arXiv:2601.08180v1 [math-ph] 13 Jan 2026

适用于相空间量子力学的分布代数。 I

Jos´e M. Gracia-Bond´ıa 和 Joseph C. V´arilly

哥斯达黎加大学数学学院，哥斯达黎加圣何塞 11501

J. Math. Phys. **29** (1988年), 869–879

摘要

将 R^{2N} 上函数的扭曲乘积扩展到一个 $*$-代数，该代数由温和分布构成，包含快速衰减光滑函数、紧支撑分布和所有多项式，并且在傅里叶变换下保持不变。本文研究了扭曲乘积的正则性。针对一个适当的标准正交基，给出了扭曲乘积的矩阵表示，并据此构造了该乘积下的一族 Banach 代数。

1 引言

本文是两篇论文中的第一篇，旨在为无自旋非相对论粒子的量子力学之外尔–维格纳–格罗内沃尔德–Moyal相空间方法给出严谨的表述。（在未来的一篇文章中，我们将展示如何也将自旋纳入这一形式体系。）近年来，这种方法受到越来越多的关注 [1–5]。然而，要统一其不同分支，还有许多工作要做。一方面，借助维格纳意义下的分布函数，可以开展许多有用的量子物理研究 [4]。另一方面，数学界的关注大多集中在外尔算子演算 [6–9]上。正如格罗内沃尔德 [10] 和 Moyal [11]所展示的那样，利用“扭曲乘积”这一概念，可以仅通过经典相空间上的函数，以一种自足的方式进行研究。类似地，“变形理论” [2]的实践者提出了一个很有前景的量子力学公理化基础，但其所用的数学工具与量子理论通常采用的泛函分析方法大不相同。

我们在此尝试为相空间中的量子力学建立一种数学上严谨且物理上易于处理的表述。为了获得恰当的数学背景，我们必须明确哪些函数对可以进行扭曲乘积；合适的函数空间还应尽可能包含各种具有物理意义的可观测量。要纳入位置和动量这两种基本可观测量，我们就必须舍弃希尔伯特空间上有界算子的代数：在使相空间方法更加严谨的过程中，人们很快会发现，采用并非必定是巴拿赫空间的局部凸拓扑向量空间颇有助益。

本文的结构如下。第 2 节回顾施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathrm{R}^{2N})$ 中扭曲乘积和卷积的性质。第 3 节将这些概念对偶化到其中

一个或两个因子为温和分布的情形，并确定莫亚尔代数 $\mathcal{M}$，即这些运算有定义且满足结合律的最大 $*$分布代数。我们证明， $\mathcal{M}$ 在傅里叶变换下保持不变。第4节考察扭曲乘积和卷积的正则性，并证明紧支撑分布属于莫亚尔代数。第5节在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ 中构造一个标准正交基；利用该基，我们证明扭曲乘积可以表示为双重数列的矩阵乘积。由此，我们构造了一族温和分布的类索伯列夫空间，其中一些空间关于扭曲乘积构成 Banach代数；这些空间使我们能够更细致地考察莫亚尔代数 $\mathcal{M}$。

2 代数 $(\mathcal{S}_2, \times)$ 和 $(\mathcal{S}_2, \diamond)$

本文中，我们始终研究定义在 $\mathbb{R}^{2N}$ 上的某些函数空间和分布空间，并将其视为相空间 $T^*(\mathbb{R}^N)$。对于 $u,\ v \in \mathbb{R}^{2N}$，我们用 $u'v$ 和 $u'Jv$ 分别表示 u 和 v 的通常内积与辛内积。选取并固定 $\mathbb{R}^{2N}$ 的一组正交辛基，我们记

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_{2N}) = (q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$$

and

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_{2N}) = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N),$$

其中具体而言

$$u'v := \sum_{i=1}^{N} (q_i\tilde{q}_i + p_i\tilde{p}_i), \qquad u'Jv := \sum_{i=1}^{N} (q_i\tilde{p}_i - p_i\tilde{q}_i),$$

其中 J 是所选基下的矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1_N \\ -1_N & 0 \end{pmatrix}$。注意， $v'Ju = -u'Jv$ 和 $u'Ju = 0$。

我们将 $\mathcal{S}_2 := \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ 定义为 $\mathbb{R}^{2N}$ 上光滑且快速递减函数构成的施瓦茨空间。若 $f \in \mathcal{S}_2, s \in \mathbb{R}^{2N}$ 且 $1 \leqslant j \leqslant 2N$，则定义 $f^*(u) := \overline{f(u)}$、$\check{f}(u) := f(-u)$，并且还定义：

$$(\mu_j f)(u) := u_j f(u), \qquad \partial_j f := \frac{\partial f}{\partial u_j},$$
$$(\tau_s f)(u) := f(u - s), \qquad (\varepsilon_s f)(u) := e^{is'Ju} f(u),$$

and

$$\hat{\partial}_j f := \begin{cases} \partial_{j+N} f & \text{if } 1 \leqslant j \leqslant N, \\ -\partial_{j-N} f & \text{if } N < j \leqslant 2N. \end{cases}$$

我们采用三种稍显特别的规范化。首先，对于 $\mathbb{R}^{2N}$ 上的积分，我们使用哈尔测度 $dx := (2\pi)^{-N}\, d^{2N}x$，其中 $d^{2N}x$ 是勒贝格测度。（这样可以消除傅里叶变换 [12] 中的 2π 次幂。）特别地， $\int e^{-x^2/2}\, dx = 1$。其次，我们使用双线性 形式

$$\langle f, g \rangle := \int f(x) g(x)\, dx$$

以及半双线性形式

$$(f \mid g) := 2^{-N} \langle f^*, g \rangle = 2^{-N} \int \overline{f(x)} g(x)\, dx$$

只要积分收敛即可。对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$，我们将采用范数 $\|f\| := (f \mid f)^{1/2}$。第三，对于普朗克常数，我们取 $\hbar = 2$（而非通常的 $\hbar = 1$）。

我们定义一个普通傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 和两个辛傅里叶变换 F 和 $\widetilde{F}$[13]为

$$(\mathcal{F}f)(u) := \int f(t)e^{-it'u}\,dt, \quad (Ff)(u) := \int f(t)e^{-it'Ju}\,dt, \quad (\widetilde{F}f)(u) := \int f(t)e^{it'Ju}\,dt.$$

变换 $\mathcal{F}$、F 和 $\widetilde{F}$ 是从 $\mathcal{S}_2$ 到 $\mathcal{S}_2$的相互可交换的同构（弗雷歇空间），并满足以下公式：

$$\begin{aligned}
Ff(u) &= \mathcal{F}f(Ju), & \widetilde{F}f(u) &= \mathcal{F}f(-Ju),\\
F^2 &= \widetilde{F}^2 = \mathrm{Id}, & \widetilde{F}f &= (Ff)^\vee = F(\check{f}), \quad (Ff)^* = \widetilde{F}(f^*),\\
F(\tau_s f) &= \varepsilon_{-s}Ff, & F(\varepsilon_s f) &= \tau_{-s}Ff,\\
F(\hat{\partial}_j f) &= -i\mu_j Ff, & F(\mu_j f) &= i\hat{\partial}_j Ff,\\
\langle Ff, g, \rangle &= \langle f, \widetilde{F}g, , \rangle & (Ff \mid g) &= (f \mid Fg).
\end{aligned}$$

定义 1. 若 $f, g \in \mathcal{S}_2$，则扭曲乘积 $f \times g$ 定义为

$$\begin{aligned}
(f \times g)(u) &:= \iint f(v)g(w)\exp\bigl(i(u'Jv + v'Jw + w'Ju)\bigr)\,dv\,dw\\
&= \iint f(u+s)g(u+t)\,e^{is'Jt}\,ds\,dt. \qquad (1)
\end{aligned}$$

该扭曲卷积 $f \diamond g$ 定义为

$$(f \diamond g)(u) := \int f(u-t)g(t)\,e^{-iu'Jt}\,dt. \qquad (2)$$

注 1. 是冯·诺伊曼 [14] 引入了扭曲卷积（尽管他没有给它命名），以确立薛定谔表示的唯一性。卡斯特勒等人曾使用它 [13, 15, 16] 研究正则对易关系。

注释 2。 扭曲乘积不过是从另一种角度看韦尔泛函演算 [7] 。与 [1] 及其他地方一样，人们可以将它视为 $f \times g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \diamond \mathcal{F}g)$；但或许更自然的动机如下。逐点乘积 $f(u)g(u)$不适用于量子力学，因为不确定性原理禁止在相空间中的某一点实现局域化。遵循 S lawianowski [17], ，我们试图用某种其他乘积取代它，这种乘积应具有平移不变性和辛等变性、满足结合律且是非局域的。文献 [3] 证明，满足平移不变性、辛等变性和结合律的积分核只有 $a\delta(s)\delta(t)$——对应逐点乘积——以及 $be^{ics'Jt}$，其中 a，b，c 是常数，我们可以将它们设为 1。

命题 1. 若 f、$g \in \mathcal{S}_2$，则 $f \times g \in \mathcal{S}_2$，映射 $(f$、$g) \mapsto f \times g$ 是 $\mathcal{S}_2$上的连续双线性运算，并且

$$\begin{aligned}
&\partial_j(f \times g) = \partial_j f \times g + f \times \partial_j g;\\
&\mu_j(f \times g) = f \times \mu_j g + i\hat{\partial}_j f \times g = \mu_j f \times g - if \times \hat{\partial}_j g. \qquad (3)
\end{aligned}$$

证明。 莱布尼茨公式可通过在积分号下求导得到，而 (3) 是直接计算的结果。根据这些公式对其进行归纳法可知， $f\times g$属于 $\mathcal{S}_2$。若 $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_{2N})\in\mathbb{N}^{2N}$，我们记作 $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_{2N}^{\alpha_{2N}}$，并类似地定义 μ^α、$\hat{}\partial^\alpha$。于是

$$\mu^\alpha\,\partial^\gamma(f\times g)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\sum_{\varepsilon\leqslant\gamma}(-i)^{|\beta|}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\varepsilon}\mu^{\alpha-\beta}\,\partial^{\gamma-\varepsilon}f\times\hat{\partial}^\beta\,\partial^\varepsilon g.$$

