arXiv:2601.08200v1 [math.GT] 13 Jan 2026

布鲁尼安链环与 Kontsevich 图复形 I

BORIS BOTVINNIK 与 TADAYUKI WATANABE

Dedicated to Professor Tomotada Ohtsuki on the occasion of his 60th birthday.

Abstract. 我们构造了一个自然的链映射，将 Kontsevich 图复形映射到 $B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 的有理奇异链复形，其中维数 $2k$ 足够大。此构造推广了 Goussarov 和 Habiro 关于三维流形中三价图手术的理论。我们的构造可视为 Kontsevich 图复形的拓扑实现。我们还给出了在 $B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 的有理同伦群中构造元素的新方法，这些元素由图复形中众所周知的圈所确定。

Contents

1. 引言 2 1.1. 动机与主要结果 2 1.2. 弦链环空间中的基本括号 6 1.3. 一般括号运算 9 1.4. 图手术 10 1.5. 论文结构 11 致谢 11 2. 弦链环预备知识 12 2.1. 弦链环空间的一些同伦群 12 2.2. 具有布鲁尼安零同伦的嵌入 13 2.3. 顶点手术与框架 14 3. 图手术 15 3.1. 有向图圈 15 3.2. 从图到 $B\mathrm{Diff}_\partial(D^d)$ 中的链 17 4. 四价顶点 18 4.1. 嵌入怀特海德积 18 4.2. 嵌入怀特海德积的指定布鲁尼安零同伦 20 4.3. 雅可比关系的显式零同伦 22 4.4. 布鲁尼安性质 24 4.5. 对称性。27 5. 顶点手术的运算 28 5.1. 悬挂 29 5.2. 去环化 30 5.3. 迭代手术 33 5.4. 布鲁尼安零同伦系统的复合 35

Date: 2026年1月14日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 57R50, 57Q45, 55Q15, 55R40, 57R65。BB 部分获得了 Simons 合作基金 708183 的资助。TW 部分获得了 JSPS 科学研究补助金 21K03225、20K03594 以及京都大学数理解析研究所（RIMS）的资助。

5.5. 布伦尼安零同伦系统的悬挂 37 6. 五价顶点 38 6.1. 10T-链环 38 6.2. 作为环的10T-链环及其零同伦的存在性 41 6.3. 作为链的和的10T-链环 43 6.4. 指定10T-链环零同伦的类 44 6.5. $\varphi^{(5)}$ 45的布鲁尼安性质6.6. $\varphi^{(5)}$ 47的对称性 6.7. ω_{T_5} 48的悬挂与去环化 7. 6 价或更高价顶点 49 7.1. Lie-hedron 49 7.2. 6价顶点上的手术 50 7.3. ℓ价顶点上的手术 52 8. 顶点手术的加厚：定理 1.10 的证明 54 8.1. 加厚概述 54 8.2. 将 $B_{T_\ell(p,\ q)}$ 中的球面合并成一个球面。56 8.3. 余维一面的可压缩性 57 8.4. 高余维分层处的相容性 58 8.5. 将 $\omega_{T_\ell(p,\ q)}$ 提升到 Emb 61 9. 变形到有理同伦群 63 9.1. 复形 $K_{5\vec{\gamma}}$ 63 9.2. $\widehat{M_{(\Gamma,\alpha)}}$ 67的同调 9.3. 同伦余极限的同调 69 10. 叶形式与定向 69 10.1. 链的半边定向 69 10.2. 相容叶形式：引理 10.3 的证明 72 10.3. 诱导定向：定理 10.9 的证明 79 11. 总结性评论 82 附录 A. 通过张成流形构造叶形式 82 A.1. 基本括号的张成流形及其四重交 82 附录 B. 延拓闭形式 86 附录 C. 雅可比恒等式中的符号 86 参考文献 87

1. Introduction

1.1. 动机与主要结果。 众所周知，Kontsevich 图复形（[Kon]）的同调，也称为图同调，自然地出现在各种数学对象中。与本文相关的一个例子是，由三价图组成的图同调部分在研究同调3-球面的有限型不变量时发挥着核心作用（[Oh96], 另见[Oh02]）。特别是，Goussarov 和 Habiro 在各自独立的工作中，为同调3-球面中的三价图手术发明了优美的方法（[Gou, Hab, GGP]）。他们的手术构造

已知可在图同调的 k 3价部分与定义有限型不变量的整同调 3-球面的 Ohtsuki 过滤的齐次 $3k$ 部分之间给出一个同构（[Hab, GGP]）。对于高维流形，第二作者研究了 Goussarov–Habiro 针对三价图的手术的高维类比，并发现这些类比在 $B\mathrm{Diff}_\partial(D^d)$ 的有理同伦群中确定了非平凡子空间； $B\mathrm{Diff}_\partial(D^d)$ 是由微分同胚组成的群的分类空间，其中这些微分同胚在边界的一个邻域上逐点固定，见 $d \geq 4$ （参见 [Wa09, Wa18, Wa21, Wa22]）。另一方面，众所周知，图同调中还存在许多并非三价的非平凡类（[BNM, Br, Wi, WZ, BrWi]）。

最近，Kupers 和 Randal-Williams 针对相当一般的 i，计算了 $\pi_i(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})) \otimes \mathbb{Q}$，更新了 Farrell 和 Hsiang 基于稳定拟同痕理论（[FH]）所作的计算。

定理 1.1 （[KRW]）。对于 $2k \geq 6$，我们有

$$\pi_i(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & (i \equiv 2k-1 \ mod\ 4,\ and\ i \geq 2k-1), \\ 0 & (i \not\equiv 2k-1 \ mod\ 4,\ or\ i < 2k-1) \end{cases}$$

在次数的“带区” $\bigcup_{n\geq 2}[2kn-4n-1, 2kn-1]$ 之外。上面的项 $\mathbb{Q}$ 可由 *Pontryagin–Weiss* 类（[We]）[1]检测到。

我们研究“带区”内部发生的事情。简要回顾一下 Kontsevich 图复形（$\mathcal{GC}$，∂）的定义。令 $\mathcal{GC}$ 为由定向图（Γ，o）的等价类张成的 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间，其中

- Γ 是一个有限连通图，且所有顶点的价至少为 3，
- o 是对$^{\Gamma}\}$的 $\mathbb{R}^{\{}$边的一种定向选择，并且
- $(\Gamma,\ -o) = -(\Gamma,\ o)$。

我们将简记 Γ 为（Γ，o）。与 [BNM], 一样，我们考虑按“次数” $n = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)|$和“超额” $m = 2|E(\Gamma)| - 3|V(\Gamma)|$给出的双分次$\mathcal{GC} = \bigoplus_{n,\ m} \mathcal{GC}^{(n,m)}$，其中 $E(\Gamma)$是 $\Gamma\}$的边数， $V(\Gamma)$是 $\Gamma\}$的顶点数。边界算子 ∂: $\mathcal{GC}^{(n,m)} \to \mathcal{GC}^{(n,m-1)}$ 定义为

$$\partial\Gamma = \sum_{v\in V(\Gamma)} \mathrm{split}(\Gamma, v), \tag{1.1}$$

其中 split(Γ, v) 是将 Γ 中的一个顶点 v 替换为一条连接两个边界顶点的边后，所有可能得到的图之和。split(Γ, v) 中每一项的定向按自然方式确定，使新边标记为 1。公式 (1.1) 类似于 Stasheff 与 Schlessinger 的工作（[St]）中引入的 L_∞-代数的定义关系。另请参见例 1.8。我们用 $H_{n,m}(\mathcal{GC})$ 表示 $(\mathcal{GC}, \partial)$ 的同调中的第 (n, m) 项。Kontsevich 使用对偶图复形定义了光滑同调球丛的特征类（[Kon]）。这里给出的图复形版本适用于偶维流形。另有一种适用于奇维流形的版本（见 [Kon]）。根据 ∂ 的定义，三价部分$H_{n,0}(\mathcal{GC})$ 是 $\mathcal{GC}^{(n,0)}$/IHX，其中 IHX 关系如图 1 所示。

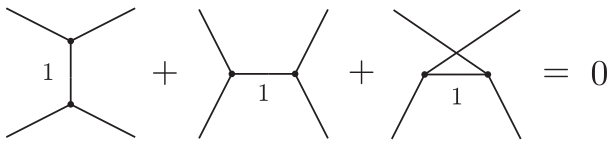


FIGURE 1. IHX 关系。

Goussarov 和 Habiro 的工作可以视为图同调中三价部分的一种“拓扑实现”。让我们更精确地回顾这一点。Goussarov–Habiro 的

[1]Krannich 和 Randal-Williams（[KrRW]）还对奇数维圆盘的 [FH] 计算作出了重大更新。

图手术定义为：对嵌入 3 维流形中的若干个互不相交的亏格 3 把手体反复进行手术，如图 2 所示。对单个亏格 3 把手体进行手术，对应于图中的一个 3价顶点（见图 2 右侧）；Matveev 最初将其定义为用加厚博罗米恩弦链的补集替换该把手体（[Mat]）。

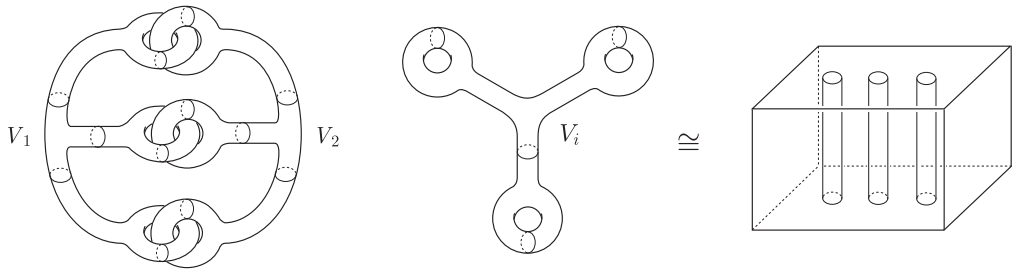


FIGURE 2. 从一个 3价图到亏格 3 把手体的并集，其中每个把手体都与一个加厚弦链环的补集相对应。

对于高维流形，3价顶点上的手术通过使用高维 Borromean 弦环，以类似的方式定义。特别地，沿着一棵 1、三价树 T 进行的 3价顶点手术迭代，其中带有 ℓ 1价顶点，并将这些顶点附加到标准包含 $I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_\ell} \subset I^N$ 的分支上，在条件 $a_1 + \cdots + a_\ell = (\ell - 1)N - \ell$ 满足时，会得到另一个 Brunnian 弦环 f_T：$I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_\ell} \to I^N$（参见 [BW，引理 3.7]）。我们将看到，$f_T$ 的 ℓ 个分支表示嵌入 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\ell-1}$ 的迭代怀特海德积 $I^N - (I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_{\ell-1}}) \simeq S^{N-a_1-1} \vee \cdots \vee S^{N-a_{\ell-1}-1}$：$I^{N-a_j-1} \to I^N - (I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_{\ell-1}})$，这些嵌入生成有理同伦群，而括号的类型由树 T 决定。例如，我们有如下对应关系：

$$T = \quad \longmapsto \quad f_T \in \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_4}, I^N - (I^{a_1} \cup I^{a_2} \cup I^{a_3}))$$

$$\longmapsto \quad [[\gamma_1, \gamma_2], \gamma_3] \in \pi_{a_4}(I^N - (I^{a_1} \cup I^{a_2} \cup I^{a_3})).$$

每个3价顶点都会产生一个嵌入怀特海德积（相关研究见 [Hab, GGP, Kos24a, Kos24b, KKV20, KKV24, Koy, KMV, STT]）。从这一观点出发，可得以下结论[2]。

观察1.2 (另见推论4.13)。若 $N - a_i \geq 3$ 对于 $i = 1$，2、3、4>，具有四个一价顶点的一、三价树的 IHX 关系（图1）对应于同伦群中的怀特海德积的雅可比恒等式($I^N - (I^{a_1} \cup I^{a_2} \cup I^{a_3})$)：

$$(-1)^{q_1 q_3}[[\gamma_1, \gamma_2], \gamma_3] + (-1)^{q_1 q_2}[[\gamma_2, \gamma_3], \gamma_1] + (-1)^{q_2 q_3}[[\gamma_3, \gamma_1], \gamma_2] = 0,$$

其中 $q_i = N - a_i - 1$。

本文旨在为任意价至少为 3 的连通图提供一种新的拓扑实现，将其表示为 $B\mathrm{Diff}_\partial(D^d)$ 的奇异链，这与三价情形类似，从而得到 $B\mathrm{Diff}_\partial(D^d)$ 中在同调意义下非平凡的圈。令 $B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(D^d)$ 表示光滑 (D^d, ∂)-丛的分类空间的一个分支，这些丛带有沿纤维的框架；框架在 ∂D^d 附近与由欧几里得坐标确定的标准框架一致，并且其在基纤维上的限制与标准框架同伦

[2]多年前，K. Habiro 曾向第二作者建议一个基于高维 Kirby演算的证明。[3]当 $N = 3$ 且 $a_i = 1$时，雅可比恒等式在模去高阶交换子后仍成立。雅可比恒等式在弦链环上的提升见 [Hab, GGP]。

（相对于边界）。我们使用某些布伦尼安弦链（它们是博罗米恩弦链的自然类比），用于更高价的 ℓ 价顶点（定理 1.6），以证明以下结果。

定理 A (主定理)。设 $\mu \geq 1$ 是一个整数。设 $\mathcal{GC}^{(\leq \mu)}$ 表示将 $m > \mu$ 替换为 0 后从 $\mathcal{GC}$ 得到的子复形。设 $S_*(-;\ \mathbb{Q})$ 表示归一化有理奇异链复形，即有理奇异链模去退化链所得的复形(例如[FHT, I.4.(a)])。对于充分大的整数 k，存在一个自然链映射

$$\overline{\phi}\colon \mathcal{GC}^{(\leq \mu)} \to S_*(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q})$$

它延拓了三价图手术，并将 $\mathcal{GC}^{(n,m)}$ 映射到 $S_{(2k-3)n+m}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k});\ \mathbb{Q})$。因此，我们得到诱导映射

$$\overline{\phi}_*\colon H_{n,m}(\mathcal{GC}^{(\leq \mu)}) \to H_{(2k-3)n+m}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q}).$$

定理 A 分为定理 1.11 和 10.9。维数 $2k$ 的条件在 $2k \geq 2\mu^2 + 8\mu + 10$ 时成立。参见注 6.21。由于 $m = 2n - |V(\Gamma)| \leq 2n - 1$，我们有$H_{n,\,m}(\mathcal{GC}^{(\leq 2n-1)}) = H_{n,\,m}(\mathcal{GC})$。我们构造的链映射 ϕ 是三价图构造的自然延拓。也就是说，正如利用亏格 3 把手体族和博罗米安链环来定义三价图上的手术一样，我们利用更高亏格的把手体族，以及满足类似 L_∞ 关系的布鲁尼安链环族，来定义图上的手术。

