拓扑空间。

引理 1.15。 （参见 [42, 定理 4。2], [50]）设 X 是一个拓扑空间。

（1）X 是极端非豪斯多夫的，当且仅当 $|X| \geq 2$ 且 X 是超连通的（不可约的）。

(2) X 是反豪斯多夫的，当且仅当 X 是全序的。

1.16. 设 $\mathscr{L}=(L;\vee,0;\wedge,1)$ 是某个$\emptyset\neq X\subseteq L\backslash\{1\}$的$X$-拓扑格，并考虑偏序集 $(X,\leq)$. 我们将$x\in X$的**高度定义为**

$$ht(x):=\sup\{n\geq 0\mid \text{there exists } \{x_0,\cdots,x_n\}\subseteq X \text{ with } x_0\lneq\cdots\lneq x_n=x\}.$$

我们将**X 的 Krull 维数** 定义为$K.\dim(X):=\sup\{ht(x)\mid x\in X\}$.

1.17. 设R 为交换（半）环，$L=$理想(R)且$X=$谱(R)。 R 的 *Krull* 维数 $K.\dim(R)$无非是$K.\dim(Spec(R))$。 例如，我们有$K.\dim(\mathbb{Z})=K.\dim(Spec(\mathbb{Z}))=1$以及$K.\dim(\mathbb{W})=K.\dim(Spec(\mathbb{W}))=2$.

定义 1.18. (参见 [28], [24], [57]) 设X 为拓扑空间，并对$x\in X$ 定义：

$$Ker(x):=\bigcap_{U\in\mathscr{O}(x)}U \text{ and } E(x):=\bigwedge_{y\in X\backslash\{x\}}y.$$

称$x\in X$ 是**孤立的** （分别为**核化的、正则开、排斥的**），当且仅当 $\{x\}$ 是开集（分别为 $\{x\}=Ker(x)$ $\{x\}=int(\{x\})$，$E(x)=\bigwedge_{y\in D(x)}y$）。

对于任意拓扑空间X，我们定义

$$\begin{array}{llll} K(X) & := & \{x\in X\mid \{x\}=Ker(\{x\})\}; & Iso(X) := \{x\in X\mid \{x\} \text{ is open}\};\\ RO(X) & := & \{x\in X\mid \{x\}=int(\overline{\{x\}})\}; & Cl(X) := \{x\in X\mid \{x\} \text{ is closed}\}; \end{array}$$

定义 1.19。（例如， [49], [24]）拓扑空间X 称为

(1) $T_{\frac{1}{4}}$当且仅当任意$x\in X$都是闭的或核化的（即当且仅当$X=Cl(X)\cup K(X)$)。(2) $T_{\frac{1}{2}}$当且仅当任意$x\in X$都是闭的或孤立的（即当且仅当$X=Cl(X)^{-}\cup Iso(X)$)。(3) $T_{\frac{3}{4}}$当且仅当任意$x\in X$都是闭的或正则开的（即当且仅当$X=Cl(X)\cup RO(X)$)

.

定义 1.20。若拓扑空间X 满足以下条件，则称其为**素性的**：每个不可约闭子集$Y\subseteq X$ 都有一个**唯一的泛点**（即，$\exists!\ y\in Y$ 使得$Y=\{y\}$）。

定义 1.21。（参见 [27], [33], [23]）**谱空间**是满足以下任一（因而也满足全部）等价条件的拓扑空间X :

(1) X 是素性的、紧的，并且有一个在有限交下闭合的基 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{K}\mathscr{O}(X)$；(2) X 同胚于某个 交换（半）环 R 的谱(R)；(3) X 同胚于有限 T_0 空间的射影极限。

定义 1.22。 若一个拓扑空间满足以下条件，则称其为**拟豪斯多夫** [33]： 对于$x\neq y\in X$，要么 x 与y 可由不相交的开邻域分离，要么 存在$z\in X$，使得 $\{x,y\}\subseteq\{z\}$.

引理 1.23。([2,引理 2.8。])

(1) 每个有限 T_0 空间都是谱空间(参见 [33])。(2) 每个谱空间都是拟豪斯多夫空间(参见 [33,推论 2，第 45])。(3) 拓扑空间 X 是 T_2 空间，当且仅当 X 是 T_1 空间且为拟豪斯多夫空间。(4) T_1 谱空间是 T_2 (参见 [13,练习 3。11])。

命题 1.24。 ([2, 命题 2.9。])令 $\mathscr{L} = (L;\ \vee,\ 0;\ \wedge,\ 1)$ 为某个 $\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$. 的 X-顶格

(1) X 是 T_0.(2) 若 X 有限，则 X 是谱的。(3) 极大元集 $(X) =$ 极大元集$(C^X(\mathscr{L}))$。(4)X 是 $T_1 \Longleftrightarrow K$。维数 $(X) = 0$.(5)X 是 $T_2 \Longleftrightarrow K$。维数$(X) = 0$，且 X 是拟豪斯多夫的。(6)X 是 $T_4^1 \overset{\Longleftrightarrow}{} K$。维数$(X) \leq 1$.

定理 1.25。 *([40])* 令 X 为有限偏序集。则存在一个交换环 R，使得 $X \simeq$谱(R) （作为偏序集）。

2 正规X-拓扑格

本节重点研究正规、完全正规 和完全正规 X-拓扑格。需要提醒读者的是，在研究上述拓扑性质时，我们不像若干参考文献那样假设T_1 分离公理，因为X是T_1当且仅当$K.\dim(X) = 0$（参见命题 1.24 (4)）。为避免混淆并使本文自成一体，我们对术语作如下约定。

2.1. （参见 [57], [50], [32, 命题 2]）设X 是一个拓扑空间。令

$\mathscr{T}$(R; X) := {(C, p) |$\emptyset \neq$C $\subsetneq$X 是闭集且 p $\in$X\C};$\mathscr{S}$(R; X) := {(C, p) $\in \mathscr{T}$(R; X) | $\exists$U $\times$V $\in \mathscr{O}$(C) $\times \mathscr{O}$(p) s.t. U $\cap$V $=\emptyset$}; $\mathscr{S}$(CR; X) := {(C, p) $\in \mathscr{T}$(R; X) | $\exists$f : X 连续. $\longrightarrow \mathbb{R}$ s.t. f (C) $= 0$ and f (p) $= 1$};$\mathscr{T}$(N; X) := {(C, D) |$\emptyset \neq$C, D $\subseteq$X 是闭集且 C $\cap$D $=\emptyset$};$\mathscr{S}$(N; X) := {(C, D) $\in \mathscr{T}$(N; X) | $\exists$U $\times$V $\in \mathscr{O}$(C) $\times \mathscr{O}$(D) s.t. U $\cap$V $=\emptyset$}.$\mathscr{T}$ (PN; X) := {(C, D) |C, D $\subseteq$X 是闭集且 C $\cap$D $=\emptyset$}; $\mathscr{S}$(PN; X) := {(C, D) $\in \mathscr{T}$ (PN; X) | $\exists$f : X 连续. $\longrightarrow \mathbb{R}$ s.t. C $=$f $^{-1}$(0) and D $=$f $^{-1}$(1)}.

称 X 为正则（分别为极端非正则、反正则），当且仅当 $\mathscr{S}(\mathrm{R};\mathrm{X}) = \mathscr{T}(\mathrm{R};\mathrm{X})$（分别为$\mathscr{T}(\mathrm{R};\mathrm{X}) \neq /0$ 且 $\mathscr{S}(\mathrm{R};\mathrm{X}) = /0$，$\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ 为正则 $\Longrightarrow |\mathrm{Y}| \leq 1$）；称其为完全正则，当且仅当 $\mathscr{S}(\mathrm{CR};\mathrm{X}) = \mathscr{T}(\mathrm{R};\mathrm{X})$；称 X 为正规（分别为极端非正规、反正规），当且仅当 $\mathscr{S}(\mathrm{N};\mathrm{X}) = \mathscr{T}(\mathrm{N};\mathrm{X})$（分别为$\mathscr{T}(\mathrm{N};\mathrm{X}) \neq /0$ 且 $\mathscr{S}(\mathrm{N};\mathrm{X}) = /0$，$\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ 为正规 $\Longrightarrow |\mathrm{Y}| \leq 2$）；称其为完全正规（遗传正规），当且仅当每个子空间 $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ 都是正规；称其为完全正规，当且仅当 $\mathscr{S}(\mathrm{PN};\mathrm{X}) = \mathscr{T}(\mathrm{PN};\mathrm{X})$；$\mathrm{T}_3$（分别为 $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}, \mathrm{T}_4, \mathrm{T}_5, \mathrm{T}_6$），当且仅当 X 是 T_1 且为正则（分别为完全正则、正规、完全正规、完全正规）。 -

注记 2.2. 设X 是一个拓扑空间。显然：

(1) 若X是极端非豪斯多夫的，且 $\mathscr{T}(\mathbf{R};X) \neq /0$，则$X$是极端非正则的。(2) 若$X$是极端非正则的，且 $\mathscr{T}(\mathbf{N};X) \neq /0$，则$X$是极端非正规的。

定义 2.3. 设X 是一个拓扑空间。若两个子集A，$B \subseteq X$ 满足**分离**当且仅当$A \cap B = \emptyset = A \cap B$。

引理 2.4. *(*参见 *[57, 15.B])* 一个拓扑空间 X 完全正规，当且仅当对于每一对$(A, B) \subseteq X \times X$ 的分离 集，都存在 $U \times V \in \mathscr{O}(A) \times \mathscr{O}(B)$ 使得 $U \cap V = /0$。

2.5. 设X 是一个拓扑空间。若子集$A \subseteq X$ 是一个G_δ-集，当且仅当A 是可数个开集的交。若X 是一个**G_δ-空间**（一个**完美空间** [25]），当且仅当X 中的每个闭集都是G_δ-集。

引理 2.6。（例如，*[38,* 定理 *2*，第 *135]* 页）（韦杰尼索夫定理）拓扑空间 X 是完全正规空间，当且仅当 X 是正规 G_δ-空间。

以下引理的证明是直接的。

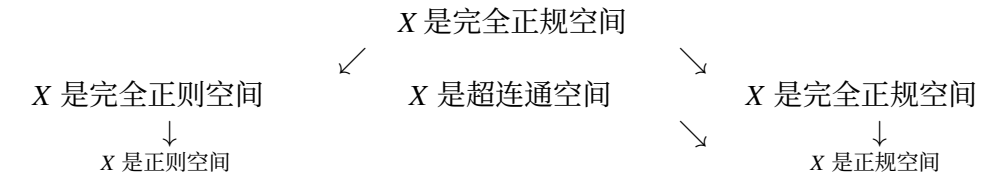
引理 2.7。设 X 是一个拓扑空间。

(1) 如果 X 是超连通的，则 X 是正规的。(2) 如果 X 是超连通的（不可约的），且 $\mathscr{T}(\mathbf{R};\ X) \neq /0$，则 X 是极端非正则的。(3) 如果 X 是极端非正则的，且 $\mathscr{T}(\mathbf{N};\ X) \neq /0$，则 X 是极端非正规的。

