arXiv:2601.08074v1 [physics.soc-ph] 12 Jan 2026

弹性泛音：一种采用“纯”五度的平均律十二音音乐体系

Xavier Hernandez[1*]、Luis Nasser[2], Pablo Garc´ía-Valenzuela[3]

1 墨西哥国立自治大学天文学研究所，墨西哥城，墨西哥 2 洛约拉大学芝加哥分校物理系，美国伊利诺伊州芝加哥 3 音频工程学院（SAE墨西哥学院），墨西哥城，墨西哥

* xavier@astro.unam.mx

摘要

无法实现可移调的八度十二半音调律，原因在于数学事实： $2 \times 2^{7/12} \neq 3$ 也就是说，五度的第二谐波无法与基音的第三谐波完全匹配。这又源于西方音乐的整数谐波结构，以及八度音程的基频特性——频率以 2 为倍数；这一特性是我们的音乐体系从乐器的物理学中继承而来的，因为乐器中的振动元件在近似意义上是一维的。在当今电子音乐时代，我们可以放宽上述假设，构建一种类似的音乐体系：它保留标准音乐体系的所有结构特性，但谐波不再是基频的整数倍，八度的频率比也不再是 2。这样便可以构建一种可移调的十二半音音乐体系，其中五度的第二谐波与基音的第三谐波完全匹配。该体系增强的谐波特性，在很大程度上恢复了纯律的音乐特质，同时通过设计保留了十二平均律的所有灵活性与转调能力。

引言

西方音乐的标准音律系统由 12 个音符组成。每个音符包含一个具有基频的声音，我们称之为该音符的第一谐波，此外还包含高次谐波。这些高次谐波的频率是该音符基频的整数倍。因此，第二谐波的频率是基频的两倍，第三谐波的频率是基频的三倍，以此类推。每个组成部分的振幅集合——即给定音符的频谱——决定了该音符的音色，也正是它使不同乐器，或同一乐器的不同演奏方式，在奏出同一个音符时听起来有所不同。这种结构与其说是审美或风格上的选择，不如说是继承自振动物体物理特性的结果：吉他、钢琴、小提琴或竖琴的琴弦，以及长笛内部的空气，在很大程度上都可以近似看作一维系统。物体的这种维度特性意味着，它们会以一组频率发生谐波振动；非常近似地说，这些频率都是某个基频的整数倍。

音符的这种整数倍谐波特征有一个重要含义：如果一个音符的基频是另一个音符的两倍，那么它的谐波频率都会包含在基频较低的那个音符的谐波中。换句话说，基频为 f 的音符的谐波泛音列如下：

$$(f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f, 7f, 8f, 9f, 10f, \cdots, \infty). \tag{1}$$

请注意，虽然从数学上说，频率可以增至 ∞，但在实际中这并不重要，因为除了频率足够高时会受到物理限制外，普通成年人能听到的最高频率是 $f_{Max} = 20$ 千赫兹。对于基频为 $2f$ 的音符，其谐波泛音也是基频的整数倍：

$$(2f, 4f, 6f, 8f, 10f, 12f, \cdots, \infty), \tag{2}$$

从式（1）和式（2）可以看出，$2f$ 的每个谐波都包含在 f 的谐波中，其中也包括基音 $2f$ 本身。谐波的这种完全重合，使人们产生这样的听觉感受：尽管音高不同，频率为 f 的音符和频率为 $2f$ 的音符本质上是同一个音符，而它们之间的音高差就是所谓的一个八度。因此，八度是标准西方音乐体系中最基本的结构划分，也是最和谐的音程。

确立了八度的重要地位后，便会出现如何划分八度的问题：八度应当恰好划分为多少个音符，这些音符在其中又应如何间隔？在人类历史上，八度划分有许多不同方案；本文将重点讨论一种方案，它最早由中国王子朱载堉于1584年提出，佛兰德工程师西蒙·斯泰文也于 1585 [6]独立提出。这种方案称为“十二平均律”（简称 12-TET），将八度划分为12个间隔相等的音符。为方便后文讨论，十二平均律中相邻音符之间的音程称为半音。18至19世纪，西方作曲家最终采用了十二平均律。近来，有研究提出，例如 [1], [2], ，通过最小化适当构建的“音乐自由能”——这一概念类似于热力学中的亥姆霍兹自由能——可以得到包括将八度划分为12个音符在内的多种结果。显然，如果我们希望使用西方音乐目录中记载的一千年音乐，那么演奏这些音乐所用的任何改良音乐体系都需要将八度划分为12个音符。不过，正如我们稍后将更详细讨论的那样，这类替代音乐体系未必需要受限于将八度定义为频率加倍的音程。事实上，八度的和谐性之所以得以确立，只要求较高音符的每个谐波都包含在较低音符的谐波中，而不要求较高音的频率是较低音的两倍。

在八度之后，西方音乐中协和度最高的音程是纯五度，其定义为两个音符基频之间的频率音程为 3:2。因此，基频为 $3f/2$ 的音符的谐波序列为：

$$\left(\frac{3f}{2}, 3f, \frac{9f}{2}, 6f, \frac{15f}{2}, 9f, \cdots, \infty\right). \tag{3}$$

由公式（3）和（1）很容易看出，$3f/2$ 的所有偶次谐波也是 f 的谐波；也就是说，纯五度的一半谐波是基音的谐波。纯五度与根音具有如此高的协和度，自然促使人们希望将纯五度用作八度内 12 个音程间隔排列的关键构建单元。