下面给出一个由超额为 2 的图得到的 $H_*(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q})$ 中的同调类的具体例子。令 X 为具有 5 条辐条的轮图。令 Y 为另一个具有 6 个顶点和 10 条边、超额为 2 的图，它在 $\mathcal{GC}$ 中是非平凡的（见图 3）。我们通过图 3 中边上的标号给出 X 和 Y 的定向。根据 Bar-Natan–McKay（[BNM]），或者也可以很容易验证，以下线性组合是 $\mathcal{GC}$ 中一个非平凡的 ∂-循环。

$$\gamma := \frac{2X}{|\mathrm{Aut}\, X|} - \frac{Y}{|\mathrm{Aut}\, Y|} = \frac{X}{5} - \frac{Y}{2}$$

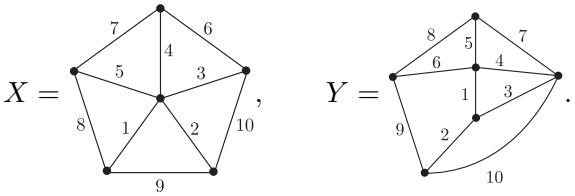


FIGURE 3. 图 X 和 Y。

推论 B. 令 $k \geq 17$。则 ϕ_γ 是 $(8k - 10)$-循环，属于 $S_{8k-10}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q})$。

定理 A 的一个重要特点是，可以用特征类来计算由图得到的循环。特别是，Kontsevich 构形空间积分给出一个映射

$$H^*(\mathcal{GC}^\vee) \otimes H_*(\mathcal{GC}^{(\leq \mu)}) \xrightarrow{\overline{\phi}_*} H^*(\mathcal{GC}^\vee) \otimes H_*(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

其中 $\mathcal{GC}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{GC},\ \mathbb{Q})$ 是对偶复形。在第二部分（[BWII]）中，我们证明这并非平凡。特别地，我们有如下结论。

定理 C ([BWII])。设 μ 为整数 ≥ 1。对于充分大的整数 k，诱导映射$\phi_*\colon H_{m,\,n}(\mathcal{GC}^{(\leq \mu)}) \to H_{(2k-3)n+m}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q})$ 在超额 $\mu - 1$以内是单射。此外，单射性可通过 *Kontsevich* 构形空间积分检测。

从某种意义上说，定理 C 是我们结果中较容易的部分：从图中检测 $H_{(2k-3)n+m}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q})$ 的类的方法与 [Wa18, Wa21] 中的类似。本文中的引理 10.6 和 10.8 在 [BWII] 的计算中起着关键作用。另见注记 10.4。根据 [Wa21]，超额为 $m-1=0$ 的三价图的定理 C 对 $2k \geq 4$ 成立。对于正余量图，我们有以下结果。

推论 D ([BWII])。设 $k \geq 17$。则 $(8k-10)$-循环 ϕ_γ 在 $H_{8k-10}(B\overline{\mathrm{D}}\mathrm{iff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q})$ 中代表一个非平凡类。

构造 ϕ 的一个关键思想是在顶点上定义手术，以在弦链环空间中实现特定的代数结构。这种代数结构推广了球面的楔和的同伦群上的分次李代数结构

$$\pi_*(I^N - (I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r})) = \pi_*(S^{N-a_1-1} \vee \cdots \vee S^{N-a_r-1}),$$

其中，对三价顶点的手术为其提供几何实现。对于价高于三的顶点，我们要做的是通过具有布鲁尼安性质的弦链环族，实现 L_∞-代数中的高阶关系。我们将看到，通过按顶点的价归纳地构造顶点手术，这种实现确实存在。

定理 E (定理 9.9)。设 $k \geq 17$。则 $(8k-10)$-循环 ϕ_γ 代表有理 *Hurewicz* 映射 $\pi_{8k-10}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k})) \otimes \mathbb{Q} \to H_{8k-10}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q})$ 的像中的一个类。

推论 D 和定理 E 表明 $\pi_{8k-10}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k})) \otimes \mathbb{Q}$ 并非平凡。由于自然映射 $B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}) \to B\mathrm{Diff}_{\partial}(D^{2k})$ 的同伦纤维由 $\Omega^{2k}SO_{2k}$ 的基点连通分支给出，且对于 $i \geq 4k-4$，$\pi_i(SO_{2k}) \otimes \mathbb{Q} = 0$（例如见 [FHT，第 220] 页），我们有 $\pi_{8k-10}(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k})) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{8k-10}(B\mathrm{Diff}_{\partial}(D^{2k})) \otimes \mathbb{Q}$。这与定理 1.1 相容，因为 $8k-10$ 位于 [KRW 的第 8 带 $[8k-17, 8k-2]$，见定理 C]。更一般地，对于 $0 \leq m \leq 2n-1$，次数 $(2k-3)n+m = 2kn-3n+m$ 位于 [KRW] 的第 $2n$ 带 $[2kn-4n-1, 2kn-1]$。对于这些情况，ϕ_* 具有单射性的对（同调次数，$2k$）构成集合 $\bigcup_{n\geq 1, 2k\geq 20} D(n, 2k)$，其中

$$D(n,2k) = \{((2k-3)n+m, 2k) \mid 0 \leq m \leq \min\{\sqrt{k-1}-3, 2n-1\}\}.$$

注意，带 $D(n, 2k)$ 包含在第 $2n$ 条带 $[2kn-4n-1, 2kn-1]$ 中。

1.2. 弦链接空间中的基本括号。

我们引入若干族链环，用以实现价数较高的顶点。首先，我们针对简单情形进行说明。

1.2.1. 弦环。

设 N 为一个整数，满足 $N \geq 3$；并设 a_1、……、a_r 为整数，满足 $1 \leq a_1$、……、$a_r \leq N-2$。设 $I = [0,1]$。

定义 1.3（弦环）。（1）型为 $(a_1$、……、$a_r; N)$ 的弦环 是一个良嵌入

$$I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \hookrightarrow I^N$$

它在边界 $\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r})$ 附近与“标准包含”ι：$I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \hookrightarrow I^N$ 一致。标准包含 ι 定义如下。我们固定互不相同的点 p_1、p_2、……、$p_r \in \in \mathrm{Int}\ I$，并考虑平面 $\{p_j\} \times I^{N-1} \subset I^N$。然后我们假设 ι 通过将 I^{a_j} 与 $\{p_j\} \times I^{N-1}$ 的子空间 $\{p_j\} \times I^{a_j} \times \{(1_2$、……、$1_2)\}$ 按照自然方式识别，从而将 I^{a_j} 嵌入 $\{p_j\} \times I^{N-1}$。

(2) 弦环的框架 是其法丛的平凡化，并且在边界附近与标准平凡化一致。

(3) 令 $\mathrm{Emb}_{\partial}(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}, I^N)$ 表示类型为（$a_1, \ldots, a_r$; N）的弦链接空间。令 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}, I^N)$ 表示类型为（$a_1, \ldots, a_r$; N）的带框架弦链空间。我们假设这些空间的基点为 ι，可能带有标准法向标架。

对于 $\Omega = \{1, 2, \dots, r\}$ 的一个子集 S，令 $\mathcal{E}(S) = \mathrm{Emb}_\partial(\bigcup_{\lambda\in\Omega\setminus S} I^{a_\lambda}, I^N)$，并令

$$\pi_S \colon \mathcal{E}(\emptyset) \to \mathcal{E}(S)$$

是忘掉标记为 S 的分支的映射。

定义 1.4（布鲁尼安性质）。(1) 若移除 $I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}$ 中任意一个分支后，嵌入 $f \in \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r},\ I^N)$ 与标准包含 ι 同痕，则称其具有布鲁尼安性质。换言之，点 $\prod_{j\in\Omega} \pi_{\{j\}}(f) \in \prod_{j\in\Omega} \mathcal{E}(\{j\})$ 与基点位于同一个路径连通分支中。

(2) 在这种情形下，我们称从 $\pi_{\{j\}}(f)$ 到基点的 $\mathcal{E}(\{j\})$ 中的一条路径为关于移除第 j 个分支的 布鲁尼安零同伦。

我们将定义 1.4 推广到弦链环族。对于纤维化 $\pi\colon E \to X$ 的同伦纤维，我们采用标准模型：点 $x_0 \in X$ 上的同伦纤维 $\mathrm{hofib}_{x_0}(\pi)$ 是由配对 $(\gamma,\ x)$ 构成的空间，其中 $x \in X$，且 γ 是一条路径 $I \to X$，满足 $\gamma(0) = x$ 且 $\gamma(1) = x_0$。

定义 1.5（族的布鲁尼安性质）。假设给定一个连续映射

$$\sigma \colon B \to \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}, I^N),$$

其中 B 是一个有限 CW 复形。

(1) 若 σ 可提升到同伦纤维 $\mathrm{hofib}_*(\prod_{j\in\Omega} \pi_{\{j\}})$，则称 σ 具有布鲁尼安性质：

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \\ \mathrm{hofib}_*(\prod_j \pi_{\{j\}}) & \longrightarrow & \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}, I^N) & \xrightarrow{\prod_j \pi_{\{j\}}} & \prod_{j\in\Omega} \mathcal{E}(\{j\}) \end{array}$$

在这种情形下，我们称这样的提升到同伦纤维$_*(\pi_{\{j\}})$ 为 σ 关于移除第 j 个分支的布鲁尼安零同伦。

(2) 假设在子复形序列 $B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_k$ 中，对于每个 i，σ 在 B_i 上的限制相对于移除第 j 个分支具有布鲁尼安零同伦。若 σ 关于移除第 j 个分支 相对于 $\{B_i\}$ 具有布鲁尼安零同伦，则称

- $\sigma|_{B_i}$ 有一个提升到同伦纤维$_*(\pi_{\{j\}})$，该提升将给定的提升延拓到 B_{i-1} 上的 $i \geq 1$，并且
- σ 有一个提升到同伦纤维$_*(\pi_{\{j\}})$，该提升将给定的提升延拓到 B_k上。

1.2.2. 基本括号运算。设 T_ℓ 表示一棵具有一个 ℓ价顶点（“内部顶点”）和 ℓ 个叶（“外部顶点”）的连通树，并由 $\{1, 2, \dots, \ell\}$ 标记（见图 4）。

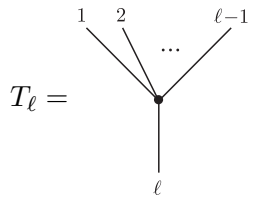


FIGURE 4. 树 T_ℓ。

令 $\mathcal{P}_{T_\ell}$ 表示由具有 ℓ 个标记叶（外部顶点）的连通树组成的偏序集；若 σ' 可由 σ 收缩若干条内部（即非支腿）边得到，则定义态射 $\sigma \to \sigma'$ 或序关系 $\sigma \leq \sigma'$。若存在一列 $\rho_0 \to \rho_1 \to \cdots \to \rho_k = \rho$ 内部边收缩，使得某个具有 ℓ 个叶的三价树 ρ_0 经收缩得到 $\rho \in \mathcal{P}_{T_\ell}$，则称 $\rho \in \mathcal{P}_{T_\ell}$ 的超额 k 为该序列的收缩次数。特别地，T_ℓ 的超额为$\ell - 3$。

定理 1.6（基本括号运算）。令 $\ell \geq 3$ 和 $n \geq 2\ell - 3$。对于 $\mathcal{P}_{T_\ell}$ 中每个超额为 k 的对象 σ，我们有一个（$k+\ell-3$）-链 $\beta_{T_\ell}(\sigma) = \frac{1}{m_\sigma}\omega_{T_\ell}(\sigma)$，属于

$$S_{k+\ell-3}(B^{\ell-3}\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3}); \mathbb{Q}),$$

我们称之为“括号”，其定义为某个映射的有理数倍

$$\omega_{T_\ell}(\sigma)\colon I^k \times I^{\ell-3} \to B^{\ell-3}\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})$$

满足以下条件 *(1)–(6)*。

(1)（相容性）若 σ 的超额为 $< \ell-3$，且有内部（即非外部）顶点 $v_1, \ldots, v_r$，满足 $\deg(v_i) = \ell_i$，则映射 $\omega_{T_\ell}(\sigma)$ 可由内部顶点 v_i 对应的映射 $\omega_{T_{\ell_i}}(T_{\ell_i})$ 的迭代悬挂经复合得到。（悬挂的定义见 *§5.1*，复合的定义见 *§5.3*。）

(2)（边界）边界 $\partial\omega_{T_\ell}(T_\ell)$ 由一个带基点环表示于

$$\Omega^{2\ell-7}B^{\ell-3}\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3}) \simeq \Omega^{\ell-4}\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3}).$$

对于每个超额为 k 的 $\sigma \in \mathcal{P}_{T_\ell}$，项 $\omega_{T_\ell}(\sigma)$ 由一个映射表示

$$I^k \to \Omega^{\ell-3}B^{\ell-3}\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3}) \simeq \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3}).$$

(3)（$\ell \geq 4$ 的关系）对于 $\ell \geq 4$，存在一种符号 $\varepsilon^n_{T_\ell}(\sigma)$ 的选取，使得关系

$$\partial\beta_{T_\ell}(T_\ell) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{P}_{T_\ell} \\ excess(\sigma)=\ell-4}} \varepsilon^n_{T_\ell}(\sigma)\beta_{T_\ell}(\sigma)$$

在 $S_{2\ell-7}(B^{\ell-3}\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3}); \mathbb{Q})$ 模去退化链后成立。

(4)（布鲁尼安性质）映射 $\omega_{T_\ell}(T_\ell)$ 相对于满足 $\sigma \in \mathcal{P}_{T_\ell} \setminus \{T_\ell\}$ 的那些 $\omega_{T_\ell}(\sigma)$ 在 $\partial(I^{\ell-3} \times I^{\ell-3})$ 上具有布鲁尼安性质。(5)（循环对称性）映射 $\omega_{T_\ell}(T_\ell)$ 具有循环对称性（见定义 *4.17*）。(6)（超额 *0*）映射 $\omega_{T_3}(T_3)\colon * \times * \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{2n-1})^{\cup 3}, I^{3n})$ 由博罗米安链环给出。

注 1.7. **(1)** 由性质（边界）和（L_∞-关系）可知，$\omega_{T_\ell}(T_\ell)$ 可视为 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})$ 中一个基点（$\ell-4$）-环的零伦，使得边界分解成若干可以降环的部分。

