arXiv:2601.08195v1 [math.DG] 13 Jan 2026

通过规范理论莫尔斯流构建的麦凯对应动力学框架

Jiajun Yan

莱斯大学数学系。

贡献作者：jy156@virginia.edu；

摘要

麦凯对应在最小解消的上同调与有限子群 $\Gamma \subset \mathrm{SU}(2)$ 的不可约表示之间建立了一个双射。传统证明依赖于静态的代数同构，而我们提出了一种以规范理论和莫尔斯-博特理论为基础的动力学框架。我们分析了最小解消上的一个 S^1-不变 Morse-Bott 函数，并将其梯度流线解释为从 Γ 到 $GL(R)$ 的平坦联络的1参数全纯表示族。我们猜想，从一个临界子流形发出的流在边界处渐近收敛于 Γ 的某个特定不可约表示。这一动力学过程明确构造了上同调基与麦凯对应所规定的 Γ 不可约表示之间的对应关系。我们证明了这一猜想在循环情形下成立。

关键词： 规范理论、Morse 理论、麦凯对应、表示论、奇点理论

致谢： 感谢 Jonathon Fisher、Frances Kirwan、Ciprian Manolescu、Josh Mundinger、Steven Rayan、Richard Wentworth 和 Graeme Wilkin 对本项目提出的宝贵意见。还要特别感谢 Tom Mark 和 Jo Nelson 在整个项目期间给予的持续支持。

1 引言

麦凯对应最早见于McKay的开创性论文 [25] byMcKay。在文中，他指出有限子群 $\Gamma \subset \mathrm{SU}(2)$ 与 A、 D和 E型单边Dynkin图之间存在一一对应。McKay

指出，将典范表示与 Γ 的不可约表示作张量积后进行分解，所得邻接矩阵恰好与仿射Dynkin图的邻接矩阵一致。起初，这一对应关系只是一个令人费解的组合巧合，却激发了此后数十年的研究，人们不断探寻这一现象背后更深层的概念性解释。

这一联系由 Gonzalez-Sprinberg 和 Verdier 奠定了几何基础[13],，他们将这一对应提升到商奇点$X \to \mathbb{C}^2/\Gamma$的最小解消上。他们证明，解消上的典范丛 X 提供了一个 K论基底，该基底与表示环 $R(\Gamma)$同构。从几何上看，这将非平凡不可约表示与 $H^2(X,\mathbb{Z})$的一组基底对应起来。此外，这些上同调循环的交叉型复现了负Cartan矩阵，从而为表示论中出现 Dynkin 图提供了几何解释。下面给出麦凯对应的启发式表述；关于相关基础主题的标准参考文献包括[11], [14], 和 [12]。

陈述 1.1 (麦凯对应)。 设 $\Gamma \subset SU(2)$是一个有限子群，并且设 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 是 $\mathbb{C}^2/\Gamma$的最小解消。在 Γ 的非平凡不可约表示与$\mathbb{C}^2/\Gamma$中的不可约例外曲线之间存在自然对应，使得这些曲线的交叉配对由 Γ的 *McKay* 箭图给出。

随后几年，出现了更多关于麦凯对应及其向高维推广的证明，这些证明采用了不同的工具和技术，主要是代数工具，例如[2], [3], [6], [16], [17], [18], 。此处列出的参考文献并不全面。我们建议读者参阅 [4]和 [27] ， 了解更多论述。

与此同时，Kronheimer 在其博士论文 [22], [23], 中给出了所有4维超凯勒 ALE 空间的完整构造，并证明每个这样的空间在拓扑上都等价于相应商空间 $\mathbb{C}^2/\Gamma$的最小解消 X 。在 Kronheimer 的构造中，这些超凯勒流形是通过有限维超Kähler约化得到的。Kronheimer 的构造为 X 赋予了典范度量结构，使麦凯对应从代数几何领域进入规范理论与度量分析领域。在随后一篇与 Nakajima 合作、研究 ALE 空间上瞬子模空间 [24],的论文中，他们通过 APS 指标理论对麦凯对应作出了几何解释，进一步揭示了麦凯对应与超Kähler几何及规范理论之间的联系。

近年来，McLean-Ritter [26] 和 Digiosia-Nelson [7]的研究从辛几何和接触几何的视角探索了麦凯对应。这些新视角利用辛上同调和柱状接触同调，通过计数伪全纯曲线来建立这一对应。值得注意的是，对麦凯对应的辛几何和接触几何解释并未直接涉及Γ的不可约表示，而是建立了 Γ的非平凡共轭类与 $H^2(X,\mathbb{Z})$的生成元之间的对应。

从 K理论、希尔伯特概形，到辛几何与接触几何，研究麦凯对应所用工具丰富多样，令人瞩目

这表明表示论、奇点理论与几何学之间存在着丰富而深刻的联系。迄今为止，所有现有方法的策略都是构造一个同构，以对应底空间（从上同调循环到不可约表示）。尽管这些著名成果证明了同构的存在，但这种对应的本质在很大程度上仍是静态的。特别是鉴于规范理论、Floer 理论和数学物理的现代发展，一个自然而然的问题是：这种对应能否通过动力学方式实现？考虑到 Kronheimer 构造的 ALE 空间的渐近度量结构 [22]，人们或许会问，这种对应能否通过某个自然的 Morse-Bott 函数的梯度流轨线演化来呈现，尤其是当流线趋近无穷远边界时；这在某种程度上令人联想到瞬子 Floer 同调的构造 [9]。

本文提出这样一种动力学框架。该框架以规范理论解释为基础，阐释 Kronheimer 对4维超凯勒 ALE 空间的构造；这一解释由作者在论文 [28]，中发展而来，其中每个 ALE 空间都被实现为某个轨形黎曼曲面上向量丛的一对截面与联络所满足的一组方程的解的模空间，并对规范群作用取商。我们利用这一规范理论构造，通过研究 ALE 空间上的一个 S^1-不变 Morse-Bott 函数，并将其临界点处的梯度流线与 Γ的不可约表示相对应，来寻求一种新的规范理论／Morse 理论解释，以阐释麦凯对应。

具体设置如下：受 Atiyah-Bott [1]，Hitchin [15] 和 Kirwan [19]，等人的工作启发，我们通过模空间上的一个 S^1-不变 Morse-Bott 函数研究模空间的拓扑；该函数由模空间上的 Hamiltonian S^1-作用诱导而来。沿用 Kronheimer 在 [22]，中的记号，最小解消 X 中的一个点可表示为一对矩阵(α, β)，并满足某些性质，其中 α, $\beta \in End(R)$，而 R是 Γ的正则表示。 S^1在 X 上的作用由下式给出

$$e^{i\varphi} \cdot (\alpha, \beta) = (e^{i\varphi}\alpha, e^{i\varphi}\beta).$$

诱导的 S^1-不变 Morse-Bott 函数等于 (α, β) 的范数平方（相差一个常数），即

$$\Phi(\alpha, \beta) = k_0(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2),$$

其中某个固定常数为 k_0。这个 S^1不变的 Morse-Bott 函数的临界点恰好是 Hamiltoninan S^1作用的 S^1固定点。另一方面，根据 [28]，中的规范理论构造，我们将 ALE 空间中的每个点 (α, β)实现为 S^3/Γ 上平凡丛的一个平坦联络，其纤维等于 R，即 Γ的正则表示。这给出一个全纯表示$\rho_{(\alpha,\beta)}$ ： $\Gamma \to GL(R)$，可以证明它总是同构于 R。更具体地说，该平坦联络由

$$d + \alpha dz_1 + \beta dz_2,$$

其中 z_1, z_2 是 $\mathbb{C}^2$中的坐标。我们令 $[\alpha, \beta] = 0$，以确保上述联络是平坦的，其全纯表示由

$$\rho_{(\alpha,\beta)}(\gamma) = R(\gamma)\exp((v_1 - (uv_1 - \bar{v}v_2))\alpha + (v_2 - (\bar{u}v_2 + vv_1))\beta),$$

其中，(v_1, v_2) 是 S^3/Γ 中的基点，而 u, v 是元素$\gamma \in \Gamma$的坐标。我们证明，对于 X 中的任意一点 (α, β)，$\rho_{(\alpha,\beta)}$ 始终与正则表示 R同构。

沿着从指标为 2 的临界点流向无穷远的梯度流线（$\alpha(t)$, $\beta(t)$），我们得到一个表示 $\rho(t) = \rho_{(\alpha(t),\beta(t))}$的一参数族。由于 $\rho(t)$ 始终与正则表示 R同构，我们得到一个基变换矩阵 $P(t)$的一参数族，使得 $\rho(t) = P(t)RP(t)^{-1}$。由于 $H^2(X)$由 S^1-不动点的分量生成，我们提出以下猜想：通过梯度流线的演化，将 $H^2(X)$的生成元与 Γ 的非平凡不可约表示相对应，从而为麦凯对应建立一个显式的动力学框架。

猜想 1.2. 设 Γ 是 $SU(2)$ 的有限子群。设 X 是 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 的最小解消。设 S_1,...S_r 是 X 中由 S^1-不动点的各分支生成 $H^2(X)$ 的分量，并设 $\rho_j(t) = P_j(t)RP_j(t^{-1}$, $1 \leq j \leq r$ 是满足如下性质的全纯表示的单参数族

$$\rho_j(t) = \rho_{(\alpha_j(t),\beta_j(t))},$$

$$\lim_{t\to-\infty}(\alpha_j(t), \beta_j(t)) = (\alpha_j, \beta_j),$$

其中 $(\alpha_j, \beta_j) \in S_j$。那么

$$P_j^{\lim} = \lim_{t\to\infty} P_j(t)$$

等于投影到 Γ 的非平凡不可约表示 ρ_j 上的投影算子，并且 Γ 的每个非平凡不可约表示都以这种方式出现。

在第 6 节中，我们详细验证了低秩循环情形，下的猜想 1.2 。该方法也体现了对所有 A_n-型 ALE 空间进行一般验证的思路，相关内容将在本文后续版本中给出。对于非阿贝尔 Γ，验证猜想 1.2 需要更多概念性工具，因为在这些情形下计算 S^1-不动点十分繁琐。未来工作的一种初步思路是，结合通过 APS 指标理论 [24] 对麦凯对应的几何诠释以及瞬子 Floer 理论的构造 [9]，将梯度流线实现在 ALE 空间或 $S^3/\Gamma) \times \mathbb{R}$ 上的时间规范联络。

未来研究的另一个方向，是将这一由规范理论和 Morse 理论构建的框架，与 [26] 和 [7]中给出的辛几何和接触几何解释进行比较。McKay 对应中几何所呈现的稳健特征，或许能为探索辛场论与规范理论之间的结构性平行关系打开一扇窗口，这也呼应了人们长期以来致力于联系这两个子领域的努力。

本文结构如下。第 2 节回顾 Kronheimer 构造如何将4维超凯勒 ALE 空间实现为有限维超凯勒商，以及 Kronheimer 构造的规范理论解释。第 3 节和第 4 节介绍本文的主要框架：我们从 ALE 空间中的任意一点构造一个平坦联络，并计算其 holonomy 表示。第 5 节正式引入 S^1作用和 Morse-Bott 函数，并详细分析 Morse-Bott 函数及其临界点的性质。第 6 节证明循环情形下的猜想 1.2 。

2 规范理论构造的四维超凯勒 ALE 空间综述

本节回顾 Kronheimer 的构造 [22] 以及一种平行的规范理论构造 [28] ，后者将四维超凯勒 ALE 空间视为某些规范理论方程解的模空间。这些内容对本文后续部分至关重要。四维超凯勒 ALE 空间的重要性在于，其底层拓扑空间恰好是 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 对每个有限子群 Γ 的极小解消，其中 SU为(2)。