这种做法的第一个例子称为毕达哥拉斯调律，不过其起源可追溯至美索不达米亚 [25]。基本思路是从一个基频开始

并将其升高一个五度（乘以 $3/2$）。不断升高纯五度，直到得到的数值大于基频的两倍，此时便降低一个八度（除以 2）。通过这种方式生成 6 个音符；其余 6 个则通过将基频逐个降低纯五度（除以 $3/2$）得到。如果所得结果小于基频，就将其升高一个八度（乘以 2）。例如，取基频 f。将其升高一个五度，得到 $3f/2$。由于 $3f/2 < 2f$，我们再次升高一个五度，得到 $9f/4$；但此时它大于 $2f$，因此将其除以 2，得到 $9f/8$。再升高一个五度，得到 $27f/16$，它仍在八度范围内。将其再升高一个五度，得到 $81f/32$，它大于 $2f$，因此我们将其除以 2。我们继续以这种方式逐次升高五度；如果结果大于 $2f$，就将其除以 2，直到得到前六个音符。然后回到 f，除以 2/3，得到 $2f/3$。由于它小于 f，我们将其升高一个八度，得到 $4f/3$；以此方式得到其余 5 个音符，将八度划分为 12 个间距不均匀的音符。这种方法生成的大调音阶如下表所示：

表 1. 毕达哥拉斯调律、大调音阶。

音程	频率比	公式
纯一度	1 : 1	$3^0 \times 2^0$
大二度	9 : 8	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$
大三度	81 : 64	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$
纯四度	4 : 3	$\frac{2}{3} \times 2$
纯五度	3 : 2	$3^1 \times 2^{-1}$
大六度	27 : 16	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}$
大七度	243 : 128	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$
八度	2 : 1	$3^0 \times 2^1$

这种调律系统用于调校希腊四音音列等乐器时完全没问题，因为这些音列的跨度为一个八度 [26]。然而，如果要扩展到多个八度并演奏复调音乐，就会遇到问题：在八度十二等分中，纯五度由 7 个半音构成。这意味着 12 个纯五度应当等于 7 个八度。计算后可得：

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^{12} &= \frac{531441}{4096} \\ &\approx 129.746, \qquad (4) \\ 2^7 &= 128 \\ \Rightarrow 2^{7/12} &\neq 3/2. \qquad (5) \end{aligned}$$

请注意，虽然 δ，其定义如下：

$$\begin{aligned} \delta &= \left|2^{7/12} - \frac{3}{2}\right| \\ &= |1.4938307\cdots - 1.5| \\ &= 0.001693\cdots \qquad (6) \end{aligned}$$

看起来足够小，因此可以简单地认为 $\delta \approx 0$ 是一个很好的近似值，但在实践中，这种微小的偏差会导致无法接受的不协和音，称为毕达哥拉斯音差（又称狼音），因此需要寻找其他解决方案来处理八度划分，以便用于复调音乐。

八度内的 12 个半音究竟应该如何排列？就像两个相隔频率比 3:2 的音符会产生 50% 的共享谐波一样，

其他音程也具有较高的协和度。一种利用毕达哥拉斯体系的所有纯音程，同时引入更简单的新音程的调律系统，称为纯律（JI） [27]。在这一体系中，两个相隔频率比 4:3 的音符仍然称为纯四度。我们可以看到，纯四度的谐波为：

$$\left(\frac{4f}{3}, \frac{8f}{3}, 4f, \frac{16f}{3}, \frac{20f}{3}, 8f, \cdots, \infty\right) \tag{7}$$

比较公式 (1) 和 (7) 可知，纯四度与 f 共享三分之一的谐波，是仅次于纯五度的最协和音程。纯律中的另一个重要音程是大三度，定义为两个音符之间的频率比为 5 : 4，其谐波如下：

$$\left(\frac{5f}{4}, \frac{10f}{4}, \frac{15f}{4}, 5f, \frac{25f}{4}, \frac{30f}{4}, \frac{35f}{4}, 10f, \cdots, \infty\right), \tag{8}$$

这比毕达哥拉斯调律中的大三度简单得多，后者的频率比为 81 : 64。由公式 (1) 和 (8) 可见，纯律大三度与基音共享 25% 的谐波。在纯律中，大六度音程的频率比为 5 : 3，比毕达哥拉斯调律中的 27 : 16 更简单；同样，纯律大七度的频率比为 15 : 8，而毕达哥拉斯调律中的频率比则为 243 : 128。像这样的协和音程有一个共同点：只要音符的频率比是有理数，就会出现共享的谐波。因此，最初以这类音程为主要依据的调律系统颇受欢迎。然而，这些方案无法产生间距均匀的半音；如果我们希望五度对应 7 个半音，并采用包含 12 个半音的等间距方案，那么就要求七个音程，$2^{7/12}$ 等于 $3/2$，但事实并非如此。

纯律本身能为听众带来高度和谐的音乐体验，但它存在一个非常严重的局限。如果作曲家希望改变调（这种做法称为转调），新调的音程将与纯律中音阶的结构发生冲突，从而产生不协和音和更多“狼音” [24]。为了理解其中的原因，可以考虑纯律中的 C 大调音阶：它由音符 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 A 和 B 组成，随后到达更高的 C，完成一个八度。这些音符的频率为：

$$f_C, \frac{9f_C}{8}, \frac{5f_C}{4}, \frac{4f_C}{3}, \frac{3f_C}{2}, \frac{5f_C}{3}, \frac{15f_C}{8}, 2f_C. \tag{9}$$