(2) 尽管每个项 $\omega_{T_\ell}(\sigma)$ 都通过一个固定的同伦等价 $\mathcal{E} \simeq \Omega^{\ell-3}B^{\ell-3}\mathcal{E}$ 表示为 $\mathcal{E} = \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})$ 中的一条链，我们仍考虑（$\ell-3$）重去环化，以将这些项实现为同一个（$2\ell-7$）-环中的链的项。可以证明，空间 $\mathcal{E}$ 具有小（$(\ell-1)\,n-\ell+2$）-立方体歌剧的自然作用。因此，根据识别原理（[May]），空间 $\mathcal{E}$ 是一个（$(\ell-1)\,n-\ell+2$）重环空间。由于当 $n \geq 2\ell-3$ 和 $\ell \geq 3$ 时 $(\ell-1)\,n-\ell+2 \geq \ell-3$，所以（$\ell-3$）重去环化是有意义的。

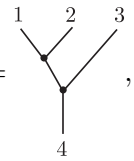
(3) 事实上，我们将证明 ω_{T_ℓ} 满足更强的布伦尼安性质：对于分支集合的任意子集，都要求存在布鲁尼安零同伦（定义 2.5）。这种更强的布伦尼安性质将在后文多处用到：在阐明 ω_{T_ℓ} 的归纳构造时（引理 6.13、假设 6.14），在构造相容的框架时（引理 2.11），在定义弦链环的悬挂时（注 5.3、定义 5.4），在归纳构造布鲁尼安零同伦时（引理 5.14、6.13、6.15），以及在链之间给出典范粘合时（引理 8.3、8.6）。

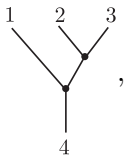
例 1.8. • 括号 $\beta_{T_3}(T_3) = \omega_{T_3}(T_3)$ 是 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^{2n-1})^{\cup 3},\ I^{3n})$ 中的一个 0-链，也就是一个点。它可由一个嵌入 $I^{2n-1} \to I^{3n} - (I^{2n-1} \cup I^{2n-1}) \simeq S^n \vee S^n$ 表示，该嵌入给出了 $\pi_{2n-1}(S^n \vee S^n)$ 中的怀特海德积（见 §4.1.1）。

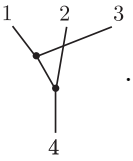
• 括号 $\beta_{T_4}(T_4)=\frac{1}{4}\omega_{T_4}(T_4)$ 是 $S_2(B\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}\partial}((I^{3n-2})^{\cup 4},\ I^{4n-1});\mathbb{Q})$ 中的一个 2-链，使得以下恒等式在 $S_1(B\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}\partial}((I_{(\ell-1)^{n-\ell+2}})^{\cup \ell},\ I^{\ell n-\ell+3});\mathbb{Q})$ 中成立

$$\partial\beta_{T_4}(T_4)=\pm\beta_{T_4}(\sigma_1)\pm\beta_{T_4}(\sigma_2)\pm\beta_{T_4}(\sigma_3)$$

对于以下 $\sigma_i(i=1,\ 2、3)$，其中有两个3价顶点和4条带标号的腿 :

$\sigma_1=$ 

, $\sigma_2=$ 

, $\sigma_3=$ 

.

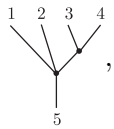
如果我们按照下文树中（10.1）的方式固定链的半边定向，则符号 $\pm$ 是确定的。这给出了雅可比恒等式

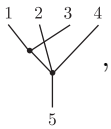
$$[[a,b],c]+(-1)^n[a,[b,c]]+(-1)^n[[a,c],b]=0$$

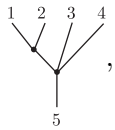
对于在 $\pi_{3n-2}(S^n\vee S^n\vee S^n)$ 中由嵌入实现的迭代怀特海德积（见定理4.8）。

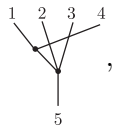
• 括号 $\beta_{T_5}(T_5)$ 是 $S_4(B^2\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}\partial}((I^{4n-3})^{\cup 5},\ I^{5n-2});\mathbb{Q})$ 中的一个4-链，其中 $\partial\beta_{T_5}(T_5)$ 由10项树组成，每棵树含有一个四价顶点、一个3价顶点和5条带标号的腿（见第 6 节）：

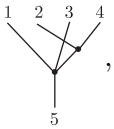
$$\begin{aligned}\partial\beta_{T_5}(T_5)=&\pm\beta_{T_5}(\tau_1)\pm\beta_{T_5}(\tau_2)\pm\beta_{T_5}(\tau_3)\pm\beta_{T_5}(\tau_4)\pm\beta_{T_5}(\tau_5)\\&\pm\beta_{T_5}(\tau_6)\pm\beta_{T_5}(\tau_7)\pm\beta_{T_5}(\tau_8)\pm\beta_{T_5}(\tau_9)\pm\beta_{T_5}(\tau_{10}),\quad\text{where}\end{aligned}$$

$\tau_1=$ 

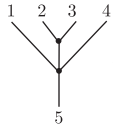
, $\tau_2=$ 

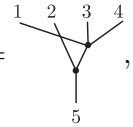
, $\tau_3=$ 

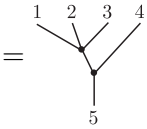
, $\tau_4=$ 

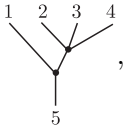
, $\tau_5=$ 

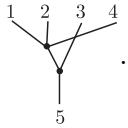
,

$\tau_6=$ 

, $\tau_7=$ 

, $\tau_8=$ 

, $\tau_9=$ 

, $\tau_{10}=$ 

.

如果我们按照下文树中（10.1）的方式固定链的半边定向，则符号 $\pm$ 是确定的。这在 L_∞-代数中实现了以下关系：

$$\begin{aligned}&[a,b,[c,d]]+(-1)^n[[a,c],b,d]+[[a,b],c,d]+[[a,d],b,c]+(-1)^n[a,c,[b,d]]\\&+(-1)^n[a,[b,c],d]-[[a,c,d],b]-[[a,b,c],d]-[a,[b,c,d]]-[[a,b,d],c]=\partial[a,b,c,d]\end{aligned}$$

for ∂-closed formal variables a,b, c d of degree n ([MSS Example 3 133])

注 1.9。 粗略地说，定理 1.6 给出了针对一族弦链环嵌入空间的怀特海德括号的高阶推广。

1.3. **一般括号运算**。 我们将迭代某些运算——“悬挂”和“解环”（§5）——将定理 1.6 的构造推广到更一般的维数组合。一般而言，一个 ℓ 价顶点可能给出一个 $\{(N-1)\ell-N-(a_1+\cdots+a_\ell)\}$-链，位于

$$\mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a_1}\cup\cdots\cup I^{a_\ell},I^N),$$

其中 $a_1,\ldots,a_\ell$ 满足 $1\le a_i\le N-2$ 和

$$a_1+\cdots+a_\ell\le(N-2)\ell-N+3. \tag{1.2}$$

当存在一个嵌入 $I^{a_1}\to I^N-(I^{a_2}\cup\cdots\cup I^{a_\ell})\simeq S^{N-a_2-1}\vee$ 时，(1.2) 中的等式成立 $\cdots\vee S^{N-a_\ell-1}$ 表示一个长度为 $\ell-1$ 的迭代怀特海德积。

为简单起见，以下我们只考虑具有 I^k 和 I^{k-1} 个分支的弦链环 $(I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}\hookrightarrow I^{2k}$。令 $T_\ell(p,\ q)$、 $p+q=\ell$ 表示配备边方向的 T_ℓ，使得标号为 1，……，p 的腿为入射方向，而标号为 $p+1$，……，ℓ 的腿为出射方向（见图5）。

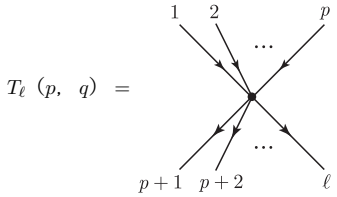


FIGURE 5. 树 $T_\ell(p,\ q)$，$\ell = p+q$。

令 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,\ q)}$ 表示由有向树构成的偏序集，其对象为 $(\sigma,\ \alpha)$，其中 $\sigma \in \mathcal{P}_{T_\ell}$ 和 α 是对 σ 的边选择方向的一种方式，且带标号的腿上的方向与 $T_\ell(p,\ q)$ 上的方向相同；态射由有向边的收缩给出。注意，若 σ 的超额为 μ，则对每个 σ，α 有 $2^{\ell-3-\mu}$ 种选择。我们固定 $T_\ell(p,\ q)$ 的入射腿（分别为出射腿）与 $(I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}$ 的分支 I^k（分别为 I^{k-1}）之间的一一对应。现在假设 $(\ell-2)k-2\ell+q+3>0$，在此情形下，对于 $a_1=\cdots=a_p=k$、$a_{p+1}=\cdots=a_\ell=k-1$，(1.2) 中的不等式是严格的。

定理 1.10（一般括号运算）。假设 k 足够大。对于 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ 中的每个对象 (σ,α)，我们有一个链 $\beta_{(\sigma,\alpha)}=\frac{1}{m_\sigma}\omega_{(\sigma,\alpha)}$，它属于 $S_{(\ell-2)k-\ell+q}\overline{(\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k});\mathbb{Q})}$，我们也称其为“括号”，定义为一个映射的有理数倍

$$\overline{\omega}_{(\sigma,\alpha)}\colon \overline{B}_{(\sigma,\alpha)}\to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$$

它来自有限 CW 复形 $B_{(\sigma,\alpha)}$，该复形带有一个满足以下条件的相对基本类。

(1)（相容性）若在 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ 中存在一个态射 $(\sigma,\alpha)\to(\sigma',\alpha')$，则有一个包含映射 $B_{(\sigma,\alpha)}\hookrightarrow B_{(\sigma',\alpha')}$，且 $\beta_{(\sigma,\alpha)}$ 是 $\beta_{(\sigma',\alpha')}$ 在 $B_{(\sigma,\alpha)}$ 上的限制。(2)（L_∞-关系）存在一个符号选择 $\varepsilon_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$，使得链之间的关系

$$\partial\overline{\beta}_{T_\ell(p,q)}=\sum_{\substack{(\sigma,\alpha)\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}\\ excess(\sigma)=\ell-4}}\varepsilon_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\,\overline{\beta}_{(\sigma,\alpha)} \tag{1.3}$$

在模去退化链的意义下成立。

(3)（布鲁尼安性质）映射 $\omega_{T_\ell(p,q)}$ 相对于 $\partial B_{T_\ell(p,q)}$ 上满足 $(\sigma,\alpha)\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}\setminus\{T_\ell(p,\overline{q})\}$ 的那些 $\omega_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$，具有布鲁尼安性质。(4)（超额 0）括号 $\beta_{T_3(p,q)}=\omega_{T_3(p,q)}\colon B_{T_3(p,q)}\to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 是一个循环，且与由博罗米安链环经去环化（§5.2）得到的循环同调等价。如果 $(\sigma,\alpha)\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ 的超额为 0，则链 $\beta_{(\sigma,\alpha)}$ 是由 σ 的内部顶点集合 $V\mathrm{int}(\sigma)$ 中的三价顶点 v 的 $\beta_{T(v)}=\omega_{T(v)}$ (§5.3) 复合而得的 $\prod_{v\in V}\mathrm{int}(\sigma)$ 中的一个循环。

粗略地说，定理 1.10 给出了链的某个倍数的一种“加厚”$\beta_{T_\ell(p,\ q)}$

$$\omega_{T_\ell(p,q)}\colon B_{T_\ell(p,q)}\to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k}),$$

其中 $B_{T_\ell(p,\ q)}=I^{\ell-3}\times S^{\boldsymbol{a}}$ 是某个维数为 $(\ell-2)k-2\ell+q+3$ 的紧流形 $S^{\boldsymbol{a}}$，由 T_ℓ 的基本括号运算经悬挂和去环化得到（见 §5.1 和 §5.2）。加厚的效果是，$\beta_{T_\ell(p,\ q)}$ 与 $T_\ell(p,\ q)$ 的面图 $(\sigma,\ \alpha)$ 相容；对于 $\beta_{T_\ell(p,\ q)}$ 而言，由于悬挂和去环化，这一点并不显然。

1.4. 图手术。 设 (Γ,α) 是一个超额为 $p\geq 1$ 且具有 r 个顶点的有向图。对于每个这样的有向图，我们通过结合定理 1.10 中若干个一般括号所给出的手术，构造一个带框架的 D^{2k}-丛。我们称由 (Γ,α) 确定的对象 $\mathcal{X}_{(\Gamma,\alpha)}$ 满足一个条件

C 相对于较低超额图，如果在假设 $\mathcal{X}_{(\Gamma',\alpha')}$ 对所有超额至多为 $p-1$ 的有向图 (Γ',α') 都满足 C 的情况下，它也满足该条件。

定理 1.11. 假设 k 足够大。设 (Γ,α) 是一个超额为 $p\geq 0$、有 r 个顶点的有向图。我们构造一个链 $\phi_{(\Gamma,\alpha)} = \frac{1}{m_{(\Gamma,\alpha)}}\omega_{(\Gamma,\alpha)}$，它属于 $S_*(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k});\mathbb{Q})$，且是一个映射的有理数倍

$$\overline{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}\colon \overline{B}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k})$$

它相对于较低超额图满足以下条件 *(1)–(4)*。

(1) $\underline{B}_{(\Gamma,\alpha)} = \prod_{v\in V(\Gamma)} \underline{B}_{T(v)}$，其中 $T(v)$ 对于 $\ell(v) = \deg(v)$ 为 $T_{\ell(v)}(p,q)$，且由某些 p,q 确定，具体取决于方向结构 α。整数 $m_{(\Gamma,\alpha)}$ 是 $\prod_{v\in V(\Gamma)} m_{\ell(v)}$。*(2)* 存在一个不交并 $V_1\cup\cdots\cup V_r$，由 *Int* D^{2k} 中的紧致余维零子流形组成，使得与 $\omega_{(\Gamma,\alpha)}$ 相关联的 (D^{2k},∂)-丛 $\pi^{(\Gamma,\alpha)}\colon E^{(\Gamma,\alpha)} \to B_{(\Gamma,\alpha)}$ 在一个纤维为 $Q_{(\Gamma,\alpha)} := D^{2k} - \mathit{Int}\,(V_1\cup\cdots\cup V_r)$ 的子丛上具有平凡化 $\tau(\Gamma,\alpha)$。它与 $\partial(\Gamma,\alpha)$ 中较低超额图对应的平凡化相容。*(3)* $\pi^{(\Gamma,\alpha)}$ 在纤维为 V_i 的子丛上的限制，是 $\rho_{T_\ell(p,q)}$ 在投影 $B_{(\Gamma,\alpha)} \to B_{T_\ell(p,q)}$ 下的拉回。该拉回与 $\partial(\Gamma,\alpha)$ 中较低超额图对应的拉回相容。*(4)* $E^{(\Gamma,\alpha)}$ 上存在一个垂直标架，它在 $Q_{(\Gamma,\alpha)}$ 附近是标准的，并且与 $\partial(\Gamma,\alpha)$ 中较低超额图对应的垂直标架相容。