2.1 Kronheimer 的构造

本节简要回顾 Peter Kronheimer 最初构造 ALE 空间的方法，规范理论构造正是从这一方法中汲取灵感。关于矩映射和辛约化的介绍，见 [5]。

设 Γ 是 $SU(2)$的一个有限子群， R 是其正则表示。设 $Q \cong \mathbb{C}^2$ 是 $SU(2)$的典范二维表示，并令 $P = Q \otimes End(R)$，其中 $End(R)$表示 R的端同态空间。令 $M = P^\Gamma$ 为 P中Γ-不变元素构成的空间。在 R上固定一个 Γ-不变的厄米度量后， P和 M可视为右 $\mathbb{H}$-模。现在，在 Q上选取一组标准正交基，则 P中的一个元素可写成一对矩阵 (α, β)，其中 $\alpha, \beta \in End(R)$，且 J 在 P 上的作用为

$$J(\alpha, \beta) = (-\beta^*, \alpha^*).$$

由于 Γ 在 P上的作用是 $\mathbb{H}$-线性的，因此子空间 M是一个 $\mathbb{H}$-子模，可视为一个平坦超凯勒流形。具体而言，一对（α， β） 属于 M，当且仅当对每个

$$\gamma = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix},$$

其中 v^* 和 u^* 分别表示 v 和 u的复共轭，我们有

$$R(\gamma^{-1})\alpha R(\gamma) = u\alpha + v\beta, \tag{2.1}$$

$$R(\gamma^{-1})\beta R(\gamma) = -v^*\alpha + u^*\beta. \tag{2.2}$$

令 $U(R)$ 表示 R 上的酉变换群，并令 F 表示由 $U(R)$ 中与 R上的 Γ-作用可交换的元素构成的子群。自然

F 在 P 上的作用定义如下：对于 $f \in F$,

$$(\alpha, \beta) \mapsto (f\alpha f^{-1}, f\beta f^{-1}).$$

同样， F 在 P 上的作用是 $\mathbb{H}$-线性的，并保持 M。另一方面，由于F 通过共轭作用，标量子群 $T \subset F$ 的作用是平凡的，因此我们得到 F/T 在 M 上的作用，并且该作用保持 I、 J和 K。

现在，令$\mathbf{f}/\mathbf{t}$为 F/T的李代数，并将$(\mathbf{f}/\mathbf{t})^*$与$\mathbf{f} \subset End(R)$的无迹元素等同。由于 F/T 在 M 上的作用相对于 I、 J、K是哈密顿的，我们得到以下矩映射：

$$\mu_1(\alpha, \beta) = \frac{i}{2}([\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*]),$$

$$\mu_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}([\alpha, \beta] + [\alpha^*, \beta^*]),$$

$$\mu_3(\alpha, \beta) = \frac{i}{2}(-[\alpha, \beta] + [\alpha^*, \beta^*]).$$

令 $\mu = (\mu_2, \mu_2, \mu_3) \colon M \to \mathbb{R}^3 \otimes (\mathbf{f}/\mathbf{t})^*$。令 Z 表示$(\mathbf{f}/\mathbf{t})$的中心，并令$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ $\in \mathbb{R}^3 \otimes Z$。对于属于“良好集合”的 ζ，我们得到$X_\zeta = \mu^{-1}(\zeta)/F$是一个光滑4-流形，且与 $\mathbb{C}^2/\Gamma$微分同胚。

注 2.1。 这里不对“良好集合”的概念作精确定义，但其定义可参见 *[22]*中的命题 *2.8*。它是 $\mathbb{R}^3 \otimes Z$ 中一个余维为3 的子集的补集。

2.2 ALE 空间的规范理论构造

本节将回顾与 Kronheimer 构造平行的、适用于所有 ALE 空间的规范理论构造。首先，我们描述该构造中将要使用的主丛和向量丛。然后定义构型空间以及规范群。最后，我们将更详细地阐述规范理论构造，并陈述关于模空间的定理。关于规范理论和微分几何的介绍，请参见 [10], [20] 和 [21]。

2.2.1 第 1 步：引入主丛和向量丛

令 Γ 为 $SU(2)$ 的有限子群。考虑球面 Seifert 纤维化空间 S^3/Γ。我们将 S^3/Γ 视为轨形黎曼曲面上的主 S^1-丛，具体如下：首先，通过对偶 Hopf 纤维化，将 S^3 作为 S^1-丛置于 $\mathbb{C}P^1$ 上。具体构造如下：

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

S^1在 S^3 上的作用如下：对于 $g = e^{i\theta} \in S^1$,

$$(z_1, z_2)g = (z_1 e^{-i\theta}, z_2 e^{-i\theta}).$$

我们可以将从 S^3 到 $\mathbb{C}P^1$ 的投影映射 h 视为由 $h:\ S^3 \to \mathbb{C}P^1$ 给出，其中$h(z_1,\ z_2) = [z_1 : z_2]$。

有限群 Γ 自然作用于 S^3，且 Γ作用与 S^1作用相交换。此外，Γ 在底空间 $\mathbb{C}P^1$ 上有非平凡作用，并具有不动点。因此，S^3/Γ 不是底空间 S^2上的主 S^1丛，而是轨形黎曼曲面 S^2/Γ上的主 S^1丛。

现在，我们转而采用向量丛的视角。设 R 为 Γ的正则表示，$V = End(R)$ 为 R的端同态空间。于是，我们可以考虑 S^3 的纤维为 V的伴随丛，记作 $E(V)$。具体而言，$E(V)$ 定义为 $E(V) = S^3 \times V/\sim$，其中 $[p, v] \sim [pg, g^{-1}v]$，对所有 $g \in S^1$均成立。由于 Γ 作用于 V，类似地，我们得到 S^3/Γ的伴随轨形向量丛，记作 $E(\Gamma)$。在规范理论构造中，我们将使用 $E(\Gamma)$ 。

2.2.2 步骤 2：引入规范群和构形空间

我们看到，E（V）分解为超平面丛的直和，即

$$E(V) = \oplus_i H_i,$$

其中每个 H_i 都同构于超平面丛 H。我们还为 $E(\Gamma)$配备以下辅助数据：固定一个 Γ-不变的厄米结构 h_V于 V上，从而在 $E(V)$和 $E(\Gamma)$上得到逐点度量。取 ω_{vol} 为 $\mathbb{C}P^1$上的Fubini-Study形式。我们在 $E(\mathbb{C}) = H$上固定一个全纯结构，并将其记为 $\bar{\partial}$。令 A_0 为$^-$上与全纯结构 ∂ 以及从 $E(V)$下降得到的厄米结构相容的唯一Chern联络 H。注意，A_0 将是 Γ-不变的，因为它在 $SU(2)$作用下不变，并且可以视为 $E(\Gamma)$上的联络。

接下来，我们引入构形空间和规范群。令 $F \subset U$（R）为 R 的、与 Γ作用对易的酉变换所构成的子群，并令 T 为包含于 F中的标量子群。

D定义 *2.2. 1.* 设 τ-不变规范群 $\mathcal{G}^F,_\tau{}^\Gamma$ *of* $E(\Gamma)$ 定义为 $\mathcal{G}^F,_\tau{}^\Gamma = Map(S^2/\Gamma, F/T)$，使得元素 $\rho \in \mathcal{G}^F,_\tau{}^\Gamma$ 在对合τ下不变：$\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1, [z_1 : z_2] \mapsto [-\bar{z}_2 : \bar{z}_1]$。这里我们注意到 τ 与 Γ- 作用可交换，因此可下降为映射 $\tau: S^2/\Gamma \to S^2/\Gamma$。令 $g^{F\,\Gamma}_\tau$, 表示 $\mathcal{G}^F,_\tau{}^\Gamma$ 的李代数。我们用 ρ 表示 $\mathcal{G}^F,_\tau{}^\Gamma$ 中的一个元素，并用 Y 表示 $g^{F\,\Gamma}_\tau$, 中的一个元素。

2. 令 $\mathcal{G}^{F,\mathbb{C}\,\Gamma}_{\tau}$, 表示 $\mathcal{G}^F,_\tau{}^\Gamma$ 的复化，其中 $F^c = GL_{\mathbb{C}}(V)^\Gamma$ 表示与 Γ-作用可交换的 R 的复线性变换。我们用 κ 表示 $\mathcal{G}^{F,\mathbb{C}\,\Gamma}_{\tau}$, 中的一个元素。

定义 2.3. 我们将构形空间定义为 $\mathcal{A}^F_\tau \times C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$ 其中$\mathcal{A}^F_\tau$和 $C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$ 定义如下。

1. 令 $\mathcal{A}^F_\tau$为由下式给出的 $E(\Gamma)$ 上的联络空间

$$\mathcal{A}^F_\tau = \{A_0 + \kappa^*\partial\kappa^{*-1} + \kappa^{-1}\bar{\partial}\kappa \mid \kappa \in \mathcal{G}^{F,\Gamma}_{\mathbb{C},\tau}\},$$

其中 A_0 是前述的 H 上的*Chern*联络，或者等价地，将 S^3 视为诱导在 $E(\Gamma)$上的联络。我们始终用 B表示 $\kappa^*\partial\kappa^{*-1}+\kappa^{-1}\bar{\partial}\kappa$，有时会省略底空间联络 A_0。

2. 将 $C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$ 记作轨形向量丛截面空间 $C^\infty_{orb}(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$ 的缩写。

注意， $\mathcal{G}^F{}_{,\tau}{}^\Gamma$是$E(\Gamma)$的酉规范自同构群的子群。 $\rho \in \mathcal{G}^{F,\Gamma}$ 在 $\mathcal{A}^F_\tau \times C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$ 上的作用如下：对于一对 $(B,\Theta) \in \mathcal{A}^F_\tau \times C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$，

$$\rho \cdot (B,\Theta) = (B + \rho d_B \rho^{-1}, \rho\Theta\rho^{-1}).$$

注意，此处省略了底联络 A_0，因为 ρ 固定了 A_0。

2.2.3 步骤 3：ALE 空间规范理论构造及主定理概述

在本小节中，我们将介绍主要构造并陈述主定理。首先，我们写出构形空间上的标准辛结构。**定义 2.4** （$\mathcal{A}^F_\tau \times C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$上的辛结构）**.** 令

$$(B_1,\Theta_1),(B_2,\Theta) \in \mathcal{A}^F_\tau \times C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma)).$$

在 $\mathcal{A}^F_\tau \times C^\infty$2-形式 $S^2/\Gamma\mathbf{\Omega}$ 上定义辛结构如下：

$$\mathbf{\Omega}((B_1,\Theta_1),(B_2,\Theta)) = \int_{S^2/\Gamma} B_1 \wedge B_2 + \int_{S^2/\Gamma} -Im\langle\Theta_1,\Theta_2\rangle\omega_{vol}.$$

更有趣的是，除了标准辛结构外，截面空间 $C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$ 实际上还是超凯勒的。在写出凯勒形式之前，我们先介绍一些记号。

对于 $C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$上的一个截面 Θ，我们将 Θ 与一个 S^1-和 Γ-等变映射 λ: $S^3 \to End(R)$等同起来，因此可以将 Θ 表示为

$$\Theta : x \mapsto [p, \lambda(p)],$$

对于 $x \in S^2$ 和 $p \in h^{-1}(x) \subset S^3$。

在截面空间 $C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$上，除了由 i 的乘法给出的标准复结构 I外，还有一个复结构 J，其表达式如下。设 Θ： $x \mapsto [p, \lambda(p)]$，则 J 在 Θ 上的作用为

$$J\Theta : x \mapsto [p, -\lambda(J(p))^*],$$

其中， S^3 上的$p \in S^3$ 和 J 只是通常的四元数作用。

命题 2.5. $C^\infty(S^2/\Gamma, E(\Gamma))$ 上存在三个辛形式，分别与复结构 I、 J、 K 相容：

$$\omega_1(\Theta_1,\Theta_2)=\int_{S^2/\Gamma}-Im\langle\Theta_1,\Theta_2\rangle\omega_{vol},$$
$$\omega_2(\Theta_1,\Theta_2)=\int_{S^2/\Gamma}Re\langle J\Theta_1,\Theta_2\rangle\omega_{vol},$$
$$\omega_3(\Theta_1,\Theta_2)=\int_{S^2/\Gamma}-Im\langle J\Theta_1,\Theta_2\rangle\omega_{vol},$$

以及一个超凯勒度量 g_h，使得

$$g_h(\Theta_1,\Theta_2)=\int_{S^2/\Gamma}Re\langle\Theta_1,\Theta_2\rangle\omega_{vol},$$