由 (1) 得到 $\|f\times g\|_\infty\leqslant\|f\|_1\,\|g\|_1$。由于 $\mathcal{S}_2$ 的拓扑由半范数$p_{\alpha\gamma}(f):=\|\mu^\alpha\,\partial^\gamma f\|_\infty$或由$q_{\alpha\gamma}(f):=\|\mu^\alpha\,\partial^\gamma f\|_1$给出，因此估计式

$$p_{\alpha\gamma}(f\times g)\leqslant\sum_{\beta\leqslant\alpha}\sum_{\varepsilon\leqslant\gamma}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\varepsilon}q_{\alpha-\beta,\gamma-\varepsilon}(f)q_{0,\eta+\varepsilon}(g),$$

对于所有 j，都有 $\eta_j=\beta_{j\pm N}$，这表明 $(f,g)\mapsto f\times g$在 $\mathcal{S}_2$的拓扑下是联合连续的。 □

各种傅里叶变换将 $\times$与$\diamond$交织起来，正如“普通”乘积和卷积的情形。事实上，结论甚至更强：只对一侧施加辛傅里叶变换，就可以互换运算 $\times$和$\diamond$。这样，我们便可以针对具体计算采用最方便的运算，再利用 $\mathcal{S}_2$的傅里叶不变性将结果转换为另一种运算。明确地说，我们得到：

$$f\times g=Ff\diamond g=f\diamond\widetilde{F}g,\qquad f\diamond g=Ff\times g=f\times\widetilde{F}g,\tag{4}$$

因为，例如，

$$\begin{aligned}(f\times g)(u)&=\iint f(v)g(w)\,e^{-iv'J(u-w)}e^{iw'Ju}\,dv\,dw\\&=\int Ff(u-w)g(w)\,e^{-iu'Jw}\,dw=(Ff\diamond g)(u).\end{aligned}$$

我们还发现

$$\mathcal{F}(f\times g)=\mathcal{F}f\diamond\mathcal{F}g,\qquad\mathcal{F}(f\diamond g)=\mathcal{F}f\times\mathcal{F}g,\tag{5}$$

$\widetilde{\ }$以及将 $\mathcal{F}$ 替换为 F 或 $\overline{F}$所得的完全类似的公式。此外，

$$(f\times g)\times h=f\times(g\times h),\qquad(f\diamond g)\diamond h=f\diamond(g\diamond h),\tag{6}$$

因为

$$\begin{aligned}((f\diamond g)\diamond h)(u)&=\iint f(u-t-s)g(s)h(t)\,e^{-i(u'Jt+(u-t)'Js)}\,ds\,dt\\&=\iint f(u-v)g(v-t)h(t)\,e^{-i(u'Jv-t'Jv)}\,dt\,dv\\&=(f\diamond(g\diamond h))(u)\end{aligned}$$

并应用（5）可得 $\times$的结合律。接下来，

$$(f\times g)^*=g^*\times f^*,\qquad(f\diamond g)^*=g^*\diamond f^*,$$

因为，例如，

$$\begin{aligned}(f\times g)^*(u) &= \iint f^*(u+s)g^*(u+t)\,e^{-is'Jt}\,ds\,dt\\ &= \iint g^*(u+t)f^*(u+s)\,e^{it'Js}\,dt\,ds\\ &= (g^*\times f^*)(u).\end{aligned}$$

以下恒等式具有根本的重要性。

命题 2。若 $f,\ g\in\mathcal{S}_2$，则

$$\int (f\times g)(u)\,du = \int (g\times f)(u)\,du = \int f(u)g(u)\,du. \tag{7}$$

证明。

$$\begin{aligned}\int (f\times g)(u)\,du &= \mathcal{F}(f\times g)(0) = (\mathcal{F}f\diamond\mathcal{F}g)(0) = \int \mathcal{F}f(-t)\mathcal{F}g(t)\,dt\\ &= (\mathcal{F}f * \mathcal{F}g)(0) = \mathcal{F}(fg)(0) = \int f(u)g(u)\,du\end{aligned}$$

其中 $*$表示通常的卷积。 □

迹恒等式 (7) 中固有的循环性，使我们能够通过对偶性完成扩张。我们指出 (7) 的一个重要推论。

命题 3。若 $f,\ g,\ h\in\mathcal{S}_2$，则

$$\langle f\times g, h\rangle = \langle f, g\times h\rangle = \langle g, h\times f\rangle; \tag{8}$$

$$\langle f\diamond g, h\rangle = \langle f, \check{g}\diamond h\rangle = \langle g, h\diamond\check{f}\rangle; \tag{9}$$

$$(h\mid f\times g) = (f^*\times h\mid g) = (h\times g^*\mid f).$$

证明。 由 (7) 和结合律 (6)，可得 (8) 中的三个表达式均等于$\int(\ f\times g\times h)(u)\ \ du$。现在 (9) 由 (4) 得出，第三个公式则显而易见。 □

3 对偶性与 Moyal 代数

在建立了适用于 $\mathcal{S}_2$ 中函数的扭曲乘积与卷积的微积分后，我们现在将其扩展到一个更大的温和分布代数。首先，我们考虑温和分布与测试函数的扭曲乘积或卷积。

对于 $T\in\mathcal{S}_2'$、$h\in\mathcal{S}_2$，我们记 $T,\ h := T(h)$。我们也按通常方式扩展先前的记号：

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{F}T, h\rangle := \langle T, \mathcal{F}h\rangle, \quad \langle\check{T}, h\rangle := \langle T, \check{h}\rangle,\\ &(T\mid h) := 2^{-N}\langle T^*, h\rangle := 2^{-N}\langle T, h^*\rangle^*,\\ &\langle FT, h\rangle := \langle T, \widetilde{F}h\rangle, \quad \langle\widetilde{F}T, h\rangle := \langle T, Fh\rangle,\\ &\langle\partial_j T, h\rangle := -\langle T, \partial_j h, ,\rangle \quad \langle\mu_j T, h\rangle := \langle T, \mu_j h\rangle.\end{aligned}$$

定义 2。 对于 $T \in \mathcal{S}_2', f, h \in \mathcal{S}_2$，我们在 $\mathcal{S}_2'$ 中定义 $T \times f, f \times T, T \diamond f$ 和 $f \diamond T$：

$$\begin{aligned} \langle T \times f, h\rangle &:= \langle T, f \times h\rangle, \quad \langle f \times T, h\rangle := \langle T, h \times f\rangle, \\ \langle T \diamond f, h\rangle &:= \langle T, \check{f} \diamond h, , \rangle \quad \langle f \diamond T, h\rangle := \langle T, h \diamond \check{f}\rangle. \end{aligned} \tag{10}$$

$\times$ 和 $\diamond$在 $\mathcal{S}_2$ 中的连续性意味着每个右端项关于h 都是连续且线性的，因此定义了 $\mathcal{S}_2'$中的一个元素。根据 (8) 和 (9)，这些是对 $\mathcal{S}_2$上相应运算的扩张。

本文中，局部凸空间 E 的每个对偶空间 E' 都赋予强对偶拓扑，即 E的有界子集上的一致收敛拓扑。于是，上文定义的四个双线性映射：$\mathcal{S}_2' \times \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2'$ 都是次连续的。事实上，由于 $\mathcal{S}_2$ 和 $\mathcal{S}_2'$ 是桶化的，只需 [18, 19] 验证分别连续性即可。例如，固定 T时，映射 $f \mapsto T, f \times h$是连续的；当h 取遍 $\mathcal{S}_2$ 的有界子集时，该连续性是一致的（由 f和h的联合连续性可知），因此 $f \mapsto T \times f$是从 $\mathcal{S}_2$ 到 $\mathcal{S}_2'$的连续映射。固定 f时，$T \mapsto T \times f$是从 $\mathcal{S}_2$ 到 $\mathcal{S}_2$的连续映射$h \mapsto f \times h$ 的转置，因此是从 $\mathcal{S}_2'$ 到 $\mathcal{S}_2'$的连续映射。

第 2 节中涉及 f 和 g 的所有公式，都可推广为涉及 T 和 f 的类似公式（例如，$\sim T \times f = FT \diamond f = T \diamond Ff$）。这很容易验证，因为 $A = B$ 在 $\mathcal{S}_2'$ 中当且仅当对所有$h \in \mathcal{S}_2$，都有 $A, h = B, h$；利用 (10)，我们可以将问题归结为 $\mathcal{S}_2$ 情形。

我们用 $\mathbb{1}$ 表示取值为 1 的常值函数，用 δ 表示支撑于 0、质量为 1 的狄拉克测度。它们是运算 $\times$ 和 $\diamond$的恒等元：

$$\mathbb{1} \times f = f \times \mathbb{1} = f, \qquad \delta \diamond f = f \diamond \delta = f.$$

这由下式可得

$$\langle \mathbb{1} \times f, h\rangle = \langle \mathbb{1}, f \times h\rangle = \int (f \times h)(u)\, du = \langle f, h\rangle$$

由 (7) 得：因此，$\mathbb{1} \times f = f$是 $\mathcal{S}_2'$中的元素。我们将在下文证明 $\mathbb{1} \times f$是连续的，因此 $\mathbb{1} \times f = f$与$\widetilde{}$是 $\mathcal{S}_2$中的函数。等式的另一半由 (5) 得出，因为 $F\delta = F\delta = \mathcal{F}\delta = \mathbb{1}$。由 (4) 我们还可得到以下公式

$$\mathbb{1} \diamond f = \delta \times f = \widetilde{F}f, \qquad f \diamond \mathbb{1} = f \times \delta = Ff. \tag{11}$$

利用 $u_j = \mu_j \mathbb{1}$这一事实，我们从 (3) 得到重要的恒等元

$$u_j \times f = \mu_j f + i\,\hat{\partial}_j f, \qquad f \times u_j = \mu_j f - i\,\hat{\partial}_j f,$$

用 $(q,\ p)$ 表示时，它们变为

$$\begin{aligned} q_j \times f &= \left(q_j + i\frac{\partial}{\partial p_j}\right) f, \qquad p_j \times f = \left(p_j - i\frac{\partial}{\partial q_j}\right) f, \\ f \times q_j &= \left(q_j - i\frac{\partial}{\partial p_j}\right) f, \qquad f \times p_j = \left(p_j + i\frac{\partial}{\partial q_j}\right) f. \end{aligned} \tag{12}$$

如果 $T \in \mathcal{S}_2'$和 $f \in \mathcal{S}_2$，普通卷积 $T * f$是 [18, 20] 在 $\mathcal{O}_C$中的光滑函数，而普通乘积 Tf在 $\mathcal{O}_C'$中是“快速衰减分布”，但不一定光滑。相比之下，将（5）推广到 $\mathcal{S}_2'$ 后可见，扭曲乘积和扭曲卷积具有相似的