根据定理 1.11，ϕ 是一个链映射这一点几乎可以直接得出，除了定向问题。为完成定理 A 的证明，我们需要定义合适的定向，使映射 $\omega_{(\Gamma,\alpha)}$ 成为一个链。这将在第 10 节完成。

1.5. **论文结构**。在第一部分中，我们证明定理 A 和定理 E。

在第 2 节中，我们回顾有关弦链环空间的同伦群的一些重要事实。此外，我们为弦链环族定义强布鲁尼安性质。

在第 3 节中，我们说明定理 A 如何由定理 1.6 和定理 1.10 推出，而这两个定理的证明将推迟到第 4 至第 8 节。链的定向约定较为技术性，将推迟到第 10 节。

在第 4、6 和 7 节中，我们分别为 4 价、5 价和至少 6 价的顶点构造定理 1.6 中的基本括号。在第 5 节中，我们给出括号所需的运算，这些运算将在第 6 和第 7 节中用到。定理 1.6 得证。

在第 8 节中，我们通过对各种树的迭代括号进行加厚和粘合，将基本括号推广为更一般的括号。定理 1.10 得到证明。

在第 9 节中，我们证明定理 E。本节独立于定理 A 的证明。

在第 10 节中，我们给出链的定向约定（原定于第 3 节说明），并完成定理 A 的证明。

在第 11 节中，我们给出总结性评论，并提出一些未解决问题。在附录 A 中，我们给出四价顶点对应基本括号的显式叶形式。附录 B 给出一个延拓闭形式的判据。在附录 C 中，我们检查雅可比恒等式中的符号。

致谢。 我们感谢 Danica Kosanović 和 Robin Koytcheff 提供有关他们研究成果的信息，并提出宝贵意见。TW 感谢俄勒冈大学数学系的热情接待。

2. Preliminaries on string links

我们汇集了一些已知结果和必要的记号，这些内容将在后文中发挥重要作用。读者可以先跳至 §3，并在需要时再返回此处。

2.1. 弦链环空间的某些同伦群。 我们使用两个处于定理 1.6 证明核心的定理。下述定理基于 Haefliger 在 [Hae, 1.3. Th´eor`eme], 中的正合序列，给出了余维至少为三的球面链环空间具有无限多个分支的条件。

定理 2.1 (Crowley–Ferry–Skopenkov [CFS，推论 1。8])。 假设 p_1、……、$p_r < m-2$。则群 $\pi_0(\mathrm{Emb}(\coprod_{k=1}^{r} S^{p_k},\ S^m))$ 是无限群，当且仅当存在一个子序列 $(k_1$、……、$k_s) \subset (1$、……、$r)$ 满足以下条件之一：

(a) $s=1$、 $4|p_{k_1}+1$和 $m<3p_{k_1}/2+2$；(b) $s=2$，并且存在$(x_1$、$x_2) \in FCS(m-p_{k_1}$、$m-p_{k_2})$ 使得

$$(m-p_{k_1}-2)x_1+(m-p_{k_2}-2)x_2=m-3; \tag{2.1}$$

(c) $s\geq 3$，且方程

$$(m-p_{k_1}-2)x_1+\cdots+(m-p_{k_s}-2)x_s=m-3 \tag{2.2}$$

有正整数解。

这里， $FCS(i$、$j) \subset \mathbb{Z}^2$ 是一个仅取决于 i 和 j 奇偶性的子集。情形*(a)*中的无限阶元素由将纽结连通和到 $\pi_0(\mathrm{Emb}(S^{p_k}$、$S^m))$ 的第 k 个分支上得到。

这一结果对于 球面链环可以根据以下引理应用于弦链环。

引理2.2。 假设 $p<m-2$。那么我们有一个同构

$$\pi_0(\mathrm{Emb}((S^p)^{\cup r}, S^m)) \cong \pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^p)^{\cup r}, I^m)).$$

证明。 令S^p 表示 $S^p \sqcup \mathbb{R}^p$ 与一个1-柄 $I\times D^p$ 的并，其中 $\{0\}\times D^p$ 粘合到 S^p 中的一个小圆盘上，而 $\{1\}\times D^p$ 粘合到 $\mathbb{R}^p$中的一个小圆盘上。令 Emb$((S^p)^{\cup r}, \mathbb{R}^m)$表示嵌入$(S^p)^{\cup r} \to \mathbb{R}^m$ 的空间，这些嵌入在平面 $\mathbb{R}^p$附近是标准的。

我们看到，通过移除 $I\times$Int D^p定义的自然映射 Emb$((S^p)^{\cup r}, \mathbb{R}^m) \to$ Emb$((\mathbb{R}^p)^{\cup r}, \mathbb{R}^m)$是一个同伦等价；并且如果 $m-p>2$，则诱导映射

$$\pi_0(\mathrm{Emb}((S^p)^{\cup r}, \mathbb{R}^m)) \to \pi_0(\mathrm{Emb}((S^p)^{\cup r}, \mathbb{R}^m))$$

由限制到$(S^p)^{\cup r}$ 中的球面$(S^p)^{\cup r}$ 所定义的映射是一个同构。众所周知，后一个群同构于 π_0(Emb$((S^p)^{\cup r}, S^m)$)。□

定理 *2.3*（*Goodwillie* [*Go*]。另见 [*GKW, 3.2.2.* 推论]）。设 M 是流形 N 中的整洁子流形，且设 $m=$ *dim* M, $n=$ *dim* N。若 $m\leq n-3$，则由同痕嵌入 $M\times I \to N\times I$ 构成的空间 *CEmb(M, N)*，其介于包含映射 $M\times\{0\}\subset N\times\{0\}$ 与嵌入$M\times\{1\}\to N\times\{1\}$之间，并限制为 $\partial M\times I\to \partial N\times I$；*(x, t)* $\mapsto$ *(x, t)*，是$(n-m-3)$-连通的。（例如，参见 [*GKW, §3.*2]，了解 *CEmb(M, N)* 的定义。）

这可用于估计纤维化序列中第一个映射（图化映射）的连通度

$$\Omega\mathrm{Emb}_\partial(M,N) \to \mathrm{Emb}_\partial(M\times I, N\times I) \to \mathrm{CEmb}(M,N) \to \mathrm{Emb}_\partial(M,N). \tag{2.3}$$

特别地，定理 2.3 大大简化了这个问题，因为对嵌入空间的高阶同伦群在某些次数范围内的研究可以归结为对 π_0 的研究。更准确地说，我们使用以下推论。（关于双分量弦环的类似结果已作为 [Koy, Theorem B] 的一部分给出。）

推论 2。 *4. 设 $\ell \geq 3$ 且 $j \geq 1$。若 $n \geq j+2$，则图化映射诱导一个同构 m*

$$\pi_j(\mathrm{Emb}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})) \cong \pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2+j})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3+j})),$$

对于后一个群，定理 2.1 的条件 (b) 和 (c) 均不满足。

证明。 根据定理 2.3，空间 $\mathrm{CEmb}((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})$ 是 $(\ell n-\ell+3) - \{(\ell-1)n-\ell+2\} - 3 = (n-2)$-连通的。由于 $n-2 \geq j$，我们有 $\pi_k(\mathrm{CEmb}((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})) = 0$ 对于$k = j, j-1$，而纤维化 (2.3) 的同伦正合列表明

$$\pi_j(\mathrm{Emb}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})) \cong \pi_{j-1}(\mathrm{Emb}_\partial((I^{(\ell-1)n-\ell+3})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+4})).$$

由于嵌入的余维不变，这一论证可以继续进行，从而得到所需的同构。

对于第二个断言，方程 (2.1) 或 (2.2) 为 $(n-1)(x_1+\cdots+x_s) = \ell(n-1)+j$，且当 $n-1 \geq j+1$ 时，该方程没有整数解。□

2.2. 具有布鲁尼安零同伦的嵌入。 我们考虑配备了分支集合的某个子集上的零同伦的弦链接空间。首先考虑空间 $\mathrm{Emb}_\partial(\bigcup_{\lambda\in\Omega} I^{a_\lambda},\ I^N)$，其中 $\Omega = \{1,2,\dots,r\}$，维数 a_λ、$\lambda \in \Omega$ 已给定，且 $\iota\colon \bigcup_{\lambda\in\Omega} I^{a_\lambda} \hookrightarrow I^N$是一个标准包含映射。

对于 $\Omega = \{1,2,\dots,r\}$ 的子集 S，令 $\mathcal{E}(S) = \mathrm{Emb}_\partial(\bigcup_{\lambda\in\Omega\setminus S} I^{a_\lambda},\ I^N)$，并令 $\mathcal{B}(S)$ 表示映射在 ι 上方的同伦纤维

$$\pi_S\colon \mathcal{E}(\emptyset) \to \mathcal{E}(S)$$

它会忘掉由 S 标记的分支。更具体地说，$\mathcal{B}(S)$ 是由有序对 (f,γ) 构成的空间，其中$f \in \mathcal{E}(\emptyset)$，而 γ 是 $\mathcal{E}(S)$ 中的一条路径，它给出 $\pi_S(f)$ 的零同伦。赋值 $S \mapsto \mathcal{B}(S)$ 给出了从 Ω 的幂集 $\mathcal{P}(\Omega)$ 到拓扑空间范畴 Top 的一个函子，其中当 $S \subset S'$ 时，态射 $\mathcal{B}(S) \to \mathcal{B}(S')$ 由忘掉 $S' \setminus S$ 中的分支给出。显然，空间集 $\{\mathcal{B}(S)\}_{S\subset\Omega}$ 和态射 $\{\mathcal{B}(S) \to \mathcal{B}(S')\}_{S\subset S'\subset\Omega}$ 自然构成一个立方图表。

定义 2.5（嵌入的布伦尼安零同伦）。 嵌入 $f \in \mathcal{E}(\emptyset)$ 的一个布伦尼安零同伦系统是对投影映射的常值映射 const_f 在 f 处的一个提升的选取

$$\operatorname*{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega} \mathcal{B}(S) \to \mathrm{Map}(\Delta^{r-1}, \mathcal{B}(\Omega)) = \mathrm{Map}(\Delta^{r-1}, \mathcal{E}(\emptyset)).$$

（例如参见 [MV，第 5 节3]，了解立方图表中的同伦极限。）

我们将在 §4.2 中给出 $\Omega = \{1,2,3\}$ 的一个布伦尼安零同伦系统示例。粗略地说，$\operatorname{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega} \mathcal{B}(S)$ 的一个元素是由一族零同伦组成的集合，这些零同伦位于 $\mathcal{E}(S)$ 中，以 Δ^{r-1} 中的 $(|S|-1)$ 维单形为参数，并且关于面包含相容。布鲁尼安性质可以用提升问题来解释。令 P 为下图的拉回：

$$\mathcal{E}(\emptyset) \xrightarrow{\mathrm{const}_\bullet} \mathrm{Map}(\Delta^{\ell-1}, \mathcal{E}(\emptyset)) \xleftarrow{\mathrm{proj}} \operatorname*{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega} \mathcal{B}(S),$$

其中 $\mathcal{E}(\emptyset) := \mathrm{Emb}_\partial(\bigcup_{\lambda\in\Omega} I^{a_\lambda},\ I^N)$ 且 $\mathrm{const}_\bullet(f) = \mathrm{const}_f$。那么，$f \in \mathcal{E}(\emptyset)$ 的一个布伦尼安零同伦系统就是从 f 到 P 的一个提升。

我们还需要为弦环的零同伦定义相对布伦尼性质。弦环的零同伦由一个元素 $(f,\gamma) \in \mathcal{B}(\emptyset)$ 给出，其中 $f \in \mathcal{E}(\emptyset)$，$\gamma$是 $\mathcal{E}(\emptyset)$ 中从 f到 ι 的一条路径。存在一个自然映射 $\mathrm{const}_\bullet\colon \mathcal{B}(\emptyset) \to$同伦极限 $\operatorname*{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega} \mathcal{B}(S)$，它将 (f,γ) 映射为 $\{\mathrm{const}_{(f,\gamma)}\}$。

定义 2.6 (零同伦的相对布伦尼性质)。 我们称元素 $(f,\gamma) \in \mathcal{B}(\emptyset)$ 具有相对于一个布伦尼安零同伦系统的相对布伦尼性质

$$\{\gamma_S\}_{\emptyset\neq S\subset\Omega} \in \operatorname*{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega} \mathcal{B}(S)$$

若点 $\{\mathrm{const}_{(f,\gamma)}\}$ 与 $\{\gamma_S\}_{\emptyset\neq S\subset\Omega}$ 在 $\mathrm{proj}^{-1}(\mathrm{const} f)$ 中同伦，则 f。

注 2.7。 此处定义的布伦尼安性质比 §1.2.1 中给出的性质更强。在本文的构造中，这个更强的版本将在多个地方发挥重要作用。另见注 1.7。

存在一个将 $\mathcal{B}(\emptyset)$ 嵌入 P 的自然嵌入。此外，还存在一个自然投影 $P \to \mathcal{E}(\emptyset)$。以下是定义 2.5 和 2.6 对族的自然类比。

定义 2.8 （族的布鲁尼安零同伦）。 嵌入族 $\sigma\colon B \to \mathcal{E}(\emptyset)$ 的布伦尼安零同伦系统 是 σ 到 P 的一个提升。若存在 τ 与 $\widetilde{\sigma}$ 之间的同伦，使得其在 $\mathcal{E}(\emptyset)$ 上的投影保持不变，则称族 $\tau\colon B \to \mathcal{B}(\emptyset) \subset P$ 相对于布鲁尼安零同伦系统 $\widetilde{\sigma}\colon B \to P$ 具有相对布伦尼性质 。

2.3. **顶点手术与框架**。 取补集后，一族带框架弦链会给出一族相对于边界的把手体 V（或一个 V-丛）。下文将通过用这个纤维丛替换一个平凡丛来定义顶点手术。与 [Wa22, 引理 A 的证明],中一样，我们考虑以下图表，它在同伦意义下交换：