现在，假设你希望从 C大调转到 D大调。D大调音阶包含音符 D、E、F♯、G、A、B 和 C♯ ，最后以高于起始音符一个八度的 D 结束。如果我们观察 C大调中第一个音符与第二个音符之间的音程，就会得到 9 : 8。D大调中第一个音符与第二个音符之间的音程也应当是 9 : 8。然而，当我们计算它时，得到：

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{5f_C}{4}\right)}{\left(\frac{9f_C}{8}\right)} &= \frac{10}{9} \\ &\neq \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

D大调音阶中其他相邻音符之间的音程，相对于C大调音阶中的对应音程，同样会不协和；这意味着在纯律中无法转调。因此，有必要另寻一种八度划分方式，使转调能够自由而准确地进行。这种八度划分

就是前面提到的十二平均律。在这种调律系统中，除了八度之外，所有音程都不再遵循毕达哥拉斯对有理数频率比的偏好；八度仍是频率为 f 的音符与频率为$2f$的音符之间的跨度。其间的其他音程则均匀地划分为相等的半音，每个半音与前一个音符相差 $2^{1/12}$ 倍，使12个半音构成一个八度。在十二平均律中，C大调音阶写作

$$f_C, f_C \times 2^{2/12}, f_C \times 2^{4/12}, f_C \times 2^{5/12}, f_C \times 2^{7/12}, f_C \times 2^{9/12}, f_C \times 2^{11/12}, 2f_C. \quad (10)$$

失去纯音程，换来的是随心所欲转调的能力。从某种意义上说，这就像用眼睛观察事物：当你将视线聚焦在某个物体上时，光学透镜只有一个独特的焦距。严格来说，凡是不在光学透镜这一准确距离上的物体都会失焦，但我们早已习惯视野中其他事物略微模糊，因此这并不会妨碍视力。正因如此，十二平均律是演奏不断变换调的复调音乐的有力方式，也是西方音乐采用的标准调律系统。然而，十二平均律与纯律的音符音色之间确实存在一个值得关注的问题。毕竟，这种“模糊”或许很轻微，但这意味着除了八度之外，没有任何音程能得到恰当的调准。十二平均律音符的泛音彼此拍频，结果形成了一种平等弥漫的不协和音基底，对于习惯纯音程的听众来说，这可能会造成困扰。

可转调的纯五度⋆ 音乐体系提案。

如上一节所述，将八度划分为 12 个相等半音的音乐体系无法拥有纯五度。这直接源于将八度选作音程（f、$2f$），以及一个在数学上无法规避的事实：$2^{7/12} \neq 3/2$。然而，当我们思考八度的起源时可以看到，使这一音程成为和声基础构件的原因在于，$2f$ 的所有谐波都包含在 f的谐波之中。使用因子 2 既不是审美选择，也不是人耳生理结构的特征，而仅仅是乐器物理学的结果：在这类乐器中，振动体在很好的近似下是一维的。对于这类乐器，产生的声音可以用正弦函数描述；因子 2 源自一维空间中波动方程解的结构。当然，许多乐器——例如鼓、钟和钹——无法被建模为一维振动系统。我们知道，这些乐器的振动模态无法用正弦函数描述，因此具有非谐性。consequently，它们与其他谐波乐器的音高略有偏差，但它们在音乐中仍发挥着有用、甚至无处不在的作用。现在，如果我们着眼于构建一种在恢复纯五度的同时仍具备实用八度的不同调律系统，那么根据我们已经看到的一切，可以清楚地看出：通过将频率加倍来获得八度协和度，不应再被视为严格必要的条件；只要我们拥有这样一种体系，其中一个音符的所有谐波都包含在另一个音符的谐波之中，我们就拥有了一个可用于构建音乐体系的实用八度。这样的体系必然必须在电子音乐中实现，因为其中的振荡并不是发生在实际上为一维的振动弦或空气柱中。

在过去三十年中，电子音乐的兴起催生了这样的乐器：演奏某个音符时所产生的频率组合实际上经过了专门设计 [28]。这些尝试大多以微分音以及将八度划分为远多于12个音符为基础，这实际上使它们无法

与占绝大多数的西方音乐共存。尽管有人提出过少数几种调律系统，为每个音符选择相应的频率，以构建拥有12个音符八度的不同音乐体系，但令人惊讶的是，尚无任何系统尝试突破标准的僵化整数泛音结构。前一种做法的例子可以在中全音律理念中找到：这种理念强调纯正的大三度，却以压低五度为代价，同时还受到狼音的困扰，因此在离开主音进行转调时无法使用 [30]。极限调律方案也是一种纯律变体，它针对特定的调形成不同的12音八度；这类方案同样有人尝试过，但由于其本质特点，在要求调性灵活性的现代音乐环境中并不实用 [29]。我们还要提到小提琴家 Maria Renold 提出的五音调律理念： 1962 [5], [8], 一种非平均律调律系统，以纯五度和四度为基础，围绕一个 A_4频率为432赫兹的主音构建，而不是采用惯用的440赫兹。不幸的是，尽管这类调律系统常被赞誉为“听起来更好”，但在与标准平均律乐器兼容方面仍面临挑战。

为了保留西方音乐的整体结构，并因此保留近两千年来积累的曲目，我们认为至少应尽可能保留八度。设想一种音乐体系，其中存在八度的类似物，即八度⋆。在这种体系中，基音的第一谐波频率为 1；当八度⋆ 的第一谐波频率比为 x 时，二者相隔一个八度⋆ ，其中 x 是一个需要通过优化确定的实数。为了保持与标准音律系统的类比，我们希望 $x \approx 2$。此外，所有音符都具有谐波⋆，其频率比为