从而在 $C^\infty(S^2/\Gamma,E(\Gamma))$ 上赋予超凯勒结构。

事实证明，τ-不变规范群 $\mathcal{G}^{F,\Gamma}_\tau$ 对 $E(\Gamma)$ 的截面空间而言，相对于三个辛形式中的每一个，其作用都是哈密顿的。因此，我们可以写出受超凯勒约化构造启发的以下方程，并对构形空间进行约化。构形空间由下文陈述的主定理给出：

For $\tilde{\zeta}=\mathbb{R}^3\otimes Z$, 其中 Z 是 $(\mathbf{f}/\mathbf{t})^*$ 的中心，将其视为 $\mathbf{f}/\mathbf{t}$ 中的无迹矩阵，我们考虑

$$\bar{\partial}_{A_0+B}\Theta=0 \tag{2.3}$$

$$F_B-\frac{i}{2}[\Theta,\Theta^*]\omega_{vol}=\tilde{\zeta}_1\cdot\omega_{vol} \tag{2.4}$$

$$-\frac{1}{4}([J\Theta,\Theta^*]-[\Theta,J\Theta^*])\omega_{vol}=\tilde{\zeta}_2\cdot\omega_{vol}, \tag{2.5}$$

$$-\frac{i}{4}([J\Theta,\Theta^*]+[\Theta,J\Theta^*])\omega_{vol}=\tilde{\zeta}_3\cdot\omega_{vol}. \tag{2.6}$$

定理 2.6。设 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$，其中对所有 $i,\zeta_i\in Z$ 均成立。令

$$\mathcal{X}_{\tilde{\zeta}}=\{(B,\Theta)\in\mathcal{A}^F\times C^\infty(S^2/\Gamma,E(\Gamma))|(1)-(4)\}/\mathcal{G}^{F,\Gamma}_\tau.$$

那么，对于适当的 ζ 选择，$\mathcal{X}_{\tilde{\zeta}}$ 与奇点解消 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 微分同胚。此外，对于 $\zeta=\zeta^*=-\zeta$，存在映射 Φ，将 X_ζ 映至 $\mathcal{X}_{\tilde{\zeta}}$，且在 $\mathcal{X}_{\tilde{\zeta}}$ 上存在一个自然的度量选择，使得 Φ 是一个等距映射。

注记 2.7. 这里我们没有在定理的陈述中精确定义“ζ 的适当选取”这一概念。它的定义类似于上一节中由 *Kronheimer* 引入的“良好集合”概念。同样，它是 $\mathbb{R}^3\otimes Z$ 中一个余维为3 的子集的补集。

3 霍普夫纤维化与拉回丛 $E(\Gamma)^h$

如上一节所述，轨形向量丛 $E(\Gamma)$ 由 S^3的霍普夫纤维化构造而成。本节中，我们通过霍普夫纤维化 $h: S^3 \to \mathbb{C}P^1$定义 $E(\Gamma)$的拉回丛 $E(\Gamma)^h$ 。首先，我们将 $E(End(R))$ 沿 h 拉回，得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} E(End(R))^h & \longrightarrow & E(End(R)) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^h} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S^3 & \xrightarrow{\quad h \quad} & S^2 \end{array}$$

上面的图是 Γ-等变的，因此可下降为以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} E(\Gamma)^h & \longrightarrow & E(\Gamma) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^h} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S^3/\Gamma & \xrightarrow{h} & S^2/\Gamma \end{array}$$

引理 3.1。 $E^h(\Gamma)$ 是 S^3/Γ 上的平凡向量丛，其纤维同构于$End(R)$。

我们省略前一个引理的证明，因为这是丛论中应用于特定情形的标准结果。我们将 $E^h(\Gamma) \cong S^3/\Gamma \times End(R)$ 视为作用于平凡丛 $S^3/\Gamma \times R$ 上的自同态丛。设 Θ 是 $E(\Gamma)$ 的一个截面，那么通过将 Θ 视为一个 Γ-等变映射 $\lambda:\ S^3 \to End(R)$，我们也可以将 Θ视为 $E^h(\Gamma)$ 的一个截面。因此，我们可以如下定义 A_Θ：

$$A_\Theta = d + d\Theta.$$

我们将 A_Θ 视为作用于 $S^3/\Gamma \times R$截面上的联络。特别地，若 Θ是全纯截面，并记为 $\Theta = (\alpha, \beta)$，则有

$$A_\Theta = A_{(\alpha,\beta)} = d + \alpha dz_1 + \beta dz_2.$$

引理 3.2. 设 $\Theta = (\alpha, \beta)$ 是全纯截面。当且仅当 $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$时，联络 A_Θ 是平坦的。

证明。 我们如下计算 A_Θ 的曲率：

$$\begin{aligned} F_{A_\Theta} &= dA_\Theta + A_\Theta \wedge A_\Theta && (3.1)\\ &= \alpha dz_1 \wedge \beta dz_2 + \beta dz_2 \wedge \alpha dz_1 && (3.2)\\ &= [\alpha, \beta] dz_1 \wedge dz_2. && (3.3) \end{aligned}$$

因此， $F_{A_\Theta}=0$ 等价于 $[\alpha,\beta]=0$。根据方程

$$\frac{1}{2}([\alpha,\beta]+[\alpha^*,\beta^*])=\zeta_2,$$

$$\frac{i}{2}(-[\alpha,\beta]+[\alpha^*,\beta^*])=\zeta_3,$$

我们有 $[\alpha,\beta]=0$ 等价于 $\zeta_2=\zeta_3=0$。

□

4 全纯表示的计算

从此处开始，我们固定 $\zeta=(\zeta_1,0,0)$ 为良好集合中的一个元素。注意，这总是可行的，因为良好集合是 $\mathbb{R}^3\otimes Z$ 中余维为 3 的子集的补集；通过令 $\zeta_2=\zeta_3=0$，我们可以选择 ζ_1 使其位于 Z 的一个余维为 1的子集中，从而确保 $\zeta=(\zeta_1,0,0)$ 位于良好集合中。接续上一节，由于 $\zeta_2=\zeta_3=0$，一个解 $\Theta=(\alpha,\beta)$ 给出一个平坦联络 A_Θ，因此诱导出一个全纯表示

$$\rho_\Theta:\pi_1(S^3/\Gamma)=\Gamma\to GL(R).$$

现在我们计算 ρ_Θ。首先，固定 $(v_1,v_2)\in S^3\subset\mathbb{C}^2$ 和 $\gamma\in\Gamma$，令

$$\tilde{\gamma}:[0,1]\to\mathbb{C}^2$$

为连接 (v_1,v_2) 与 $\gamma\cdot(v_1,v_2)$的线性路径。更明确地说，我们令

$$\gamma=\begin{pmatrix}u & v\\ -v^* & u^*\end{pmatrix}\in\Gamma\subset SU(2),$$

并且我们有 $\tilde{\gamma}(t)=((1-t+tu)v_1-t\bar{v}v_2,tvv_1+(1-t+t\bar{u})v_2)$，其中 γ 从右侧作用于 $\mathbb{C}^2$。现在我们将路径 $\gamma(t)$ 定义为 $\tilde{\gamma}(t)$ 到 S^3 上的投影，即

$$\gamma(t)=\frac{\tilde{\gamma}(t)}{\|\tilde{\gamma}(t)\|}.$$

根据构造， $\gamma(t)$ 是一个表示 $\gamma\in\pi_1(S^3/\Gamma;(v_1,v_2))=\Gamma$ 的闭路。现在，为了计算 A_Θ 处的全纯表示，我们需要求解由沿着 $\gamma(t)$ 的平行移动给出的以下微分方程:

$$dX(t)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))+\alpha(X(t))dz_{1\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))+\beta(X(t))dz_{2\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))=0, \tag{4.1}$$

其中 $X(t):[0,1]\to R$， $X(0)=X_0$。这里，我们可以将 $X(t)$ 视为 $X(t)=X|_{\gamma(t)}$，其中 X 是 S^3 上的平凡丛的截面，其纤维同构于 R。等价地，我们可以将方程（4.1）写成

$$dX(t)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))=-\alpha(X(t))dz_{1\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))-\beta(X(t))dz_{2\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)). \tag{4.2}$$

方程（4.2）是一个常微分方程，并且在 $\gamma(t) = (z_1, z_2)$ 处，有

$$X(t) = X(z_1, z_2) = \exp((v_1 - z_1)\alpha + (v_2 - z_2)\beta)(X_0).$$

我们可以验证

$$\begin{aligned} dX_{(z_1,z_2)} &= (-\alpha \exp((v_1 - z_1)\alpha + (v_2 - z_2)\beta)dz_1)(X_0) \\ &\quad + (-\beta \exp((v_1 - z_1)\alpha + (v_2 - z_2)\beta)dz_2)(X_0) \\ &= -\alpha(X(z_1, z_2))dz_1 - \beta(X(z_1, z_2))dz_2. \end{aligned}$$

注意，要使 $X(t)$ 定义良好，我们需要 $[\alpha, \beta] = 0$，而这恰好是 A_Θ平坦的条件。因此，我们有 $X(v_1, v_2) = X(0) = X_0$，并且

$$X(1) = X(\gamma(v_1, v_2)) = \exp((v_1 - (uv_1 - \bar{v}v_2))\alpha + (v_2 - (\bar{u}v_2 + vv_1))\beta)(X_0).$$

为了得到 A_Θ 处的全纯表示，我们通过 Γ 的正则表示，将 $X(1)$ 拉回到与 X_0 相同的纤维上，该纤维位于 (v_1, v_2) 之上。因此，我们得到全纯表示 $\rho_\Theta = \rho_{(\alpha,\beta)}: \Gamma \to GL(R)$，其定义如下：

$$\gamma \mapsto R(\gamma) \exp((v_1 - (uv_1 - \bar{v}v_2))\alpha + (v_2 - (\bar{u}v_2 + vv_1))\beta).$$

命题 4.1。 ρ_Θ 同构于 Γ的正则表示，对任意 Θ 属于 X_ζ。我们将命题4.1的证明推迟到第 5 节末尾，届时我们将引入模空间上的一个 S^1-作用 X_ζ。

5 模空间上的一个 S^1-不变 Morse-Bott 函数及其临界点

本节中，我们将在构形空间上引入一个 S^1-作用，该作用下降到模空间 X_ζ，并分析由此作用产生的模空间上的一个 S^1-不变 Morse-Bott 函数。关于这些主题的相关参考文献，见 [19] 和 [8]。我们考虑的 S^1-作用如下：

$$e^{i\varphi} : (A_0 + B, \Theta) \mapsto (A_0 + B, e^{i\varphi}\Theta).$$

这个 S^1-作用类似于 Hitchin 所研究的作用。在我们的设定中，考虑自然的 S^1-作用是合适的，因为将 $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$. 设定后，方程 (2.3)–(2.6) 在此作用下保持不变。

这个 S^1-作用是哈密顿的，因此在构形空间上给出了一个 Morse-Bott 泛函，即矩映射的范数平方。我们将构形空间上的 Morse-Bott 泛函写作如下：

$$\Phi(A_0 + B, \Theta) = \int_{S^2/\Gamma} \|\Theta\|^2 \omega_{vol}.$$

我们注意到，这个 Morse-Bott 泛函具有 S^1-不变性；将其限制在定义模空间的方程的解集上，并考虑规范变换后，其临界点由以下方程给出：

$$\rho(\varphi)(A_0+B)\rho(\varphi)^{-1}=A_0+B, \tag{5.1}$$

$$\rho(\varphi)\Theta\rho(\varphi)^{-1}=e^{i\varphi}\Theta,\forall\varphi. \tag{5.2}$$