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{\mathrm{Emb}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota & \xleftarrow{\simeq} & \overline{\mathrm{Emb}}_\partial(N_{I^k}^{\cup p}\cup N_{I^{k-1}}^{\cup q}, I^{2k})_{\widetilde{\iota}} & \xrightarrow{\widetilde{c}} & B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(V;\mathrm{st}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota & \xleftarrow{\simeq} & \mathrm{Emb}_\partial(N_{I^k}^{\cup p}\cup N_{I^{k-1}}^{\cup q}, I^{2k})_{\widetilde{\iota}} & \xrightarrow{c} & B\mathrm{Diff}_\partial(V)
\end{array} \tag{2.4}$$

这里，

- $\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(A,B)_{f_0}$ 表示自然映射 $\mathrm{Emb}_\partial(A,B) \to \mathrm{Imm}_\partial(A,B)$ 的同伦纤维，其纤维取在 $f_0 \in \mathrm{Imm}_\partial(A,B)$ 上；其中 $\mathrm{Imm}_\partial(A,B)$ 是浸入 $A \looparrowright B$ 的空间，
- 最左侧的竖直映射由自然映射 $\Omega^k(SO_{2k}/SO_k) \to \Omega^k(BSO_k)$ 和 $\Omega^{k-1}(SO_{2k}/SO_{k+1}) \to \Omega^{k-1}(BSO_{k+1})$ 诱导，
- $B\mathrm{Diff}_\partial(X)$ 表示以 ∂X 上的平凡化为条件的光滑 X-丛的分类空间，我们将相应的丛称为 $(X,\ \partial)$-丛。
- $B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}\partial}(A;\tau)$ 表示光滑 $(A,\ \partial A)$-丛的分类空间，这些丛带有沿纤维的框架，且在 ∂A 附近与 τ 一致。
- N_S 表示流形 I^{2k} 中整洁子流形 S 的一个开管状邻域。
- $c\colon \mathrm{Emb}_\partial(N_{I^k}^{\cup p}\cup N_{I^{k-1}}^{\cup q},\ I^{2k})_{\widetilde{\iota}} \to B\mathrm{Diff}_\partial(V)$ 是取补集的映射，而 $\widetilde{c}$ 是在 [Wa22, 引理 A 的证明] 中定义的映射 c 的自然提升。

由上图可知，族 $B \to \mathrm{Emb}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q},\ I^{2k})_\iota$ 给出一个族 $B \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q},\ I^{2k})_\iota$，并且属于 $B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(V;\mathrm{st})$。

引理 *2.9*（顶点手术）。定理 *1.10* 中的链 $\omega_{T_\ell(p,q)} : B_{T_\ell(p,q)} \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 可提升至空间 $\mathrm{Emb}_\partial(N_{I^k}^{\cup p}\cup N_{I^{k-1}}^{\cup q}, I^{2k})_{\widetilde{\iota}}$，且与面图 $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)} \setminus \{T_\ell(p,q)\}$ 对应的提升相容。令 $\rho_{T_\ell(p,q)} : B_{T_\ell(p,q)} \to B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(V;\mathrm{st})$ 表示此提升与 $\widetilde{c}$ 的复合。

引理 2.9 将在 §8.5 中证明。

注 2.10。 我们注意到补映射 c 具有如下性质。事实证明，由下式给出的纤维化序列

$$\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota \xrightarrow{c} B\mathrm{Diff}_\partial(V) \to B\mathrm{Diff}_\partial(I^{2k})$$

由 Cerf–Palais 纤维化 $\mathrm{Diff}_\partial(I^{2k}) \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q},\ I^{2k})_\iota$ 分裂，并且我们有一个同伦等价

$$B\mathrm{Diff}_\partial(V) \simeq B\mathrm{Diff}_\partial(I^{2k}) \times \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota.$$

因此，映射 c 具有同伦左逆，该逆通过对 $B\mathrm{Diff}_\partial(I^{2k})$ 取商得到。这种关系将用于在嵌入族与纤维丛之间来回转换。

我们给出 c 的同伦左逆的一个典范选择。令 D^{k+1} 和 D^k 分别为包含映射 $I^k \subset I^{2k}$ 和 $I^{k-1} \subset I^{2k}$的张成圆盘。令 $\partial_\sqcup D^{k+1}$ 和 $\partial_\sqcup D^k$ 分别表示$D^{k+1} \cap \partial I^{2k}$和 $D^k \cap \partial I^{2k}$，并令 $\mathrm{Emb}_{\partial_\sqcup}((D^{k+1})^{\cup p} \cup (D^k)^{\cup q},\ I^{2k})$ 表示嵌入 $(D^{k+1})^{\cup p} \cup (D^k)^{\cup q} \to I^{2k}$ 在 $(\partial_\sqcup D^{k+1})^{\cup p} \cup (\partial_\sqcup D^k)^{\cup q}$上固定的嵌入空间。于是我们得到纤维丛

$$\mathrm{Emb}_{\partial_\sqcup}((D^{k+1})^{\cup p} \cup (D^k)^{\cup q}, I^{2k}) \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota$$

其纤维为 $\mathrm{Emb}_\partial((D^{k+1})^{\cup p} \cup (D^k)^{\cup q}, V)$。由于 $\mathrm{Emb}_{\partial_\sqcup}((D^{k+1})^{\cup p} \cup (D^k)^{\cup q}, I^{2k})$ 是可缩的，映射 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota \to \mathrm{Emb}_\partial((D^{k+1})^{\cup p} \cup (D^k)^{\cup q}, V)$ 是同伦等价。这个映射的同伦逆可以显式地给出如下。我们将一个嵌入$D^{k+1} \to V$（分别为 $D^k \to V$）视为一条带框架嵌入的路径 $I^k \to I^{2k}$（分别为 $I^{k-1} \to I^{2k}$），从标准包含 $I^k \subset I^{2k}$（分别为 $I^{k-1} \subset I^{2k}$）到 $I^k \cong \partial_\sqcup D^{k+1} \subset I^{2k}$（分别为 $I^{k-1} \cong \partial_\sqcup D^k \subset I^{2k}$）。将这条路径与标准包含给出的路径 $D^{k+1} \subset I^{2k}$（分别为 $D^k \subset I^{2k}$）连接起来，并在 $\partial_\sqcup D^{k+1}$（分别为 $\partial_\sqcup D^k$）附近作修改后，我们得到一条带框架嵌入的环路 $I^k \to I^{2k}$（分别为 $I^{k-1} \to I^{2k}$），从而得到一个映射

$$\mathrm{Emb}_\partial((D^{k+1})^{\cup p} \cup (D^k)^{\cup q}, V) \to \Omega\mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota.$$

通过预合成作用 $\mathrm{Diff}_\partial(V) \to \mathrm{Emb}_\partial((D^{k+1})^{\cup p} \cup (D^k)^{\cup q},\ V)$，我们得到一个映射

$$\lambda\colon B\mathrm{Diff}_\partial(V) \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota,$$

它是 c 的一个同伦左逆。

如果两个弦环标架作为法向标架丛的截面，在边界相对意义下同伦，则称它们同伦。

引理 2.11。 如果弦环 $f \in \mathcal{E}(\emptyset)$ 具有一个布伦尼安零同伦系统，那么它就定义了 f 上一个唯一的标架同伦类，并且该同伦类与删去某些分支后为 f 所定义的标架相容。

证明。 存在一个自然映射 $\mathcal{B}(S) \to \mathrm{Emb}_\partial(\bigsqcup_{\lambda \in \Omega \setminus S} I^{a_\lambda},\ I^N)$，它将零同伦映射为零正则同伦。因此，对每个 $\lambda \in \Omega$，我们都通过复合映射 $\mathcal{B}(\Omega \setminus \{\lambda\}) \to \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_\lambda},\ I^N)_\iota \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a_\lambda},\ I^N)_\iota$，得到第 λ 个分支的一个标架同伦类。与其他 $S \neq \emptyset$ 选取的相容性由同伦极限定义中的相容条件保证。□

3. Graph surgery

本节假设定理 1.10，并证明定理 1.11。

3.1. **有向图圈**。我们将 $\mathcal{GC}$ 中循环的提升取为有向图中的提升。对于带标号图 Γ，我们考虑有向图 $(\Gamma,\ \alpha)$，其中 α 是 Γ 的边上的方向指派。我们考虑 $\Gamma \in \mathcal{GC}$ 上的一个标号，它表示实向量空间 $\mathbb{R}^{E(\Gamma)}$ 的定向。

定义 3.1（有向图复形）。 令 $\overrightarrow{\mathcal{GC}}$ 表示由有向图在 $\mathbb{Q}$ 上自由生成的链复形，图的定向由边上的标签确定，其微分定义为将一个次数为 ≥ 4 的顶点按方向展开的所有可能结果之和的一半。

存在一个自然映射 η: $\mathcal{GC} \to \overrightarrow{\mathcal{GC}}$，它将一个带标号图 Γ 映射为

$$\frac{1}{2^{|E(\Gamma)|}} \sum_{\alpha} (\Gamma, \alpha), \tag{3.1}$$

其中求和遍历带标号图 Γ 上的所有方向指派。换句话说，它将每条边映射为两个方向的平均值:

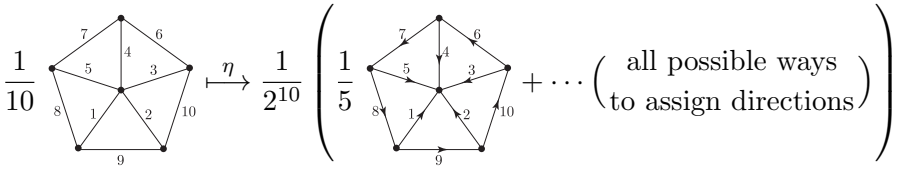


(3.2)

若遗忘标签，则元素 $\eta(\Gamma)$ 可改写为

$$\frac{1}{2^{|E(\Gamma)|}} \sum_{\alpha} \frac{|\mathrm{Aut}\,\Gamma|}{|\mathrm{Aut}\,(\Gamma, \alpha)|} (\Gamma, \alpha), \tag{3.3}$$

其中求和遍历 Γ 上方向指派的所有类。例如，



其中边上的标签表示图定向，这是一种独立于方向的结构。注意，对于 X 上的每个方向指派 α_X，$\mathrm{Aut}\,(X, \alpha_X)| = 5$ 或 1。根据微分的定义，下面的引理显然成立。

引理 3.2。 η: $\mathcal{GC} \to \overrightarrow{\mathcal{GC}}$ 是一个链映射，也是遗忘映射 $\overrightarrow{\mathcal{GC}} \to \mathcal{GC}$ 的一个分裂。因此，η_* 将 $H_*(\mathcal{GC})$ 识别为 $H_*(\overrightarrow{\mathcal{GC}})$的一个直和项。

现在我们考虑线性组合

$$\vec{\gamma} = \eta(2^{10}\gamma) = \sum_{\alpha_X} \frac{2}{|\mathrm{Aut}\,(X, \alpha_X)|} (X, \alpha_X) - \sum_{\alpha_Y} \frac{1}{|\mathrm{Aut}\,(Y, \alpha_Y)|} (Y, \alpha_Y), \tag{3.4}$$

其中 $|\mathrm{Aut}\,(X, \alpha_X)| = 1$ 或 5，且对所有 α_Y， $|\mathrm{Aut}\,(Y, \alpha_Y)| = 1$。

引理 3.3。 组合链 $\vec{\gamma}$ 是 $\overrightarrow{\mathcal{GC}}$ 中的一个 ∂-循环，即 $\partial\vec{\gamma} = 0$。此外， $\vec{\gamma}$ 的同调类在 $H_*(\overrightarrow{\mathcal{GC}})$ 中非平凡。

证明。 $\vec{\gamma} = \eta(2^{10}\gamma)$ 是 ∂-循环，这是因为 γ 是一个 ∂-循环，且 η 是链映射。图上上同调与有向图同调之间存在一个良定义的双线性配对，该配对由配对 $\mathcal{GC}^\vee \otimes \overrightarrow{\mathcal{GC}} \to \mathbb{Q}$ 诱导;

$$\Gamma \otimes (\Gamma', \alpha) \mapsto \begin{cases} \pm|\mathrm{Aut}\,\Gamma| & (\text{if } \Gamma' \cong \pm\Gamma), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

其中我们将对偶复形 $\mathcal{GC}^\vee$ 与 [Kon] 的对偶复形等同。该配对确实是 $\mathrm{Hom}(\mathcal{GC}^\vee \otimes \overrightarrow{\mathcal{GC}}, \mathbb{Q})$ 中的一个余循环。根据 Bar-Natan–McKay（[BNM]）， X 表示一个非平凡的图上上同调类。我们有

$$\langle \vec{\gamma}, X \rangle = 2^{10} \langle \gamma, X \rangle = \frac{2^{10} \cdot 2\,|\mathrm{Aut}\,X|}{|\mathrm{Aut}\,X|} \neq 0.$$

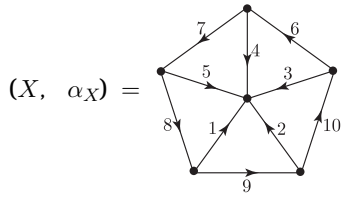
因此 $\vec{\gamma}$ 给出了一个非平凡的同调类。（更一般地，$\mathrm{Aut}\,\Gamma$ 作用于带标记的 Γ上所有 $2^{|E(\Gamma)|}$ 种方向赋值方式的集合。由轨道分解公式可得

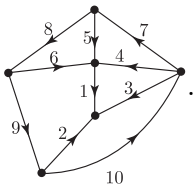
$$2^{|E(\Gamma)|} = \sum_i \frac{|\mathrm{Aut}\,\Gamma|}{|\mathrm{Aut}\,(\Gamma, \alpha_i)|},$$

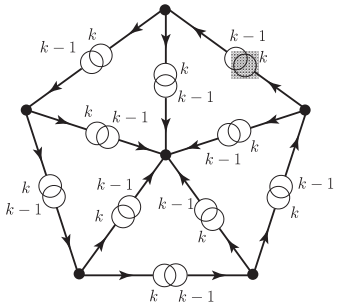
其中，求和遍历不同的 $\mathrm{Aut}\,\Gamma$-轨道。) □