$x, \frac{1}{2}(x+x^2)\ x^2, \frac{1}{4}(3x^2+x^3), \frac{1}{4}(2x^2+2x^3), \frac{1}{4}(1x^2+3x^3)\ x^3, \frac{1}{8}(7x^3+x^4), \frac{1}{8}(6x^3+2x^4)$..... 第 N 个谐波为：

$$\frac{1}{M}\left[(M-L)x^{\alpha}+Lx^{\beta}\right], \tag{11}$$

其中 $M = Pp$，而 Pp 是小于 N 的前一个 2 的幂。例如，当 $N = 13$ 时，前一个 2 的幂是 8，因此 $Pp = 8$ 和 $M = 8$。类似地，相对于 N 的下一个 2 的幂是 Pn，而 α 由 Pp 的索引给出， β 是 Pn 的索引。L 由 $N - Pp$ 给出。因此，对于第 13 次谐波，前一个 2 的幂是 8，$Pp = 8 = 2^3$，下一个 2 的幂是 16， $Pn = 16 = 2^4$，于是 $M = 8$、 $\alpha = 3$ 和 $\beta = 4$。由于 $L = N - Pp$， $L = 13 - 8 = 5$，而第 13 次谐波是 $\frac{1}{8}(3x^3 + 5x^4)$。下文中，我们将用标准音乐体系中使用的相同名称来称呼拟议音乐体系中的类似实体，并采用 $\star$ 索引。

很容易验证，在这种方案下，八度⋆ 保留了八度的结构：任何八度⋆ 中的所有谐波都会出现在此前的所有八度⋆中，如表2所示。此外，当 $x = 2$ 时，我们就恢复了标准音律系统和八度。与八度的情况一样，对于接下来的八度⋆，任一给定音符的所有偶次谐波也都会包含在接下来的八度⋆中。现在，我们希望构建一个可移调的12半音结构，使八度⋆ 划分为12个间距相等的频率音程。一个八度⋆ 内各音符的基频，将由 $x^{1/12}$ 的幂乘以该八度⋆中第一个音符的频率来确定。

由于纯五度中最重要的协和度在于纯五度的第二谐波等于基音的第三谐波，因此我们可以要求：

$$x^{1+7/12} = \frac{1}{2}(x + x^2), \tag{12}$$

两边除以 x，得：

$$2x^{7/12} = x + 1. \tag{13}$$

方程（13）有两个解：一个是当 $x = 1$ 时的平凡解，此时所有谐波和音符始终具有相同的参考频率，无论选择何种频率。它是一个由单一频率构成、协和度最高的音乐体系；这个极其无趣的解可以称为“嗡——”解。不过，还存在一个更有趣的解，可以通过数值方法求得：
$x = 1.9725786270914\ldots$。这个方案与标准音乐体系的 $x = 2$ 非常接近，因此是构建一种类似音乐体系的有趣候选方案，其中五度接近纯五度。在标准音乐体系的纯五度中，纯五度的所有偶次谐波也都是基音的谐波。在所提出的纯* 体系中，只有当五度的* 谐波是 2 的幂时，才会出现这种情况。不过，在前 4 个偶次谐波中，有 3 个是 2 的幂：2、4 和 8。因此，考虑到高次谐波的振幅通常会逐渐减小，五度* 的协和度几乎完美，远胜于采用等分音程的标准音乐体系，即十二平均律调律。表2总结了所提出的弹性泛音体系，对比了前 16 个谐波中纯五度、十二平均律五度和五度*的谐波位置及其协和特性。

我们从表2可以看出，五度的偶次谐波* 与基音对应的纯五度谐波并不完全重合，其偏离纯律的程度大致与十二平均律五度中的谐波相当；后者相对于纯五度的频率偏差均一致，百分比相同。十二平均律五度没有任何谐波能够精确匹配。

如我们所见，在转向大三度——一个相隔四个半音的音程——时，标准音乐体系中最重要的协和关系是：纯大三度的第四谐波与基音的第五谐波完全匹配。在十二平均律调律中，这两个谐波之间的分数差为5与 $4 \times 2^{4/12}$之间的差，即0.79%，或14音分。上述弹性泛音方案中，相应的偏差则为0.25($3x^2 + x^3$)与 $x^{7/3}$之间的分数差，即0.88%，或15音分。因此我们看到，在所提出的、经过校准以使五度获得最佳协和度的体系中，大三度的协和度与十二平均律系统下的情况相当。有趣的是，转向相隔5个半音的音程，即四度时，弹性泛音方案中四度的第三谐波* 与基音的第四谐波* 完全匹配。同样，如纯四度的情况，四度的第六谐波* 与基音的第八谐波*也完全匹配；这些协和关系在十二平均律中都不复存在。四度也接近纯律这一事实，使我们可以预期弹性泛音与纯律之间存在密切对应关系。

实现

现在，我们针对一种特定的音色选择，展示所提出音乐体系的一种实现。这个例子在很大程度上是任意选取的，仅仅是为了在当前众多参数选择中提供一个具体示例。首先，我们为十二平均律系统的谐波选取一组振幅。定义这种音色的谐波振幅序列见表3，其中还给出了根据上一节提出并在表2中总结的模型计算出的两种体系中前16个谐波的具体频率值。利用这些数据，可构建一个涵盖A0至A5所有半音、共五个八度的十二平均律标准音乐体系，其中A4 $= 440$ 赫兹。其他任何音符的基频