光滑性和无穷远处增长性质。为说明这一点，我们先注意到，（2）可改写为

$$(f \diamond g)(u) = \langle \varepsilon_{-u}\tau_u \check{f}, g\rangle = \langle f, \varepsilon_u\tau_u \check{g}\rangle.$$

因此，在诸如 $(T * f)(u) = T, \ \tau_u \check{} f$ 这样的卷积公式中，平移 τ_u 会被 $\varepsilon_u\tau_u$ 或 $\varepsilon_{-u}\tau_u$ 取代。

定理 1. 若 $T \in \mathcal{S}'_2$, $f \in \mathcal{S}_2$，则 $T \times f$, $f \times T$, $T \diamond f$ 和 $f \diamond T$ 是 R^{2N} 上的光滑函数，由下式给出

$$\begin{aligned}(T \times f)(u) &= \langle T, \varepsilon_u\tau_u F f\rangle,\\ (f \times T)(u) &= \langle T, \varepsilon_{-u}\tau_u \widetilde{F} f\rangle \qquad (13)\\ (T \diamond f)(u) &= \langle T, \varepsilon_u\tau_u \check{f}\rangle,\\ (f \diamond T)(u) &= \langle T, \varepsilon_{-u}\tau_u \check{f}\rangle. \qquad (14)\end{aligned}$$

证明。若 $h \in \mathcal{S}_2$，映射 $u \mapsto \tau_u h$、$u \mapsto \varepsilon_u h$ 是从 R^{2N} 到 $\mathcal{S}_2$ 的连续映射，因此这些公式右侧关于 u 和 f 是联合连续的。由转置可知，由于 T, $\varepsilon_u\tau_u f = \varepsilon_{-u}\tau_u \check{} T$, f，它们关于 T 也连续。这些右侧定义了扭曲乘积和卷积在稠密子空间 $\mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2$ 上的分别连续延拓；由于这些延拓必然唯一，因此它们与先前定义的 $T \times f$ 等一致。

Now

$$\partial_j h(u) = \pm \lim_{c\to 0} c^{-1}\big(h(u + ce_j) - h(u)\big),$$

其中，只要该极限存在，e_k 就是 R^{2N} 中的第 k 个基向量。通过计算，我们得到

$$\lim_{c\to 0} c^{-1}\langle T, \varepsilon_{u+ce_j}\tau_{u+ce_j} F f - \varepsilon_u\tau_u F f\rangle = (\partial_j T \times f)(u) + (T \times \partial_j f)(u)$$

正如预期的那样，因此由归纳法可知，$T \times f$ 是无穷可微的，并且莱布尼茨公式 $\partial_j(T \times f) = \partial_j T \times f + T \times \partial_j f$ 作为光滑函数之间的等式成立。其他三种情况类似。□

令 $\mathcal{E}_2$ 表示 R^{2N} 上光滑函数的空间，其拓扑由所有导数在紧集上的一致收敛给出。普通卷积算子恰好是那些与平移交换的算子；我们可以将扭曲卷积算子刻画为与“扭曲平移”交换的算子。

定理 2。设 $L\colon \ \mathcal{S}_2 \to \mathcal{E}_2$ 为线性且连续的；则存在唯一的 $T \in \mathcal{S}'_2$，使得 $L(f) = T \times f$ 对所有 $f \in \mathcal{S}_2$ 成立，当且仅当 L 与 $\{\varepsilon_u\tau_u\colon \ u \in \mathrm{R}^{2N}\}$ 交换。

证明。由（13）可得

$$\begin{aligned}\varepsilon_v\tau_v(T \times f)(u) &= e^{iv'Ju}(T \times f)(u - v) = e^{iv'Ju}\langle T, \varepsilon_{u-v}\tau_{u-v} F f\rangle\\ &= e^{iv'Ju}\langle T, t \mapsto e^{i(u-v)'Jt} F f(t - u + v)\rangle\\ &= \langle T, t \mapsto e^{i(u'Jt - v'J(t-u))}\varepsilon_{-v} F f(t - u)\rangle\\ &= \langle T, t \mapsto e^{iu'Jt}\tau_{-v}\varepsilon_{-v} F f(t - u)\rangle = \langle T, \varepsilon_u\tau_u F(\varepsilon_v\tau_v f)\rangle\end{aligned}$$

因此， $f \mapsto T \times f$与任意 $\varepsilon_v \tau_v$都可交换。

另一方面，给定 $L\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{E}_2$，它与所有 $\varepsilon_v \tau_v$都可交换，我们定义 $T \in \mathcal{S}_2'$为 T， $h := L(Fh)(0)$。（因此 T是唯一的。）对于 $u \in \mathbb{R}^{2N}, f \in \mathcal{S}_2$，我们于是得到

$$\begin{aligned}(T \times f)(u) &= \langle T, \varepsilon_u \tau_u F f, = \rangle \langle T, F(\varepsilon_{-u} \tau_{-u} f)\rangle \\ &= L(\varepsilon_{-u}\tau_{-u} f)(0) = \varepsilon_{-u}\tau_{-u}(Lf)(0) \\ &= \tau_{-u}(Lf)(0) = (Lf)(u).\end{aligned}$$

□

现在可以定义 Moyal $*$-代数 $\mathcal{M}$。我们将其定义为两个空间 $\mathcal{M}_L$和 $\mathcal{M}_R$ 的交集。据我们所知，这两个空间最早由 Antonets [21]研究。

定义 3. (1) $\mathcal{M}_L :=\{ S \in \mathcal{S}_2' :\ \ S \times f \in \mathcal{S}_2$ 对所有 $f \in \mathcal{S}_2 \}$;

(2) $\mathcal{M}_R := \{\ R \in \mathcal{S}_2' :\ f \times R \in \mathcal{S}_2$ 对所有 $f \in \mathcal{S}_2\}$;

(3) $\mathcal{M} := \mathcal{M}_L \cap \mathcal{M}_R$。

注意， $S \in \mathcal{M}_L$当且仅当 $S^* \in \mathcal{M}_R$，因为 $(S \times f)^* = f^* \times S^*$。由于 $\mathcal{S}_2$是 Fr´echet 空间，根据闭图定理，映射$f \mapsto S \times f, f \mapsto f \times R$从 $\mathcal{S}_2$到 $\mathcal{S}_2$ 是连续的。

显然， $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{M}$ 且 $\mathbb{1} \in \mathcal{M}$。公式（11）表明 $\delta \in \mathcal{M}$。现在，若 $S \in \mathcal{M}_L$且 $f \in \mathcal{S}_2$，则有

$$\begin{aligned}\partial_j S \times f &= \partial_j (S \times f) - S \times \partial_j f, \\ \mu_j S \times f &= \mu_j (S \times f) + iS \times \hat{\partial}_j f,\end{aligned}$$

因此， $\partial_j S \in \mathcal{M}_L$且 $\mu_j S \in \mathcal{M}_L$；于是 $\mathcal{M}_L$，同样， $\mathcal{M}_R$且 $\mathcal{M}$在偏微分和多项式乘法下封闭。因此，特别地，所有多项式都属于 $\mathcal{M}$。

现在，我们将扭曲乘积推广到一个分布属于 $\mathcal{M}$ 、另一个分布属于$\mathcal{S}_2'$ 的情形（从而$\mathcal{S}_2'$ 是一个 $\mathcal{M}$-双模）。

定义4。 若 $R \in \mathcal{M}_R$、 $S \in \mathcal{M}_L$、 $T \in \mathcal{S}_2'$，我们将 $T \times S$、 $R \times T$在 $\mathcal{S}_2'$ 中定义为

$$\langle T \times S, h\rangle := \langle T, S \times h\rangle, \qquad \langle R \times T, h\rangle := \langle T, h \times R\rangle, \tag{15}$$

对所有$h \in \mathcal{S}_2$均成立。由于右端关于h是连续的， $T \times S$和 $R \times T$在 $\mathcal{S}_2'$中有定义。

若 R， $S \in \mathcal{M}$、 $T \in \mathcal{S}_2'$且 f， g， $h \in \mathcal{S}_2$，我们可以计算:

$$\begin{aligned}\langle (T \times f) \times g, h\rangle &= \langle T \times f, g \times h\rangle = \langle T, f \times g \times h\rangle = \langle (T \times (f \times g), h\rangle, \\ \langle (R \times S) \times f, h\rangle &= \langle R \times S, f \times h\rangle = \langle R, S \times f \times h\rangle = \langle R \times (S \times f), h\rangle.\end{aligned}$$

特别地，对于 $f \in \mathcal{S}_2$，$(R \times S) \times f \in \mathcal{S}_2$，因此 $R \times S \in \mathcal{M}_L$。接着

$$\langle (T \times R) \times S, h\rangle = \langle T \times R, S \times h\rangle = \langle T, R \times S \times h\rangle = \langle T \times (R \times S), h\rangle.$$

我们得出结论得出 $\mathcal{M}$ 是一个结合代数；事实上，它是一个 $*$-代数，因为对于 R， $S \in \mathcal{M}$，

$$\begin{aligned}\langle (R \times S)^*, h\rangle &= \langle R \times S, h^*\rangle^* = \langle R, S \times h^*\rangle^* \\ &= \langle R^*, h \times S^*\rangle = \langle S^* \times R^*, h\rangle.\end{aligned}$$

• 我们还可以注意到，由于 $S \diamond f = S \times \widetilde{F} f$ 和 $f \diamond R = F f \times R$，我们有

$$\mathcal{M}_L = \{\, S \in \mathcal{S}_2' : S \diamond f \in \mathcal{S}_2 \text{ for all } f \in \mathcal{S}_2 \,\},$$
$$\mathcal{M}_R = \{\, R \in \mathcal{S}_2' : f \diamond R \in \mathcal{S}_2 \text{ for all } f \in \mathcal{S}_2 \,\},$$

因此， $\mathcal{M}$ 在运算 $\diamond$ 下也是一个 $*$-代数，其中我们定义 $T \diamond S,\, h := T,\, \check{S} \diamond h$ 和 $R \diamond T,\, h := T,\, h \diamond \check{R}$。现在很容易得出 $\mathcal{M}$ 在多种傅里叶变换下的不变性。容易验证，当用 $R, S \in \mathcal{M}$ 替换 f, g 时，第 2 节中的公式仍然成立。

注 3. 我们将在下文证明，$\{\, f \times g :\ f, g \in \mathcal{S}_2 \,\}$ 等于 $\mathcal{S}_2$。因此， $\mathcal{M}$ 是我们可以通过对偶性定义的最大 $*$-代数。事实上，若 $T \in \mathcal{S}_2'$ 满足对所有 $f \in \mathcal{S}_2$，都有 $T \times f, f \times T \in \mathcal{M}$，那么通过写成 $f = g \times h$，我们可知 $T \times f$ 和 $f \times T$ 都属于 $\mathcal{S}_2$，因为 $T \times f = (T \times g) \times h$ 和 $f \times T = g \times (h \times T)$；因此 $T \in \mathcal{M}$。