这里，(A_0+B,Θ) 是一个解，而 $\{\rho(\varphi)\}$ 是 S^1 中作用于 $\mathcal{G}_\tau^{\mathcal{F}}$ 的规范变换的一个子群。注意，由于 $\rho(\varphi)$ 在 A_0 上的作用是平凡的，方程 (5.1) 化为

$$\rho(\varphi)B\rho(\varphi)^{-1}=B. \tag{5.3}$$

此外，要使 (A_0+B,Θ) 成为一个解，B 必须与 0 规范等价。基于底点的规范群$\mathcal{G}_{\tau,0}^{\mathcal{F}}$ 在 B 上自由作用，且 B 的稳定子群同构于 F。因此，方程 (5.1) 和 (5.2) 可化为以下形式：

$$f(\varphi)\Theta f(\varphi)^{-1}=e^{i\varphi}\Theta,\forall\varphi, \tag{5.4}$$

其中，$\{f(\varphi)\}$是 F 的一个 S^1 子群，而 Θ 是关于 A_0的 $E(\Gamma)$的全纯截面。换言之，将 Θ 与 (α,β) 识别后，方程 (5.4) 化为

$$(f(\varphi)\alpha f(\varphi)^{-1},f(\varphi)\beta f(\varphi)^{-1})=(e^{i\varphi}\alpha,e^{i\varphi}\beta),\forall\varphi.$$

引理 5.1。对于全纯截面 $\Theta=(\alpha,\beta)$，有 $\Phi(\Theta)=\int_{S^2/\Gamma}\|\Theta\|^2\omega_{vol}=k_0(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2)$，其中 k_0 为某个常数。

证明。对于 $p=(z_1,z_2)\in S^3$，我们有 $\Theta(h(p))=\alpha z_1+\beta z_2$。因此，我们有

$$f(\Theta)=\frac{1}{\mathrm{Vol}(S^1)}\int_{S^3/\Gamma}\|\alpha z_1+\beta z_2\|^2\,\omega_{\mathrm{vol}_{S^3/\Gamma}} \tag{5.5}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Vol}(S^1)}(\|\alpha\|^2\int_{S^3/\Gamma}|z_1|^2+\|\beta\|^2\int_{S^3/\Gamma}|z_2|^2+\langle\alpha,\beta\rangle\int_{S^3/\Gamma}z_1\bar{z}_2+\langle\beta,\alpha\rangle\int_{S^3/\Gamma}z_2\bar{z}_1) \tag{5.6}$$

$$=k_0(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2). \tag{5.7}$$

□

引理 5.2。设 $\zeta=(\zeta_1,0,0)$ 是良好集合中的一个元素。泛函 Φ 下降为模空间 X_ζ上的完美 *Morse-Bott* 函数。

证明。只需证明缩放 S^1-作用是适当的，并且可扩展为模空间上的全纯 $\mathbb{C}^*$-作用，这将保证完美性。

由于 S^1 是紧的，且该作用是哈密顿作用，其 Morse-Bott 函数由矩映射的范数平方给出，因此它是适当的。由于我们采用缩放 S^1作用，可以将该作用扩展为如下全纯复线性作用：

$$z\cdot(\alpha,\beta)=(z\alpha,z\beta),z\in\mathbb{C}^*.$$

因此，我们得到完美性。

□

我们接下来分析 Φ on X_ζ 的梯度流线。在构形空间上， Φ 在(α,β) 处的梯度显然是

$$\nabla\Phi(\alpha,\beta)=\nabla(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2)=\nabla(\alpha\alpha^*+\beta\beta^*)=(2\alpha,2\beta).$$

在规范等价下的商空间中， Φ 的梯度为

$$\nabla\Phi(\alpha,\beta)=(2\alpha+[\xi,\alpha],2\beta+[\xi,\beta]),$$

对于某个 $\xi\in\mathbf{f}/\mathbf{t}$。因此， X_ζ 中的梯度流线$(\alpha(t)\ \beta(t))$ 由以下方程定义：

$$2\alpha(t)+[\xi(t),\alpha(t)]=\dot{\alpha}(t), \tag{5.8}$$
$$2\beta(t)+[\xi(t),\beta(t)]=\dot{\beta}(t), \tag{5.9}$$
$$[\alpha(t),\alpha(t)^*]+[\beta(t),\beta(t)^*]=\zeta_1, \tag{5.10}$$
$$[\alpha(t),\beta(t)]=0. \tag{5.11}$$

注释 5.3. 注意，在（5.7）中，为简便起见，我们省略了$(\alpha,\beta)=\frac{i}{2}([\alpha,\alpha^*]+[\beta,\beta^*])$, 中出现的常数 $\frac{i}{2}$，这意味着（5.7）中的 ζ_1 实际上是一个实值矩阵。今后我们将沿用这一约定。

引理 5.4. 设(α,β) 是一个临界点，并假设$(\alpha(t)\ \beta(t))$ 是一条流入(α,β)的梯度流线，其中 $t\to-\infty$。那么，对所有 φ，$(e^{i\varphi}\alpha(t)\ e^{i\varphi}\beta(t))$ 都是一条流入(α,β)的梯度流线，其中$t\to-\infty$ 。

证明。由于$(\alpha(t)\ \beta(t))$ 是一条流向(α,β)的梯度流线，因此对所有 t，以下方程均成立：

$$2\alpha(t)+[\xi(t),\alpha(t)]=\dot{\alpha}(t), \tag{5.12}$$

$$2\beta(t)+[\xi(t),\beta(t)]=\dot{\beta}(t), \tag{5.13}$$
$$[\alpha(t),\alpha(t)^*]+[\beta(t),\beta(t)^*]=\zeta_1, \tag{5.14}$$
$$[\alpha(t),\beta(t)]=0, \tag{5.15}$$
$$\lim_{t\to-\infty}(\alpha(t),\beta(t))=(\alpha,\beta). \tag{5.16}$$

显然，由上述方程可知，$(e^{i\varphi}\alpha(t)\ e^{i\varphi}\beta(t))$ 是另一条梯度流线。由于 (α,β) 是一个临界点，它在规范等价意义下是一个 S^1-不动点，即 $(e^{i\varphi}\alpha,e^{i\varphi}\beta)=(f(\varphi)\alpha f(\varphi)^{-1},f(\varphi)\beta f(\varphi)^{-1})$。我们有

$$\lim_{t\to-\infty}(e^{i\varphi}\alpha(t),e^{i\varphi}\beta(t))=(e^{i\varphi}\alpha,e^{i\varphi}\beta)=(f(\varphi)\alpha f(\varphi)^{-1},f(\varphi)\beta f(\varphi)^{-1}).$$

因此，（$e^{i\varphi}\alpha$（t） $e^{i\varphi}\beta$（t））是模空间 X_ζ 中流向（α， β）的梯度流线。 □

5.1 S^1型 ALE 空间的 A_n不动点

~~在本小节中，我们专门讨论 A_n 型 ALE 空间，即对于 $SU(2)$ 的循环子群 Γ，有 $\mathbb{C}^2/\Gamma$。我们将详细描述这类 ALE 空间相对于缩放 S^1作用的 S^1 不动点

$$e^{i\varphi}\cdot(\alpha,\beta)=(e^{i\varphi}\alpha,e^{i\varphi}\beta).$$

首先，我们回顾（2.1）和（2.2）中的结果。对于 $(\alpha,\beta)\in M$，以及 $\gamma=\begin{pmatrix}u&0\\0&u^*\end{pmatrix}\in\Gamma$，有

$$R(\gamma^{-1})\alpha R(\gamma)=u\alpha, \tag{5.17}$$
$$R(\gamma^{-1})\beta R(\gamma)=u^*\beta. \tag{5.18}$$

不难看出，从组合角度而言，这样的一对(α,β) 由下图表示:

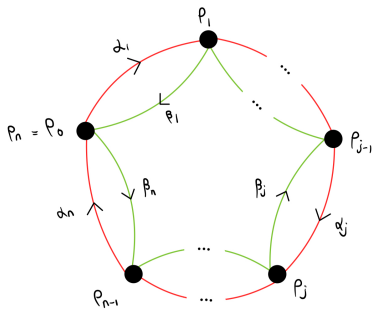


图 1: $(\alpha,\beta)=((\alpha_1,...,\alpha_n),(\beta_1,...,\beta_n))$

此图也称为扩展 A_n型 Dynkin 图。这里，顶点对应于 Γ 的不可约表示，记作 ρ_j，其中 j 是 $\mathbb{Z}_n$中的一个指标。我们有

$$(\alpha,\beta)=((\alpha_1,...,\alpha_n),(\beta_1,...,\beta_n)),$$

其中 α_j,β_j 是连接顶点 ρ_{j-1} 和 ρ_j的边映射。我们用 α_j^*,β_j^* 表示 α_j 和 β_j的共轭转置；注意，α_j^*,β_j^* 反转了 α_j 和β_j的箭头。

~~为描述 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 的 S^1-不动点，回顾一下，S^1-不动点是满足以下条件的一对 (α,β)

$$(e^{i\varphi}\alpha,e^{i\varphi}\beta)=(f(\varphi)\alpha f(\varphi)^{-1},f(\varphi)\beta f(\varphi)^{-1}),$$

其中 $f(\varphi)=(f_1(\varphi)...,\ f_n(\varphi))\in F$。

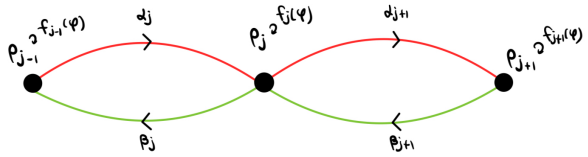


图2： $f(\varphi)$作用

从上面的图中，我们首先观察到 α_j 和 β_j 不能同时非零，因为我们总有

$$f(\varphi)\alpha_j f(\varphi)^{-1} = f_{j-1}(\varphi)f_j^{-1}(\varphi)\alpha_j = e^{w_j i\varphi}\alpha_j,$$

$$f(\varphi)\beta_j f(\varphi)^{-1} = f_{j-1}^{-1}(\varphi)f_j(\varphi)\beta_j = e^{-w_j i\varphi}\beta_j,$$

也就是说， S^1 以相反的权重 w_j 和 $-w_j$ 作用于 α_j 和 β_j ，这是由于箭头方向相反。由于这两个相反权重不可能同时等于1，因此在任意 S^1-不动点处，对于所有 j， α_j 和 β_j 中至少有一个等于0 。

另一方面，我们有

$$[\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*] = \zeta_1,$$

$$[\alpha, \beta] = 0.$$

这些方程意味着

$$\alpha_j\beta_j = \alpha_k\beta_k, \forall j, k \tag{5.19}$$

$$\alpha_{j+1}\alpha_{j+1}^* - \beta_{j+1}\beta_{j+1}^* + \beta_j\beta_j^* - \alpha_j\alpha_j^* = \zeta_1^j, \forall j. \tag{5.20}$$

我们指出，这里稍有记号滥用：上面的 α_j、 α_j^*、 β_j、 β_j^* 指相应映射的数值，但省略了映射的方向。注意，当(α, β) 是一个 S^1-不动点时，对于所有 j，总有 $\alpha_j\beta_j = 0$。为简单起见，我们假设 $\zeta_1 = (\zeta_1^0 = \zeta_1^n, ..., \zeta_1^{n-1})$，其中

$$0 < \zeta_1^0 = \zeta_1^n < \zeta_1^1 < ... < \zeta_1^{n-2},$$

and

$$\zeta_1^{n-1} = -\sum_{j=0}^{n-2}\zeta_1^j.$$

5.1.1 $n = 2m + 1$:

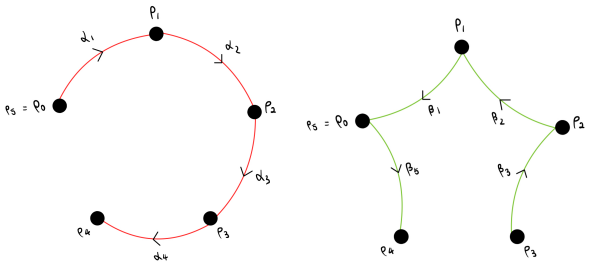
当 Γ 是 $SU(2)$ 的奇阶循环子群，且满足 $|\Gamma| = n = 2m + 1$时， $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 有 n个由 j标记的孤立 S^1-不动点，并具有性质 $\alpha_j = \beta_j = 0$。显然，一旦固定了 j ，箭头方向和边值在规范等价意义下便完全确定。存在某个 j 使得