表2。泛音频率比较。

谐波	基音	八度	纯五度	十二平均律五度		基音⋆	八度⋆		五度⋆
1	1	2	3/2	$2^{7/12}$		1	x		$x^{7/12}$
2	2	4	3, 0	$2 \cdot 2^{7/12}$, 0.113		x	x^2		$x \cdot x^{7/12}$, 0
3	3	6	9/2	$3 \cdot 2^{7/12}$		$\frac{1}{2}(x + x^2)$	$\frac{1}{2}(x^2 + x^3)$		$\frac{1}{2}(x + x^2) \cdot x^{7/12}$
4	4	8	6, 0	$4 \cdot 2^{7/12}$, 0.113		x^2	x^3		$x^2 \cdot x^{7/12}$, 0
5	5	10	15/2	$5 \cdot 2^{7/12}$		$\frac{1}{4}(3x^2 + x^3)$	$\frac{1}{4}(3x^3 + x^4)$		$\frac{1}{4}(3x^2 + x^3) \cdot x^{7/12}$
6	6	12	9, 0	$6 \cdot 2^{7/12}$, 0.113		$\frac{1}{4}(2x^2 + 2x^3)$	$\frac{1}{4}(2x^3 + 2x^4)$		$\frac{1}{4}(2x^2 + 2x^3) \cdot x^{7/12}$, 0.15
7	7	14	21/2	$7 \cdot 2^{7/12}$		$\frac{1}{4}(x^2 + 3x^3)$	$\frac{1}{4}(x^3 + 3x^4)$		$\frac{1}{4}(x^2 + 3x^3) \cdot x^{7/12}$
8	8	16	12, 0	$8 \cdot 2^{7/12}$, 0.113		x^3	x^4		$x^3 \cdot x^{7/12}$, 0
9	9	18	27/2	$9 \cdot 2^{7/12}$		$\frac{1}{8}(7x^3 + x^4)$	$\frac{1}{8}(7x^4 + x^5)$		$\frac{1}{8}(7x^3 + x^4) \cdot x^{7/12}$
10	10	20	15, 0	$10 \cdot 2^{7/12}$, 0.113		$\frac{1}{8}(6x^3 + 2x^4)$	$\frac{1}{8}(6x^4 + 2x^5)$		$\frac{1}{8}(6x^3 + 2x^4) \cdot x^{7/12}$, 0.18
11	11	22	33/2	$11 \cdot 2^{7/12}$		$\frac{1}{8}(5x^3 + 3x^4)$	$\frac{1}{8}(5x^4 + 3x^5)$		$\frac{1}{8}(5x^3 + 3x^4) \cdot x^{7/12}$
12	12	24	18, 0	$12 \cdot 2^{7/12}$, 0.113		$\frac{1}{8}(4x^3 + 4x^4)$	$\frac{1}{8}(4x^4 + 4x^5)$		$\frac{1}{8}(4x^3 + 4x^4) \cdot x^{7/12}$, 0.15
13	13	26	39/2	$13 \cdot 2^{7/12}$		$\frac{1}{8}(3x^3 + 5x^4)$	$\frac{1}{8}(3x^4 + 5x^5)$		$\frac{1}{8}(3x^3 + 5x^4) \cdot x^{7/12}$
14	14	28	21, 0	$14 \cdot 2^{7/12}$, 0.113		$\frac{1}{8}(2x^3 + 6x^4)$	$\frac{1}{8}(2x^4 + 6x^5)$		$\frac{1}{8}(2x^3 + 6x^4) \cdot x^{7/12}$, 0.065
15	15	30	45/2	$15 \cdot 2^{7/12}$		$\frac{1}{8}(x^3 + 7x^4)$	$\frac{1}{8}(x^4 + 7x^5)$		$\frac{1}{8}(x^3 + 7x^4) \cdot x^{7/12}$
16	16	32	24, 0	$16 \cdot 2^{7/12}$, 0.113		x^4	x^5		$x^4 \cdot x^{7/12}$, 0

该表展示了文中讨论的两种体系中基音、其八度音及其五度音的泛音结构，范围为前16个谐波。在标准音乐体系中，所有泛音都是基频的整数倍；若将基音的基频设为1，则其所有泛音的频率都等于对应的谐波序号。纯五度的基频是基音基频的3/2，其谐波则是3/2的整数倍。请注意，纯五度的所有偶次谐波都与基音中序号高出3/2的某个谐波重合，例如，纯五度的第2个谐波的频率对应基音的第 $2\times\ 3/2\ =\ 3$个谐波的频率。纯五度偶次谐波频率后逗号之后的零表示其与基音第 $3/2\times$ 个谐波之间的频率百分比差；在本例中，两者完全吻合。对于标准音乐体系的十二平均律调音，五度的基频现在设为 $2^{7/12}$，其泛音则为该数值的整数倍。十二平均律五度的偶次谐波均与基音中对应的谐波不匹配，如图所示，误差均为0.113%。在替代音乐体系中，基音的谐波⋆ 出现在所示数值处。五度⋆ 的基频为基音基频的 $x^{7/12}$ ，其谐波则是这一数值与基音谐波频率之积。此时，序号为2的幂的谐波完全吻合，与基音中对应的谐波一致，正如标准音乐体系中的纯五度一样。其他所有偶次谐波则存在微小误差，与标准音乐体系采用十二平均律调律时出现的误差相当。在前8个谐波中，纯五度有4个泛音完全吻合；本文讨论的弹性泛音音乐体系有3个这样的纯粹吻合，其中包括纯五度的前两种情况；而标准音乐体系采用十二平均律调律时则一个也没有。请注意，八度音⋆保留了八度的结构：八度音的所有谐波⋆也都出现在基音⋆中，其位置与标准音乐体系中八度音和基音的相应位置相同。