注记2.8。（例如，[38]）。

(1) 韦杰尼索夫定理（参见引理 2.6）通常针对T_1 空间表述（例如 [25,定理 1.5.19]）。然而，证明确实用到了这一假设。

(2) 对于拓扑空间 X，我们有以下一般而言不可逆的蕴含关系：



（3）每个T_0 正则（分别为完全正则、完全正规）空间都是T_1, ，因此T_3（分别为$T^{3\frac{1}{2}}, T_6$）。 -

（4）我们有

$$T_6 \Longrightarrow T_5 \Longrightarrow T_4 \Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_{\frac{3}{4}} \Longrightarrow T_{\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_{\frac{1}{4}} \Longrightarrow T_0.$$

2.9. 设 $\mathscr{L} =$(L; $\vee$, 0; $\wedge$, 1) 是某个$\emptyset \neq$X $\subseteq$L$\backslash\{1\}$. 的X-拓扑格。我们称 X 具有 pm-性质，当且仅当对每个 x $\in$X，$|$Max(x; X)$| = 1$；称 X 具有 m-性质，当且仅当对每个 x $\in$X，$|$Min(x; X)$| = 1$；称 X 是 Jacobson 的，当且仅当对每个 x $\in$ X，都有 x $=$ $\bigwedge$ m; Max(x;X) X 是对偶 Jacobson 的，当且仅当对每个 x $\in$ X，都有 x $=$ $\bigvee$ m. Min(x;X)

我们称（半）环R 为**pm-（半）环** [46] （分别为**m-（半）环** [17], 、**Jacobson （半）环,** 对偶**Jacobson （半）环**），当且仅当谱(R)具有 pm-性质（分别具有 m-性质、是 Jacobson 的、是对偶 Jacobson 的）。关于 Jacobson 交换环的更多内容，请参阅 [13]。

注记 2.10。 在 [49, 定理 4.2] 中，pm-（半）环被称为*Gelfand* （半）环 。为避免与 [30] 意义下的*Gelfand* 半环产生任何可能的混淆，我们选择不采用这一术语。

De Marco 和 Orsatti 在 [46] 中刻画了素谱为正规 （不一定是T_1）的交换环，即 pm-环。对于X-拓扑格，我们研究X 的正规性与 pm-性质之间的关系。

定义 2.11。 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是某个$\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$. 的$X$-拓扑格。若子空间$Y \subseteq X$ 满足存在一个连续映射（称为**收缩映射**）$f\colon X \longrightarrow Y$，使得$f_Y = id_Y$.，则称$Y$ 是X 的**收缩子空间**。

以下是对 [46, 定理 2.1] 和 [49, 定理 4.2] 的重新表述（参见 [33]）：

命题 2.12。 设 $\mathscr{L} = (L;\ \vee、0;\ \wedge、1)$ 是某个$\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$. 的 X-顶格。若 X 是谱的，则以下各项等价：

(1) X 具有 pm-性质；

(2) $Max(X)$ 是 X 的一个收缩；(3) X 是正规空间；(4) X 同胚于某个 pm-（半）环的 $Spec(R)$。

注2.13. 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是某个 $\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$. 的 X-顶格。假设 X 是最大可收缩的，且收缩映射为 $\mathfrak{r} : X \longrightarrow Max(X)$。令 $x \in X$，并设 $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}(x)$。注意，$Max(X)$ 是 T_1,，因此 $\{\mathfrak{m}\}$ 在 Max(X) 中是闭的。由于 $\mathfrak{r}$ 是连续的，$\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{m})$ 在 Spec(X) 中是闭的。于是 $V(x) := \{x\} \subseteq \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{m})$，即 $\mathfrak{r}(V(x)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$.■

以下结果探讨命题 2.12 在 X 不是谱空间的 X-顶格上可以推广到何种程度。

命题 2.14. 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是某个 $\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$ 的 X-顶格，并假设 X 是余原子的。

(1) 若 X 正规，则 X 具有 pm-性质。(2) 若 $Max(X)$ 是 X 的收缩，则 X 具有 pm-性质。

证明。 设X 是余原子的。

(1) 假设 X 正规。取 $x \in X$，并注意到 $Max(x; X) \neq /0$（因为 X 是余原子的）。假设存在 $x \in X$ 和 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$in $Max(x; X)$。注意到$\{\mathfrak{m}\} = V(\mathfrak{m})$ 和 $\{\mathfrak{m}'\} = V(\mathfrak{m}')$ 是 X 中的闭集，但无法用不相交的开集分离：任何包含 $\{\mathfrak{m}\}$ 或 $\{\mathfrak{m}'\}$ 的开集 D(a)（其中 $a \in L$）也会包含 x，矛盾。(2) 假设 $\mathfrak{r} : X \longrightarrow Max(X)$ 是一个收缩映射。取 $x \in X$，并考虑 $\mathfrak{m} := \mathfrak{r}(x)$。那么 $\mathfrak{r}(Max(x; X)) \subseteq \mathfrak{r}(V(x))$ 注 $\underset{2.13}{=} \{\mathfrak{m}\}$.。由于 X 是余原子的，我们有 $Max(x; X) \neq /0$。由于 $f_{Max(X)} = id_{Max(X)}$，由注2.13可得 $Max(x; X) = \{\mathfrak{m}\}$.。由于 $x \in X$ 是任意的，我们得出 X 具有 pm-性质。■

下面的命题在某些条件下给出了正规 X-拓扑格的两种刻画。

定理 2.15. 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是某个 $\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$ 上的 X-拓扑格，并假设 X 是余原子的。

(1) 假设 X 是原子的，且 $Min(X)$ 是有限的。那么，当且仅当 X 具有 pm-性质时，X 才是正规的。(2)假设 X 是完全强 X-不可约的，且 $Max(X)$ 是有限的。那么，当且仅当 X 具有 pm-性质时，X 才是 $Max(X)$ 的收缩。

证明。 (1) 如果X 是余原子的且正规的，那么根据定理2.14 (1)，X 具有 pm-性质。

反之，假设X 具有 pm-性质，X 是原子的，且 $|Min(X)| < \infty$.那么X 显然是余原子的。由于X 具有 pm-性质，因此存在一个良定义映射

$$\mu : X \longrightarrow Max(X), \text{ where } x \leq \mu(x).$$

令$\emptyset \neq V(c), V(d) \subsetneq X$不相交。由于$X$是原子的，我们可以为每个$x \in V(c) \cup V(x)$选取某个$a_x \in Min(X)$，使得$a_x \leq x \leq \mu(x)$（注意，由于$X$ 具有 pm-性质，$\mu(a_x) = \mu(x)$）。令

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} J & := & Max(c;X); & K & := & Max(d;X); \\ \widetilde{J} & := & \{a \in Min(X) \mid \mu(a) \notin J\}; & \widetilde{K} & := & \{a \in Min(X) \mid \mu(a) \notin K\}; \\ U & := & \bigcap\limits_{a \in \widetilde{J}} D(a), & V & := & \bigcap\limits_{a \in \widetilde{K}} D(a). \end{array}$$

注意，U 和 K 在 X 中是开集（因为 Min(X) 是有限的）。此外，V (c) $\subseteq$U：令 x $\in$V (c)，并假设 x $\notin$U。那么存在 $a_x \in$Min(X)，使得 $a_x \leq$x 且$\mu(a_x) \in$Max(X)\J。由于 X 具有 pm-性质，可得 μ(x) $= \mu(a_x) \notin$V (c)，矛盾。类似地，可以证明 V (d) $\subseteq$V。注意，J $\cap$K $=/0$,~ ~因此 Min(X) $=$J $\cup$K，由此可得 U $\cap$V $=/0$。所以，X 是正规的。

(2) 若$Max(X)$是X的收缩，则由定理2.14 (2) 可知X 具有 pm-性质。

反过来，假设X 具有 pm-性质，X 是完全 强X-不可约的，且$Max(X)$是有限的。映射 $\mathfrak{r}$: $X \longrightarrow Max(X)$ 定义为 $\mathfrak{r}(x) = \mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m}$是 $Max(x; X)$ 中的唯一 元素: $= V(x) \cap Max(X)$，该映射定义良好并满足 $\mathfrak{r}|_{Max(X)} = id^{Max(X)}$.

考虑 $U_X(\mathfrak{m}) : = \{z \in X \mid z \leq \mathfrak{m}\}$. **断言：** $V(\bigwedge z) = U_X(\mathfrak{m})$。$z \in U_X(\mathfrak{m})$

假设存在 y $\in$V ($\bigwedge$z)\$U_X(\mathfrak{m})$。由于 X 是余原子的，存在 z$\in U_X(\mathfrak{m})\mathfrak{m}' \in$Max(X)\$\{\mathfrak{m}\}$ 使得 y $\leq \mathfrak{m}'$。根据假设，X 是完全强 X-不可约的，因此存在 $z_y \in U_X(\mathfrak{m})$使得 $z_y \leq$y。由此可得 $\{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'\} \subseteq$ Max(z$_y$; X)，这与（X 具有 pm-性质这一假设）矛盾。因此，V ($\bigwedge$ z) $\subseteq U_X(\mathfrak{m})$。反向包含关系显然成立。$z \in U_X(\mathfrak{m})$

因此，我们有

$$\mathfrak{r}^{-1}(V(\mathfrak{m})) = \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{m}) = \{z \in X \mid z \leq \mathfrak{m}\} = U_X(\mathfrak{m}) = V(\bigwedge_{z \in U_X(\mathfrak{m})} z).$$

由于极大元集(X)是有限的，我们得出 $\mathfrak{r}$是一个连续映射。因此，极大元集(X)是X的一个收缩.■

定理 2.16. 设 $\mathscr{L}=(L;\vee,0;\wedge,1)$ 是某个$\emptyset\neq X\subseteq L\backslash\{1\}$. 的 X-顶格。若 X 是余原子的、原子的，且 $Min(X)$ 和 $Max(X)$ 均为有限集，则

$$X \text{ is normal} \iff X \text{ has the pm-property} \iff Max(X) \text{ is a retract of } X.$$

以下结果是定理 2.16 的直接推论；由于任意有限T_0 空间都是谱空间（参见引理 1.23），它也是命题 2.12 的直接推论。

推论 2.17. 设 L 是某个$\emptyset\neq X\subseteq L\backslash\{1\}$. 的 X-顶格。若 X 是有限的，则以下命题等价:

(1) 极大元集(X) 是 X 的收缩；(2) X 具有 pm-性质；(3) X 是正规空间；(4) X 同胚于某个具有有限个素元的 pm-（半）环的谱(R)。

命题 2.18. 设 $\mathscr{L}=(L;\vee,0;\wedge,1)$ 是某个$\emptyset\neq X\subseteq L\backslash\{1\}$. 的 X-顶格