两者 α_j 和 β_j 都为 0 的原因是，对一个 S^1-不动点的限制确实如此。事实上，要成为一个 S^1-不动点，我们必须满足

$$f(\varphi)\alpha_j f(\varphi)^{-1} = f_{j-1}(\varphi)f_j^{-1}(\varphi)\alpha_j = e^{i\varphi}\alpha_j,$$

$$f(\varphi)\beta_j f(\varphi)^{-1} = f_{j-1}^{-1}(\varphi)f_j(\varphi)\beta_j = e^{i\varphi}\beta_j,$$

对所有 j 均成立。该条件迫使 $f(\varphi)$ 以权重作用，且相邻顶点的权重相差 1，箭头指向权重较低的一端。我们看到，如果顶点数为奇数，要使该条件在所有顶点处都成立，就必须存在某个 j，使得 $\alpha_j = \beta_j = 0$. 另一方面，这样的 j 至多只有一个，因为要使 (5.17) 成立。容易看出，存在唯一的全局极小值，它由具有相同数量 α- 边和 β- 边的临界点给出，因此它必定是唯一的指标为 0 临界点。由于 Φ 是完美的，其余临界点的指标都必须为 2。



(a) 指标为 2 的临界点　　(b) 指标为 2 的临界点

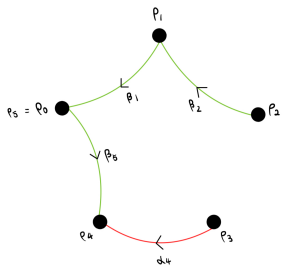
图 3：$\mathbb{Z}_5$: S^1-不动点 / 临界点

5.1.2 $n = 2m$:

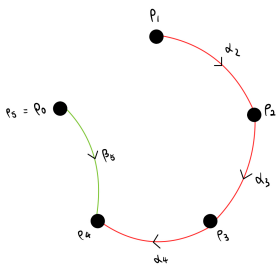
当 Γ 是 $SU(2)$ 的一个阶为 $|\Gamma| = n = 2m$ 的偶数阶循环子群时，$\mathbb{C}^2/\Gamma$ 有 $n-2$个孤立的指标为 2 的临界点，以及一个与球面微分同胚的指标为 0 临界子流形分支。指标为 0 的临界子流形由包含 m α-边和 m β-边的图给出；在规范等价意义下，存在一个由此类 S^1-不动点构成的球面，其中 α-边和 β-边取不同的范数。容易看出，Φ 在该球面上达到全局极小值，因此其指标为 0。其余指标为 2 的临界点以与奇数阶循环情形类似的方式出现。

5.2 命题4.1

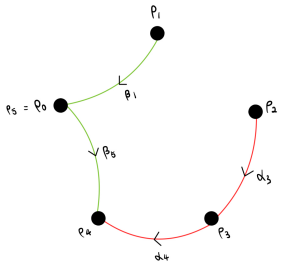
现在我们给出命题 4.1 的证明。我们指出，命题 4.1 对一般的 Γ 也成立，我们并不假设它是循环的。



(a) 指标为 2 的临界点



(b) 指标为 2 的临界点



(c) 指标为 0 的临界点

图 4: $\mathbb{Z}_5$: S^1-不动点 / 临界点

命题 *4.1* 的证明。 我们先对 Θ一个 S^1-不动点证明该命题。回顾一下，对于 $\Theta = (\alpha, \beta)$，以及 $\gamma = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix}$， 我们有以下恒等式:

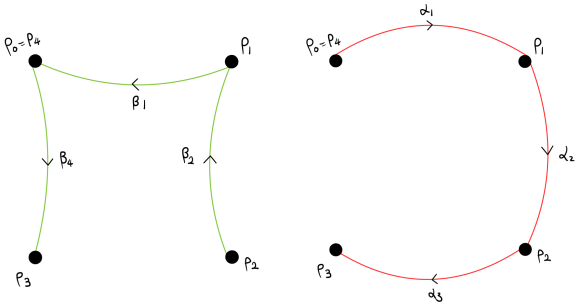
$$R(\gamma^{-1})\alpha R(\gamma) = u\alpha + v\beta, \tag{5.21}$$

$$R(\gamma^{-1})\beta R(\gamma) = -v^*\alpha + u^*\beta. \tag{5.22}$$

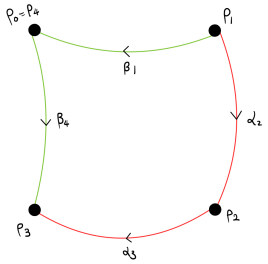
由舒尔引理可知， α, β 将分解为沿着 Γ的 McKay 箭图的边映射。除非 Γ 是平凡群（此时命题显然成立），否则 Γ 的 McKay 箭图在任何顶点处都不含自环。因此，α, β 作为 $End(R)$中的矩阵，其对角块均为零，其中这些块由 Γ的不可约表示给出。现在，如果(α, β) 是一个 S^1-不动点，那么任意两个顶点之间至多有一条非零边。回顾一下，全纯表示为$\rho_\Theta = \rho_{(\alpha,\beta)} : \Gamma \to U(R)$,

$$\gamma \mapsto R(\gamma)\exp((v_1 - (uv_1 - \bar{v}v_2))\alpha + (v_2 - (\bar{u}v_2 + vv_1))\beta).$$

现在我们聚焦于表达式中出现的项 $\exp((v_1 - (uv_1 - \bar{v}v_2))\alpha + (v_2 - (\bar{u}v_2 + vv_1))\beta)$。首先注意，形如 $\alpha^k\beta^\ell$ 的项可以通过沿有向边的路径来理解。由于任意两个顶点之间至多只有一条非零边，沿着由边映射定义且具有给定



(a) 指标为 2 的临界点　　(b) 指标为 2 的临界点



(c) 指标为 0 的临界子流形-fold

图 5: $\mathbb{Z}_4$: S^1-不动点 / 临界点

箭头的任一路径前进，都不可能回到同一个顶点。特别地，α、β 必须是幂零矩阵，这对于 S^1-不动点而言是众所周知的事实。这一观察表明，$\exp((v_1-(uv_1-\bar{v}v_2))\alpha+(v_2-(\bar{u}v_2+vv_1))\beta)$ 的对角块也都为零。因此，$R(\gamma)\exp((v_1-(uv_1-\bar{v}v_2))\alpha+(v_2-(\bar{u}v_2+vv_1))\beta)$ 必定与 $R(\gamma)$具有相同的对角块。这意味着 ρ_Θ 与正则表示 R 具有相同的特征，也就是说二者同构。

对于一般点 $\Theta\in X_\zeta$，连接 Θ 与一个 S^1-不动点的向下梯度流，给出一条光滑路径，其上的全纯表示收敛到该 S^1-不动点处的正则表示 R。由于 Γ 是一个有限群，Γ 的特征簇是离散的，因此表示的光滑路径必为常值路径。这意味着，对于 X_ζ 中的所有点，ρ_Θ 都必须同构于正则表示。命题得证。

□

6 梯度流线极限下的不可约表示

在本节中，我们将借助梯度流，基于上一节的莫尔斯函数，建立一个新的动力学框架来研究 McKay 对应。从命题 4.1 可知，在 X_ζ 的每个点$(\alpha,\ \beta)$ 处，我们都得到一个全纯表示 $\rho_(\alpha,\beta$ $2)$，它同构于正则表示。因此，从一个指标为 - 的不动点出发，沿梯度流线到达无穷远边界，S^1 ^{1}我们得到一个以 - 为参数的表示族 $\rho(t)$，其中所有表示都同构于正则表示R。因此，我们可以将每个 $\rho(t)$ 表示为

$$\rho(t) = P(t)RP(t)^{-1},$$

对于一个1参数的基变换矩阵族 $P(t)$。我们回顾第 1 节中的猜想 1.2:

猜想 6.1（参见猜想 1.2）。设 Γ 是 $SU(2)$ 的有限子群。设 X_ζ 如定理 2.6 所述。设 $S_1,...S_r$ 为 X_ζ 的 S^1-不动点的各个分支，它们生成 $H^2(X_\zeta)$；设 $\rho_j(t) = P_j(t)RP_j(t)^{-1}$，$1 \le j \le r$ 为一参数全纯表示族，满足如下性质

$$\rho_j(t) = \rho_{(\alpha_j(t),\beta_j(t))},$$

$$\lim_{t\to-\infty}(\alpha_j(t),\beta_j(t)) = (\alpha_j,\beta_j),$$

其中 $(\alpha_j,\beta_j) \in S_j$。于是

$$P_j^{\lim} = \lim_{t\to\infty} P_j(t)$$

等于投影到 ρ_j 的非平凡不可约表示上的投影算子，而 Γ 的每个非平凡不可约表示都以此方式出现。

在本节余下部分，我们给出计算结果，以验证低秩循环情形 $\mathbb{Z}_2$、$\mathbb{Z}_3$ 下的猜想。该方法也体现了对所有 A_n 型 ALE 空间进行一般性验证的思路，相关内容将在本文后续版本中给出。

6.1 $\mathbb{Z}_2$:

我们令 ρ_0 表示 $\mathbb{Z}_2$的平凡表示，令 ρ_1 表示非平凡不可约表示。令 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$，其中 α_1 是从 ρ_0 到 ρ_1 的边映射，α_2是从 ρ_1 到 ρ_0的边映射；α_1^* 是 α_1 从 ρ_1 到 ρ_0的共轭转置，α_2^* 是 α_2 从 ρ_1 到 ρ_0的共轭转置。类似地，我们记 $\beta = (\beta_1,\beta_2)$，其中 β_1 是从 ρ_1 到 ρ_0 的边映射，β_2 是从 ρ_0 到 ρ_1的边映射，而 β_1^*、β_2^*分别是它们的共轭转置。固定 $\zeta_1 = (a^2,-a^2)$ $a \in \mathbb{R}$。

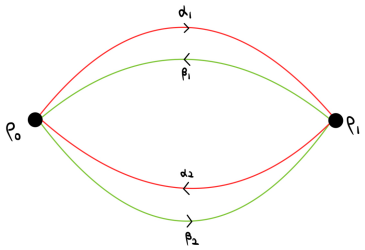


图 6: $(\alpha,\ \beta) = ((\alpha_1,\ \alpha_2),\ (\beta_1,\ \beta_2))$

方程

$$[\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*] = \zeta_1 \tag{6.1}$$

$$[\alpha, \beta] = 0 \tag{6.2}$$

转化为以下等式:

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 \\ (\alpha_1\alpha_1^* - \alpha_2\alpha_2^*) + (\beta_2\beta_2^* - \beta_1\beta_1^*) = a^2. \end{cases}$$

这里沿用了上一节中提到的相同记号滥用。

在临界点处，(α, β) 将具有 $\alpha_1\alpha_1^* + \beta_2\beta_2^* = a^2$ 和 $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ 的形式。模去规范等价后，这给出了一个由 S^1 不变的临界子流形的单个分支，该子流形与球面微分同胚。

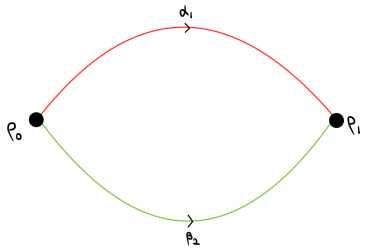


图7： S^1-不动点 / 临界点

现在，我们在这个球面上任取一点 x ，计算从所选点 x 沿梯度流线到无穷远边界的全纯表示的单参数族，并研究给定的全纯表示族在无穷远处的极限。具体而言，令 $(\alpha(t)\ \beta(t))$ 为满足 $(\alpha(-\infty)\ \beta(-\infty)) = x$ 的梯度流线。由于 $(\alpha(t)\ \beta(t))$ 是流入 x 的梯度流线，因此对所有 t，以下方程均成立：

$$2\alpha(t) + [\xi(t), \alpha(t)] = \dot{\alpha}(t), \tag{6.3}$$

$$2\beta(t) + [\xi(t), \beta(t)] = \dot{\beta}(t), \tag{6.4}$$

$$[\alpha(t), \alpha(t)^*] + [\beta(t), \beta(t)^*] = \zeta_1, \tag{6.5}$$

$$[\alpha(t), \beta(t)] = 0, \tag{6.6}$$

$$\lim_{t\to-\infty}(\alpha(t), \beta(t)) = x. \tag{6.7}$$

回忆一下，我们有 ρ_Θ： $\Gamma \to GL(R)$,

$$\gamma \mapsto R(\gamma)\exp((v_1 - (uv_1 - \bar{v}v_2))\alpha + (v_2 - (\bar{u}v_2 + vv_1))\beta).$$