相隔 n 个半音的音符由 $220 \times 2^{n/12}$ 给出。尽管这当然只是对所展示示例的简化处理，但在全部 4 个八度中，音色保持不变；对于声学乐器，音符的音色结构会随其基频而变化。

现在，为了构建修改后的音乐体系，我们选择一个等价点，使给定音符在两个体系中的基频相同。在这一具体实现中，我们选择 A3=220赫兹作为等价点。这样做的优点是数值为精确定义的整数，而且大致位于所选十二平均律系统整个频率范围的中间，这将使两个体系在任意给定音符上的最大频率偏移减小。因此，A3⋆ 的基频也将是 220 赫兹。该音符的谐波将具有与十二平均律系统相同的音色结构，振幅也采用表3中给出的相同数值

不过，A3* 的谐波* 的频率位置现在将由表2所列公式决定。由于在所选音色下，修改后的音乐体系中任意音符的谐波* 频率都略低于标准十二平均律系统中的相应频率，而且许多谐波都具有相当大的能量，因此，尽管 A3* 的基频与 A3 相同，前者听起来仍比后者略低。要完成修改后的音乐体系，距离该音符 n 个半音的任何其他音符，其基频将由 $220 \times x^{n/12}$ 给出，其谐波* 则遵循上文所述的 A3*结构。

所有十二平均律和弹性泛音的声音均已上传至一个 Kontakt 乐器（采样软件）中。两个音乐体系均以相同方式应用了简单的 ADSR 包络和弯音调制，以及轻微的混响。为便于在同一乐器中切换这两个体系，还加入了一项特殊功能。最后，Kontakt 生成的 .niki文件作为插件载入 ProTools 数字音频工作站，后续所有示例均通过 MIDI 在其中编排。

表3。实现所用的音色。

谐波	十二平均律频率比	弹性泛音频率比	振幅
1	1	1	1.0
2	2	1.9726	0.95
3	3	2.9318	0.93
4	4	3.8911	0.91
5	5	4.8372	0.89
6	6	5.7833	0.87
7	7	6.7293	0.7
8	8	7.6754	0.6
9	9	8.6086	0.5
10	10	9.5417	0.4
11	11	10.4748	0.3
12	12	11.4079	0.2
13	13	12.3410	0.1
14	14	13.2742	0.05
15	15	14.2073	0.025
16	16	15.1404	0.0125

第二列和第三列分别给出了所讨论的两种体系中，相应谐波相对于基音频率的频率比。第四列给出了两种已实现示例（十二平均律和弹性泛音示例）中音色结构各谐波相对于基频振幅的相对振幅；所有建模音符的这些数值均保持不变。

有了标准的十二平均律体系和修改后的音乐体系，我们现在可以比较两者的声音。为此，我们特意确保两种体系中的所有音符都使用相同的音色生成，如表3所示。建议读者花些时间戴上耳机聆听所提供的音频文件，并反复聆听。对于所有展示的音频文件，每组中的第一个采用十二平均律体系，第二个则以修改后的弹性泛音系统（弹性泛音）呈现相同的音符。前4个对比示例的乐谱见图1–4。

第一个声音文件展示了标准十二平均律系统和经过修改的弹性泛音系统中相同的半音阶，范围从 A3 到 A4。请注意，在前面三个音频示例中，所演奏的音符包含等价音符 A3=A3* 。值得注意的是，与十二平均律中的对应音阶相比，反复聆听弹性泛音系统中的半音阶时，会发现其听起来相对平滑，

除了非常微小的频率偏移之外，八度* 比该八度略短。

声音文件 2 展示了两种音乐体系中按相同顺序演奏的一系列平行五度，均采用 C大调音阶。在这个例子中，由于谐波的协和度更高，音响的平滑感更加明显，即使是 B3 上的减五度也是如此。事实上，这里完全没有人们听惯了的十二平均律五度中的“刺耳感”；熟悉纯律（JI）的人会发现，纯律五度与弹性泛音系统中的五度在音色特征上十分相似，因为这两者都是这样的音程：基音的第三谐波与五度音的第二谐波完全重合，尽管纯律和弹性泛音系统中各音符的确切频率并不相同。

声音文件 3 展示了两种调律系统中以 C大调演奏的平行三和弦，声音文件 4 则展示了平行三全音，其中的音符无法属于 C大调音阶。在声音文件 3 中，我们特别关注第七个三和弦：它是减三和弦，可作为两种调律系统之间一个有趣的比较点；洛克里亚调式通常不受青睐，至少也常常令人心存顾虑，但在弹性泛音系统中听起来却有所不同。同样，两者在平滑感上的鲜明差异立刻显现出来，而受过十二平均律训练的专业听众最初的不适感，在反复聆听后会逐渐消失。

然而，调律系统真正经受考验，要看它应用于实际音乐时的表现。为此，我们展示了两首音乐作品，其谐波复杂程度逐步增加。两首作品都转换成了 MIDI文件，并由音序器演奏，以确保它们在每种调律系统中的演奏完全一致。首先是约翰·塞巴斯蒂安·巴赫的《哥德堡变奏曲》BWV 988 第一变奏，接着是弗雷德里克·肖邦的升C小调《幻想即兴曲》。这项试听练习有助于突出十二平均律与弹性泛音之间显著的差异。再次提醒，反复聆听两种调律系统演奏的音乐，便能感受到明显的听觉差异。随着谐波复杂程度增加，这些差异会更加突出。我们鼓励您反复聆听，体会弹性泛音相较于十二平均律所呈现的有趣细微差别。