(1) 若 X 是局部的，则 X 是正规的。(2) 若 X 是余局部且正规（并且余原子），则 $|\text{极大元集}(X)|\leq 1$ （X 是局部的）。

证明。 (1) 设 X是局部的（即 X是余原子的，且 $Max(X)=\{\mathfrak{m}\}$）。注意，对每个$a\in L$, $\mathfrak{m}\in V(a)$。因此，X 是超连通的，故显然 正规。

(2) 假设 X 是正规、余局部的，且 Min(X) $=\{\mathfrak{m}\}$，Max(X) $\neq/0$。设存在 $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}'$ 属于 Max(X)。注意 $\{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'\}\subseteq$V $(\mathfrak{m})$。单点集 $\{\mathfrak{m}\}=$V $(\mathfrak{m})$ 和 $\{\mathfrak{m}'\}=$ V $(\mathfrak{m}')$ 是闭集，但无法用不相交开集分离：任何包含 $\{\mathfrak{m}\}$ 或 $\{\mathfrak{m}'\}$ 的开集 D(a)（其中 a $\in$L）也会包含 $\mathfrak{m}$；也就是说，无法找到分离 $\{\mathfrak{m}\}$ 和 $\{\mathfrak{m}'\}$ 的不相交开集，矛盾。因此，$|\text{Max(X)}|=1$.■

定理 2.19. 设 $\mathscr{L}=(L;\vee,0;\wedge,1)$ 是某个$\emptyset\neq X\subseteq L\backslash\{1\}$. 上的 X-顶格。若 X 是余局部且余原子的，则以下命题等价:

(1) X 是局部的；(2)
X 是超连通的；(3)
X 是正规的。

*Example*2.20. 设 R 是一个局部（半）环。那么 谱(R) 是超连通的，因此是正规的。

推论 2.21. 设 R 是一个（半）整环。以下条件等价:

(1) R 是局部环；(2) 谱(R)是超连通的；(3) 谱(R)是正规的；(4) 谱(R)是最大可收缩的；(5) R 是一个 pm-（半）环。

例 2.22。 整环 $\mathbb{Z}$ 不是 局部环，因此 X =谱$(\mathbb{Z})$ 不是 正规空间，这是由推论 2.21 得出的。事实上，X 是超连通的（不可约的）：对于任意正整数 $m \neq n$，我们有

$$D(m\mathbb{Z}) \cap D(n\mathbb{Z}) = D(mn\mathbb{Z}) = \{p\mathbb{Z} \mid p \nmid mn\} \neq \emptyset.$$

此外，$|\mathscr{T}(\mathrm{R}; \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))| = \infty$，因为 $\mathrm{p}\mathbb{Z} \in \mathrm{X} \backslash \mathrm{V}(\mathrm{m}\mathbb{Z})$（其中 $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$）当且仅当 $\mathrm{p} \nmid \mathrm{m}$。此外，$|\mathscr{T}(\mathrm{N}; \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))| = \infty$，因为 $\mathrm{V}(\mathrm{m}\mathbb{Z}) \cap \mathrm{V}(\mathrm{n}\mathbb{Z}) = /0$ 当且仅当 m 和 n 的最大公约数 $= 1$.所以，X 是极端非豪斯多夫的，从而是极端非正则的，并因此由引理 2.2 得出其极端非正规的。■

例 2.23。 考虑半环 $S = (\mathbb{W} \cup \{\infty\}; \oplus, 0; \oplus, \infty)$，其中

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \text{ and } a \oplus b = \min\{a, b\}.$$

设定 $J_s = \{x \in S \mid x \leq s\}$, 我们有 $J_0 = \{0\}$ 以及 $J_\infty = S$。 注意到 $Spec(S) = \{J_s \mid s \in \mathbb{W}\} \cup \{\mathbb{W}\}$.

注意到 S 关于 $Max(S) = \{\mathbb{W}\}$ 是局部的，且关于 $Min(S) = \{0\}$. 是余局部的。由定理 2.19 可知，$Spec(S)$ 是（完美的、完全的）正规的。显然，S 是一个 pm-半环，并且

$$\mu : Spec(S) \longrightarrow Max(S),\ J_i \longmapsto \mathbb{W}$$

是一个收缩映射。

令 $Y := Spec(S) \backslash \{\mathbb{W}\} := \{J_s \mid s \in \mathbb{W}\}$. 则 Y 显然是超连通的，因而是正规的。然而，Y 既不是最大可收缩的，也不具有 pm-性质，也不是局部的（因为$Max(Y) = /0$）。注意到 Y是原子的，关于$Min(Y) = \{0\}$是余局部的，并且$Min(Y)$ 和$Max(Y) = /0$ 均为有限集。这表明，不能从命题 2.14 (1)、定理 2.15 (1) 和定理 2.16 的假设中删除Y 是余原子的 这一条件。此外，这还表明，不能从推论 2.17 的假设中删除有限性条件。■

我们回顾一下半整域 $B(n,i)$ 的素谱的一种有用描述：

2.24. ([11, 定理 24]) 设 $n \geq 2, 1 \leq i \leq n-1$ 并令

$$\mathfrak{m}_n := \{0, 2, 3, ..., n-1\} \text{ for } n \geq 3).$$

(1) K.维数$(B(n,i)) = 0$若$i = 0$或$n = 2$且$i = 1$.

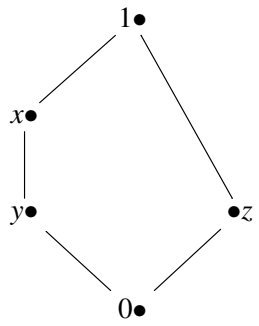


图 1：N_5：一个非分配的X-拓扑格

(2) K.维数$(B(n,i)) = 1$若$n \geq 3$且$i = 1$。在这种情况下,

$$Spec(B(n,i) = \{0\} \cup \{pB(n,i) \mid p \text{ is a prime divisor of } n-1\}.$$

(3) $K.B(n,i)$的维数 $= 1$若$n \geq 3$且$i = n-1$。在此情形下，谱$(B(n,i)) = \{0, \mathfrak{m}_n\}$.

(4) $K.B(n,i)$的维数 $= 2$若$n \geq 4$且 $2 \leq i \leq n-2$。在此情形下,

$$Spec(B(n,i) = \{0, \mathfrak{m}_n\} \cup \{pB(n,i) \mid p \text{ is a prime divisor of } n-i\}.$$

例 2.25. 考虑五边形N_5： 尽管N_5 不是 分配的（参见 [31, 定理101]），我们仍可找到X 使得N_5 是一个X-拓扑格。

(1) 令$X = \{0, y, x\} = C^X(N_5)$. 显然$X = SI^{C^X{}_{(N_5)}}(X)$,因此由定理 1.6，$N_5$是一个$X$-拓扑格。闭集族为

$$\begin{array}{lllllllll} V_X(0) & = & X, & V_X(y) & = & \{x,y\}, & V_X(z) & = & \emptyset, \\ V_X(1) & = & \emptyset, & V_X(x) & = & \{x\}. & & & \end{array}$$

注意，X与最小值$(X) = \{0\}$余局部，而与极大元集$(X) = \{x\}$.局部。显然，X 是超连通的，因此X 显然是 正规的。
另一方面，X 的开集族由下式给出

$$\begin{array}{lllllllll} D_X(0) & = & \emptyset, & D_X(y) & = & \{0\}, & D_X(z) & = & X, \\ D_X(1) & = & X, & D_X(x) & = & \{0,y\}. & & & \end{array}$$

显然，X 是超连通（不可约）的，因此根据引理 1.15，X 是极端非豪斯多夫的。由于 $\mathscr{T}(\mathbf{R}, X) \neq /0$，我们根据引理 2.7 得出$X$是极端非正则的。注意，$X$是一条链 $0 \lneq y \lneq x$，且$K.\dim(X) = 2$，因此X不是T_1 （参见命题 1.24 (4)）。事实上，根据命题 1.24 (6)，X 甚至不是T_4^1。

由于 X 是有限的且满足 T_0，，可知 X 是谱空间，并且 X $\approx$Spec(R)，其中 R 是任意 Krull 维数为 $=2$ 的赋值环（例如，R $=\mathbb{R}[[x,y]]+y\cdot\mathbb{R}((x))[[y]]$，因为 Spec(R) $=\{(0),(y),(x,y)\}$）。此外，X 也同胚于 Spec(B(n, i))，其中 $n\geq 4$，且 $2\leq i\leq n-2$，其中 $n-i$ 为素数（参见命题 2.24 (4)）。特别地，X $\approx$Spec(B(6, 3)) $=\{0,\{0,3\},\{0,2,3,4,5\}\}$.

(2) 设 $Y=\{y,x\}\subseteq X$. 则 $C^Y(N_5)=\{y,x\}=Y$. 由此，N_5 根据上述结论和 (1) 是一个 Y-拓扑格。闭集族为

$$\begin{array}{lllllllll} V_Y(0) & = & Y, & & V_Y(y) & = & Y, & & V_Y(z) & = & \emptyset, \\ V_Y(1) & = & \emptyset, & & V_Y(x) & = & \{x\}. & & & & \end{array}$$

注意到，Y 与 $Min(Y)=\{y\}$ 余局部，且与 $Max(Y)=\{x\}$. 局部。显然，Y 是超连通的，因此 X 显然是正规的。

由于 Y 是有限的且 T_0，，我们知道 Y 是谱空间。事实上，$Y\approx Spec(R)$，，其中 R 是任意一个离散赋值环（例如 R 是离散赋值环 $\mathbb{W}[[x]]$）。此外，对于任意 $n\geq 3$，$Spec(B(n,n-1))=\{\{0\},\{0,2,\cdots,n-1\}\}X$（参见命题 2.24 (3)）。

另一方面，Y 的开集族为

$$\begin{array}{lllllllll} D_Y(0) & = & \emptyset, & & D_Y(y) & = & \emptyset, & & D_Y(z) & = & Y, \\ D_Y(1) & = & Y, & & D_Y(x) & = & \{y\}. & & & & \end{array}$$

显然，X 是超连通的（不可约的），因此根据引理 1.15，X 是极端非豪斯多夫的。由于 $\mathscr{T}(\mathbf{R},X)\neq/0,$，根据引理 2.7，我们得出 X 是极端非正则的。注意，x 是闭的，而 y 是孤立的，但不是正则开的，因此 Y 是 $T_{\frac{1}{2}}$，但不是 $T^{3\frac{1}{4}}$。 ■

例 2.26。半环 $\mathbb{W}$ 是局部的，其极大理想为 $\mathbb{W}\backslash\{1\}$，其素谱为 注意到 最小值($\mathbb{W}$) $=0$ 且 极大元集($\mathbb{W}$) $=\{\mathbb{W}\backslash\{1\}\}$，因此 X 是超连通的，因而是平凡地 正规的。注意，X 并非 完全正规，这或许出乎意料。例如，闭集 $V(\mathbb{W}\backslash\{1\})=\{\mathbb{W}\backslash\{1\}\}$ 并非 G_δ-集：若 $\mathbb{W}\backslash\{1\}\in D(I)$，其中理想为 I，则 $I\nsubseteq\mathbb{W}\backslash\{1\}$，矛盾。