在 S^1-不动点球面上任取一点 x ，并任取一个一般位置基点 $(v_1,\ v_2)$ ，都会得到与 $t \to \infty$ 相同的极限表示；我们将在本小节末尾论证这一点。因此，不失一般性，令

$$x = (\alpha, \beta) = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) = ((a, 0), (0, 0)).$$

对于 $\gamma = -1 \in SU$（2），

$$\rho(-\infty)(-1) = \rho_\Theta(-1) = R(-1)\exp(2v_1\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2v_1 a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2v_1 a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2v_1 a & -1 \end{pmatrix}.$$

现在，考虑以下1参数族

$$(\alpha(t), \beta(t)) = ((\sqrt{e^{c(t)} + a^2}, \sqrt{e^{c(t)}}), (0, 0)).$$

我们总能找到一参数族的元素 $\xi(t) = (\xi_1(t)\ \xi_2(t)) \in \mathfrak{f}/\mathfrak{t}$ and$c(t)$，使得 $c(-\infty) = -\infty$、 $c(\infty) = \infty$，且 $\dot{c}(t) > 0$，从而 $(\alpha(t)\ \beta(t))$ 满足方程 (6.3)–(6.7)，并因此描述一条从 x 到无穷远边界的梯度流线。同样，我们将 $\xi(t)$ 和 $c(t)$ 的计算留到本小节末尾，现在暂且假设结果成立。

Let

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2v_1\sqrt{e^{c(t)}} \\ 2v_1\sqrt{e^{c(t)} + a^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{4v_1^2 e^{c(t)}} \\ \sqrt{4v_1^2 e^{c(t)} + 4v_1^2 a^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $n = 4v_1^2 e^{c(t)}$ and $\hat{a} = 4v_1^2 a^2$，并记

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \sqrt{n + \hat{a}} & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$\exp(A(n)) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}) & -\sqrt[4]{\frac{n}{n+\hat{a}}} \sinh(\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}) \\ -\sqrt[4]{\frac{n+\hat{a}}{n}} \sinh(\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}) & \cosh(\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}) \end{pmatrix}.$$

令 $B = R(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，并

$$C(n) = B\exp(A(n)) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}) & \sqrt[4]{\frac{n}{n+\hat{a}}} \sinh(\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}) \\ -\sqrt[4]{\frac{n+\hat{a}}{n}} \sinh(\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}) & -\cosh(\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}) \end{pmatrix}.$$

不难验证， $C(n)$ 总是与 B 共轭，这与以下预测一致： $\rho(t)$ 总是同构于正则表示 R。设 $P(n)$ 是换基矩阵，使得 $P(n)BP(n)^{-1} = C(n)$。利用以下关于双曲余弦(θ) 和双曲正弦(θ)的恒等式：

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1,$$

$$\cosh(\theta) = \cosh^2(\frac{\theta}{2}) + \sinh^2(\frac{\theta}{2}),$$

$$\sinh(\theta) = 2\cosh(\frac{\theta}{2})\sinh(\frac{\theta}{2}),$$

我们看到， $P(n)$ 可表示为

$$P(n)=\begin{pmatrix} \sqrt{k}\cosh\left(\frac{\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}}{2}\right) & -\sqrt{k}\sinh\left(\frac{\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}}{2}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\left(\frac{\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}}{2}\right) & \frac{1}{\sqrt{k}}\cosh\left(\frac{\sqrt[4]{n(n+\hat{a})}}{2}\right) \end{pmatrix},$$

其中 $k=\sqrt[4]{\frac{n}{n+\hat{a}}}$

现在，我们令 n 趋于无穷，并取 $C(n)$ 和 $P(n)$的极限。经过重整化后，我们得到

$$C^{\lim}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

and

$$P^{\lim}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们看到， $P^{\lim}$ 是投影到$\mathbb{Z}_2$的非平凡不可约表示上的投影算子，正如猜想1.2所预言的那样。

6.1.1 梯度流分析

现在，我们更仔细地论证如下断言：在 S^1-不动点的球面中选取点 x 不会影响极限 $P^{\lim}$；同时，我们将明确求出 $\xi(t)$和 $c(t)$。不假设 $\beta_2=0$时，一个一般的 S^1-不动点具有如下形式

$$(\alpha,\beta)=((\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2))=((r,0),(0,s)),$$

其中 $r^2+s^2=a^2$。我们假设 $r,\ s\neq 0$。对于一条从$((r,0),(0,s))$ 出发并趋向无穷远边界的梯度流线 $(\alpha(t)\ \beta(t))$，我们必有

$$(\alpha(t),\beta(t))=((\sqrt{e^{c_1(t)}+r^2},\sqrt{e^{c_1(t)}+e^{c_2(t)}-e^{c_3(t)}},(\sqrt{e^{c_3(t)}},\sqrt{e^{c_2(t)}+s^2})),$$

使得 $(\alpha(t)\ \beta(t))$ 对所有 t 都满足方程 (6.3)–(6.7)。这些方程可转化为以下等式：

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)=2(1+r^2e^{-c_1(t)})(2+\xi_1(t)-\xi_2(t)) \\ \dot{c}_2(t)=2(1+s^2e^{-c_2(t)})(2+\xi_1(t)-\xi_2(t)) \\ \dot{c}_3(t)=2(2+\xi_2(t)-\xi_1(t)) \\ \dot{c}_1(t)e^{c_1(t)}+\dot{c}_2(t)e^{c_2(t)}-\dot{c}_3(t)e^{c_3(t)}=2(e^{c_1(t)}+e^{c_2(t)}-e^{c_3(t)})(2+\xi_2(t)-\xi_1(t)) \\ (e^{c_1(t)}+r^2)e^{c_3(t)}=(e^{c_1(t)}+e^{c_2(t)}-e^{c_3(t)})(e^{c_2(t)}+s^2). \end{cases}$$

设 $u(t)=2+\xi_1(t)-\xi_2(t)$，以及 $2+\xi_2(t)-\xi_1(t)=4-u(t)$。设 $S(t)=e^{c_1(t)}+e^{c_2(t)}$。则有

$$\dot{c}_1e^{c_1}+\dot{c}_2e^{c_2}-\dot{c}_3e^{c_3}=2(S-e^{c_3})(4-u).$$

进一步代入，得到

$$2u(S+a^2)-2e^{c_3}(4-u)=2S(4-u)-2e^{c_3}(4-u),$$

因此,

$$2u(S+a^2)=2S(4-u).$$

这给出

$$u(t)=\frac{4S(t)}{2S(t)+a^2}.$$

另一方面,

$$\dot{S}(t)=\dot{c}_1(t)e^{c_1(t)}+\dot{c}_2(t)e^{c_2(t)},$$

由此得到

$$\dot{S}(t)=2u(t)(e^{c_1(t)}+r^2)+2u(t)(e^{c_2(t)}+s^2)=2u(t)(S(t)+a^2).$$

代入 u（t），得到一个涉及 S（t）的常微分方程:

$$\dot{S}(t)=\frac{8S(t)(S(t)+a^2)}{2S(t)+a^2}.$$

解出 S（t），得到

$$S(t)(S(t)+a^2)=C_0\cdot e^{8t},$$

因此,

$$S(t)=\frac{-a^2+\sqrt{a^4+4C_0e^{8t}}}{2}.$$

现在，我们求解 $c_1(t)$、 $c_2(t)$ 和 $c_3(t)$。注意，我们必须有

$$\frac{e^{c_1(t)}+r^2}{e^{c_2(t)}+s^2}=K,$$

对于某个常数 K。事实上，我们有

$$\frac{d}{dt}(e^{c_1(t)}+r^2)=2u(t)(e^{c_1(t)}+r^2),$$
$$\frac{d}{dt}(e^{c_2(t)}+s^2)=2u(t)(e^{c_2(t)}+s^2),$$

因此,

$$\frac{d}{dt}(\frac{e^{c_1(t)}+r^2}{e^{c_2(t)}+s^2})=\frac{2u(e^{c_1}+r^2))(e^{c_2}+s^2)-(e^{c_1}+r^2)(2u(e^{c_2}+s^2)}{(e^{c_2}+s^2)^2}=0.$$

综合以上，我们得到

$$c_1(t)=\ln(\frac{KS(t)+(Ks^2-r^2)}{K+1}),$$

$$c_2(t) = \ln(\frac{S(t) - (Ks^2 - r^2)}{K+1}),$$
$$c_3(t) = \ln(\frac{S(t)}{K+1}).$$

为确保 $c_1(t)$ $c_2(t)$ $c_3(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义且满足正确的边界条件，我们可以看出必须有

$$Ks^2 - r^2 = 0,$$

这意味着

$$K = \frac{r^2}{s^2}.$$

因此，我们必有

$$c_1(t) = \ln(\frac{KS(t)}{K+1}),$$
$$c_2(t) = c_3(t) = \ln(\frac{S(t)}{K+1}).$$

对于 $r = 0$ 或 $s = 0$的情形，例如 $s = 0$ 和 $r = a$，我们有 $c_2 = c_3 = 0$，并且

$$c_1(t) = c(t) = \ln(\frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 4C_0e^{8t}}}{2}).$$

在上述所有情形中，t 的边界条件均得到满足，并且总可以选取 $\xi_1(t)$ $\xi_2(t)$，使得 $\xi_1(t)$ $+\xi_2(t)$ $= 0$，从而确保 $\xi(t)$ $=$ $(\xi_1(t)$ $\xi_2(t))$ 是 $\mathbf{f}/\mathbf{t}$中的无迹元素，对所有 t均成立。

我们进一步观察到，无论 r 和 s取何值，经过重整化后，极限全纯表示均不受影响，即 $C^{\lim}$ 和 $P^{\lim}$ 保持不变。

6.2 $\mathbb{Z}_3$:

现在我们研究 $\mathbb{Z}_3$ 情形。再次令 ρ_0 表示 $\mathbb{Z}_2$ 的平凡表示，并令 ρ_1、ρ_2 分别表示具有特征向量 $\begin{pmatrix}1 & \omega & \omega^2\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & \omega^2 & \omega\end{pmatrix}$ 的非平凡不可约表示。令 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$、$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，其中 α_j、β_j 仍为边映射，而 α_j^*、β_j^*为它们的共轭转置。固定 $\zeta_1 = (a^2, b^2, -a^2 - b^2)$ $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| \neq |b|$。

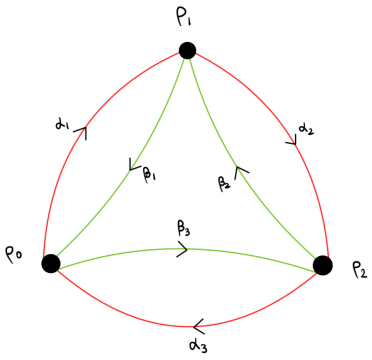


图 8: $(\alpha,\ \beta) = ((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),\ (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3))$

方程

$$[\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*] = \zeta_1 \tag{6.8}$$

$$[\alpha, \beta] = 0 \tag{6.9}$$

转化为以下等式:

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = \alpha_3\beta_3 \\ \alpha_1\alpha_1^* - \beta_1\beta_1^* + \beta_3\beta_3^* - \alpha_3\alpha_3^* = a^2 \\ \alpha_2\alpha_2^* - \beta_2\beta_2^* + \beta_1\beta_1^* - \alpha_1\alpha_1^* = b^2. \end{cases}$$