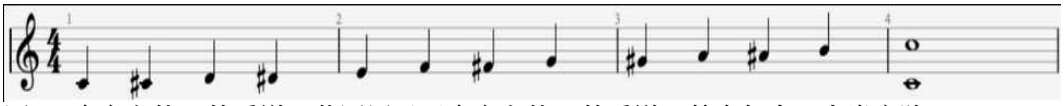


图1。声音文件 1 的乐谱。此图展示了声音文件 1 的乐谱，其中包含一个半音阶，先以标准十二平均律系统演奏，随后以所提出的弹性泛音体系演奏。

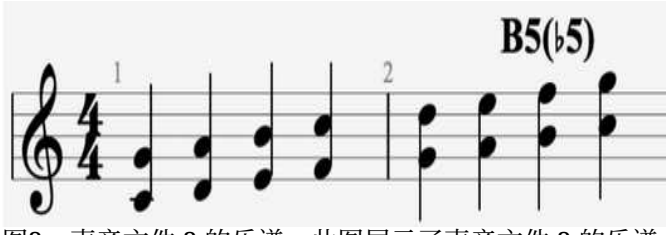


图2。声音文件 2 的乐谱。此图展示了声音文件 2 的乐谱，其中包含一组平行五度，先以标准十二平均律系统演奏，随后以所提出的弹性泛音体系演奏。

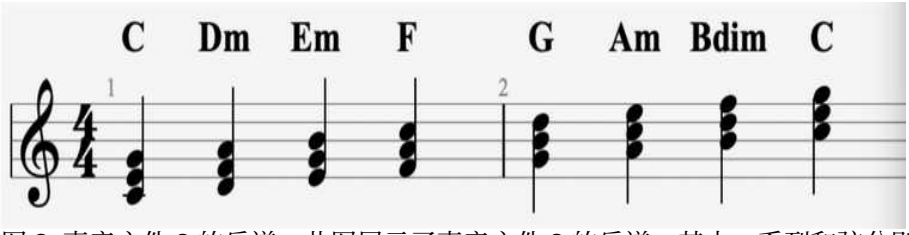


图 3. 声音文件 3 的乐谱。此图展示了声音文件 3 的乐谱，其中一系列和弦分别采用标准十二平均律系统和所提出的改良系统演奏。

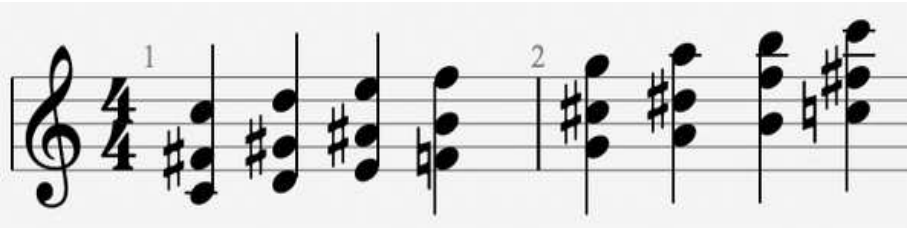


图 4. 声音文件 4 的乐谱。此图展示了声音文件 4 的乐谱，其中一系列三全音分别采用标准十二平均律系统和所提出的改良系统演奏。

结论

我们介绍了一种修改后的音乐体系，它与标准体系相似，并保留了标准十二平均律调音方案的许多特征。它保留了主要的八度划分*：不同八度*中处于相同位置的音符听起来相同，原因与标准音乐体系相同，即它们共享谐波* 。八度* 音程的频率比不再是 2，而是$x = 1.9725786270914\ldots$。因此，任何给定音符的谐波* 不再是其基频的整数倍，而是经过排列，以保留标准音乐体系的八度结构。有趣的是，通过构造，纯律标准音乐体系中纯五度和纯四度的大部分共振，在较低的 8 个谐波* 中得以保留；同时，这一体系完全支持移调，且半音在八度*内等距排列。

我们针对特定的任意音色选择和几首广为人知的乐曲，对比了标准音乐体系的十二平均律调律与所提出的弹性泛音体系。改良系统增强的协和度为此前未曾探索的有趣音乐创新创造了机会，并带来了令人联想到纯律的音乐体验，代价是八度略有缩短。

补充信息

S1 声音文件。半音阶。Chromatic.mp3 是一个声音文件，对比了标准十二平均律中的半音阶（先播放）与弹性泛音系统中的半音阶（后播放）。

S2 声音文件。平行五度。ParallelFifthsMajorScale.mp3，一段声音文件，对比标准十二平均律（先出现）与弹性泛音系统（后出现）中的大调音阶平行五度序列。

S3 声音文件。和弦1。ParallelTriadsMajorScale.mp3，一段声音文件，对比标准十二平均律（先出现）与弹性泛音系统（后出现）中的大调音阶平行三和弦序列。

S4 声音文件。Chords2. ParallelTritonesMajorScale.mp3，一段声音文件，对比了标准十二平均律（首先播放）和弹性泛音系统（最后播放）中的大调音阶一系列平行三全音。

S5 声音文件。BWV 988. Bach.mp3，一段声音文件，对比了巴赫《哥德堡变奏曲》第一变奏在标准十二平均律（首先播放）和弹性泛音系统（最后播放）中的演奏。