考虑 $Y:=X\backslash\{\mathbb{W}\backslash\{1\}\}\subseteq$ 谱($\mathbb{W}$)。那么 $\mathbb{W}$ 是一个 Y-拓扑半环，由推论 1.7 得出。此外，$Y=D(\mathbb{W}\backslash\{1\})$ 是 开 子空间 X 中的。显然，$Y\approx$ 谱($\mathbb{Z}$)。因此，Y 是超连通的（不可约的），所以它极端非豪斯多夫、极端非正则且极端非正规！ ■

在继续之前，我们先考虑一类特殊的图，这类图将在本节余下部分中反复用到。在图论中，**树** 是指连通无环无向图，即任意一对不同顶点之间恰有唯一 一条路径的无向图。不过，我们关注的是与偏序集相关的一类非常特殊的根树 。

2.27. 设（$P\leq$）为一个偏序集。

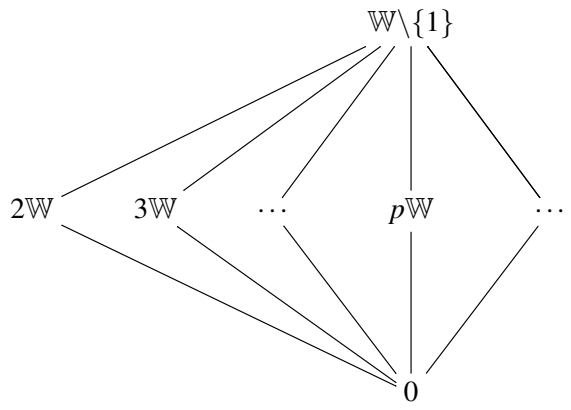


图2： 𝕎的素谱

（1）如果（$P \leq$）是一个含有$n+1$个元素的链（简写为$\mathscr{C}_{n+1}$），则称P为一个**长度为**n的链。

(2) $\bigwedge$-**树**是满足以下条件的非空子集 $\mathscr{T} \subseteq P$ $\forall x$、y、$z \in \mathscr{T}$：

(a) 若$x|y \in \mathscr{T}$，即x 和y 不可比较，则存在 $\exists z \in \mathscr{T}$，使得$z \gneqq x$ 且$z \gneqq y$;
(b) 若$x \lneqq y$ 且$x \lneqq z$，则y 和z 可比较。

若 $\mathscr{T}$是 $\bigwedge$-树且最小值($\mathscr{T}$)有限，则称 $\mathscr{T}$具有**有限基**（此时， $\mathscr{T}$必为有限集，且有唯一极大元 $\mathfrak{m}$，记为($\mathscr{T}$， $\mathfrak{m}$)）。我们将高度为*1*的 $\bigwedge$-树记为 $\mathscr{T}_n$，且 |最小值($\mathscr{T}$)| $= n$。 一族互不相交的 $\bigwedge$-树称为 $\bigwedge$-**森林**。

称 $\bigvee$-**树** $\mathscr{V}$为对偶偏序集 $P^o = (P \geq)$ 中的一个 $\bigwedge$-树。 若 $\mathscr{V}$是一个 $\bigvee$-树，且极大元集($\mathscr{V}$) 有限，则称 $\mathscr{V}$具有**有限覆盖**（此时， $\mathscr{V}$必为有限集，且具有唯一的 极小元 m， 记作 ($\mathscr{V}$,m)）。我们用 $\mathscr{V}_n$ 表示高度为 1 的 $\bigvee$-树，且 |极大元集($\mathscr{V}$)| $=n$。

注意，对于链 $\mathscr{C}_2$，有 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{C}_2 = \mathscr{V}_1$，即 $\mathscr{C}_2$ 既是一个 $\bigwedge$-树，也是一个$\bigvee$-树。

以下结果给出了给定的X-顶格满足何种图示充分/必要条件时，X 才是完全正规的。

定理 2.28。 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是某个$\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}$. 的 X-顶格

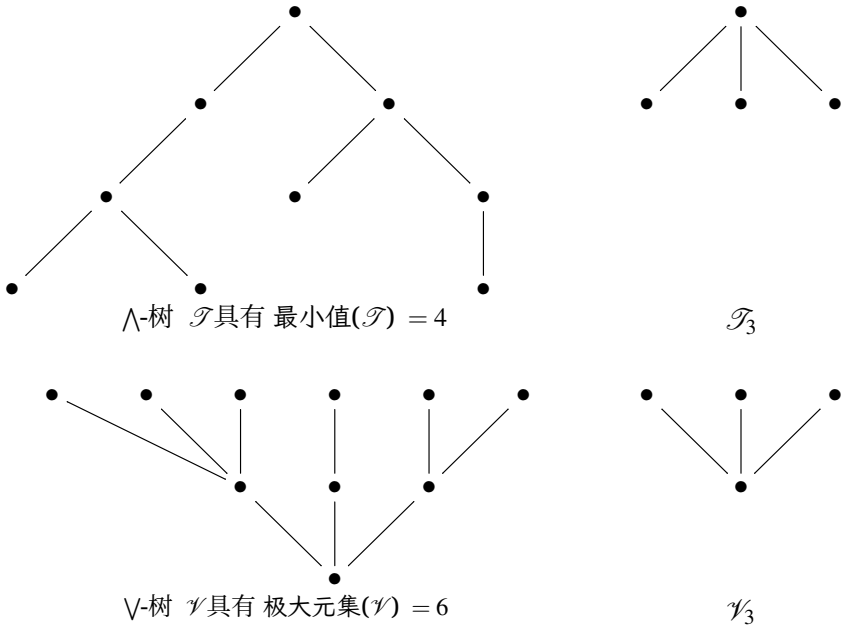

⋀-树 $\mathscr{T}$具有 最小值($\mathscr{T}$) $=4$
$\mathscr{T}_3$
⋁-树 $\mathscr{V}$具有 极大元集($\mathscr{V}$) $=6$
$\mathscr{V}_3$

图 3：树的例子

(1) 若 X 是由有限个两两强不相交 $\bigwedge$-树组成且具有有限基的森林，则 X 是完全正规空间。

(2) 若 X 是完全正规的，则 X不 包含任何具有有限覆盖和|极大元集$(\mathscr{V})| \geq 2$.的 $\bigvee$-树 $\mathscr{V}$

证明。 (1) 设X 是由有限个具有有限基的两两强不相交 $\bigwedge$-树组成的森林（$\mathscr{T}_{\lambda_1}$， $\mathfrak{m}_i$）$\cdots$， （$\mathscr{T}_{\lambda_n}$， $\mathfrak{m}_n$），且$I := \{1, \cdots, n\}$.

步骤 1： X 是正规的。

设 V (a) 和 V (b) 是 X 中两个不相交的闭集。于是我们可以找到两个不相交的指标集 K、J $\subseteq$I，使得 V (a) $\subseteq \bigcup \mathscr{T}_{\lambda_i}$和 V (b) $\subseteq \bigcup \mathscr{T}_{\lambda_i}$（否则，则存在某个 i$\in$K i$\in$J，使得 $1 \leq$j $\leq$n 满足 $\mathscr{T}_{\lambda_j} \cap$V (a) $\neq$/0 且 $\mathscr{T}_{\lambda_j} \cap$V (b) $\neq$/0，从而 $\mathfrak{m}_j \in$V (a) $\cap$V (b)，这与这些集合不相交的假设矛盾。

由于 Λ是 有限，$U :=\ \bigcap D(\bigwedge \mathscr{T}_{\lambda_i})$和 $V :=\ \bigcap D(\bigwedge \mathscr{T}_{\lambda_i})$是 X 中的两个开集 X。$_{i\in I\setminus K\, i\in \Lambda\setminus J}$

断言： $V(a) \subseteq U, V(b) \subseteq V$ 且 $U \cap V$ =/0。

设 x $\in$V (a)。由于 V (a) $\subseteq \bigcup \mathscr{T}_{\lambda_i}$，存在 i $\in$K，使得 x $\in \mathscr{T}_{\lambda_i}$.若 x $\notin$U，则 i$\in$K 中存在 j $\in$I\K，使得 x $\in$V ($\bigwedge \mathscr{T}_{\lambda_j}$)。因此，x $\in$V ($\bigwedge \mathscr{T}_{\lambda_i}$) $\cap$V ($\bigwedge \mathscr{T}_{\lambda_j}$) =/0（因为 i $\neq$j），矛盾。类似地，我们有 V (b) $\subseteq$V。此外，我们有

$$U \cap V = \bigcap_{i\in I\setminus(K\cap J)} D(\bigwedge \mathscr{T}_{\lambda_i}) = \bigcap_{i\in I} D(\bigwedge \mathscr{T}_{\lambda_i}) = X\setminus\bigcup_{i\in I} V(\bigwedge \mathscr{T}_{\lambda_i}) = \emptyset.$$

由此可得，X 是正规的。

步骤 2： X 的每个子空间都是正规的。

注意，从任何具有有限基的 $\bigwedge$-树中移除任意一个非极大元，会得到一棵（更小的）具有有限基的树。此外，从一棵具有有限基的树中移除其极大元，会产生两棵新的不相交的 $\bigwedge$-树，且每棵都具有有限基。因此，任何非空子空间 $Y \subseteq X$ 仍然是同一类型的空间，故由步骤 1 可知其为正规的。

(2) 设X 是完全正规的。假设X 包含一棵具有有限覆盖的对偶树 ($\mathscr{V}$,m)，且 |极大元集$(\mathscr{V})| \geq 2$. 设 $\{y,z\} \subseteq$ 极大元集$(\mathscr{V}) \subseteq X$ 满足$m \lneq y$ 且$m \lneq z$。注意，$Y := \{m,y,z\}$ 是余原子的。由于Y 不具备pm-性质，由命题 2.14 (1) 可知Y不正规，这与我们关于X 是完全正规的假设矛盾。■