3.2. 从图到 $B\mathrm{Diff}_\partial(D^d)$ 中的链。 这里，我们假设 $d = 2k$，并利用 $S^{k-1} \cup S^k$ 的霍普夫链环将一个图分解为 Ψ_j-图（定义 5.1）。我们将一个图 Γ 嵌入 $\mathrm{Int}\, D^{2k}$，并如下所示，用一个霍普夫链环 $S^k \cup S^{k-1} \to \mathrm{Int}\ D^{2k}$ 分解每条边。具体而言，假设每条嵌入的有向边 e 都是由一对半边 $e_\pm$ 的并组成，其中 $e_- \cap e_+$ 是一个点 p_e，且 e 的方向给出了顺序 $e_- < e_+$。我们通过移除 e 中 p_e 的一个小开区间邻域，将 e 切分为缩短的半边 $e'_\pm$。我们将每条 e 替换为一个霍普夫链环与缩短半边的并，并将缩短半边分别连接到每条 $e'_\pm$ 两个端点中非顶点的那个端点上。由此，我们得到若干对象的不交并，其中每个对象都称为 Ψ-图。我们将 Ψ-图中霍普夫链环的分支称为叶（见定义 5.1）。下方的图 6 展示了以下有向图示例的示意图。

$$(X,\ \alpha_X) = \quad , \qquad (Y, \alpha_Y) = \quad . \tag{3.5}$$







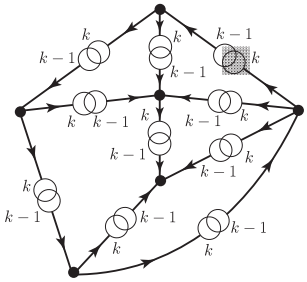


FIGURE 6. 由嵌入图得到的 Ψ-图的并集。

我们利用 e 的方向来确定终端球面的维数 k 或 $k-1$，使得 S^k 附着到 e_-，而 S^{k-1} 附着到 e_+。我们还对霍普夫链环的各个分支进行定向选择，使得其链接数（对于双分支链环）均为 $+1$。请注意，霍普夫链环各分支定向的选择并不重要，因为两种选择可以通过同痕相互联系（霍普夫链环中带定向的分支S^k 和 S^{k-1} 可以通过同痕同时在 $\mathbb{R}^{2k}$ 中翻转到内侧）。

定理 *1.11* 的证明。 一个嵌入的有向图（Γ，α）给出一个链

$$\overline{\omega}_{(\Gamma,\alpha)} : \overline{B}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(D^{2k}),$$

其中 $B_{(\Gamma,\alpha)} = \prod_{v\in V\ (\Gamma)} \underline{B}_{T(v)}$，$T(v)$ 是 $T_{\ell_v}(p_v,\ q_v)$，其中 $\ell_v = \deg(v)$，并且对于某个由方向结构 α确定的 $p_v,\ q_v$。这是由复合给出的链

$$\prod_{v\in V(\Gamma)} \overline{B}_{T(v)} \xrightarrow{\prod_v \overline{\rho}_{T(v)}} \prod_v B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(V_v) \xrightarrow{\simeq} B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{Q_{(\Gamma,\alpha)}}(D^{2k}) \longrightarrow B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(D^{2k}),$$

其中 $\rho_{T(v)}$：$\overline{B}_{T(v)} \to B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(V_v)$ 是引理 2.9 中给出的映射，而 $Q_{(\Gamma,\alpha)} = D^{2k} - \mathrm{Int}(V_1 \cup \cdots \cup V_r)$。现在，条件 **(1)–(4)** 显然由构造得出。特别是，与较低超额图的相容性由定理 1.10 得出。□

在补映射 c 的定义中，我们需要固定弦链环的补集与把手体 V_v in D^{2k} 之间的识别。这通过使用 §10.1 中给出的图定向来完成。

4. 4-valent vertex

在本节中，我们证明 $\ell = 4$ 的定理 1.6。令 $X = I^{4n-1} - (I^{3n-2})^{\cup 3}$，并构造一个嵌入 $\varphi_{\mathrm{IHX}} \in \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{3n-2},\ X)$，它是雅可比关系的拓扑实现：

$$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b].$$

然后我们构造一条嵌入的路径 $\{\varphi_t\}$

$$\varphi_t \in \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{3n-2}, X) \quad (t \in [0,1])$$

它具有以下性质（定理 4.8）。

(i)（零同伦） φ_0 是标准包含，且 φ_1 是 φ_{IHX}。(ii)（布伦尼安） $\{\varphi_t\}$ 具有定义 2.5 意义下的布鲁尼安性质。

性质 (i) su 表明路径 $\{\varphi_t\}$ 是恒等映射中 $[a,b,c]$ 的拓扑实现：

$$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = \partial[a,b,c].$$

为寻找 $\{\varphi_t\}$，我们在 $S^n \times S^n \times S^n$ 的把手分解中，几何地给出 φ_{IHX} 在一个 $3n$-把手的附着（$3n-1$）球面中的显式零同伦 φ_t。随后便可利用这一显式模型证明布鲁尼安性质。

4.1. 嵌入怀特海德积。

4.1.1. 嵌入怀特海德积。设 $X = I^N - (I^{N-m-1} \cup I^{N-k-1})$，且 $f\colon D^m \to X$、$g\colon D^k \to X$ 是良嵌入，分别与固定的小球面 o^{m-1}、o^{k-1} 在边界上重合。假设 o^{m-1} 和 o^{k-1} 位于同一个面 $F = \{0\} \times \mathrm{Int}\ I^{N-1} \subset I^N = I \times F$ 中。令 M, K 分别表示 f, g 的像。我们给 M（分别给 K）配备一个法向 k-框架（分别为 m-框架），其在 ∂M（分别在 ∂K）附近具有固定行为。粗略地说，嵌入怀特海德积 $[f,g]$ 的定义是：将把手分解 $h^0 \cup h^m \cup h^k \cup h^{m+k}$ 的 $S^m \times S^k$ 中的（$m+k$）骨架 $h^0 \cup h^m \cup h^k$ 的边界球面，与一个固定的（$m+k-1$）平面作连通和，其中 m-把手平行于 f 嵌入，而 k-把手平行于 g 嵌入。

更准确地说，假设 $m + k < N - 1$。我们固定一个标准的带框定向（$m+k-1$）圆盘 L^{m+k-1}_{st}，位于 I^N 中，其边界是一个小的带框球面 $o^{m+k-2} \subset F$。我们也用 L^{m+k-1}_{st} 表示它的像。设 $N_{L^{m+k-1}_{\mathrm{st}}}$ 是 L^{m+k-1}_{st} 在 I^N 中的一个小管状邻域。我们固定 $S^m \times S^k$ 的一个把手分解 $h^0 \cup h^m \cup h^k \cup h^{m+k}$：在 $* \times *$ 处有一个 0-柄 h^0，一个沿核 $S^m \times *$ 嵌入的 m-柄 h^m，一个沿核 $* \times S^k$ 嵌入的 k-柄 h^k，以及一个（$m+k$）-柄 h^{m+k}。令 $H = h^0 \cup h^m \cup h^k$，并为其赋予由 $S^m \times S^k$ 的定向 $o(S^m) \wedge o(S^k)$ 诱导的定向。令 $D^j_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^j \mid |x| \le \varepsilon\}$。我们固定一个嵌入 $\gamma_0\colon H \to$，它通过标准嵌入 $S^m \times S^k \to D^{m+1}_{\varepsilon'} \times D^{k+1}_{\varepsilon''} \subset \mathrm{Int}\, D^N_\varepsilon$ 的限制取值于 $\mathrm{Int}\ D^N_\varepsilon$。然后按如下方式构造一个嵌入 $\gamma\colon H \to X$。（见图 7。）

(1) 我们将 M 和 K 稍微加厚，使其分别成为从 $M \times D^k_\varepsilon$ 和 $K \times D^m_\varepsilon$ 出发的嵌入的像 N_M 和 N_K，其中 $M \times \{0\}$ 和 $K \times \{0\}$ 分别映射到 M 和 K。交 $N_M \cap \partial X$（分别为 $N_K \cap \partial X$）是 $o^{m-1} \times D^k_\varepsilon$（分别为 $o^{k-1} \times D^k_\varepsilon$）。(2) 我们考虑分解 $X = (I^{N-1} - (I^{N-m-2} \cup I^{N-k-2})) \times I = X' \cup X''$，其中 $X' = (I^{N-1} - (I^{N-m-2} \cup I^{N-k-2})) \times [0, \frac{1}{2}]$ 且 $X'' = (I^{N-1} - (I^{N-m-2} \cup I^{N-k-2})) \times [\frac{1}{2}, 1]$。沿最后一个因子 I 对 M 和 K 作仿射线性重缩放，得到 M' 和 K''，使得 $M' \subset X'$ 且 $K'' \subset X''$。令 $N_{M'}$ 和 $N_{K''}$ 分别为 N_M 和 N_K 在 $X' \cup X''$ 中的类似对象。(3) 我们对 $F = G \times I$ 作分解。令 $\varphi\colon I^N \to [0, \frac{1}{2}] \times F$ 和 $\psi\colon X' \cup X'' \to [\frac{1}{2}, 1] \times F$ 为仿射线性微分同胚，使得

- $\psi(o^{m-1}) \subset \{\frac{1}{2}\} \times G \times [0, \frac{1}{2}]$，$\psi(o^{k-1}) \subset \{\frac{1}{2}\} \times G \times [\frac{1}{2}, 1]$，以及

- $X = \varphi(I^N) \cup \psi(X') \cup \psi(X'')$.

(4) 我们将分别与 h^m 和 $h^{m'}$ 沿细弧作（加厚圆盘的）连通和。所得嵌入 $\gamma\colon H \to X$ 满足 $\gamma(H) \cap X' = \gamma(h^m) \cap X' = N_{M'}$ 且 $\gamma(H) \cap X'' = \gamma(h^k) \cap X'' = N_{K''}$。

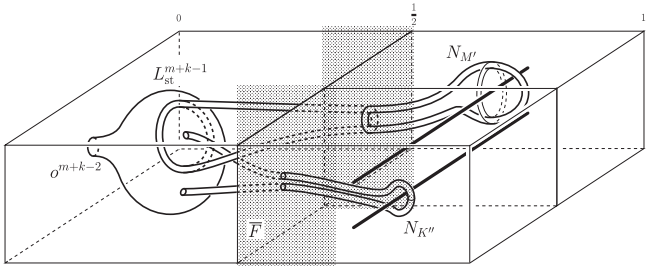


FIGURE 7. 嵌入怀特海德积 $[f,g] = \gamma|_{\partial H} \# L^{m+k-1}_{\mathrm{st}}$。

定义 4.1（嵌入怀特海德积）。令 $[f,g]\colon D^{m+k-1} \to X$ 表示通过将 $\gamma|_{\partial H}$ 与 L^{m+k-1}_{st} 作连通和得到的带框嵌入，其中我们按照 $o(H)|_{\partial H} = o(S^m) \wedge o(S^k)|_{\partial H}$ 中的“内法向优先”约定对 ∂H 定向[4]。

这本质上与 [KKV24 定理 1.9] 中通过从构形空间进行“图化”得到的构造，以及 [Kos24b] 中的“怀特海德积的嵌入版本”相同。

由定义 4.1 可直接得出以下引理。

引理 4.2。设 $X = I^N - (I^{N-m-1} \cup I^{N-k-1})$，并设 $p\colon X \to S^m \vee S^k$ 是一个将 o^{m+k-2} 映到基点的同伦等价。设 $f\colon D^m \to X$ 和 $g\colon D^k \to X$ 是由 I^{N-m-1} 和 I^{N-k-1} 的子午球面出发，分别沿着由 o^{m-1} 和 o^{k-1} 围成的小圆盘作连通和而得到的良嵌入。那么，$p \circ [f,g]$ 在 $\pi_{m+k-1}(S^m \vee S^k) = [(D^{m+k-1}, \partial D^{m+k-1}), (S^m \vee S^k, *)]$ 中代表怀特海德积 $[p \circ f, p \circ g]$。

引理 4.3. 设 X, f, g 如引理 *4.2* 所述。设 $\iota\colon I^{N-m-1} \cup I^{N-k-1} \to I^N$ 为标准包含映射。带框架链环 $[f,g] \cup \iota\colon I^{m+k-1} \cup (I^{N-m-1} \cup I^{N-k-1}) \to I^N$ 与以下链环相对同伦：将带典范框架的 $m+k-1, N-m-1, N-k-1$ 型博罗米安链环 $(m+k-1, N-m-1, N-k-1;\ N)$ 逐分支作连通和，得到标准包含映射。

证明。这可通过变形博罗米安链环众所周知的坐标表示来证明（参见例如 [Ma, §4]）。具体而言，博罗米安链环的三个分支之一（例如第一个）在其他两个分支在 I^N 中的补集内，张成一个与 $S^m \times S^k$ –Int D^{m+k} 微分同胚的带框子流形。该张成子流形给出了定义 $[f,g]$ 中所述的管道化。由于博罗米安链环中的两个分支构成一个解链，因此它在标准包含映射 ι 的补集中给出了嵌入怀特海德积。□

4.1.2. 迭代嵌入怀特海德积与雅可比关系。这一过程可以迭代进行。设 $X = I^N - (I^{N-m-1} \cup I^{N-k-1} \cup I^{N-j-1})$ 和 $f\colon D^m \to X$，$g\colon D^k \to X$，$h\colon D^j \to X$ 是良嵌入，它们在边界上分别与固定的小球面 o^{m-1}，o^{k-1}，o^{j-1} 一致。那么 $[[f,g],h]$，$[[g,h],f]$，$[[h,f],g]$ 是良嵌入 $D^{m+k+j-2} \to X$，其边界为固定的小球面 $o^{m+k+j-3} \subset F$。

两个良嵌入 $a, a'\colon D^{m+k+j-2} \to X$ 的和 $a \# a'$（其边界为 $o^{m+k+j-3}$）定义如下。我们考虑分解

$$X = \varphi(I^N) \cup \psi(X') \cup \psi(X'')$$

[4]这与 把手 h^{m+k} 中的“先取外法向量”约定，也将其作为粘附映射 .