S6 声音文件。Fantasie-Impromptu in C sharp Minor Op.66. Chopin.mp3，一段声音文件，对比了肖邦的升C小调幻想即兴曲，作品66在标准十二平均律（首先播放）和弹性泛音系统（最后播放）中的演奏。

致谢

Luis Nasser 衷心感谢美国国家科学基金会项目 PHY - 2110425 的支持。Xavier Hernandez 感谢 SNII-SECIHTI 的资助以及墨西哥国立自治大学 DGAPA 项目 IN-102624 的资助。Pablo Garc´ía-Valenzuela 衷心感谢国家艺术创作者系统 SNCA-11/15/20 奖项提供的全力支持。M´exico。

参考文献

1. Jesse Berezovsky《声音作为有序相的音乐和声结构：音乐理论的统计力学方法》。《科学进展》，2019年5月17日，第5卷，第5期，DOI：10.1126/sciadv.aav8490 2. L. Nasser、A. Tillotson、X. Hernandez《和声热力学：将类比扩展至不同音乐体系》。PLoS One 20(5): e0322385。https://doi.org/10.1371/journal.pone.0322385 3. Plomp, R. 和 Levelt，《音调协和与临界带宽》。《美国声学学会杂志》，38，548-560。W.J.M.（1965）http://dx.doi.org/10.1121/1.1909741 4. 阿诺德·勋伯格。《和声学理论》。加利福尼亚大学出版社；百年纪念版（2010年10月13日）5. William A. Sethares《调律、音色、频谱、音阶》。施普林格伦敦有限公司；第2版（2005）6. Xu, F.《朱载堉与平均律》。载于：Jiang, X.（编）《中国科学技术发展的高潮》。《中国科学技术史》。施普林格，新加坡（2021）。https://doi.org/10.1007/978-981-15-7847-2-12 7. Stevin, Simon《歌唱艺术之镜》。The Diapason Press。原文存档于2011年7月17日。2012年3月20日通过 diapason.xentonic.org 获取。（2009年6月30日）Rasch, Rudolf（编）。8. D. Benson。《音乐：数学的馈赠》。第5章，剑桥大学出版社，2006年。

9. Ryan Buechele、Jesse Berezovsky，《音乐有序相的重整化群方法》。Physical Review E 101, 014145（2024）DOI：10.1103/PhysRevE.110.014145 10. Gill, k. Z.、Purves. D《音乐音阶的生物学依据》PLoS One 4 https://doi.org/10.1371/journa.pone.0008144（2009）11. Raja Marjieh、Peter M. C. Harrison、Harin Lee、Fotini Deligiannaki、Nori Jacoby《音色效应对协和度的影响揭示了心理声学机制，并为音乐音阶的感知起源提供线索》Nature Communications（2023

)

https://doi.org/10.1038/s41467-024-45812-z 12. Helmholtz H.《音调感觉》。《Dover音乐丛书》。Dover Publications；2013年。可从 https://books.google.com/books?id-QNfCAgAAQBAJ 获取。13. Sethares W. 局部协和性与音色和音阶之间的关系。《美国声学学会杂志》。1993年；94。https://doi.org/10.1121/1.408175 14. F. Lerdahl、R. Jackendoff，《调性音乐生成理论》（MIT Press，1983年）15. J. M. Barbour。《调律与律制：历史综述》（Counter Corporation，2013年）16. W. Surjodiningrat、A. Susanto、P. J. Sudarjana，《日惹和梭罗杰出爪哇甘美兰的音高测量》（加札马达大学出版社，1972年）17. D. Morton、C. Duriyanga，《泰国传统音乐》（加利福尼亚大学出版社，1976年）18. D. Tymoczko，《音乐和弦几何》，《Science》313，72–74（2006年）19. J. E. Youngblood，《作为信息的风格》。《J. Music Theory》2，24–35（1958年）20. J. J. Acouturier、E. R. Miranda。音乐自组织假说

l

调律系统。《Leonardo Music J.》18，63–69（2008）；21. John S. Rigden，《物理学与音乐之声》，John Wiley & Sons，243–247（1972）；22. https://www.youtube.com/watch?v=rOFlvUJHreg，YouTube，Carl Radford（2014）；23. Braun, Martin（2002年8月）。《中爪哇甘美兰佩洛格音阶：非谐音乐音阶的一个例子》，NeuroScience-of-Music.se。5月17日（2006年）；24. Eric J. Heller，《你为何听到你所听到的：声音、音乐与心理声学的体验式方法》（普林斯顿大学出版社，2013）；25. Dumbrill, Richard J.（1998）。《古代近东的考古音乐学》

.

塔德马出版社，伦敦。26. Chalmers, John H., Jr.（1993）。Polansky, Larry；Scholz, Carter（编）。《四音列的划分：构建音乐的导论》

l

音阶。Harrison, Lou（序言）。新罕布什尔州汉诺威：Frog Peak Music。ISBN 0-945996-04-7

27. Thomas Nicholson 和 Marc Sabat（2019）《纯律与微分音作曲的基本原理》。柏林艺术大学音准研究与微分音作曲工作室 28. Aguilar, Juan R.、Salinas, Renato。（2003）。《声音合成与电子乐器自动调音的新趋势》。塔拉帕卡大学工程学院学报，11(2)，17-23。https://dx.doi.org/10.4067/S0718-13372003000200004 29. Wright, David（2009）。《数学与音乐》，第 140-141 页，ISBN 978-0-8218-4873-9 30. Dolata, David。《鲁特琴与维奥尔琴上的中全音律》。印第安纳大学出版社，2016。http://www.jstor.org/stable/j.ctt1c3snv3。