例 2.29。 考虑由下图所表示关系的传递闭包给出的（有界分配）格 $\mathscr{L}$on $L = \{0, u,v,t,x,y\ 1\}$

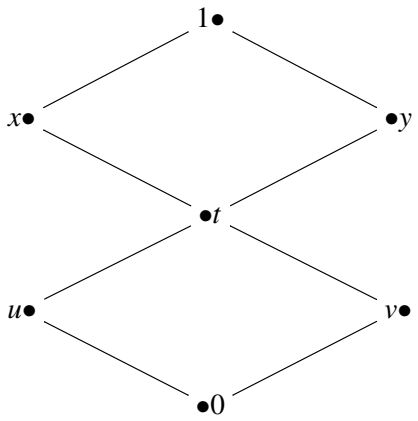


图4：一个 X-格，其中 X 是极端非正规但并非反正规

令 X $=\{$x、u、y、v$\}$.。那么 $C^X(\mathscr{L})=\{0$,t、x、y、u、v$\}$，且 Max(X) $=\{$ x、y$\}$.。显然，X $=SI^{C^X}(\mathscr{L})$(X)，因此根据定理 1.6，L 是一个 X-顶格。闭集族为

$$\begin{array}{lllllllll} V_X(0) & = & X, & V_X(x) & = & \{x\}, & V_X(u) & = & \{u,x,y\}, \\ V_X(1) & = & \emptyset, & V_X(y) & = & \{y\}, & V_X(v) & = & \{v,y,x\}, \\ V_X(t) & = & \{x,y\}. & & & & & & \end{array}$$

然而，X不具备 pm-性质，因为 $Max(u;X)=\{x,y\}(=Max(v;X))$。根据推论 2.17，$X$ 不正规。我们可以进一步验证这一点。X 中的开集族 $\mathscr{O}(X)$ 是

$$\begin{array}{lllllllll} D_X(0) & = & \emptyset, & D_X(x) & = & \{y,u,v\}, & D_X(u) & = & \{v\}, \\ D_X(1) & = & X, & D_X(y) & = & \{x,u,v\}, & D_X(v) & = & \{u\}, \\ D_X(t) & = & \{u,v\}. & & & & & & \end{array}$$

注意，Cl(X) $=\{$x, y$\}=$Max(X) 且 Iso(X) $=\{$u, v$\}$.因此，X $=$Cl(X) $\cup$Iso(X)，即，X-是 T_2^1·然而，X 不是 T_4^3，例如，x 不是正则开集，因为 int($\{$x$\}$) $=$int($\{$x$\}$) $=/$ 0（参见[2, 定理 3.20 (2)]）。注意，X 不正规，因为闭集 $\{$x$\}$、 $\{$y$\}$ 无法用不相交开集分离。我们还证明 X 不是最大可收缩的。假设 f : X $\longrightarrow$Max(X) 是一个收缩映射。由于 $f^{Max(X)}=id_X$，因此 f (x) $=$x 且 f (y) $=$y。由于 y $\in$V (u)，于是 f (y) $\in$ f (V (u)) 备注$_{=}$ 2 13。f (x) $=$x，矛盾。

此外，这是一个极端非正规但并非反正规的空间的例子。注意， $\mathscr{T}(\mathbf{N};X)=\{(\{x\}\times\{y\})\}$，而 $\mathscr{S}(\mathbf{N};X)=/0$，即 X是极端非正规空间。另一方面，子空间 $Y=\{u,v,y\}$ 和 $Z=\{u,v,x\}$ 显然是正规空间，因此 X 不是反正规的。■

注 2.30. 例 2.29 还表明，定理 2.28 (1) 中森林里的树必须满足强不相交这一假设，甚至不能将其弱化为树仅仅不相交。人们可能会认为，如果 $\mathscr{T}_2$ 和 $\mathscr{T}_2'$ 不相交，那么$X = \mathscr{T}_2 \cup \mathscr{T}_2' = \{x,u,v\} \bigcup \{y,u,v\}$ 就是完全正规空间。但事实并非如此，因为$X = \mathscr{T}_1 \bigsqcup \mathscr{T}_1' = \{u,x\} \bigsqcup \{v,y\},$是一个由具有有限基的树构成的不相交并。然而， $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_1'$并非强不相交，因为

$$V(\bigwedge \mathscr{T}_1) \cap V(\bigwedge \mathscr{T}_1') = V(u) \cap V(v) = \{x,y\} \neq \emptyset. \blacksquare$$

以下结果给出了 X-顶格完全正规的一个必要条件。

命题 2.31. 设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$ 是某个$\emptyset \neq X \subseteq L \backslash \{1\}.$ 的 X-顶格。

(1) 如果 X 完全正规，那么 X 不包含任何 $\mathscr{C}_2$作为子集，即 $K.$ 维数$(X) = 0$。(2) X 是 T_6 当且仅当 X 完全正规。

证明。 (1) 设 X 完全正规。假设X 包含一个 $\mathscr{C}_2$ （即存在$x,y \in X$，使得 $x \lneqq y$）。注意，若 $D(a)$ 是 X 中包含$V(y)$ 的任意开子集，则 $x \in D(a)$。由此可知，闭集 $V(y)$ 不能表示为开集的交，这与X 完全正规的假设矛盾。

(2) 设X是完全正规空间。由 (1) 可知，X不含有 $\mathscr{C}_2$,，因此$K.\dim(X) = 0$，或者等价地，X 是T_1 空间，这由命题 1.24 (4) 得出。注意，这也可由这样一个事实推出：T_0 完全正规空间是T_1 空间（参见注 2.8）。$\blacksquare$

引理 2.32。 （参见 [13, 习题 1.22 与命题 3.11]）设 R 是一个交换环。

n n(1) 设 $R = \prod R_i$ （一个环的有限直积）。那么 $Spec(R) \approx \bigsqcup_{i=1} Spec(R_i)$ （即，$i=1$ $i=1 Spec(R)$ 同胚于环 R_1、$\cdots$、R_n 的素谱的不交并）。

(2) 若 $S \subseteq R$ 是一个乘法封闭集，则存在一一对应

$$\{P \in Spec(R) \mid P \cap S = \emptyset\} \longleftrightarrow Spec(S^{-1}R),\ P \longmapsto S^{-1}P.$$

例 2.33. 考虑（有界分配）格 $\mathscr{L}$: 令 X $= \{$x, u, y, v$\}$. 则 $C^X(\mathscr{L}) = \{$0,t, x, y, u, v, w, z$\}$ 且 Max(X) $= \{$x, y$\}$. 显然， X $=$SI$^{C^X}(\mathscr{L})$(X), 因此根据定理 1.6, L 是一个 X-顶格。闭集族为

$$\begin{array}{lllllllll} V_X(0) & = & X, & V_X(x) & = & \{x\}, & V_X(v) & = & \{v,y\}, \\ V_X(1) & = & \emptyset, & V_X(y) & = & \{y\}, & V_X(z) & = & \{u,x,y\}, \\ V_X(t) & = & \{x,y\}. & V_X(u) & = & \{u,x\}, & V_X(w) & = & \{v,x,y\}. \end{array}$$

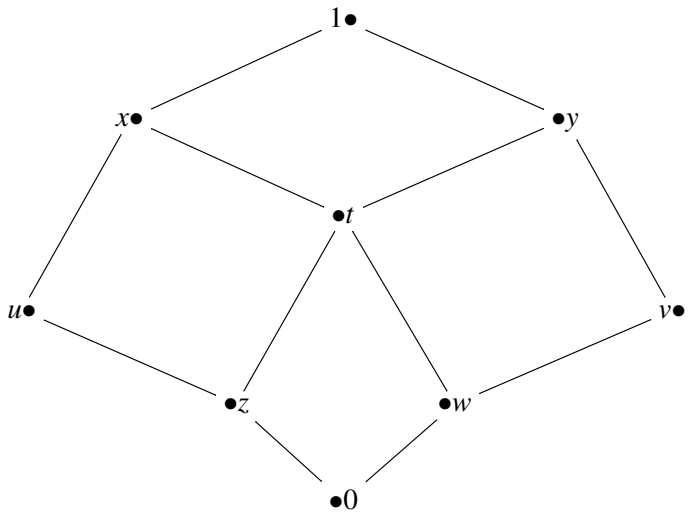


图 5：一个 X-拓扑格，其中 X 完全正规，但不完全正规

注意，$\mathrm{X} = \{\mathrm{u}, \mathrm{x}\} \bigsqcup \{\mathrm{u}, \mathrm{v}\} = \mathscr{T}_1 \bigsqcup \mathscr{T}_1'$，是两棵强不相交树的不交并（$\mathrm{V}_X(\bigvee \mathscr{T}_1) \cap \mathrm{V}_X(\bigvee \mathscr{T}_1') = \mathrm{V}_X(\mathrm{u}) \cap \mathrm{V}_X(\mathrm{v}) = \{\mathrm{u}, \mathrm{x}\} \cap \{\mathrm{v}, \mathrm{y}\} = /0$）。此外，$\dim(\mathrm{X}) = 1.$。由定理 2.28 (1) 和命题 2.31 (1) 可知，X 是完全正规但并非完全正规。X 的开集族为

$$\begin{array}{lllllllll} D_X(0) & = & X, & D_X(x) & = & \{y,u,v\}, & D_X(v) & = & \{u,x\}, \\ D_X(1) & = & \emptyset, & D_X(y) & = & \{x,u,v\}, & D_X(z) & = & \{v\}, \\ D_X(t) & = & \{u,v\}, & D_X(u) & = & \{v,y\}, & D_X(w) & = & \{u\}. \end{array}$$

注意，$\mathrm{Cl}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} = \mathrm{Max}(\mathrm{X})$ 且 $\mathrm{Iso}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}.$因此，$\mathrm{X} = \mathrm{Cl}(\mathrm{X}) \cup \mathrm{Iso}(\mathrm{X})$，即 X 是 $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$. 然而，X 不是 $\mathrm{T}_{\frac{3}{4}}$, 例如，$\underline{\mathrm{x}}$ 不是正则开集，因为 $\mathrm{int}(\{\mathrm{x}\}) = \overline{\mathrm{int}(\{\mathrm{x}\})} = /0$（参见 [2,定理 3.20 (2)]）。可以进一步确认，X 完全正规，但不是 G_δ-空间（例如，所有包含 x 的开集也都包含 u，因此闭集 $\{\mathrm{x}\}$ 不是 G_δ-集）。由引理 2.6 可知，X 不完全正规。还请注意，X 不是正则的：$(\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}, \mathrm{u}) \in \mathscr{T}(\mathrm{R}; \mathrm{X})$；然而，$\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$ 与 u 无法用不相交开集分离。

注意到X 是谱的（因为它是有限的且满足T_0）。根据引理 2.32，$X \approx Spec(R)$，其中R可以选取为满足$R = D_1 \times D_2$，并且（$D1$，$\mathfrak{m}_1$）和（$D2$，$\mathfrak{m}_2$）是两个离散赋值环。在这种情况下，我们有

$$X \approx Spec(D_1) \bigsqcup Spec(D_2) = \{0_1 \times D_2, \mathfrak{m}_1 \times D_2, D_1 \times 0_2, D_1 \times \mathfrak{m}_2\}.$$

此外，利用命题 2.24 (3)，$X \approx$ 谱(S)，其中 $S = S_1 \times S_2$ 且 $S_i =$($B(n_i,\ n_i - 1)\ \mathfrak{m}_{n_i}$) 中的 $n_1, n_2 \geq 3$是局部阿拉尔孔–安德森半整域 [11]，其极大理想为 $\mathfrak{m}_{n_i} := \{0, 2, \cdots, n_i - 1\}.$在这种情况下

$$X \approx Spec(S_1) \bigsqcup Spec(S_2) = \{0_1 \times S_2, \mathfrak{m}_{n_1} \times S_2, S_1 \times 0_2, S_1 \times \mathfrak{m}_{n_2}\}.$$

3 正则 X-拓扑格

本节研究正则 和完全正则 X-拓扑格。

由于根据命题 1.24，任何 X-拓扑格都是 T_0 ，由注记 2.8 (3) 可得以下结果。不过，为求完整起见，我们给出一个简短的证明。

引理 3.1. 设 $\mathscr{L}=(L;\vee,0;\wedge,1)$ 是一个 X-顶格。

(1) X 是正则的，当且仅当 X 是 T_3;(2) X 是完全正则的，当且仅当 X 是 $T_{3\frac{1}{2}}$.