同样，上述方程中存在相同的记号滥用，其中 α_j、α_j^*、β_j、β_j^* 指的是相应映射在省略方向后的数值。

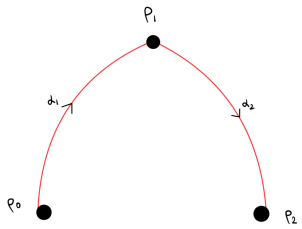
除规范等价外，共有三个孤立的临界点，见图 9，它们为

$$\begin{aligned} (x_1)\ \ &\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \alpha_3 = 0,\ \alpha_1\alpha_1^* = a^2,\ \alpha_2\alpha_2^* = a^2 + b^2, \\ (x_2)\ \ &\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = 0,\ \beta_1\beta_1^* = b^2,\ \beta_3\beta_3^* = a^2 + b^2, \\ (x_3)\ \ &\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \alpha_3 = 0,\ \alpha_2\alpha_2^* = b^2,\ \beta_3\beta_3^* = a^2. \end{aligned}$$

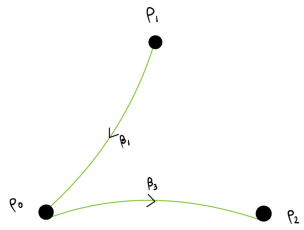
用坐标表示，我们有:

$$x_1 = ((a, \sqrt{a^2 + b^2}, 0), (0, 0, 0)),$$

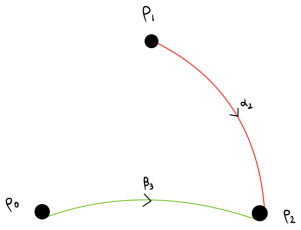
$$x_2 = ((0, 0, 0), (b, 0, \sqrt{a^2 + b^2})),$$



(a) 临界点 x_1



(b) 临界点 x_2



(c) 临界点 x_3

图 9: S^1-不动点 / 临界点

$$x_3 = ((0, b, 0), (0, 0, a)).$$

容易看出， x_3 是莫尔斯函数的全局极小值，因此它必定是指标为0 的临界点，这意味着 x_1 和 x_2 是指标为2 的临界点。现在，我们分别分析从 x_1 和 x_2 出发的梯度流线，并计算极限全纯表示。

6.2.1 情形 x_1:

和之前一样，我们先写出从 x_1 到无穷远边界的梯度流线$(\alpha(t)\ \beta(t))$，也就是说，对所有 t，以下方程均成立:

$$2\alpha(t) + [\xi(t), \alpha(t)] = \dot{\alpha}(t), \tag{6.10}$$

$$2\beta(t) + [\xi(t), \beta(t)] = \dot{\beta}(t), \tag{6.11}$$

$$[\alpha(t), \alpha(t)^*] + [\beta(t), \beta(t)^*] = \zeta_1, \tag{6.12}$$

$$[\alpha(t), \beta(t)] = 0, \tag{6.13}$$

$$\lim_{t\to-\infty}(\alpha(t), \beta(t)) = x_1. \tag{6.14}$$

考虑以下1参数族

$$(\alpha(t), \beta(t)) = ((\sqrt{e^{c(t)} + a^2}, \sqrt{e^{c(t)} + a^2 + b^2}, \sqrt{e^{c(t)}}), (0, 0, 0)).$$

我们将证明，总能找到 $\xi(t)$（即 f/t 中元素的一参数族）以及实值函数 $c(t)$，满足 $c(-\infty) = -\infty$、 $c(\infty) = \infty$ 和 $\dot{c}(t) > 0$，使得 $(\alpha(t)\ \beta(t))$ 是方程 (6.10)–(6.14) 的解。目前，我们先假设结论成立，因此，$(\alpha(t)\ \beta(t))$ 定义了一条从 x_1 到无穷远的梯度流线。

现在，我们计算沿由$(\alpha(t)\ \beta(t))$给出的梯度流线的全纯表示的一参数族 $\rho(t)$。同样， $\rho(t) : \Gamma \to GL(R)$,

$$\gamma \mapsto R(\gamma)\exp((v_1 - (uv_1 - \bar{v}v_2))\alpha(t) + (v_2 - (\bar{u}v_2 + vv_1))\beta(t)).$$

我们聚焦于 $\gamma_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$，其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$。令 $N(t)$ 为 $\alpha(t)$ 的矩阵形式，即

$$N(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1\sqrt{e^{c(t)}} \\ v_1\sqrt{e^{c(t)} + a^2} & 0 & 0 \\ 0 & v_1\sqrt{e^{c(t)} + a^2 + b^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$N(t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & v_1^2\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)} + a^2 + b^2)} & 0 \\ 0 & 0 & v_1^2\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)} + a^2)} \\ v_1^2\sqrt{(e^{c(t)} + a^2)(e^{c(t)} + a^2 + b^2)} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$N(t)^3 = v_1^3\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)} + a^2)(e^{c(t)} + a^2 + b^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\eta(t) = (1-\omega)v_1 \sqrt[6]{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2)(e^{c(t)}+a^2+b^2)}$，并令 $A_1(t) = (1-\omega)N(t)$。我们有 $A_1(t)^k = (1-\omega)^k N(t)^k$，并且

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1(t)^k}{k!} \exp(A_1(t)) \tag{6.15}$$

$$= I + A_1(t) + \frac{A_1(t)^2}{2!} + \frac{A_1(t)^3}{3!} + ... \tag{6.16}$$

$$= (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_1(t)^{3j}}{(3j)!}) + (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_1(t)^{3j+1}}{(3j+1)!}) + (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_1(t)^{3j+2}}{(3j+2)!}) \tag{6.17}$$

$$= (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta(t)^{3j}}{(3j)!})I + (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta(t)^{3j+1}}{(3j+1)!})\frac{A_1(t)}{\eta(t)} + (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta(t)^{3j+2}}{(3j+2)!})\frac{A_1(t)^2}{\eta(t)^2}. \tag{6.18}$$

现在，为简化记号，我们省略 t。令

$$g_0(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^{3j}}{(3j)!} = \frac{1}{3}(e^{\eta} + e^{\omega\eta} + e^{\omega^2\eta}),$$

$$g_1(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^{3j+1}}{(3j+1)!} = \frac{1}{3}(e^{\eta} + \omega^2 e^{\omega\eta} + \omega e^{\omega^2\eta}),$$

$$g_2(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^{3j+2}}{(3j+2)!} = \frac{1}{3}(e^{\eta} + \omega e^{\omega\eta} + \omega^2 e^{\omega^2\eta}),$$

并且我们可以改写为

$$\exp(A_1) = g_0(\eta)I + \frac{g_1(\eta)}{\eta}A_1 + \frac{g_2(\eta)}{\eta^2}A_1^2.$$

令 $c_0 = g_0(\eta)$，$c_1 = (1-\omega)\frac{g_1(\eta)}{\eta}$ 和 $c_2 = (1-\omega)^2\frac{g_2(\eta)}{\eta^2}$，则有

$$\exp(A_1(t)) = c_0 I + c_1 N(t) + c_2 N(t)^2 \tag{6.19}$$

$$= \begin{pmatrix} c_0 & c_2 v_1^2 \sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & c_1 v_1 \sqrt{e^{c(t)}} \\ c_1 v_1 \sqrt{e^{c(t)}+a^2} & c_0 & c_2 v_1^2 \sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2)} \\ c_2 v_1^2 \sqrt{(e^{c(t)}+a^2)(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & c_1 v_1 \sqrt{e^{c(t)}+a^2+b^2} & c_0 \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

现在，令

$$B_1 = R(\gamma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

and

$$C_1(t) = B_1 \exp(A_1(t)) \tag{6.21}$$

$$= \begin{pmatrix} c_0 & c_2 v_1^2 \sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & c_1 v_1 \sqrt{e^{c(t)}} \\ \omega c_1 v_1 \sqrt{e^{c(t)}+a^2} & \omega c_0 & \omega c_2 v_1^2 \sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2)} \\ \omega^2 c_2 v_1^2 \sqrt{(e^{c(t)}+a^2)(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & \omega^2 c_1 v_1 \sqrt{e^{c(t)}+a^2+b^2} & \omega^2 c_0 \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

再次，我们现在想要找到一族由 1 个参数构成的基变换矩阵$P(t)$，使得对于所有的 t，都有 $P(t)B_1P(t)^{-1} = C_1(t)$。我们注意到 $B_1N = \omega NB_1$，这意味着

$$B_1A_1 = \omega A_1B_1, \tag{6.23}$$

因此，我们有

$$C_1(t) = \exp(\omega A_1(t))B_1.$$

同时，由（6.21）可得 $A_1B_1 = \omega^2 B_1A_1$，对这个恒等式反复迭代，得到

$$A_1^k B_1 = \omega^{2k} B_1 A_1^k.$$

设 $P^{-1}(t) = \exp(\mu A_1(t))$。由于 $P^{-1}C_1P = P^{-1}B_1\exp(A_1)P = B_1$，我们有

$$\exp(\mu A_1)B_1\exp(A_1)\exp(-\mu A_1) = B_1. \tag{6.24}$$

我们将项$\exp(\mu A_1)B_1$ 展开如下：

$$\exp(\mu A_1)B_1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu A_1)^n}{n!}\right) B_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!}(A_1^n B_1)$$

由于 $A_1^k B_1 = \omega^{2k} B_1 A_1^k$，我们将其代入求和式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!}(\omega^{2n} B_1 A_1^n).$$

由于 B_1 是一个常数，我们得到

$$\exp(\mu A_1)B_1 = B_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu\omega^2)^n A_1^n}{n!} = B_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu\omega^2 A_1)^n}{n!} = B_1\exp(\mu\omega^2 A_1).$$

因此，结合（6.20），我们得到

$$B_1\exp(\mu\omega^2 A_1)\exp(A_1)\exp(-\mu A_1) = B_1,$$

从而得到以下方程：

$$\mu\omega^2 + 1 - \mu = 0.$$

由此可得 $\mu = \frac{1}{1-\omega^2}$，因此我们有

$$P = \exp((\omega^2-1)^{-1}A_1) = \exp(\omega N).$$

令 $\lambda(t) = v_1 \sqrt[6]{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2)(e^{c(t)}+a^2+b^2)}$,

$$d_0 = \frac{1}{3}(e^{\lambda} + e^{\omega\lambda} + e^{\omega^2\lambda}),$$

$$d_1 = \frac{1}{3\lambda}(e^{\lambda} + \omega^2 e^{\omega\lambda} + \omega e^{\omega^2\lambda}),$$
$$d_2 = \frac{1}{3\lambda^2}(e^{\lambda} + \omega e^{\omega\lambda} + \omega^2 e^{\omega^2\lambda}).$$

用矩阵形式表示，我们有

$$P(t) = d_0 I + d_1\omega N(t) + d_2\omega^2 N(t)^2 \tag{6.25}$$

$$= \begin{pmatrix} d_0 & \omega^2 d_2 v_1^2\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & \omega d_1 v_1\sqrt{e^{c(t)}} \\ \omega d_1 v_1\sqrt{e^{c(t)}+a^2} & d_0 & \omega^2 d_2 v_1^2\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2)} \\ \omega^2 d_2 v_1^2\sqrt{(e^{c(t)}+a^2)(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & \omega d_1 v_1\sqrt{e^{c(t)}+a^2+b^2} & d_0 \end{pmatrix}. \tag{6.26}$$

最后，我们分析当 t 趋于无穷大时，$C_1(t)$ 和 $P(t)$ 的极限。我们看到，对于所有的 c_0, c_1, c_2 和 d_0, d_1, d_2，当 t 趋于无穷大时，首项为 $e^{\lambda(t)}$，因此，经过重整化后，我们有

$$C_1^{\lim} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega & \omega \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

and

$$P^{\lim} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\gamma_2 = \begin{pmatrix} \omega^{-1} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$，计算过程类似。令 $A_2(t) = (1-\omega^2)(t)$，并且

$$B_2 = R(\gamma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

类似地，我们有 $C_2(t) = B_2\exp(A_2(t))$, 以及 $P(t)B_2P(t)^{-1} = C_2(t)$. 当 t 趋于无穷时，经过重整化，我们得到

$$C_2^{\lim} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega & \omega & \omega \end{pmatrix},$$