注记 4. $\mathcal{M}, \mathcal{M}_L, \mathcal{M}_R$ 和 $\mathcal{S}_2'$ 是彼此不同的分布空间。

4 正则性

本节将更详细地考察扭曲乘积或卷积的结果所满足的增长条件。我们确定一个光滑函数空间 $\mathcal{O}_T$，它包含由（13）和（14）定义的所有函数，并证明 $\mathcal{O}_T$ 是一个分布正规空间。因此，其对偶空间 $\mathcal{O}_T'$ 包含所有紧支撑分布，且包含于 $\mathcal{M}$中。

若（E_i）$_{i \in I}$ 是一族局部凸空间，则交集$E := \bigcap_{i \in I} E_i$ 上的射影拓扑是使所有包含映射 $E \subset E_i$ 均连续的最弱局部凸拓扑。并集 $F := \bigcup_{i \in I} E_i$ 上的归纳拓扑是使所有包含映射 $E_i \subset F$ 均连续的最强局部凸拓扑。对于递减交集，我们将采用射影拓扑；对于递增并集，则采用归纳拓扑，恕不赘述。

对于 $f \in C^m(\mathbb{R}^{2N})$， $k, m \in \mathbb{N}$，令

$$p_{k,m}(f) := \sup\{\, (1+u^2)^{-k-|\alpha|/2} |\partial^\alpha f(u)| : u \in \mathbb{R}^{2N},\ |\alpha| \leqslant m \,\} \tag{16}$$

（其中 $u^2 = u'u = u_1^2 + \cdots + u_{2N}^2$），并令 $\mathcal{V}_k^m$为所有满足函数 $(1+u^2)^{-k-|\alpha|/2}\, \partial^\alpha f(u)$ 对所有 $|\alpha| \leqslant m$均在无穷远处趋于零的 $f \in C^m$ 构成的空间，其范数定义为 $p_{k,m}$。现在令

$$\mathcal{V}_k := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_k^m, \qquad \mathcal{O}_T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_k. \tag{17}$$

Let

$$q_{k,m}(f) := \sup\{\, (1+u^2)^{-k} |\partial^\alpha f(u)| : u \in \mathbb{R}^{2N},\ |\alpha| \leqslant m \,\};$$

于是，集合 $\{\, f \in C^m : (1+u^2)^{-k}\, \partial^\alpha f(u)$ 在 $|\alpha| \leqslant m$ 处趋于无穷远时为零$\}$，以 $q_{k,\ m}$为范数，是 Horv´ath 空间 $\mathcal{S}_{-k}^m$ [18]。使用 [18], 的记号，我们有

$$\mathcal{S}_{-k} := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{-k}^m, \qquad \mathcal{O}_C := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{-k},$$
$$\mathcal{O}_C^m := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{-k}^m, \qquad \mathcal{O}_M := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_C^m. \tag{18}$$

这里， $\mathcal{O}_M$ 由满足每个导数均为多项式有界的光滑函数组成； $\mathcal{O}_C$ 是 $\mathcal{O}_M$ 的子集，其中多项式界的次数与导数无关；而 $\mathcal{O}_T$ 是 $\mathcal{O}_M$ 的子集，其中该次数随导数的阶线性增长。事实上，这导出了以下命题。

命题4. $\mathcal{O}_C \subset \mathcal{O}_T \subset \mathcal{O}_M$ 具有连续嵌入。

证明很简单，故略去。

定理3. 若 $T \in \mathcal{S}_2'$、 $f \in \mathcal{S}_2$，则 $T \times f$、 $f \times T$、 $T \diamond f$和 $f \diamond T$都属于 $\mathcal{O}_T$。此外，从 $\mathcal{S}_2' \times \mathcal{S}_2$ 到 $\mathcal{O}_T$ 的这四个双线性映射都是分别连续的。

证明. 只需考虑 $T \diamond f$的情形。

求导 在 $t = 0$处对等式 $\varepsilon_u \tau_u (T \diamond f) = T \diamond (\varepsilon_u \tau_u f)$求导，其中 $u = tJe_j$，得到

$$(\hat{\partial}_j + i\mu_j)(T \diamond f) = T \diamond (\hat{\partial}_j + i\mu_j) f,$$

从而

$$\hat{\partial}_j (T \diamond f) = T \diamond (\hat{\partial}_j + i\mu_j) f - i\mu_j (T \diamond f),$$

并通过归纳法，对于 $\alpha \in \mathrm{N}^{2N}$，我们得到

$$\hat{\partial}^\alpha (T \diamond f)(u) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} P_\beta(u)(T \diamond f_\beta)(u) \tag{19}$$

其中 $P_\beta(u)$ 是一个次数至多为 $|\beta|$ 的多项式，并且 $f_\beta \in \mathcal{S}_2$，对于 $\beta \leqslant \alpha$。由（16）可知，我们只需证明 $T \diamond f$ 是多项式有界的。

任意 $T \in \mathcal{S}_2'$ 都可以写成 [20] $T = \hat{\partial}^\gamma Q$ 的形式，其中 $\gamma \in \mathrm{N}^{2N}$，而 Q 是 R^{2N} 上的多项式有界连续函数。回顾（3），$\hat{\partial}_j Q \diamond f = \hat{\partial}_j (Q \diamond f) - iQ \diamond \mu_j f$，并通过迭代

$$T \diamond f = \hat{\partial}^\gamma Q \diamond f = \sum_{\varepsilon \leqslant \gamma} \hat{\partial}^\varepsilon (Q \diamond g_\varepsilon) \tag{20}$$

对于某个 $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_2$。结合（19），我们只需证明 $Q \diamond f$ 是多项式有界的。

如果 $|Q(t)| \leqslant C(1 + t^2)^k$，则

$$\begin{aligned} |(Q \diamond f)(u)| &= \left| \int Q(t) e^{iu'Jt} f(u - t)\, dt \right| \leqslant \int C(1 + t^2)^k |f(u - t)|\, dt \\ &\leqslant \int 2^k C (1 + u^2)^k (1 + (u - t)^2)^k |f(u - t)|\, dt = K(1 + u^2)^k, \end{aligned}$$

其中 $K = 2^k C \int (1 + s^2)^k |f(s)|\, ds$是有限的，因为 $f \in \mathcal{S}_2$。

由于 K 关于 f连续，映射 $f \mapsto Q \diamond f$ 从 $\mathcal{S}_2$ 到 $\mathcal{V}_{k+1}$连续。由于式 (20) 中每个 g_ε 都关于 f连续，且 $p_{k,\,m}(\partial_j f) \leqslant p_{k-1,\,m+1}(f)$，因此 ∂_j: $\mathcal{V}_{k-1} \to \mathcal{V}_k$ 连续。由此可得，$f \mapsto T \diamond f$ 从 $\mathcal{S}_2$ 到 $\mathcal{V}_{k+|\gamma|+1}$ 连续，因而也从 $\mathcal{S}_2$ 到 $\mathcal{O}_T$连续。

现在固定 $f \in \mathcal{S}_2$，令 T 在 $\mathcal{S}_2'$中变化。于是 K 是 C的倍数，因此，若 V 是 $\mathcal{O}_T$中的一个零邻域，那么 $V \cap \mathcal{V}_{k+|\gamma|+1}$ 就是 $\mathcal{V}_{k+|\gamma|+1}$ 中的一个零邻域，因而包含所有满足 $T = \hat{}\partial^\gamma Q$ 且 $|Q(t)| \leqslant C(1+t^2)^k$ 的 $T \diamond f$，其中 $C \leqslant c_{k\gamma}$ 足够小。令

$$B := \left\{ h \in \mathcal{S}_2 : \int (1+u^2)^r \, |\partial^\alpha h(u)| \, du \leqslant \frac{1}{c_{r\alpha}} \text{ for all } r \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}^{2N} \right\}.$$

那么，B 在 $\mathcal{S}_2$ 中有界，且其极集 B° 是 $\mathcal{S}_2'$ 中0的一个邻域，使得只要$T \in B^\circ$，就有 $T \diamond f \in V$。□

注5。 $T \times f \in \mathcal{O}_M$ 这一事实已在 [7]中指出。

一个分布正规空间（在 R^{2N} 上） [18] 是一个局部凸空间 $\mathcal{R}$，其中 $\mathcal{D} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{D}'$，并且 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{R}$中稠密，且这些空间之间存在连续嵌入。（这里， $\mathcal{D}$ 是 R^{2N} 上紧支撑测试函数的空间。）

引理1. $\mathcal{V}_k^m$是一个分布正规空间。

证明。 我们改写 Horv´ath [18] 关于$\mathcal{S}_{-k}^m$的类似证明。取满足 $g(u) = 1$ （对$u^2 \leqslant 1$）且 $0 \leqslant g(u) \leqslant 1$（对所有$u \in \mathrm{R}^{2N}$）的 $g \in \mathcal{D}$ 。令 $g_\varepsilon(u) := g(\varepsilon u)$，其中 $\varepsilon > 0$。于是，对于$f \in \mathcal{V}_k^m$，有$fg_\varepsilon \in \mathcal{D}^m$（紧支撑 C^m 函数的空间），并由（16）得到

$$\begin{aligned} p_{k,m}(f - fg_\varepsilon) &= \sup\left\{ (1+u^2)^{-k-|\alpha|/2} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta}(1 - g(\varepsilon u))\, \partial^\beta f(u)| : |\alpha| \leqslant m,\ u \in \mathbb{R}^{2N} \right\} \\ &\leqslant C \sup\left\{ (1+u^2)^{-k-|\alpha|/2} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta f(u)| : |\alpha| \leqslant m,\ u^2 \geqslant \varepsilon^{-2} \right\} \\ &\leqslant 2^m C \sup\{ (1+u^2)^{-k-|\beta|/2} \, |\partial^\beta f(u)| : |\beta| \leqslant m,\ u^2 \geqslant \varepsilon^{-2} \}, \end{aligned}$$

其中我们可以取

$$C = 1 + \sup\{ |\partial^\gamma g(u)| : |\gamma| \leqslant m,\ u \in \mathbb{R}^{2N} \}.$$