证明。 设 X是正则的。只需证明$K.\dim(X)=0.$假设存在$x\leqq y$属于 X。那么$V(y)$ 是一个闭集，且$x\notin V(y)$。然而，任何包含$V(y)$ 的开集$D(a)$ 都必定包含x（这与X的正则性 矛盾）。■

命题 3.2. 设 $\mathscr{L}=(L;\vee,0;\wedge,1)$ 是某个$\emptyset\neq X\subseteq L\backslash\{1\}.$ 上的 X-顶格。若 X 是紧的，则以下条件等价:

(1) X 是正则的；(2) X 是 T_3；(3) X 是 $T_{2\frac{1}{2}}$；(4) X 是 T_2；(5) X 是 T_4；(6) X 是 $T_{3\frac{1}{2}}$；(7) X 是 T_1 且是拟豪斯多夫的；(8)$K.$ 维数$(X)=0$且是拟豪斯多夫的。如果进一步地，X 是余原子的，则这些条件等价于(9) X 是正规的且为 *Jacobson*。

证明。 $(1\Longleftrightarrow 2)$ 这是引理 3.1 (1)。（$2\Longrightarrow 3\Longrightarrow 4$）和（$5\Longrightarrow 6\Longrightarrow 1$）显然。（$4\Longrightarrow 5$）任何紧豪斯多夫空间都是正规空间（例如， [57, 定理 17.10]）。（$4\Longleftrightarrow 7$）这是引理 1.23 (3)。（$4\Longleftrightarrow 8$）这是命题 1.24 (5)。（$5\Longrightarrow 9$）显然。假设X 是余原子的。（$9\Longrightarrow 5$）由于X 是余原子的且正规的，由命题 2.14 可知X 具有 pm-性质。又由于X 还是 Jacobson 的，因此$X=$极大元集(X)，由此X 根据命题 1.24 (4) 是T_1。■

定义 3.3。（参见 [57, 29.4]）我们称拓扑空间X为**归纳零维的**，当且仅当X有一个闭开集基（等价地，$ind.\dim(X) = 0$，其中$ind.\dim(X)$是X的所谓**小归纳维数** [14,页 105]）。

定义 3.4。（参见 [36]）**Stone空间（布尔空间、拟有限空间）**是满足以下任一（因而也满足全部）等价条件的拓扑空间X：

(1) X是T_0,归纳零维且紧的空间；

(2) X同胚于有限离散空间的射影极限。

结合命题 3.2 和 [2, 命题 2.15], ，我们得到X-顶格的进一步刻画，其中X是 Stone空间。

定理 3.5。设 $\mathscr{L} = (L; \vee, 0; \wedge, 1)$是某个$\emptyset \neq X \subseteq L\backslash\{1\}.$上的 X-顶格。以下条件等价：

(1) X是 *Stone*空间；(2) X是谱空间且 T_2；(3) X是谱空间且正则；(4) X是谱空间且 T_3；(5) X是谱空间且 T_4；(6) X是谱空间且 $T^{3\frac{1}{2}}$；(7) X是谱空间、*Jacobson* 且正规；(8) X是谱空间、*Jacobson* 且具有 *pm*-性质；(9)X是谱空间且 *K.* 维数$(X) = 0$；(10) X是谱空间、对偶 *Jacobson* 且具有 *m*-性质；(11)X是谱空间且 *K.* 维数$(X) = 0$；(12) X同胚于某个交换*Jacobson pm*-（半）环的谱(R)。(13) X同胚于某个交换对偶 *Jacobson m*-（半）环的谱(R)

-

ing.

定义 3.6. 若对每个 $a \in R$，都存在一个 b 使得 $a = aba$;，则称（半）环 R**von Neumann正则** **π-正则** 当且仅当对每个 $a \in R$，都存在 $b \in R$ 和 n {v34>使得 $a^n = a^n b a^n$;**约化的** 当且仅当 $Nil(R) := \{a \in R \mid a^n = 0$ 对某个 $n \geq 1\} = 0.$

结合定理 3.5 与 Krull 0 维交换环的经典刻画（例如， [54], [13, 习题 3.11], [29]），我们得到：

推论 3.7。 对于交换环 R，以下各条件等价：

(1) R 是 *von Neumann*正则环；(2) R 是约化的且 π-正则；(3) R 是约化的，且 $Spec(R)$ 是 *Stone*空间；(4) R 是约化的，且 $Spec(R)$ 是 T_2；(5) R 是约化的，且 $Spec(R)$ 是 T_1；(6) R 是约化的，且 $K.$维数$(R) = 0$；(7) R 是约化的 *Jacobson pm*-环；(8) R 是约化的对偶 *Jacobsonm*-环；(9) R 是约化的，且 $Spec(R)$ 是正则的 (T_3)；(10) R 是约化的 *Jacobson* 环，且 $Spec(R)$ 是正规的 (T_4)。

下面的例子说明，推论 3.7 不适用于真 交换半环（即不是 环）：

例 3.8。 考虑 Alarcon-Anderson 半整域$B(3,1) = \{0,1,2\}$. 容易看出，$B(3,1)$ 是 von Neumann正则的（注意，在 $B(3,1)$ 中有 $2^2 \cdot 1 = 2$）。注意，$Spec(B(3,1)) = \{\{0\},\{0,2\}\}$（参见 2.24）依据定理 2.28 是完全正规的，但不是完全正规的，因为它是一个 $\mathscr{C}_2$ （参见命题 2.31）。显然，$B(3,1)$ 是约化的且正规的，但不是 Jacobson 半环。由于是有限的，$B(3,1)$ 是一个 Artinian（也是 Noetherian）半环，但 $K.\dim(Spec(B(3,1)) \neq 0.$由引理 3.1 可知，$Spec(B(3,1))$ 是不正则的（先验地不完全正则）。注意，$Spec(B(3,1)) \approx G$ 在下面的例 3.13 中与 Sierpi´nski 空间同胚（这是既非离散又非平凡拓扑的拓扑空间中最小的例子）。■

例子与反例

本文余下部分将专门介绍例子与反例。

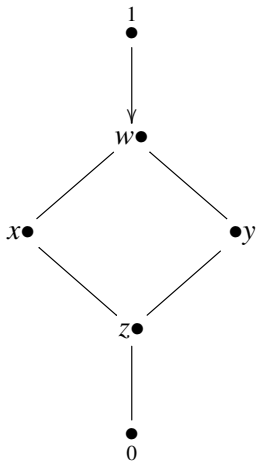


图 6：一个分配模格

记号。 我们用 $\mathbb{P}=\{2,3,5,\cdots\}$ 表示素数集合。对于正整数m，我们用 $\mathbb{P}(m)$ 表示 m 的素因子集合，并令 $\omega(m):=|\mathbb{P}(m)|$. 对于素数$p\in\mathbb{P}$，我们用 $\mathbb{F}_{(p)}$ 表示 $\mathbb{Z}$ 在素理想$p\mathbb{Z}$. 处的局部化。我们用$\mathscr{D}_{n+2}$ 表示广义菱形：一个偏序集，包含一个最大元素 $\mathfrak{m}$ 和一个最小元素 $\mathfrak{m}$，此外还有n 个（中间的）不可比元素，记为 $\mathscr{P}_n$.

固定如下分配格 $\mathscr{L}=(L;\vee,0;\wedge,1)$，它由下图所示的 $L=\{0,z,x,y,w\ 1\}$ 上的偏序的传递闭包给出

我们将考察 $L\backslash\{1\}$ 的五个子集，对于每个子集，偏序集 $(L\leq)$ 都会诱导出一种类 Zariski 拓扑。

虽然超连通空间显然是正规的，但下面的例子表明，这类空间不一定是完全正规（先验地不一定是完全正规）。此外，它还给出了一个X-拓扑格，其中X 是一个 $T_{\frac{1}{2}}$ 正规空间，但不是正则空间（X甚至是极端非正则的）。

例 3.9。 考虑图 6 中的格 $\mathscr{L}$。令 $X:=\{0,x,y,w\}$（点线表示 $0\lneqq x\wedge y$属于 $\mathscr{L}$）：

注意，$C^X(\mathscr{L})=\{0,z,\ x,\ y、w\}$。显然，每个元素 $p\in X$都是强$C^X(\mathscr{L})$-不可约的。根据定理 1.6，X 带有由偏序集（$L\leq$）诱导的类 *Zariski* 拓扑。 可以再次验证：由闭簇组成的集族 $V_X(\mathscr{L})$ 包含

$$\begin{array}{lllllllll} V_X(0) & = & X, & V_X(z) & = & \{x,y,w\}, & V_X(y) & = & \{y,w\}, \\ V_X(1) & = & \emptyset, & V_X(x) & = & \{x,w\}, & V_X(w) & = & \{w\}. \end{array}$$

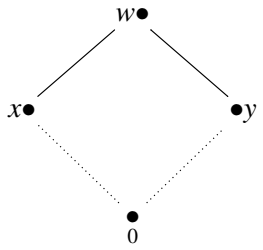


图 7：X 是正规但极端非正则的

显然，$V_X(\mathscr{L})$ 在有限并下是闭的。注意，X与 $Min(X) = \{0\}$ 余局部，并且与 $Max(X) = \{w\}$局部。由于X 是有限的并具有 pm-性质，根据推论 2.17，X 是正规的。然而，X 并非完全正规，因为 $\{0,x,\ y\} \subseteq X$是一个 $\mathscr{V}_2$（参见定理 2.28）。

由于 $\dim(X) \neq 0$，由命题 3.2 可知，X 不是正则的，因此既非完全正则也非完全正规（参见命题 2.31 (1)）。事实上，X 离正则性还差得很远：X 是超连通（不可约）的，因此根据引理 1.15 (1)，它极端非T_2。由于 $\mathscr{T}(\mathbf{R}; X) \neq /0$，根据引理 2.7，$X$是极端非正则的 。此外，$X$ 距离T_1 还很远，因为X 甚至不是 $T_4^{\frac{1}{2}}$（参见命题 1.24 (6)）。