且相同

$$P^{\lim}=\begin{pmatrix}1 & \omega^2 & \omega\\ \omega & 1 & \omega^2\\ \omega^2 & \omega & 1\end{pmatrix}.$$

我们看到 $P^{\lim}$ 是投影到$\begin{pmatrix}1 & \omega & \omega^2\end{pmatrix}^T$的 $\mathbb{Z}_3$非平凡不可约表示上的投影算子，这与猜想1.2一致。

现在我们回过头来显式求解方程 (6.10)–(6.14)。我们需要找到 $c(t)$和 $\xi(t)=(\xi_1(t)\ \xi_2(t)\ \xi_3(t))$ 使得

$$\xi_1(t)+\xi_2(t)+\xi_3(t)=0,$$

$$\lim_{t\to-\infty}c(t)=-\infty,$$
$$\lim_{t\to\infty}c(t)=\infty,$$

and

$$\dot{c}(t)>0,$$

对所有 t 均成立。由 $(\alpha(t)\ \beta(t))$的构造可知，(6.12)–(6.14) 总是成立。因此，我们只需求解 (6.10)–(6.11)。方程 (6.10)–(6.11) 转化为以下等式：

$$\begin{cases}\dot{c}(t)=2(2+\xi_3(t)-\xi_1(t))\\ \dot{c}(t)=2(1+a^2e^{-c(t)})(2+\xi_1(t)-\xi_2(t))\\ \dot{c}(t)=2(1+(a^2+b^2)e^{-c(t)})(2+\xi_2(t)-\xi_3(t)).\end{cases}$$

因此，我们有

$$\frac{\dot{c}(t)}{2}=2+\xi_3(t)-\xi_1(t), \tag{6.27}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{2(1+a^2e^{-c(t)})}=2+\xi_1(t)-\xi_2(t), \tag{6.28}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{2(1+(a^2+b^2)e^{-c(t)})}=2+\xi_2(t)-\xi_3(t). \tag{6.29}$$

将 (6.25)–(6.27) 相加，得到

$$\frac{\dot{c}(t)}{2}+\frac{\dot{c}(t)}{2(1+a^2e^{-c(t)})}+\frac{\dot{c}(t)}{2(1+(a^2+b^2)e^{-c(t)})}=6.$$

因此，我们有

$$\dot{c}(t)=\frac{12}{1+\frac{1}{1+a^2e^{-c(t)}}+\frac{1}{1+(a^2+b^2)e^{-c(t)}}}.$$

我们按如下方式隐式求解 $c(t)$ f ll

$$12t+C_0=c(t)+\ln(e^{c(t)}+a^2)+\ln(e^{c(t)}+a^2+b^2).$$

我们看到，边界条件对所有 t 均成立，而且总可以选择 $\xi_1(t)+\xi_2(t)+\xi_3(t)=0$，使得 $\xi(t)$ 是 $\mathbf{f}/\mathbf{t}$ 中的无迹矩阵。这就完成了对 x_1的分类讨论。

6.2.2 情形 x_2:

对 x_2 的分类讨论与对 x_1 的分类讨论非常相似。我们采用相同的步骤，首先写出从 x_2 到无穷远边界的梯度流线 $(\alpha(t)\ \beta(t))$。在这种情况下，我们有这一参数族

$$(\alpha(t),\beta(t)) = ((0,0,0),(\sqrt{e^{c(t)}+b^2},\sqrt{e^{c(t)}},\sqrt{e^{c(t)}+a^2+b^2})).$$

此处略去 $c(t)$ 的显式计算，因为它与前一种情形完全相同。我们再次计算沿着这条梯度流线的全纯表示 $\rho(t):\Gamma\to GL(R)$,

$$\gamma\mapsto R(\gamma)\exp((v_1-(uv_1-\bar{v}v_2))\alpha(t)+(v_2-(\bar{u}v_2+vv_1))\beta(t)),$$

首先关注 $\gamma_1=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}$。

令 $M(t)$ 为 $\beta(t)$的矩阵形式，即

$$M(t)=\begin{pmatrix}0 & v_2\sqrt{e^{c(t)}+b^2} & 0\\ 0 & 0 & v_2\sqrt{e^{c(t)}}\\ v_2\sqrt{e^{c(t)}+a^2+b^2} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

我们有

$$M(t)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & v_2^2\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+b^2)}\\ v_2^2\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & 0 & 0\\ 0 & v_2^2\sqrt{(e^{c(t)}+b^2)(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & 0\end{pmatrix},$$

and

$$M(t)^3=v_2^3\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2)(e^{c(t)}+a^2+b^2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

令 $D_1(t)\ =(1-\omega)M(t)$。我们有 $D_1(t)^k\ =(1-\omega)^kM(t)${v37>。按照前面的同样计算，我们有

$$\exp(D_1(t))=c_0I+c_1M(t)+c_2M(t)^2 \tag{6.30}$$

$$=\begin{pmatrix}c_0 & c_1v_2\sqrt{e^{c(t)}+b^2} & c_2v_2^2\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+b^2)}\\ c_2v_2^2\sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & c_0 & c_1v_2\sqrt{e^{c(t)}}\\ c_1v_2\sqrt{e^{c(t)}+a^2+b^2} & c_2v_2^2\sqrt{(e^{c(t)}+b^2)(e^{c(t)}+a^2+b^2)} & c_0\end{pmatrix}. \tag{6.31}$$

现在，再设

$$B_1=R(\gamma_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},$$

and

$$F_1(t) = B_1 \exp(D_1(t)) \tag{6.32}$$

$$= \begin{pmatrix} c_0 & c_1 v_2 \sqrt{e^{c(t)} + b^2} & c_2 v_2^2 \sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)} + b^2)} \\ \omega c_2 v_2^2 \sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)} + a^2 + b^2)} & \omega c_0 & \omega c_1 v_2 \sqrt{e^{c(t)}} \\ \omega^2 c_1 v_2 \sqrt{e^{c(t)} + a^2 + b^2} & \omega^2 c_2 v_2^2 \sqrt{(e^{c(t)} + b^2)(e^{c(t)} + a^2 + b^2)} & \omega^2 c_0 \end{pmatrix}. \tag{6.33}$$

现在，我们求得一参数族基变换矩阵 $W(t)$，使得$W(t)(t)(t)$，对所有 t 都成立。按照相同步骤，我们得到

$$W(t) = \exp(\omega M(t)) = d_0 I + d_1 \omega M(t) + d_2 \omega^2 M(t)^2,$$

其矩阵形式如下:

$$W(t) = \begin{pmatrix} d_0 & \omega d_1 v_2 \sqrt{e^{c(t)} + b^2} & \omega^2 d_2 v_2^2 \sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)} + b^2)} \\ \omega^2 d_2 v_2^2 \sqrt{e^{c(t)}(e^{c(t)} + a^2 + b^2)} & d_0 & \omega d_1 v_2 \sqrt{e^{c(t)}} \\ \omega d_1 v_2 \sqrt{e^{c(t)} + a^2 + b^2} & \omega^2 d_2 v_2^2 \sqrt{(e^{c(t)} + b^2)(e^{c(t)} + a^2 + b^2)} & d_0 \end{pmatrix}.$$

令 t 趋于无穷大，并进行重整化后，我们得到

$$F_1^{\lim} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega & \omega \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

and

$$W^{\lim} = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

至于 $\gamma_2 = \begin{pmatrix} \omega^{-1} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$，我们有 $D_2(t) = (1 - \omega^2)M(t)$，并且

$$B_2 = R(\gamma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

令 $F_2(t) = B_2 \exp(D_2(t))$，且 $W(t)B_2W(t)^{-1} = F_2(t)$。当 t 趋于无穷大时，进行重整化后，我们有

$$F_2^{\lim} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega & \omega & \omega \end{pmatrix},$$

且相同

$$W^{\lim} = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们看到， $W^{\lim}$ 是投影到另一个非平凡不可约表示上的投影算子， $\left(1\ \omega^2\ \omega\right)^T$ 属于 $\mathbb{Z}_3$，这同样是猜想 1.2所预言的。

参考文献

[1] Atiyah, M. F., Bott, R., 黎曼曲面上的杨–米尔斯方程，《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：数学与物理科学，308(1505)，523-615。（1983年）[2]Batyrev, V., Dais, D. I., 强 *McKay* 对应、弦论霍奇数与镜像对称，《Topology》35，第4期，901–929。（1996年）[3] Bridgeland, T., King, A., Reid, M., 作为导出范畴等价的 *McKay* 对应，《美国数学会杂志》14，第3期，535–554。（2001）[4] Craw, A.,*McKay* 对应与 *McKay* 箭图的表示，（博士学位论文，华威大学）。（2001）[5] Da Silva, A. C., Da Salva, A. C., 辛几何讲义（第2卷），柏林：施普林格。（2008）[6] Denef, J., Loeser, F., 动机积分、商奇点与 *McKay* 对应，《Compositio Mathematica》131，第3期，267–290。（2002年）[7]Digiosia, L., Nelson, J., 简单奇点链环的接触 *McKay* 对应，arXiv预印本 arXiv:2107.07102。（2021）[8] Fisher, J. M., 超凯勒商的拓扑与几何，多伦多大学（加拿大）。（2014年）[9] Floer, A.,三维流形的瞬子不变量，《数学物理通讯》118，第2期，215-240。（1988）[10] Friedman, R., Morgan, J. W.,规范理论与四维流形的拓扑（第4卷），美国数学会。（1998）[11] Fulton, W., Harris, J., 表示论：入门教程，第129卷，施普林格科学与商业媒体。（2013）[12] Gompf, R. E., Stipsicz, A., *4*-流形与 *Kirby* 演算（第20卷），美国数学会。（1999）[13] Gonzalez-Sprinberg, G., Verdier, J-L., *McKay* 对应的几何构造，《高等师范学院科学年刊》，第16卷，第3期，409-449。（1983年）[14] Griffiths, P., Harris, J.,《代数几何原理》，Wiley Interscience，纽约。（1994年）https://doi.org/10.1002/9781118032527

[15] Hitchin, N. J., 黎曼曲面上的自对偶方程，《伦敦数学会会刊》s3-55：59-126。（1987年）[16] Ito, Y., Nakajima, H., 三维中的 *McKay* 对应与希尔伯特概形，《Topology》39，第6期，1155-1191。（2000年）[17] Ito, Y., Reid, M., *SL (3, C)* 的有限子群的 *McKay* 对应，《高维复簇》（特伦托，1994年），221-240。（1996年）[18] Kaledin, D., 辛商奇点的 *McKay* 对应，《Invent. Math.》148，第1期，151–175。（2002年）[19]Kirwan, F. C., 辛几何与代数几何中商空间的上同调，（MN-31），第31卷，普林斯顿：普林斯顿大学出版社。（1985年）https://doi.org/10.1515/9780691214566[20]Kobayashi, S., 复向量丛微分几何 （第793卷），普林斯顿大学出版社。（2014年）[21] Kobayashi, S., Nomizu, K., 微分几何基础 （第1卷，第2号），纽约，伦敦。（1963年）[22] Kronheimer, P. B., 作为超凯勒商的 *ALE* 空间构造，《J. Differential Geom.》29(3)，665-683。（1989年）[23] Kronheimer, P. B., 引力瞬子的 *Torelli*型定理，《J. Differential Geom.》29(3)，685-697。（1989年）[24]Kronheimer, P. B., Nakajima, H., *ALE* 引力瞬子上的杨-米尔斯瞬子 《Mathematische Annalen》288，第1期，263-307。（1990年）[25] McKay, J., 图、奇点与有限群，《Uspekhi Matematicheskikh Nauk》38(3)，159-162。（1983年）[26] McLean, M., Ritter, A. F., 通过 *Floer* 理论研究孤立奇点的 *McKay* 对应，《J. Differential Geom.》124，第1期，113-168。（2023年）[27] Reid, M., *McKay* 对应，arXiv预印本 alg-geom/9702016。（1997年）[28] Yan, J., 四维超*Kähler ALE*空间的一种新规范理论构造，《Math. Ann.》391，1009–1044。（2025年）https://doi.org/10.1007/s00208- 024-02944-3