因此 $fg_\varepsilon \to f$属于 $\mathcal{V}_k^m$，因为 $\varepsilon \to 0$，所以 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{V}_k^m$中稠密。因此 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{V}_k^m$中稠密，因为它在 $\mathcal{D}^m$中稠密。另一方面，由于 $q_{k+m,\,m}(f) \leqslant p_{k,\,m}(f) \leqslant q_{k,\,m}(f)$ 对于 $f \in \mathrm{C}^m(\mathrm{R}^{2N})$ 成立，我们得到一串连续嵌入：

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}_{-k}^m \subset \mathcal{V}_k^m \subset \mathcal{S}_{-k-m}^m \subset \mathcal{D}'. \qquad \square$$

引理 2. 设 $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ 是一个由分布正规空间构成的序列。

(1) 若 $\mathcal{R}_{k+1} \subset \mathcal{R}_k$ 对所有 k均连续嵌入，且若 $\mathcal{R} := \bigcap_{k \in \mathrm{N}} \mathcal{R}_k$ 带有射影拓扑；

(2) 或者若 $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}_{k+1}$ 对所有 k均连续嵌入，且若 $\mathcal{R} := \bigcup_{k \in \mathrm{N}} \mathcal{R}_k$ 带有归纳拓扑；

那么 $\mathcal{R}$ 是一个分布正规空间。

证明。(1) 对所有 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathcal{D} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_k \subset \mathcal{D}'$。第一个包含映射是连续的，因为 $\mathcal{R}$ 具有射影拓扑，且每个 $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}_k$ 都是连续的；其他包含映射的连续性显而易见。若 V 是 $\mathcal{R}$ 中 0 的一个邻域，且若 $f \in \mathcal{R}$，那么 $V = V_k \cap \mathcal{R}$，其中 V_k 是某个 $\mathcal{R}_k$ 中的 0 邻域；于是 $f + V_k$ 包含某个 $g \in \mathcal{D}$，从而 $g \in (f + V)$: 因此 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{R}$ 中稠密。

(2) 对所有 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}_k \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{D}'$。第三个包含映射是连续的，因为 $\mathcal{R}$ 具有归纳拓扑，且每个 $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{D}'$ 都连续；其他包含映射的连续性显而易见。若 V 是 $\mathcal{R}$ 中 0 的一个邻域，且 $f \in \mathcal{R}$，则 $f \in \mathcal{R}_k$ 对某个 k 成立，并且 $V \cap \mathcal{R}_k$ 是某个 $\mathcal{R}_k$ 中的 0 邻域；于是 $f + (V \cap \mathcal{R}_k)$ 包含某个 $g \in \mathcal{D}$，因此 $g \in (f - V)$：所以 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{R}$ 中稠密。□

早在 [18]中，$\mathcal{O}_C$ 已被证明是一个分布正规空间；其证明方法本质上是将引理 2 应用于 $\mathcal{O}_C$ 的定义 (18)。由 (18) 还可得出 $\mathcal{O}_M$ 的正规性。结合两个引理与 $\mathcal{O}_T$ 的定义 (17)，可得 $\mathcal{O}_T$ 的正规性。因此，链中的每个包含映射

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{O}_C \subset \mathcal{O}_T \subset \mathcal{O}_M \subset \mathcal{D}'$$

是连续的且具有稠密像（因为 $\mathcal{D}$ 在所有这些空间中都是稠密的）。因此，转置映射

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{O}'_M \subset \mathcal{O}'_T \subset \mathcal{O}'_C \subset \mathcal{D}'$$

是一一对应且连续的。我们将每个对偶空间与其在 $\mathcal{D}'$ 中的像等同起来。由于可以将 $\mathcal{S}_2$ 和 $\mathcal{S}'_2$ 插值到这两条链中，对偶空间由温和分布构成。

R^{2N} [20]上的紧支撑分布空间是 $\mathcal{E}_2$ 的对偶空间 $\mathcal{E}'_2$。现在我们可以证明它包含于莫亚尔代数中。

定理 4. 空间 $\mathcal{E}'_2$、$\mathcal{O}'_M$ 和 $\mathcal{O}'_T$ 包含于 $\mathcal{M}$ 中。

证明。对 $\mathcal{O}_T \subset \mathcal{O}_M \subset \mathcal{E}_2$ 作转置，得到 $\mathcal{E}'_2 \subset \mathcal{O}'_M \subset \mathcal{O}'_T$，因此只需验证 $\mathcal{O}'_T \subset \mathcal{M}$。若 $S \in \mathcal{O}'_T$ 且 $T \in \mathcal{S}'_2$，则可通过转置定义 $S \times T$、$T \times S$：

$$\langle S \times T, h \rangle := \langle S, T \times h \rangle, \qquad \langle T \times S, h \rangle := \langle S, h \times T \rangle, \tag{21}$$

对于 $h \in \mathcal{S}_2$；由于右侧关于 h 连续，根据定理3，$S \times T$ 和 $T \times S$ 在 $\mathcal{S}'_2$ 中有定义。

此外，对于固定的 $h \in \mathcal{S}_2$，映射 $T \mapsto T \times h$、$T \mapsto h \times T$ 是连续的：$\mathcal{S}'_2 \to \mathcal{O}_T$ 根据定理3，它们转置为连续映射 $S \mapsto h \times S$、$S \mapsto S \times h$，从 $\mathcal{O}'_T$ 到 $(\mathcal{S}'_2)' = \mathcal{S}_2$，通过

$$\langle h \times S, T \rangle := \langle S, T \times h \rangle, \qquad \langle S \times h, T \rangle := \langle S, h \times T \rangle. \tag{22}$$

结合式（21）和式（22），我们得到

$$\langle T \times S, h \rangle := \langle T, S \times h \rangle, \qquad \langle S \times T, h \rangle := \langle T, h \times S \rangle, \tag{23}$$

对于 $T \in \mathcal{S}'_2, S \in \mathcal{O}'_T, h \in \mathcal{S}_2$。我们已证明，对于任意 $h \in \mathcal{S}_2, S \in \mathcal{O}'_T$，都有 $S \times h \in \mathcal{S}_2, h \times S \in \mathcal{S}_2$；这些是定义在 $\mathcal{O}'_T \times \mathcal{S}_2$ 上、对 $\mathcal{S}_2$ 上的扭曲乘积作分别连续延拓所得的结果。由于 $\mathcal{S}_2$ 在 $\mathcal{O}'_T$ 中稠密，这些延拓是唯一的。由于 (23) 在形式上与 (15) 相同，扭曲乘积 (21) 和 (22) 与先前的结果一致，因此我们得出 $\mathcal{O}'_T \subset \mathcal{M}$。由于 $\mathbb{1} \notin \mathcal{O}'_T$，我们有 $\mathcal{O}'_T \neq \mathcal{M}$。□

推论 1. 空间 $\mathcal{O}_C$ 包含于 $\mathcal{M}$。特别地，$\mathcal{S}_2$ 中任意函数与任意温和分布的（通常）卷积都属于 $\mathcal{M}$。

证明。 由于 $\mathcal{O}_C$是自反的 [22],，只需指出 $\mathcal{F}(\mathcal{O}'_M) = \mathcal{O}_C$。然后使用定理 4。此外，若 $f \in \mathcal{S}_2, T \in \mathcal{S}'_2$，则 [18], $T * f$属于 $\mathcal{O}_C$。□

若 R，$S \in \mathcal{S}'_2$，它们的张量积 $R \otimes S \in \mathcal{S}'(\mathrm{R}^{4N})$ 定义为 $R \otimes S$，$f \otimes g := R$，$f\ S$，g。若 R，$S \in \mathcal{M}$，则有

$$\begin{aligned}\langle R \diamond S, h\rangle &= \langle R, \check{S} \diamond h\rangle = \langle R, u \mapsto \langle S, \varepsilon_{-u}\tau_{-u}h\rangle\rangle \\ &= \langle R \otimes S, (u,v) \mapsto e^{-iu'Jv}h(u+v)\rangle.\end{aligned}$$

记 $h_2(u,\ v) := e^{-iu'Jv}h(u+v)$，我们得到

$$\partial_u^\alpha \partial_v^\gamma h_2(u,v) = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\sum_{\varepsilon\leqslant\gamma} i^{|\varepsilon|-|\beta|}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\varepsilon}(Jv)^\beta (Ju)^\varepsilon\, e^{-iu'Jv}(\partial_u^{\alpha-\beta}\partial_v^{\gamma-\varepsilon}h)(u+v). \tag{24}$$

因此，$h \mapsto h_2$ 作为映射：$\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}(\mathrm{R}^{4N})$ 是连续的。由于 $(R,\ S) \mapsto R \otimes S$ 在 $\mathcal{E}'_2 \times \mathcal{E}'_2 \to \mathcal{E}'(\mathrm{R}^{4N})$ 上联合连续，且 $R \diamond S$，$h = R \otimes S$，h_2，我们得到 $(R,\ S) \mapsto R \diamond S$ 在 $\mathcal{E}'_2$ 上联合连续。

根据 Paley–Wiener 定理，$F(\mathcal{E}'_2) = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_2) =: \mathcal{O}_{\exp}$ 是 $\mathcal{O}_M$ 中可延拓为指数型解析函数的函数空间；根据定理 4 以及$\mathcal{M}$的傅里叶不变性，$\mathcal{O}_{\exp}$ 包含于 $\mathcal{M}$中。（$\mathcal{O}_{\exp}$ 赋有由$\mathcal{E}'_2$上的 $\mathcal{F}$ 所诱导的拓扑。）

为方便起见，若 $j \leqslant N$，我们记 $\hat{}\mu_j f := \mu_{j+N} f$；若 $j > N$，则记 $\hat{}\mu_j f := -\mu_{j-N} f$。若$h \in \mathcal{E}_2$，则展开式

$$e^{-iu'Jv}h(u+v) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}(u'Jv)^k h(u+v)$$

在 R^{2N} 的紧子集上一致收敛；由 (24) 可知，所有导数也一致收敛，且此收敛在 $\mathcal{E}_2$的有界子集上一致。因此

$$\langle S \diamond T, h\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\langle S \otimes T, (u,v) \mapsto (u'Jv)^k h(u+v)\rangle.$$

由于 $(u'Jv)^k = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k}{\alpha!}!u^{\alpha\prime}(Jv)^\alpha$，且对于所有 $f \in \mathcal{S}_2$以及每个 j，都有 $(\hat{}\mu_j f)(v) = (Jv)_j f(v)$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle S \diamond T, h\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{(-i)^k}{\alpha!}\langle S \otimes T, (u,v) \mapsto u^{\alpha\prime}(Jv)^\alpha h(u+v)\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}\frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\langle \mu^\alpha S \otimes \hat{\mu}^\alpha T, (u,v) \mapsto h(u+v)\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}\frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\langle \mu^\alpha S * \hat{\mu}^\alpha T, h\rangle \end{aligned} \tag{25}$$