我们可以再次核实这些观察结果：注意，X 是超连通的（因为对于每个$\emptyset \neq C \subseteq X$，都有$w \in C$），因此 $\mathscr{T}(\mathbf{N}; X) = /0$，进而$X$是平凡地 正规的。要看出$X$ 并非完全正则的，注意到$A = \{x\}$ 和$B = \{y\}$ 是分离的：

$$A \cap \overline{B} = \{x\} \cap \{y,w\} = \emptyset = \{x,w\} \cap \{y\} = \overline{A} \cap B.$$

然而，由于X的开子集族 $\mathscr{O}(X)$ 由.....组成，A 和B 无法用开集分离

$$\begin{array}{lllllllll} D_X(0) & = & \emptyset, & D_X(z) & = & \{0\}, & D_X(y) & = & \{0,x\}, \\ D_X(1) & = & X, & D_X(x) & = & \{0,y\}, & D_X(w) & = & \{0,x,y\}. \end{array}$$

由引理 2.4 可知，X 不是完全正规空间。此外，X 不是G_δ-空间（例如，闭集 $\{w\}$不包含在任何开集中），因此根据引理 2.6，X 不是完全正规空间。

由于X 是有限的且T_0, ，由引理 1.24 (2) 可知X 是谱。事实上，$X \approx$谱(S)，其中我们可以选择（参见 2.24）：

$$\begin{array}{rcl} S & = & B(n,i),\ n \geq 8,\ 2 \leq i \leq n-i \text{ and } \mathbb{P}(n-i) = \{p,q\}; \\ Spec(S) & = & \{0, pS, qS, \mathfrak{m}_n\},\ \text{where } \mathfrak{m}_n = \{0,2,3,\cdots,n-1\}). \blacksquare \end{array}$$

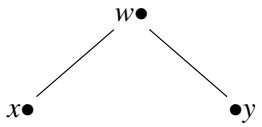


图 8：Y 是完全正规且极端非正则，但不是极端非T_2

接下来，我们给出一个Y-拓扑格的例子，其中Y 是一个T_4^3 完全正规空间，但并非完全正规。

例 3.10。 考虑图 6 中的格 $\mathscr{L}$。考虑 $Y=\{x,y,w\}$： 注意$C^Y(\mathscr{L})=\{z,x,y,w\}$. 由例 3.9 和推论 1.7 可知，$Y$具有由偏序集（$L\leq$）诱导的类 Zariski 拓扑。 可以再核查一下：所提出的闭集族由以下集合组成

$$\begin{array}{lllllllll} V_Y(0) & = & Y, & V_Y(z) & = & Y, & V_Y(y) & = & \{y,w\}, \\ V_Y(1) & = & \emptyset, & V_Y(x) & = & \{x,w\}, & V_Y(w) & = & \{w\}. \end{array}$$

显然，$V_Y(\mathscr{L})$ 对有限并封闭。注意，Y是 $\mathscr{T}_2$且 K。维数$(Y)=1$.因此，Y 是完全正规但并非完全正规（根据定理 2.28 和命题 2.31）。由引理 3.1，Y不是正则的，因为 K。维数$(Y)\neq 0$（先验地既非完全正则*nor* 完全正规）。注意Y 是 T_4^3，但不是T_1，依据 [2, 定理 3.20 (1)]。

$\mathscr{O}(Y)$ 的开子集集合由以下部分组成

$$\begin{array}{lllllllll} D_Y(0) & = & \emptyset, & D_Y(z) & = & \emptyset, & D_Y(y) & = & \{x\}, \\ D_Y(1) & = & Y, & D_Y(x) & = & \{y\}, & D_Y(w) & = & \{x,y\}. \end{array}$$

由于 $\mathscr{T}$(R;Y) = {({x, w}, y), ({y, w}, x), ({w}, x), ({w}, y)}，很容易看出 $\mathscr{S}$(R;Y) =/0，即 Y 甚至是极端非正则的。注意，X 并非极端非豪斯多夫，因为 X 不是超连通的（也就是说，引理 2.7 (2-a) 的逆命题不成立）。

由于 Y 是有限的且 T_0, ，由引理 1.24 (2) 可知Y 是谱的。事实上，$X\approx$谱(R)，其中我们可以选择（对任意域 $\mathbb{F}$）：

$$R=\mathbb{F}[[x,y]]/(xy) \text{ with } Spec(R)=\{(x),(y),(x,y)\}.\blacksquare$$

接下来，我们给出一个拓扑格Q的例子，其中Q不 具有 pm-性质，因此Q 不 是正规空间（甚至是极端非正规空间）。此外，Q 是唯一的反正规空间（在同胚意义下）。

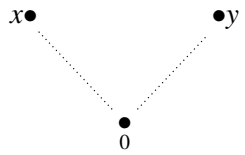


图9：Q 在同胚意义下是唯一的反正规空间

例 3.11。 考虑图 6 中的格 $\mathscr{L}$。令$Q := \{0,x,\ y\}$ （点线表示 $0 \lneqq x \wedge y$在 $\mathscr{L}$ 中）：

注意，$C^Q(\mathscr{L}) = \{0,z,\ x,\ y\}$. 由例 3.9 和推论 1.7 可知，$Q$ 具有由偏序集（$L \leq$）诱导的类 Zariski 拓扑。可以再核实一下：所提出的闭集族由以下集合构成

$$\begin{array}{lllllllll} V_Q(0) & = & Q, & V_Q(z) & = & \{x,y\}, & V_Q(y) & = & \{y\}, \\ V_Q(1) & = & \emptyset, & V_Q(x) & = & \{x\}, & V_Q(w) & = & \emptyset. \end{array}$$

显然，$V_Y(\mathscr{L})$ 对有限并封闭。注意，Q是 $\mathscr{V}_2$且K。$\dim(Q) = 1$.注意，Q相对于 $Min(X) = \{0\}$ 是余局部的，但不是局部的，因为$Max(Q) = \{x,\ y\}$. 此外，Q 是余原子的，但不具有 pm-性质，因为 $|Max(0;Q)| > 1$. 由命题 2.14 (1) 可知，Q 不是正规空间（先验地既不完全正规也不完全正规）。还可以看出，X 不是完全正规的，因为X 是 $\mathscr{V}_2$（参见定理 2.28 (2)）；并且Q 不是完全正规的，因为Q包含一个 $\mathscr{C}_2$（参见命题 2.31 (1)）。

此外，由命题3.1可知，Y 不是正则的，因为$K.\dim(Q) \neq 0$。Y 的开子集族 $\mathscr{O}(Q)$ 由以下部分组成

$$\begin{array}{lllllllll} D_Q(0) & = & Q, & D_Q(z) & = & \{0\}, & D_Q(y) & = & \{0,x\}, \\ D_Q(1) & = & \emptyset, & D_Q(x) & = & \{0,y\}, & D_Q(w) & = & Q. \end{array}$$

显然，Q是超连通（不可约）的，因此Q 是极端非豪斯多夫的。由于$\mathscr{T}(\mathbf{R};Q) \neq /0$ 且 $\mathscr{T}(\mathbf{N};\ Q) \neq /0$，由引理 1.15 (2) 可知$Q$是极端非正则且极端非正规的。事实上，正如 [32]所示，Q 是唯一的反正规拓扑空间（在同胚意义下）。注意到Q 也远非T_1，因为Q 是$T_{\frac{1}{2}}$，但不是T_4^3，根据 [2, 推论 3.11 和定理 3.20 (2)]。

由于Q 是有限的且满足T_0,，由引理 1.24 (2) 可知Q 是谱空间：

• $Q \approx$ 谱(R)，其中

$$\begin{array}{rcl} R & = & \mathbb{Z}_{(2)} \cap \mathbb{Z}_{(3)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : g.c.d.(n,6) = 1\}; \\ Spec(R) & = & \{0,\ 2R,\ 3R\}. \end{array}$$



图 10：完全正规（T_6）空间



图 11：Sierpi´nski 空间是完全正规但并非完全正规

- $Q \approx$ 谱(S)，其中我们可以选择S为任意一个 Alarcon-Anderson 半整域

$$\begin{aligned} S &= B(n,1) \text{ with } n \geq 7,\ \omega(n-1) = 2 \text{ and } \mathbb{P}(n-1) = \{p,q\}; \\ Spec(S) &= \{0, pS, qS\}. \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.12。考虑图 6 中的格 $\mathscr{L}$。令 $H := \{x,\ y\}$：注意，$C^H(\mathscr{L}) = \{z,\ x,\ y\}$。由例 3.9 和推论 1.7 可知，$H$具有由偏序集（$L\ \leq$）诱导的类 Zariski 拓扑。可以验证：$H$ 的开集族为

$$\begin{array}{lllllll} D_H(0) & = & \emptyset, & D_H(z) & = & \emptyset, & D_H(y) & = & \{x\}, \\ D_H(1) & = & H, & D_H(x) & = & \{y\}, & D_H(w) & = & H. \end{array}$$

因此，H具有离散 拓扑。因此，H是T_6.由于H是有限的且T_0,，由引理 1.24 (2) 可知H是谱空间。事实上，$H \approx$谱(R)，其中对于任意两个域 $\mathbb{F}$和 $\mathbb{K}$，我们都可以选择$R = \mathbb{F} \times \mathbb{K}$（例如，$R = \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$）。■

例 3.13。 考虑图 6 中的格 $\mathscr{L}$。设 $G := \{x,\ w\}$：注意，$C^G(\mathscr{L}) = \{x,\ w\}$。由例 3.9 和推论 1.7 可知，$G$ 具有由偏序集 $(L\ \leq)$诱导的类 *Zariski* 拓扑。 可以再次验证：G 的开集族为

$$\begin{array}{lllllll} D_G(0) & = & \emptyset, & D_G(z) & = & \emptyset, & D_G(y) & = & \{x\}, \\ D_G(1) & = & G, & D_G(x) & = & \emptyset, & D_G(w) & = & \{x\}. \end{array}$$

因此，G 是谢尔´宾斯基空间。使用与上述类似的论证，我们可以得到这个空间的许多众所周知的性质，例如，G是完全正规但非完全正规。此外，G 不是正则的（注意K.维数$(G) = 1$）。由于X 是有限的且满足 $\mathrm{T}_{0,}$，由引理 1.24 (2) 可知X 是谱空间。事实上：

• $G \approx$ 谱(R)，其中R 是任意一个离散赋值环。我们可以选择

$$R = \mathbb{R}[[x]] \text{ with } Spec(R) = \{0,(x)\}.$$

• $G \approx$ 谱(S)，其中 S 是 Alaracon-Anderson 半整环

$$\begin{aligned} S &= B(n,1) \text{ with } n \geq 3,\ \mathbb{P}(n-1) = \{p\} \text{ and } Spec(S) = \{0, pS\}; \\ S &= B(n,n-1) \text{ with } n \geq 3 \text{ and } Spec(S) = \{0, \mathfrak{m}_n\}. \blacksquare \end{aligned}$$