如嵌入怀特海德积的定义中所述。我们在 $\varphi(I^N)$ 中固定一个由 $o^{m+k+j-3} \subset F$ 围成的标准圆盘 $L^{m+k+j-2}{}_{\mathrm{st}}$。设 b_1 和 b_2 是嵌入在 $\mathrm{Int}\, L^{m+k+j-2}{}_{\mathrm{st}}$ 中的小而互不相交的 $(m+k+j-2)$ 圆盘。于是，我们可以分别在 b_1 和 b_2 处用细圆柱 $S^{m+k+j-3} \times I$ 将 $L^{m+k+j-2}{}_{\mathrm{st}}$ 与 $a(D^{m+k+j-2})$ 和 $a'(D^{m+k+j-2})$ 作连通和，其中 $S^{m+k+j-3} \times \{0\}$ 与 ∂b_i 粘合，而 $S^{m+k+j-3} \times \{1\}$ 在 $\psi(X')$ 或 $\psi(X'')$ 中与 $o^{m+k+j-3}$ 粘合。三个或更多由 $o^{m+k+j-3}$ 围成的良嵌入 $a_i\colon D^{m+k+j-2} \to X$ 的和 $a_1 \# \cdots \# a_r$，定义方式类似：取嵌入在 $\mathrm{Int}\ L^{m+k+j-2}{}_{\mathrm{st}}$ 中的互不相交的小 $(m+k+j-2)$ 圆盘 b_1、.....、b_r，并作分解$X = X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)}$。见图 8。

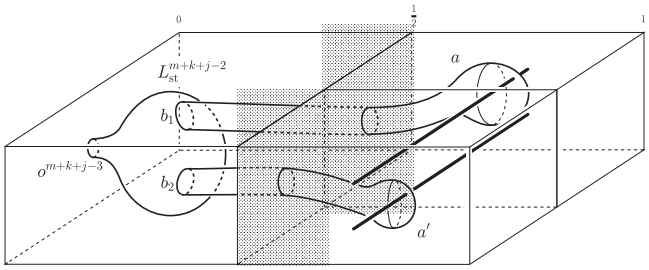


FIGURE 8. 连通和 $a \# a'$。

定义 4.4 (雅可比关系)。设 $X = I^N - (I^{N-m-1} \cup I^{N-k-1} \cup I^{N-j-1})$。我们称由 $o^{m+k+j-3}$ 界定的良嵌入 $\varphi\colon D^{m+k+j-2} \to X$ 表示 f、g、h的雅可比关系，当且仅当它有一个分解 $\varphi = a_1 \# a_2 \# a_3$，其中 a_1、a_2、$a_3\colon D^{m+k+j-2} \to X$ 是由 $o^{m+k+j-3}$ 界定的良嵌入，且 $a_1 \# a_2 \# a_3$ 相对同痕于

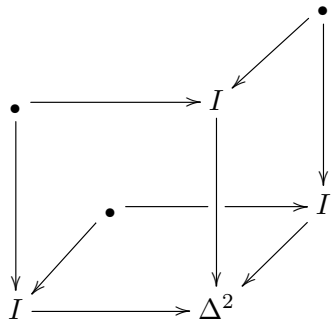
$$[[f,g],h] \# (-1)^{mk+mj}[[g,h],f] \# (-1)^{mj+kj}[[h,f],g]$$

相对于 $L^{m+k+j-2}{}_{\mathrm{st}}$ （参见附录 C）。

4.2. **嵌入怀特海德积的指定布鲁尼安零同伦**。现在我们看到，嵌入怀特海德积具有自然的布鲁尼安零同伦（定义 2.5）。嵌入 $f \in \mathcal{E}(\emptyset) = \mathrm{Emb}_\partial((I^{2n-1})^{\cup 3},\ I^{3n})$ 的布鲁尼安零同伦系统，按定义是将 $\mathrm{Map}(\Delta^2, \mathcal{E}(\emptyset))$ 中映射到 f 的常值映射 const^f 提升到同伦极限 $\mathrm{holim}_{\emptyset \neq S \subset \Omega} \mathcal{B}(S)$ 的提升，其中所用的图表如下：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{B}(\{1\}) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathcal{B}(\{3\}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\{1,3\}) & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ & \mathcal{B}(\{2\}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\{1,2\}) & \\ & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{B}(\{2,3\}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\{1,2,3\}) & & \end{array} \tag{4.1}$$

回忆一下，在此情形下，同伦极限 $\operatorname{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega}\mathcal{B}(S)$ 是从该图表到



在拓扑空间范畴中，态射由 Δ^2 中单形的面给出，映至图表 (4.1)（例如参见 [MV, §5.3]）。 f 的一个布伦尼安零同伦系统是将 Δ^2 映至点 f 的一种映射。因此，它由路径 γ_1，γ_2，γ_3（分别属于 $\mathcal{E}(\{1\})$、$\mathcal{E}(\{2\})$、$\mathcal{E}(\{3\})$）以及同伦 γ_{12}，γ_{23}，γ_{13}（分别属于 $\mathcal{E}(\{1,2\})$、$\mathcal{E}(\{2,3\})$、$\mathcal{E}(\{1,3\})$）组成，满足

- $\gamma_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ 是一条从 $\pi_{\{i\}}(f)$ 到标准包含 ι 的路径，
- $\gamma_{ij}\,(i\neq j)$ 是 $\mathcal{E}(\{i,j\})$ 中的一个同伦，它连接由 γ_i 和 γ_j 分别诱导的路径 γ_i 和 γ_j。

引理 4.5。 博罗米恩弦链（I^{2n-1}）$^{\cup 3}\to I^{3n}$ 具有一个布伦尼安零同伦系统，并且该系统具有循环对称性。

证明。为了给出如上所述的嵌入怀特海德积 f 的一列路径，我们分别考虑 $f\in\mathcal{E}(\emptyset)=\mathcal{B}(\{1,2,3\})$ 在 $\mathcal{B}(\{2,3\})$、$\mathcal{B}(\{1,3\})$、$\mathcal{B}(\{1,2\})$ 中的提升 (f,ρ_1)、(f,ρ_2)、(f,ρ_3)，如下所示。博罗米安链环的一个著名坐标表示（[Ma, §4]）给出了 i 分支的一个零同伦 ρ_i，该零同伦沿着一个张成圆盘进行，并且可能与其他分支相交。我们分别取标记为 $\{2,3\}$、$\{1,3\}$、$\{1,2\}$ 的分支对的零同伦 γ_1、γ_2、γ_3，使得 γ_1 在 $\mathcal{B}(\{1,3\})$ 中映射为 (f,ρ_2)，γ_2 在 $\mathcal{B}(\{1,2\})$ 中映射为 (f,ρ_3)，并且 γ_3 在 $\mathcal{B}(\{2,3\})$ 中映射为 (f,ρ_1)。我们通过沿第二个分支的张成圆盘滑动，将 $\mathcal{E}(\{1,2\})$ 中的零同伦 ρ_3 变形为另一条路径 γ_1，该路径可提升为 $\mathcal{E}(\{1\})$ 中的 γ_1（图 9）。

令 γ_{12} 为 $\mathcal{E}(\{1,2\})$ 中的这段同伦，它从 ρ_3 到一条来自 $\mathcal{E}(\{1\})$ 的路径。由对称性，同伦 γ_{23}、γ_{13} 以及路径 γ_2、γ_3 分别由 ρ_1、ρ_2 类似地定义。因此，我们得到序列 $(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_{12},\ \gamma_{23},\ \gamma_{13})$，它给出了从 $\mathrm{const}_f\in\mathrm{Map}(\Delta^2,\ \mathcal{E}(\emptyset))$ 到 $\operatorname{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega}\mathcal{B}(S)$ 的一个提升。
循环对称性从构造中显而易见。 □

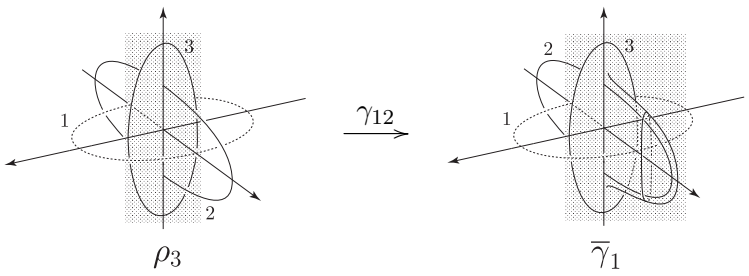


FIGURE 9. 在 $\mathcal{E}(\{1,2\})$ 中的一个同伦。

注 4.6。 γ_{12} 从 ρ_3 到 γ_1 的变形，可以按照图 10 左图所示，在嵌入怀特海德积的管道模型中加以解释（对于 $n=1$）。这一张成圆盘之间的变形

由张成圆盘的并集所围成的圆盘给出，如图 10 右图所示；这一结果实质上已见于 [Kos24b,Definition5.8]。

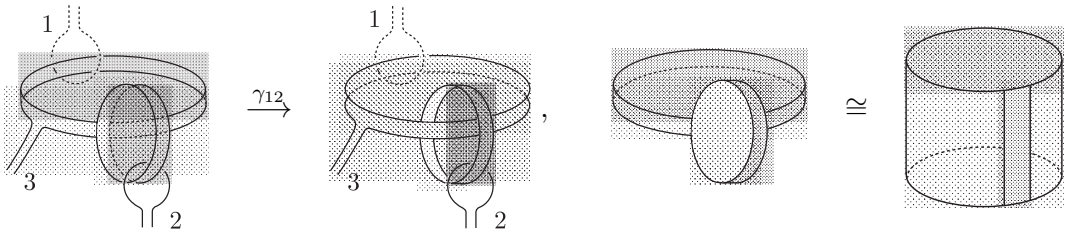


FIGURE 10. 左：管道模型中的路径 γ_{12} 。右：两个张成圆盘之间的变形。

定义4.7。 我们通过博罗米恩弦链定义 $\beta_{T_3}(T_3) = \omega_{T_3}(T_3)$: $* \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}((I^{2n-1})^{\cup 3},\ I^{3n})$。我们定义 $m_3 = 1$。

定理 *1.6* 的证明（针对 $\ell = 3$）。 $\ell = 3$ 的相关条件是 (4) 布鲁尼安性质、循环对称性以及 (6) 超额 0。(5) 这些均由引理 4.5 得出。□

4.3. **雅可比关系的显式零同伦**。设 $X = I^{4n-1} - (I^{3n-2} \cup I^{3n-2} \cup I^{3n-2})$。设 $c_i (i = 1,\ 2,\ 3)$ 为 I^{4n-1} 中移去的第 i 个分支的一个小子午线 n-球面。设 $f,\ g,\ h$: $D^n \to X$ 是由 L^n_{st} 分别与 $c_1,\ c_2,\ c_3$ 作连通和得到的良嵌入。

定理 4.8。设 $n \geq 2$。对于良嵌入 f、g、h: $D^n \to X$，我们构造一个显式的良嵌入

$$\varphi_{\mathrm{IHX}} \colon D^{3n-2} \to I^{4n-1} - (I^{3n-2} \cup I^{3n-2} \cup I^{3n-2})$$

其边界为 o^{3n-3}，且表示 f、g、h 的雅可比关系。此外，我们构造一条路径 $[f, g, h]$，从 ι 到 φ_{IHX}，它相对于由 *§4.2* 中给定的同伦所诱导的 φ_{IHX} 的指定布伦尼安零同伦系统具有布鲁尼安性质。特别地， $\partial[f, g, h]$ 表示 f、g、h 的雅可比关系：

$$\partial[f, g, h] = \big([[f, g], h] \# [[g, h], f] \# [[h, f], g]\big) - \iota.$$

定理 4.8 中等式右端被视为 $S_0(\mathcal{E}; \mathbb{Q})$ 中的一个元素，在其中运算‘–’有意义。若将其视为 $S'_0(\mathcal{E}; \mathbb{Q})$ 中的元素，则 # 与 $+$ 等同，而对 ι 求和不会改变同调类。

4.3.1. *()*-球面的分解 S。我们考虑 $(3n-1)$-球面 $S := \partial(D^n \times D^n \times D^n)$，以及由将边界塌缩到 ∞ 的映射 $D^n \to S^n$ 所诱导的自然连续映射 $D^n \times D^n \times D^n \to S^n \times S^n \times S^n$。 $S^n \times S^n \times S^n$ 的自然胞腔分解提升为 $D^n \times D^n \times D^n$ 的一个分解。在此分解中， $S = \partial(D^n \times D^n \times D^n)$ 被分解为以下各面的和：

- 维数 $3n-1$: $D^n \times D^n \times \partial D^n$， $D^n \times \partial D^n \times D^n$， $\partial D^n \times D^n \times D^n$。
- 维数 $3n-2$: $\partial D^n \times \partial D^n \times D^n$， $\partial D^n \times D^n \times \partial D^n$， $D^n \times \partial D^n \times \partial D^n$。
- 维数 $3n-3$: $\partial D^n \times \partial D^n \times \partial D^n$。

4.3.2. $(3n-2)$-球面 Σ_{IHX} 在 S。现在我们假设 $n \geq 2$。我们考虑 $S = \partial(D^n \times D^n \times D^n)$ 的以下可缩子集：

$$K_1 = (D^n \times D^n \times \partial D^n) \cup (* \times * \times D^n),$$
$$K_2 = (D^n \times \partial D^n \times D^n) \cup (* \times D^n \times *),$$
$$K_3 = (\partial D^n \times D^n \times D^n) \cup (D^n \times * \times *),$$

其中 $*\in\partial D^n$ 是一个基点。我们通过将两个 D^n 因子替换为半径为 $1-\varepsilon$ 的稍小的一个 $D^n_{1-\varepsilon}$，稍微收缩 K_i 中的余维 1 面 $D^n\times D^n\times\partial D^n$ 等。此外，我们将 n-胞腔 $*\times *\times D^n$ 等稍微扩大为较大的胞腔 $D^n_{1+\varepsilon}\subset S$，使其边界附着于收缩后的余维 1 面 $D^n_{1-\varepsilon}\times D^n_{1-\varepsilon}\times\partial D^n$ 等，并且领圈 $D^n_{1+\varepsilon}-\operatorname{Int} D^n\cong[1,1+\varepsilon]\times\partial D^n$ 与 $s\in[1,1+\varepsilon]$ 时 $\partial(D^n_s\times D^n_s)$ 的基点所在的位置一致。令 K_1', K_2', K_3' 分别表示由 K_1, K_2, K_3 得到的对象（见图 11）。

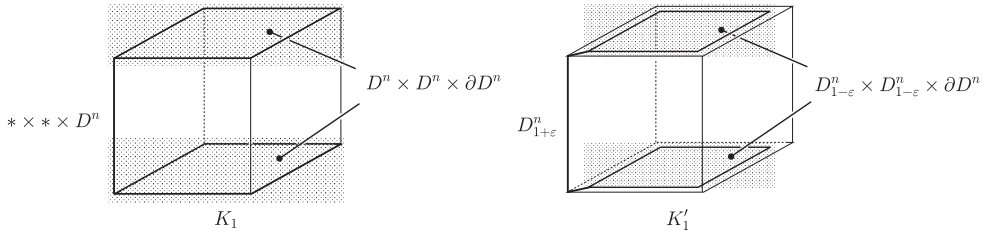


FIGURE 11. K_1 和 K_1'。

若 $n\geq 2$，则可假设 S 中的三个对象 K_1', K_2', K_3' 两两不相交（通过稍微扰动 n-胞腔 $*\times *\times D^n_{1+\varepsilon}$ 等）。注意，对于 $n\geq 2$，小（$3n-1$）圆盘中的一对 n-子流形可以在一般位置下彼此分离。可以看出，K_i' 是可缩的。我们取 S 中 K_1', K_2', K_3' 的小邻域 N_1, N_2, N_3，它们是两两不相交的（$3n-1$）圆盘。可以看出，$\partial N_1, \partial N_2, \partial N_3$ 表示 $S^n\times S^n\times S^n$ 的 n-骨架中雅可比关系的三项 $[[\alpha,\beta],\gamma]$、$[[\beta,\gamma],\alpha]$、$[[\gamma,\alpha],\beta]$（图 12）。