其中，该级数在 $\mathcal{E}_2$ 的有界子集上关于h 一致收敛。现在我们可以将扭曲乘积展开为导数乘积的级数。

定理 5. 若 $S,\ T \in \mathcal{O}_{\exp}$，则

$$S \times T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\partial^{\alpha} S\right) \left(\hat{\partial}^{\alpha} T\right)$$

在 $\mathcal{O}_{\exp}$ 的拓扑中收敛。

证明。 我们对 (25) 应用傅里叶变换 $\mathcal{F}$，将 S, T 替换为 $\mathcal{F}^{-1}S, \mathcal{F}^{-1}T$。由 $\mathcal{F}$ 的连续性可得

$$\begin{aligned} S \times T &= \sum_{\alpha} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \mathcal{F}(\mu^{\alpha}\mathcal{F}^{-1}S * \hat{\mu}^{\alpha}\mathcal{F}^{-1}T) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} i^{2|\alpha|} \left(\partial^{\alpha} S\right)\left(\hat{\partial}^{\alpha} T\right) = \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\partial^{\alpha} S\right) \left(\hat{\partial}^{\alpha} T\right). \end{aligned}$$ □

推论 2。若 $S, T \in \mathcal{O}_{\exp}$，则

$$S \times T - T \times S = 2i \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=2r+1} \frac{(-1)^r}{\alpha!} \left(\partial^{\alpha} S\right) \left(\hat{\partial}^{\alpha} T\right). \tag{26}$$

备注 6。限制为 $\mathcal{E}'_2$ 或 $\mathcal{O}_{\exp}$ 仅是为了保证以 α 为指标的级数收敛。如果 S 或 T 是多项式，这些级数就是有限和，展开式也成立。

备注 7。对于 $N = 1$，(26) 中的首项是通常的泊松括号 $\partial_q S \partial_p T - \partial_p S \partial_q T$。作为作用于 $S \otimes T$ 上的微分算子，我们可以形式上写作

$$\begin{aligned} S \times T - T \times S &= 2i\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} \left(\partial_q \otimes \partial_p - \partial_p \otimes \partial_q\right)^{2r+1}\right)(S \otimes T) \\ &= 2i\big(\sin(\partial_q \otimes \partial_p - \partial_p \otimes \partial_q)\big)(S \otimes T), \end{aligned}$$

这一表达式最初由 Moyal [11] 推导，并称为“Moyal 括号”。

5 扭曲乘积的矩阵形式

在施瓦茨空间 $\mathcal{S}_2$中进行研究，可以避免谐振子的产生与湮灭算子通常会遇到的连续性问题，这一点此前已有论述 [23]。在当前语境下，这些算子由 $\mathcal{M}$中的一次多项式表示。为避免符号过于繁杂，本节及下一节中我们取 $N = 1$；但通过系统地使用多重指标，所得结果也适用于一般情形。我们记作 $u = (q,\ p)$，并分别用 $q,\ p,\ \partial_q,\ \partial_p$ 代替$\mu_1,\ \mu_2,\ \partial_1,\ \partial_2$。我们引入以下记号：

$$\begin{aligned} a &:= \frac{q + ip}{\sqrt{2}}, \quad \bar{a} := \frac{q - ip}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\partial}{\partial a} &:= \frac{\partial_q - i\partial_p}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{a}} := \frac{\partial_q + i\partial_p}{\sqrt{2}}, \\ H &:= a\bar{a} = \tfrac{1}{2}(q^2 + p^2) = \tfrac{1}{2}u^2, \quad f_0 = 2e^{-\bar{a}a} = 2e^{-H}. \end{aligned}$$

由式 (12) 得到以下公式

$$a \times f = af + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}}, \qquad f \times a = af - \frac{\partial f}{\partial \bar{a}},$$
$$\bar{a} \times f = \bar{a} f - \frac{\partial f}{\partial a}, \qquad f \times \bar{a} = \bar{a} f + \frac{\partial f}{\partial a}. \tag{27}$$

我们立即得到 $\mathcal{M}$中的以下等式:

$$\bar{a} \times a = H - 1, \quad a \times \bar{a} = H + 1; \quad a \times \bar{a} - \bar{a} \times a = 2. \tag{28}$$

第三个等式当然是 a 和 $\bar{a}$的正则对易关系：请回想我们采用的单位制满足 $\hbar = 2$。我们还注意到，$a \times a \times \cdots \times a$（$n$ 次）$= a^n$。

高斯函数 f_0 具有若干良好性质：它处处为正，是各种傅里叶变换的不动点，并且在 $\mathcal{S}_2$ 中，对于扭曲乘积和扭曲卷积，它都是一个幂等元。此外，由于我们的归一化选择，它是 $L^2(\mathbb{R}^2)$中的单位向量。

注意，若 $g \in \mathcal{O}_M$，则由（27）可得

$$a \times (g f_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{a}}\right) f_0, \quad \bar{a} \times (g f_0) = \left(2\bar{a} g - \frac{\partial g}{\partial a}\right) f_0. \tag{29}$$

取 $g = 2^m \bar{a}^m$，我们得到

$$\bar{a} \times (2^m \bar{a}^m f_0) = \left(2^{m+1} \bar{a}^{m+1} - 2^m \frac{\partial \bar{a}^m}{\partial a}\right) f_0 = 2^{m+1} \bar{a}^{m+1} f_0,$$

因此，由归纳法可得，若 $m \in \mathbb{N}$，则 $\bar{a}^m \times f_0 = 2^m \bar{a}^m f_0$。若 $n > m$，则这给出

$$a^n \times \bar{a}^m \times f_0 = a^n \times (2^m \bar{a}^m f_0) = 2^m \frac{\partial^n}{\partial \bar{a}^n} (\bar{a}^m) f_0 = 0,$$

并且如果 $n < m$，那么

$$f_0 \times a^n \times \bar{a}^m = (a^m \times \bar{a}^n \times f_0)^* = 0.$$

此外，

$$f_0 \times a^n \times \bar{a}^n \times f_0 = f_0 \times a^n \times (2^n \bar{a}^n f_0) = f_0 \times 2^n \frac{\partial^n}{\partial \bar{a}^n} (\bar{a}^n) f_0$$
$$= 2^n n!\, f_0 \times f_0 = 2^n n!\, f_0.$$

总结如下:

$$f_0 \times a^n \times \bar{a}^m \times f_0 = \delta_{mn} 2^n n!\, f_0 \quad \text{for} \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

现在，我们为 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 引入一组标准正交基，并将其定义为 $\mathcal{S}_2$ 中的双指标函数族，因为相对于扭曲乘积，该函数族构成一个矩阵单位系。

定义 5。对于 $m, n \in \mathbb{N}$，我们将 $f_{mn} \in \mathcal{S}_2$ 定义为

$$f_{mn} := \frac{1}{\sqrt{2^{m+n}\, m!\, n!}}\, \bar{a}^m \times f_0 \times a^n. \tag{31}$$

由式 (30) 可直接得到

$$\begin{aligned} f_{mn} \times f_{kl} &= (2^{m+n+k+l}\, m!\, n!\, k!\, l!)^{-1/2} \bar{a}^m \times f_0 \times a^n \times \bar{a}^k \times f_0 \times a^l \\ &= \frac{\delta_{nk}}{\sqrt{2^{m+l}\, m!\, l!}}\, \bar{a}^m \times f_0 \times a^l = \delta_{nk} f_{ml}. \end{aligned} \tag{32}$$

这意味着

$$\begin{aligned} 2(f_{mn} \mid f_{kl}) = \langle f_{nm}, f_{kl} \rangle &= \int (f_{nm} \times f_{kl})(u)\, du = \delta_{mk} \int f_{nl}(u)\, du \\ &= \frac{\delta_{mk}}{\sqrt{2^{n+l}\, n!\, l!}} \int (\bar{a}^n \times f_0 \times f_0 \times a^l)(u)\, du \\ &= \frac{\delta_{mk}}{\sqrt{2^{n+l}\, n!\, l!}} \int (f_0 \times a^l \times \bar{a}^n \times f_0)(u)\, du \\ &= \delta_{mk}\, \delta_{nl} \int f_0(u)\, du = 2\, \delta_{mk}\, \delta_{nl} \end{aligned}$$

因此，$\{\, f_{mn} \colon m,\ n \in \mathbb{N} \,\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中是正交归一的。这个族是完备的，因为——见下文中的（36）——$\mathbb{R}^2$ 上的所有厄米函数都是 f_{mn} 的线性组合。

注 8：基（f_{mn}）属于 $\mathcal{S}_2$，这一点由（31）以及 $a,\ \bar{a} \in \mathcal{M}$ 显然可知。它还具有将傅里叶变换对角化的重要性质；容易验证

$$\mathcal{F}(f_{mn}) = (-i)^{m+n} f_{mn}, \quad F(f_{mn}) = (-1)^n f_{mn}, \quad \widetilde{F}(f_{mn}) = (-1)^m f_{mn}, \tag{33}$$

从而也有 $\check{}\, f_{mn} = (-1)^{m+n} f_{mn}$。

为了显式表示 f_{mn}，我们使用极坐标 $q + ip =: \rho e^{i\alpha}$；注意到 $\rho^2 = q^2 + p^2 = u^2$。通过归纳法，将（29）应用于（31），我们得到

$$f_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n}\, m!\, n!}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{n}{k} k!\, 2^{m+n-k} \bar{a}^{m-k} a^{n-k} f_0$$

并且，由于 $a = (1/\sqrt{2})\, \rho e^{i\alpha},\ \bar{a} = (1/\sqrt{2})\, \rho e^{-i\alpha}$，经过整理可得

$$f_{mn}(\rho, \alpha) = 2(-1)^n \sqrt{\frac{n!}{m!}}\, e^{-i\alpha(m-n)} \rho^{m-n} L_n^{m-n}(\rho^2)\, e^{-\rho^2/2} \tag{34}$$

尤其是

$$f_{nn}(\rho, \alpha) = 2(-1)^n L_n(\rho^2)\, e^{-\rho^2/2} \tag{35}$$

其中，L_n 和 L_n^{m-n}是通常的 n 阶拉盖尔多项式。

注释 9. 方程（35）与 [10] 中得到的谐振子第 n 个能级的维格纳函数一致；而方程（34）则与谐振子各能级之间的“跃迁”相符，这一结果最早由 [24] 推导；另见 [3] 和 [25]。