下表总结了前述例子中这些谱拓扑空间的性质，其中 **UC**： 超连通，**HC**： 超连通（不可约），**R**： 正则，**CR**：完全正则，**N**：正规，**CN**： 完全正规，**PN**： 完全正规。

		图 K.维数		UC	HC	R	CR	N	CN	PN	T_i
X	$\{0,x,y,w\}$	$\mathscr{D}_4$	2	✓	✓	×	×	✓	×	×	T_0
Y	$\{x,y,w\}$	$\mathscr{T}_2$	1	✓	×	×	×	✓	✓	×	$T_{\frac{3}{4}}$
Q	$\{x,y,w\}$	$\mathscr{V}_2$	1	×	✓	×	×	×	×	×	$T_{\frac{1}{2}}$
H	$\{x,y\}$	$\mathscr{P}_2$	0	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	T_6
G	$\{x,w\}$	$\mathscr{C}_2$	1	✓	✓	×	×	✓	✓	×	$T_{\frac{1}{2}}$

本文最后总结了*Alaracon-Anderson* 半环 $B(n,i)$的分离公理（参见 1.9 和 2.24）。证明和论证与上述例子中的类似，因此省略。

例 3.14. 设$n \geq 2, 1 \leq i \leq n-1, m := n-i$，并考虑半环$B(n,i)$. 根据 2.24 中给出的素谱结构并应用本文的结果，我们得到以下总结:

n	i	$\omega(m)$	谱(S)	K.维数(S)	R	CR	N	CN	PN	T_i
≥ 2	0	$\omega(n)$	$\mathscr{P}_{\omega(n)}$	0	✓	✓	✓	✓	✓	T_6
2	1	0	$\mathscr{P}_1$	0	✓	✓	✓	✓	✓	T_6
≥ 3	1	1	$\mathscr{C}_2$	1	×	×	✓	✓	×	$T_{\frac{1}{2}}$
≥ 7	1	≥ 2	$\mathscr{V}_{\omega(m)}$	1	×	×	×	×	×	$T_{\frac{1}{2}}$
≥ 3	$n-1$	0	$\mathscr{C}_2$	1	×	×	✓	✓	×	$T_{\frac{1}{2}}$
≥ 4	$[2,n-2]$	1	$\mathscr{C}_3$	2	×	×	✓	✓	×	$T_{\frac{1}{2}}$
≥ 8	$[2,n-2]$	≥ 2	$\mathscr{D}_{\omega(m)+2}$	2	×	×	✓	×	×	T_0

参考文献

[1] J. Y. Abuhlail 等，关于拓扑性质的极端否定，预印本 .

[2] J. Y. Abuhlail 和 A. Alfaraj，*X*-顶格的低阶分离公理，预印本（https://arxiv.org/abs/2510.22355）。2, 5, 8, 20, 22, 24, 28, 29[3] J. Y. Abuhlail，模的对偶扎里斯基拓扑，Topology Appl. 158（2011），457-467。1[4] J. Abuhlail，模的扎里斯基拓扑，Commun. Algebra 39（12）（2011），1-19。1[5] J. Y. Abuhlail，互素子模和第二子模的扎里斯基拓扑，Algebra Colloq. 22(1)（2015），47-72。1[6] J. Abuhlail 和 H. Hroub，具有类 *Zariski* 拓扑的格及其在交换环上模中的应用，J. Algebra Appl.，18(7)（2019），1950131，34页。2[7] J. Abuhlail 和 Ch. Lomp，关于强不可约性及其对偶的概念，J. Alge-bra Appl. 12(6)（2013），1350012，23页。[8] J. Abuhlail 和 Ch. Lomp，关于拓扑格及其在模论中的一个应用，J. Algebra Appl. 15(3)（2016），1650046，21页。2, 4[9] *J. Abuhlail*，双余模和余环的扎里斯基拓扑，Applied Categorical Structures 16（1-2）（2008），13-28。1[10] J. Abuhlail，全互素余模和全互素余环，Applied Categor-ical Structures 14（2006），379-409。1[11] F. Alarcon 和 D. D. Anderson，交换半环及其理想格，Houston J. Math. 20（4）（1994），571-590。5, 14, 22[12] A. Alfaraj，*X*-拓扑格中的分离公理与*PIS*分解，硕士论文，KFUPM（2019）。https://eprints.kfupm.edu.sa/id/eprint/141349/1/THESIS FINAL 201081340.pdf[13] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald，交换代数导论，Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁（1969）。5, 8, 10, 21, 25[14] A. V. Arkhangel'skiĭ 和 L. S. Pontryagin，一般拓扑学。*I.* 基本概念与构造。维数理论。Encyclopaedia Math. Sci. 17，施普林格出版社，柏林（1990）。24.[15] S. E. Atani、G. Ulucak 和 U. Tekir，半模上的扎里斯基拓扑，J. Adv. Res. Pure Math. 5（2013），第4期，80-90。1[16] J. A. ´Avila G.，*Spec*（*R*）与 T_0 和 T_1，之间的分离公理，Divulg. Mat. 13(2)（2005），90-98。

[17] J. A. Avila G., 刻画某些分离概念的环, 密苏里数学科学杂志 18(3) (2006年), 234-240. 10[18] P. Bankston, 拓扑性质的完全否定 , 伊利诺伊数学杂志 23 (1979), 241-252. 6[19] M. Behboodi and M. R. Haddadi, 模的经典扎里斯基拓扑与谱空间 *I*, 国际电子代数杂志 4 (2008), 104-130. 1[20] N. Bourbaki, 交换代数：第 *1*—*7*章，施普林格 (1989).[21] A. S. Davis, 一般拓扑空间的邻域指标系, 美国数学月刊 68, 886-894 (1961).[22] D. Dummit and R. Foote, 抽象代数, 第3版, 威利 (2004).[23] M. Dickmann, N. Schwartz and M. Tressl, 谱空间，新数学专著，剑桥大学出版社 (2019年). 7[24] W. Dunham, $T_{\frac{1}{2}}$-空间, 庆北数学杂志 17 (1977), 161-169. 7[25] R. Engelking, 一般拓扑学，Heldermann出版社, 柏林 (1989). 9 [26] D. Eisenbud, 交换代数：代数几何导论, 数学研究生教材 150, 施普林格出版社, 纽约 (1995).[27] D. P. Esteban, 半环与谱空间 . 载于：J. L. Bueso, P. Jara 和 B. Torrecil- las 编《环论》，数学讲义 1328，施普林格 (1988). 7[28] D. Gomez-Ramirez, *R* 中一个具有不可数闭包的孤立点显式集合, 数学：大学教学, 区域数学学院。考卡山谷大学，哥伦比亚，15 (2007), 145-147. 7[29] R. Gilmer, 零维交换环,《非诺特交换环理论》，229-249. 数学及其应用，520. 克鲁维尔学术出版社，多德雷赫特 (2000). 25[30] J. Golan, 半环及其应用, 克鲁维尔学术出版社, 多德雷赫特 (1999). 2, 4, 5, 10[31] G. Gr¨atzer, 格论：基础，Birkhauser (2010). 2, 3, 15[32] D. B. Gauld, I. L. Reilly and M. K. Vamanamurthy, 关于正规子空间, 澳大利亚数学会通报 23, 1-4 (1981). 8, 29[33] M. Hochster, 交换环中的素理想结构, 美国数学会会刊 142 (1969), 43-60. 7, 8, 10

[34] H. Hroub, 格的类 *Zariski* 拓扑, 学位论文，法赫德国王石油与矿产大学 (2016年).[35] Song-Chol Han, Won-Sok Pae, and Jin-Nam Ho, 半模素谱的拓扑性质, 《代数杂志》566 (2021年), 205-221. 1[36] P. T. Johnstone, *Stone* 空间，剑桥高等数学研究丛书，第3辑（丛书编号3），剑桥大学出版社 (1982年). 24[37] I. Kaplansky, 交换环, 修订版，芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州—伦敦 (1974年).[38] K. Kuratowski, 拓扑学 *I*, 学术出版社 1966年. 9[39] T. Y. Lam, 非交换环入门, 数学研究生教材丛书，第131卷（第2版），纽约：施普林格出版社 (2001年). 5[40] W. J. Lewis, 作为偏序集的环的谱，《代数杂志》25 (1973年), 419-434. 3, 8[41] Chin-Pi Lu, 模素谱上的扎里斯基拓扑，Houston J. Math. 25(3) (1999年), 417-432. 1[42] S. Majumdar and M. Mitra, 反豪斯多夫空间, J. Phys. Sci. 16 (2012年), 117-123. 6[43] R. McCasland, M. Moore and P. Smith, 交换环上模的谱, Comm. Algebra 25, 79-103 (1997年). 1[44] J. Matier, Julie and T. B. M. McMaster, 可分性及相关性质的完全否定, Proc. R. Ir. Acad., Sect. A 90, No. 2, 131-138 (1990).[45] J. Matier and T. B. M. McMaster, 一般拓扑学中的完全否定, Ir. Math. Soc. Bull. 25, 26-37 (1990).[46] G. De Marco, and A. Orsatti, 每个素理想都包含于唯一极大理想中的交换环, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (3) (1971年), 459-466. 10[47] R. L. McCasland and P. F. Smith, 任意环上模的 *Zariski* 空间, Comm. Algebra 34 (11) (2006年), 3961-3973. 1[48] A. J. Pe˜na P. and J. Vielma, 孤立点与冗余, Comment. Math. Univ. Carolin. 52(1) (2011年), 145-152.[49] A. Pe˜na, L. Ruza and J. Vielma, 分离公理与交换半环的素谱, Revista Notas de Matematica 5(2), No. 284 (2009年), 66-82. 7, 10

[50] I. L. Reilly 和 M. K. Vamanamurthy, 《拓扑反性质》, 《伊利诺伊数学杂志》 24, 382-389（1980）。6, 8[51] Paul L. Shick, 《拓扑学（点集与几何）》, Willey（2007）。[52] P. Smith, 《具有余独立极大子模的模》, J. Algebra Appl. 10(1)（2011年）, 73-99。[53] Stacks Project 作者, 《Stacks 项目》, https://stacks.math.columbia.edu。[54] H. H. Storrer, 《交换环的满同态》, 《赫尔维蒂数学评论》43（1968）, 378-401。25.[55] U. Tekir, 《非交换环上模的素谱上的扎里斯基拓扑》, Algebra Colloq. 16 (4)（2009年）, 691–698。I. 1 [56] I. E. Wijayanti, 《互素模与余模》, 博士学位论文, Heinrich-Heine Universit¨at, D¨usseldorf（2006年）。1[57] S. Willard, 《一般拓扑学》, Addison-Wesley 出版公司（1970）。2, 6, 7, 8, 9, 23, 24[58] R. Wisbauer, 《模与环理论基础》, 《学习与研究手册》, CRC 出版社, （1991）。

5