现在，我们将 $\mathcal{S}_2$、 $\mathcal{S}_2'$ 和 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 表示为在扭曲厄米特基（f_{mn}）上展开后所得系数构成的序列空间。我们的处理思路遵循 Simon 关于普通埃尔米特基的工作 [26] 。由于这里的系数构成一个双重指标族，我们可以考虑它们的矩阵乘积；结果表明，该乘积对应于相关函数或分布的扭曲乘积。

序列构造所依据的基本事实是，扭曲厄米特基将振子哈密顿量 H “对角化”（由于我们采用 $\hbar = 2$ 的约定，其特征值是奇整数而非半整数）。

命题5。若 $m,\ n \in \mathbb{N}$，则

$$H \times f_{mn} = (2m+1) f_{mn}, \qquad f_{mn} \times H = (2n+1) f_{mn}.$$

证明。 由（31）式可立即得到

$$\begin{aligned} a \times f_{mn} &= \sqrt{2m}\, f_{m-1,n}, & f_{mn} \times a &= \sqrt{2n+2}\, f_{m,n+1} \\ \bar{a} \times f_{mn} &= \sqrt{2m+2}\, f_{m+1,n}, & f_{mn} \times \bar{a} &= \sqrt{2n}\, f_{m,n-1}, \end{aligned}$$

（其中 $f_{mn} = 0$ 若 m 或 n 为 -1）。结论由（28）式得出。 □

记 $A(f) := H \times f \times H$。我们可以将 A 视为作用于 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上、定义域为 $\mathcal{S}_2$ 的算子；因此， A 是对称且可闭算子，并且显然无界。事实上，$(A \pm iI)\, f_{mn} = ((2m+1)(2n+1) \pm i)\, f_{mn}$，因此 $A \pm iI$ 的值域稠密：故 A 本质自伴。此外， A^{-1} 的特征子空间有限维，且

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (2m+1)^{-2}(2n+1)^{-2} = (\pi^2/8)^2$$

是有限的，因此 A^{-1} 是一个希尔伯特–施密特算子。不难验证，对于 $k \in \mathbb{N}$，半范数 $f \mapsto \|A^k f\|$生成了 $\mathcal{S}_2$的拓扑。

注 10. 令 $B = u^2 - \Delta$ 为 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上通常的埃尔米特算子。我们有 $Bf = H \times f + f \times H$，因此 $Bf_{mn} = 2(m+n+1)\, f_{mn}$。若 $h_k(x) := (2^{k-1}\,k!)^{-1/2} H_k(x) e^{-x^2/2}$ 是通常的、次数为 k 的埃尔米特函数，则我们得出

$$f_{mn} = \sum_{k+l=m+n} c_{mn}^{kl}\, h_k \otimes h_l, \qquad h_k \otimes h_l = \sum_{m+n=k+l} b_{kl}^{mn}\, f_{mn}, \tag{36}$$

对于某些常数 c_{mn}^{kl}、 b_{kl}^{mn}。事实上，我们可以计算得出

$$c_{mn}^{kl} = 2^{(m-n)/2} i^{2m+l} \binom{m+n}{l}^{1/2} \binom{m+n}{m}^{-1/2} P_m^{l-m,k-m}(0)$$

其中 $P^{l-m}{}_{,m}{}^{k-m}$是通常的雅可比多项式。（这就完成了 f_{mn} 的完备性论证。）

现在我们可以将 $\mathcal{S}_2$ 和 $\mathcal{S}_2'$ 刻画为序列空间。

定理 6. 设 s 为快速递减双重序列 $c=(c_{mn})$ 构成的 *Fr´echet* 空间，使得

$$r_k(c) := \left[\sum_{m,n=0}^{\infty}(2m+1)^{2k}(2n+1)^{2k}|c_{mn}|^2\right]^{1/2}$$

对所有 $k\in\mathrm{N}$ 都是有限的，并由半范数$(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$赋予拓扑。对于 $f\in\mathcal{S}_2$，令 c 为展开式 $f=\sum_{m,n=0}^{\infty}c_{mn}f_{mn}$ 中的系数序列。那么， $f\mapsto c$ 是从 $\mathcal{S}_2$ 到 s 的 *Fr´échet* 空间同构。

证明。 若 $f\in\mathcal{S}_2$，则对所有 $k\in\mathrm{N}$ 都有 $\|A^kf\|<\infty$，因此 $r_k(c)=\|A^kf\|$对所有 k均为有限值。由此可知， $f\mapsto c$ 是从 $\mathcal{S}_2$ 到 s上的一一拓扑同构。

任取 $c\in s$，对于 $M,N\in\mathrm{N}$，令 c^{MN} 为由下式定义的双重序列： $c^{MN}_{mn}:=c_{mn}$ 若$m\leqslant M$，$n\leqslant N$； $c^{MN}_{mn}:=0$ 否则。那么，对于每个 k，当 $M,N\to\infty$时， $r_k(c^{MN}-c)\to 0$，因此函数 $\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}c_{mn}f_{mn}$ 在 $\mathcal{S}_2$ 中构成一个柯西序列，进而收敛到一个映射到 c的函数 f。 □

对于 $T\in\mathcal{S}_2'$、 m， $n\in\mathrm{N}$，定义 $b_{mn}:=T$， f_{nm}。 则

$$\langle T,f,=\rangle\sum_{m,n=0}^{\infty}c_{nm}\langle T,f_{nm}\rangle=\sum_{m,n=0}^{\infty}c_{nm}b_{mn} \tag{37}$$

其中，对于每个 $f=\sum_{m,\ n=0}^{\infty}c_{mn}f_{mn}\in\mathcal{S}_2$，级数绝对收敛。由于 $T\in\mathcal{S}_2'$，存在$k\in\mathrm{N}$、 $K>0$ 使得

$$|\langle T,f,|\rangle\leqslant K\|A^kf\|=K\,r_k(c) \tag{38}$$

对于所有 $f\in\mathcal{S}_2$，并且由于

$$\langle T,f,=\rangle\sum_{m,n=0}^{\infty}(2m+1)^{-k}(2n+1)^{-k}b_{mn}(2n+1)^k(2m+1)^kc_{nm}$$

施瓦茨不等式给出 $r_{-k}(b)\leqslant K$。因此，只要 b_{mn}是一个双重序列，且对于某个 k， $r_{-k}(b)$有限，级数 $\sum_{m,\ n=0}^{\infty}b_{mn}f_{mn}$ 就在 $\mathcal{S}_2'$ 中弱收敛到 T，并且 (38) 表明，该收敛在 $\mathcal{S}_2$ 的有界子集上一致，因此该级数在 $\mathcal{S}_2'$ 的强对偶拓扑中收敛到 T。

本节的主要结果现在很容易得到。

定理 7。 如果 a、 $b\in s$ 分别对应于扭曲厄米特基中的系数序列 f、 $g\in\mathcal{S}_2$，那么，与扭曲乘积 $f\times g$ 对应的序列就是矩阵乘积 ab，其中

$$(ab)_{mn}:=\sum_{k=0}^{\infty}a_{mk}b_{kn}. \tag{39}$$

证明。 由（32）以及 $\times$在 $\mathcal{S}_2$中的连续性，我们得到

$$\begin{aligned}f\times g&=\left(\sum_{m,k}a_{mk}f_{mk}\right)\times\left(\sum_{r,n}b_{rn}f_{rn}\right)\\&=\sum_{m,k,r,n}a_{mk}b_{rn}\,f_{mk}\times f_{rn}=\sum_{m,k,n}a_{mk}b_{kn}\,f_{mn}.\end{aligned}$$ □

推论 3. $\{\ f\times g:\quad f,\ \ g\in \mathcal{S}_2\ \} = \mathcal{S}_2$。

证明。 只需证明，任意一个 $c\in \boldsymbol{s}$ 都可以写成 $\boldsymbol{s}$中两个序列的矩阵乘积。我们采用 Howe 的论证 [25]来证明这一点。

令 $d_m := \left(\sup\{\ |c_{jr}|:\ j\in\mathbb{N},\quad r\geqslant m\}\right)^{1/2}$ for $m\in\mathbb{N}$，并令 d为其元素为 $d_m\delta_{mn}$的“对角”序列。于是可以验证，对于某些常数 C_k，有 $r_k(d)^2\leqslant C_k r_{2k+2}(c)$，从而 $d\in \boldsymbol{s}$。现在，若令 $b_{mn} := c_{mn}/d_n$，则有 $|b_{mn}| = |c_{mn}|/d_n \leqslant d_n^2/d_n = d_n$，因此 $b\in\boldsymbol{s}$ 也成立。显然$bd = c$。□

注 11。 与 $f\diamond g$ 对应的序列 $a\diamond b$ 为

$$(a\diamond b)_{mn} := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_{mk}b_{kn}.$$

由于根据 (4) 和 (11)，$f\diamond g = f\times\delta\times g$，只需证明 δ 可由元素为 $(-1)^m\delta_{mn}$的对角矩阵表示；由 (33) 可得此结论，因为 $\mathcal{F}\mathbb{1} = \delta$。因此，扭曲乘积和卷积的整个理论，至少在形式上，都可以用矩阵语言来构建，而无需提及辛傅里叶变换；基本的变换公式——见 (4)——如下：

$$R\diamond S = R\times\delta\times S,\qquad R\times S = R\diamond\mathbb{1}\diamond S.$$

现在我们证明，对于许多属于 Sobolev 型空间的分布对，式 (39) 提供了定义扭曲乘积的另一种方式。

定义 6。 对于 $s,t\in\mathbb{R}$，我们用 $\mathcal{G}_{s,t}$ 表示通过在 $\mathcal{S}_2$ 上取完备化得到的希尔伯特空间，其范数为

$$\|f\|_{s,t} := \left(\sum_{m,n=0}^{\infty}(2m+1)^s(2n+1)^t|c_{mn}|^2\right)^{1/2}. \tag{40}$$

注意，$\mathcal{G}_{0,0} = L^2(\mathbb{R}^2)$，且 $\|f\|_{0,0} = \|f\|$。$\mathcal{G}_{s,t}$ 的标准正交基由函数 $(2m+1)^{-s/2}(2n+1)^{-t/2}f_{mn}$ 给出，因此

$$f = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}f_{mn}$$

对于所有 $f\in\mathcal{G}_{s,t}$，上述级数在 (s,t)-范数下收敛。注意，$\mathcal{S}_2 = \bigcap_{s,t\in\mathbb{R}}\mathcal{G}_{s,t}$ 在拓扑意义下成立。由于 $\mathcal{S}_2\subset\mathcal{G}_{s,t}$ 是稠密像的连续嵌入，$\mathcal{G}_{s,t}$ 是温和分布的正规空间，而 $\mathcal{S}_2\subset\mathcal{G}_{s,t}$ 的转置是嵌入 $\mathcal{G}_{-t,-s}\subset\mathcal{S}_2'$。此外，由式 (38)，$\mathcal{S}_2' = \bigcup_{s,t\in\mathbb{R}}\mathcal{G}_{s,t}$ （在拓扑意义下）。进一步说，$\mathcal{G}_{s,t}\subset\mathcal{G}_{q,r}$ 连续嵌入当且仅当 $s\geqslant q$且 $t\geqslant r$。另请注意，当 $f\in\mathcal{G}_{s,t}$时，$f^*\in\mathcal{G}_{t,s}$。

如果 $g = \sum_{m,\ n=0}^{\infty} b_{mn}f_{mn}\in\mathcal{G}_{q,\ r}$，我们形式上定义

$$f\times g := \sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_{mk}b_{kn}\right)f_{mn}. \tag{41}$$

定理 8. *(1)* 级数 (41) 在 $\mathcal{G}_{s,r}$ 中收敛，若 $t+q\geqslant 0$，则在此情况下

$$\|f\times g\|_{s,r}\leqslant\|f\|_{s,t}\,\|g\|_{q,r}\,.$$

(2) $\mathcal{G}_{s,t}$ 在扭曲乘积 (41) 下构成 *Banach*代数，只要 $s+t\geqslant 0$；对于 $s\geqslant 0$, $\mathcal{G}_{s,s}$，则构成 *Banach* $*$-代数。

(3) 傅里叶变换 $\widetilde{F}, F, \mathcal{F}$ 是每个 $\mathcal{G}_{s,t}$ 到其自身的酉等距映射。

(4) 扭曲乘积 (41)与先前的定义相一致。

证明。 (1) 由施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\|f\times g\|_{s,r}^2 &\leqslant \sum_{m,n=0}^{\infty}(2m+1)^s\left(\sum_{k=0}^{\infty}|c_{mk}b_{kn}|\right)^2(2n+1)^r\\ &=\sum_{m,n=0}^{\infty}(2m+1)^s\left(\sum_{k=0}^{\infty}|c_{mk}|(2k+1)^{t/2}(2k+1)^{-t/2}|b_{kn}|\right)^2(2n+1)^r\\ &\leqslant \sum_{m,k=0}^{\infty}(2m+1)^s|c_{mk}|^2(2k+1)^t\sum_{l,n=0}^{\infty}(2l+1)^{-t}|b_{ln}|^2(2n+1)^r\\ &=\|f\|_{s,t}^2\,\|g\|_{-t,r}^2\leqslant\|f\|_{s,t}^2\,\|g\|_{q,r}^2\end{aligned}$$

只要 $q\geqslant -t$，在这种情况下，(41) 即收敛。

(2) 取 $q=s, r=t$ 即可得出。(3) $\mathcal{G}_{s,t}$ 的傅里叶不变性由

(40) 和 (33) 显然可知。(4) 若$T=\sum_{m,n=0}^{\infty}d_{mn}f_{mn}\in\mathcal{S}_2'$，则

$$\begin{aligned}\langle T, f\times g\rangle &=\sum_{m,n=0}^{\infty}d_{mn}\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_{mk}b_{kn}\right)\\ &=\sum_{k,n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}d_{nm}c_{mk}\right)b_{kn}=\langle T\times f, g\rangle,\end{aligned}\tag{42}$$

由 (37) 可知，双重求和绝对收敛；简单求和也绝对收敛，第二种情形是因为 $T\times f$ 属于某个 $\mathcal{G}_{s,t}$，且 g 属于 $\mathcal{S}_2\subset\mathcal{G}_{-t,-s}$；因此我们可以交换求和次序，得到

$$T\times f=\sum_{k,n=0}^{\infty}\big(\sum_{m=0}^{\infty}d_{nm}c_{mk}\big)f_{nk}.$$

如果 $f\in\mathcal{M}_L$、 $g\in\mathcal{S}_2$，那么根据定义4,

$$\langle T\times f, g\rangle:=\langle T, f\times g\rangle=\sum_{m,n=0}^{\infty}d_{nm}\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_{mk}b_{kn}\right);$$

由于 $f\times g\in\mathcal{S}_2$，双重求和绝对收敛，因此我们可以交换求和顺序，从而得到（42）。□

注记 12。 我们看到，如果 $f,g\in L^2(\mathrm{R}^2)$，那么 $f\times g\in L^2(\mathrm{R}^2)$ 且 $\|f\times g\|\leqslant\|f\|\,\|g\|$。此外，$f\times g$ 属于 $C_0(\mathrm{R}^2)$：其连续性可通过调整普通卷积的类似论证得出。

注记 13。 从（40）可知， $A(\mathcal{G}_{s,t}) = \mathcal{G}_{s-2,t-2}$，这里我们将任意 $T \in \mathcal{S}'_2$的 $A(T) := H \times T \times H$记作 $T \in \mathcal{S}'_2$，这一定义是有意义的，因为 $H \in \mathcal{M}$。显然 $A(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$，因此若 $\mathcal{M}$ 中含有任何 $\mathcal{G}_{s,t}$，则它将全部包含。不过， $\mathcal{M} \neq \mathcal{S}'_2$，因此 $\mathcal{M}$不含任何 $\mathcal{G}_{s,t}$；特别地，$L^2(\mathrm{R}^{2N}) \not\subseteq \mathcal{M}$。因此，$\mathcal{M}$确实为 $\mathcal{S}_2$上的 $\times$ 提供了一种不同的 扩张，这与巴拿赫代数$\mathcal{G}_{s,t}$ $(s + t \geqslant 0)$不同。

6 结论与展望

我们因此需要定义一对分布的扭曲乘积，并引入 Moyal $*$-代数 $\mathcal{M}$，其运算为扭曲乘积。在由 $\mathcal{M}$ 给出的场景中，对量子理论的相空间方法进行严格表述，应当解决以下问题：

(a) 找到谱定理的一个等价形式；

(b) 利用这样的谱定理求解动力学方程；

(c) 描述与 $\mathcal{M}$ 对应的态空间的代数结构。

我们计划着手研究这些问题。我们的首要任务是赋予其 $\mathcal{M}$ 适当的拓扑：我们将在下文的论文 [27]中完成这一工作。

致谢

感谢 John Horv´ath 和 Peter Wagner 提供有益的通信。我们谨向阿卜杜斯·萨拉姆教授以及国际理论物理中心致谢，感谢他们在我们完成这项工作的逗留期间给予的热情款待。我们衷心感谢哥斯达黎加大学研究副校长办公室给予的支持。

参考文献

[1] A. Grossmann、G. Loupias 和 E. M. Stein，《伪微分算子代数与相空间量子力学》，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18**, 343 (1968).[2] F. Bayen、M. Flato、C. Fronsdal、A. Lichnerowicz 和 D. Sternheimer，《变形理论与量子化：I 和 II》，Ann. Phys. **111**, 61, 111 (1978).[3] J.-P. Amiet 和 P. Huguenin，*M´*相空间中的经典力学与量子力学，纳沙泰尔大学，纳沙泰尔，1981年。[4] M. Hillery、R. F. O'Connell、M. O. Scully 和 E. P. Wigner，《物理学中的分布函数：基础》，Phys. Reports **106**, 121 (1984).[5] J. M. Gracia-Bond´ıa，《量子力学相空间表述中的氢原子》，Phys. Rev. A**30**, 691 (1984).[6] J. C. T. Pool，《韦尔对应的数学方面》，J. Math. Phys. **7**, 66 (1966).[7] R. F. V. Anderson，《乘法型韦尔泛函演算》，J. Funct. Anal. **9**, 423 (1972).[8] R. Cressman，《相空间中的演化方程与韦尔对应》，J. Funct. Anal. **22**, 405 (1976).

[9] L. H¨ormander, 《伪微分算子的 Weyl 演算》, 《纯粹与应用数学通讯》32, 359 (1979).[10] H. J. Groenewold, 《初等量子力学原理》, 《Physica》12, 405 (1946).[11] J. E. Moyal, 《作为统计理论的量子力学》, 《剑桥哲学学会会刊》45, 99 (1949).[12] W. Rudin, 《泛函分析》, 麦格劳-希尔, 纽约, 1973年。[13] S. Miracle-Sol´e, 《量子物理正则形式体系的代数表述》, 博士论文, 巴塞罗那大学, 1966年。[14] J. von Neumann, 《薛定谔算子的唯一性》, 《数学年刊》104 (1931), 570–578.[15] D. Kastler, 《自由玻色子场的 C*代数》, 《数学物理通讯》1, 14 (1965).[16] G. Loupias 和 S. Miracle-Sol´e, 《正则系统的 C*代数。I、II》, 《数学物理通讯》2, 31 (1966)；Ann. Inst. H. Poincar´e 6, 39 (1967).[17] J. J. Slawianowski, 《不确定性、对应与准经典相容性》, 载于《不确定性原理与量子力学基础》, W. C. Price 和 S. S. Chiswick 编, 威利, 纽约, 1977年；第147页。[18] J. Horv´ath, 《拓扑向量空间与广义函数》, 艾迪生-韦斯利, 马萨诸塞州雷丁, 1966年。[19] H. H. Schaefer, 《拓扑向量空间》, 麦克米伦, 纽约, 1966年。[20] L. Schwartz, 《分布理论》, Hermann, 巴黎, 1966年。[21] M. A. Antonets, 《Weyl 量子化的经典极限》, 《数学物理快报》2, 241 (1978)；《理论与数学物理》38, 331 (1979).[22] A. Grothendieck, 《拓扑张量积与核空间》, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1966年。[23] P. Kristensen、L. Mejlbo 和 E. T. Poulsen, 《无限维温和分布。I. 正则场算子》, 《数学物理通讯》1, 175 (1965).[24] M. S. Bartlett 和 J. E. Moyal, 《用相空间方法计算量子力学振子的精确跃迁概率》, 《剑桥哲学学会会刊》45, 545 (1949).[25] R. Howe, 《量子力学与偏微分方程》, J. Funct. Anal. 38, 188 (1980).[26] B. Simon, 《分布及其埃尔米特展开》, J. Math. Phys. 12, 140 (1971).[27] J. C. V´arilly 和 J. M. Gracia-Bond´ıa, 《适用于相空间量子力学的分布代数。II. Moyal 代数上的拓扑》, J. Math. Phys. 29, 880 (1988).