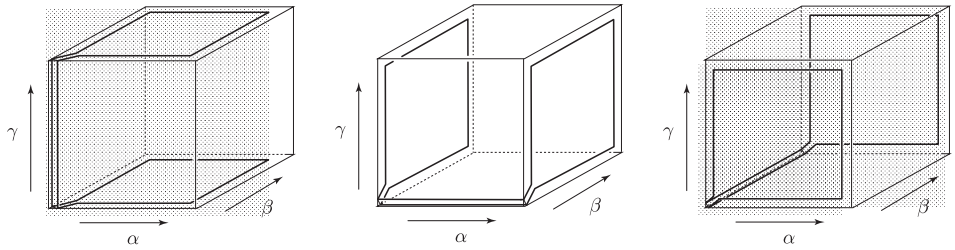


FIGURE 12. 带有预先指定的张成圆盘 N_1、N_2、N_3的迭代怀特海德积 $[[\alpha,\beta],\gamma]$, $[[\beta,\gamma],\alpha]$, $[[\gamma,\alpha],\beta]$，分别对应这些圆盘。

引理4.9。设 $n\geq 2$。设 $N_{\mathrm{IHX}}=N_1\natural N_2\natural N_3$ 和 $\Sigma_{\mathrm{IHX}}=\partial(N_1\natural N_2\natural N_3)$，其中当 $n\geq 2$时，可在 S 内进行边界连通和 $\natural$。那么，$(3n-2)$-球面 Σ_{IHX} 是圆盘 $W_{\mathrm{IHX}}=S-\operatorname{Int} N_{\mathrm{IHX}}$的边界，且该圆盘与以下各项的并集不相交

$$O:=(D^n_{1-\varepsilon}\times D^n_{1-\varepsilon}\times\partial D^n)\cup(D^n_{1-\varepsilon}\times\partial D^n\times D^n_{1-\varepsilon})\cup(\partial D^n\times D^n_{1-\varepsilon}\times D^n_{1-\varepsilon})$$

余维 *1* 面。

证明。引理成立，因为保向光滑嵌入 $D^{3n-1}\to S^{3n-1}$ 在同痕意义下唯一。因此，S 中圆盘 $\operatorname{Int} N_{\mathrm{IHX}}$ 的补集与一个圆盘微分同胚（图13）。圆盘 W_{IHX} 与 O 不相交，因为 $O\subset K_1'\cup K_2'\cup K_3'\subset\operatorname{Int} N_{\mathrm{IHX}}$。□

注 4.10. 圆盘 W_{IHX} 与 O 不相交，这意味着它在 S 中的像可以假设包含在 $S^n\times S^n\times S^n$的一个把手分解的 n-骨架的原像中。

引理4.11。设 P 是 $S^n\times S^n\times S^n$ 的一个把手分解的 n-骨架，该分解包含一个 *0*-把手、三个 n-把手、三个 $2n$-把手和一个 $3n$-把手，并由莫尔斯函数 $h_i\colon\ S^n\to\mathbb{R}$ *(*$i=1,2,3$*)* 的拉回之和$\mathrm{pr}_1^*h_1+\mathrm{pr}_2^*h_2+\mathrm{pr}_3^*h_3$得到，其中这些函数有两个临界点

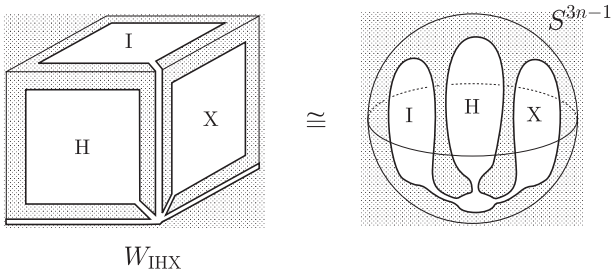


FIGURE 13. 由 $\Sigma_{\mathrm{IHX}} \cong S^{3n-2}$界定的（$3n-1$）圆盘 W_{IHX} 位于 S^{3n-1} 中。

点通过投影 pr_i： $S^n \times S^n \times S^n \to S^n$ 到第 i 个因子得到。由 f、g、h，从那些 n-把手诱导出的嵌入 $P \to X$ 诱导出嵌入序列 $W_{\mathrm{IHX}} \subsetneq S - O \to X$。

证明。 $S-O$作为 $3n$-把手的粘附映射的一部分，自然嵌入 ∂P 中。 □

定义4.12（三重括号）。设 $n \geq 2$。我们定义 φ_{IHX}：通过将按引理4.11所述嵌入的球面 Σ_{IHX} 与固定圆盘 L^{3n-2}_{st}作连通和来定义 $D^{3n-2} \to X$。我们将括号$[f,g,h]$ 定义为 $\mathrm{Emb}_\partial(D^{3n-2}, I^{4n-1} - (I^{3n-2})^{\cup 3})$ 中从基点 ι 到 φ_{IHX} 的一条路径，该路径沿着张成圆盘 $W_{\mathrm{IHX}} \to X$给出一个同痕。

定理 *4.8* 的证明。 分解 $\Sigma_{\mathrm{IHX}} = \partial N_1 \# \partial N_2 \# \partial N_3$ 由此得到雅可比关系的分解$a_1\#a_2\#a_3$ φ_{IHX}。将引理4.11中的嵌入延拓到圆盘 W_{IHX}，即可得到 φ_{IHX}的所需零同伦。布鲁尼安性质将在下文引理 4.15 中证明。□

上述构造适用于 $D^p \times D^q \times D^r$ $(p,\ q,\ r \geq 2)$，并给出了 $\mathrm{Emb}_\partial(D^{p+q+r-3},\ I^N - (I^{N-p-1} \cup I^{N-q-1} \cup I^{N-r-1}))$ 中的一条嵌入路径。作为副产品，我们得到了以下结论的一个初等几何证明。（另见引理 4.2。）

推论4.13（怀特海德积的雅可比恒等式（[Hil, NT,UM] 等））。设 M 为一个带基点拓扑空间。若 p、q、$r \geq 2$ 和 $\alpha \in \pi_p(M)$、$\beta \in \pi_q(M)$、$\gamma \in \pi_r(M)$，则以下恒等式在$\pi_{p+q+r-3}(M)$ 中成立。

$$[[\alpha,\beta],\gamma] + (-1)^{pq+pr}[[\beta,\gamma],\alpha] + (-1)^{pr+qr}[[\gamma,\alpha],\beta] = 0$$

关于符号的细节见引理 C.1。还应指出，在不同的情形下，也有关于怀特海德积的雅可比恒等式的几何证明： [GO、Hab、HW、CST] 适用于 3 维流形， [CST]适用于 4维流形中的惠特尼塔。

4.4. **布伦尼安性质**。我们检验路径 $[f,g,h]$ i 的布伦尼安性质 n

$$\mathrm{Emb}_\partial(D^{3n-2}, I^{4n-1} - (I^{3n-2})^{\cup 3}). \tag{4.2}$$

也就是说，我们将 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{3n-2})^{\cup 4},\ I^{4n-1})_\iota$ 的布伦尼安性质推广到 (4.2) 的情形：将D^{3n-2} 视为第四个分支，并将布伦尼安零同伦系统限制为固定前三个分支的情形。因此，我们只需检验定义 2.6 中所述零同伦的相对布伦尼性质，针对立方图表 $\{\mathcal{B}(S)\}_{S\subset\Omega'=\{1,2,3\}}$，其中 $\mathcal{B}(S)$ 是 $\mathcal{E}(\emptyset) \to \mathcal{E}(S)$ $= \mathrm{Emb}_\partial(D^{3n-2},\ I^{4n-1} - \bigcup_{\lambda\notin S} I^{3n-2}_\lambda)_\iota$ 的同伦纤维。这样的布伦尼安零同伦系统通过对 S 取标准包含的常值族（其中 $4 \in S$），诱导出立方图表 $\{\mathcal{B}(S)\}_{S\subset\Omega=\{1,2,3,4\}}$ 对应的布伦尼安零同伦系统。

引理4.14 (指定的布伦尼零同伦)。 设 $n \geq 2$。嵌入 φ_{IHX} 具有一个由引理 *4.5* 中的布伦尼安零同伦所诱导的布伦尼安零同伦系统。

证明。 我们注意到嵌入怀特海德积具有以下性质：设流形 X 中的一个嵌入怀特海德积由把手体U的边界表示，其中把手体U是将一个 p-把手 α和一个 q-把手 β粘接到 X中的一个小（$p+q$）圆盘上得到的（图 14，左图）；再设 X 中 β 相对于粘接球面的同伦类为零。则存在一种手术，将（$p+q$）维把手体 U变为另一个（$p+q$）流形U'：从 I^{4n-1}中的一个（$p+q$）圆盘上移除一个 p-把手 α'，并将 β粘接到该圆盘上；该圆盘不在 X 中，因为它与链环的一个分支相交（图 14，左箭头）。此时， U' 微分同胚于 I^{4n-1}中的一个（$p+q$）圆盘，该圆盘不在 X中，并给出一个将嵌入怀特海德积延拓为从圆盘到流形的嵌入。还有另一个圆盘 U''，它是通过将 α 粘接到 X中的一个（$p+1$）圆盘上，并从该圆盘移除一个 q-把手 β'而得到的。圆盘 U'和 U''通过“推过”一个（$p+q+1$）圆盘相关联；该圆盘位于 I^{4n-1} 中，以 $U' \cup$ （$-U''$）为边界，如注 4.6 所述（图 14，右箭头）。

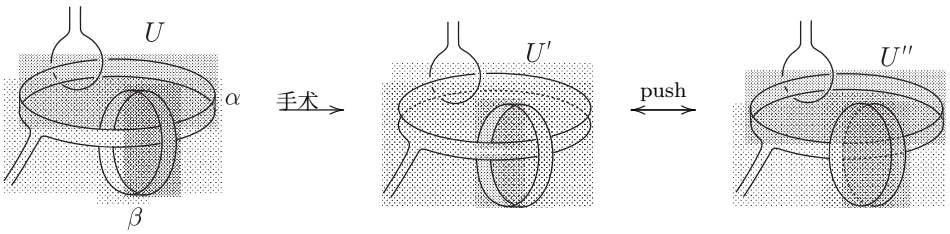


FIGURE 14. 嵌入怀特海德积的张成子流形。

我们利用这一技巧构造一个指定的布伦尼安零同伦系统。回想一下， φ_{IHX} 中的每一项都是由把手分解的$S^n \times S^n \times S^n$的 n骨架某个子集到$S^n \times S^n \times S^n$的嵌入给出的。假设其中一个 S^n（例如最后一个）在 X中是零。我们在 $S^n \vee S^n \vee *$的一个小邻域内得到三个$(3n-2)$-球面，其中每个都可延拓为一个$(3n-1)$-圆盘（见图15）。其中两个延拓由指定的布伦尼安零同伦诱导，具体是去掉最后一个分支后得到的；另一个则由指定的布伦尼安零同伦经上一段所述的变形 $U' \to U''$得到，其中 β 是 $S^n \vee S^n \vee S^n$的最后一个 S^n因子。三个圆盘的边界连通和给出 $\mathcal{E}(\{3\})$中的一条零同伦路径。去掉第一个和第二个分支的情形与此类似。 $\mathcal{E}(\{1,2\})$、$\mathcal{E}(\{2,3\})$和 $\mathcal{E}(\{1,3\})$中的同伦由张成圆盘的变形给出，如图14右侧所示。□

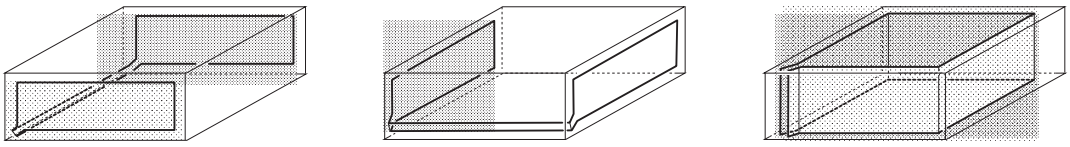


FIGURE 15. $[[\gamma,\alpha],\beta]$、 $[[\beta,\gamma],\alpha]$和 $[[\alpha,\beta],\gamma]$的零同伦。前两个分别由 N_3 和 N_2给出。

引理 4.15 (相对布伦尼性质)。 设 $n \geq 2$。零同伦 $[f,g,h]$ 相对于引理*4.14*中 φ_{IHX} 的指定布伦尼安零同伦系统，具有相对布伦尼性质。

证明。 假设移除弦链环族 $[f,g,h]$ 的前三个分支之一，例如最后一个分支。将引理4.14中关于移除最后一个分支的φ_{IHX}指定布伦尼安零同伦的三个（$3n-1$）圆盘之并，与φ_{IHX} 的零同伦 $[f,g,h]$合在一起，便得到 φ_{IHX}的以下两个零同伦：

(1) 由 W_{IHX} 给出的零同伦。

(2) 由上一段中延拓到（$3n-1$）-圆盘的边界连通和给出的零同伦。

这些零同伦被安排在 $\partial(D^n \times D^n \times D^n)$ 的一个小邻域内。沿着两个边界粘合的两个（$3n-1$）-圆盘进行的这两个零同伦，可以在 $3n$-圆盘内部延拓（图 16）。也就是说， $3n$-圆盘的边界是通过将引理4.9中的三个圆盘 N_1, N_2, N_3 中的两个填入 W_{IHX}，同时利用引理4.14证明中第一段的技巧将另一个圆盘推入盒内而得到的。（对于引理4.14证明中考虑的例子，两个圆盘 N_2 和 N_3 （图15，左侧两个对象）被填入，而 N_1 被推入盒内。） $3n$-圆盘给出了 $[f,g,h]$ 与规定的 φ_{IHX} 在 $\mathcal{B}(\{3\})$ 中的布伦尼安零同伦之间的一个同伦。

通过类似的操作，我们看到， $[f,g,h]$ 与 φ_{IHX} 在 $\mathcal{B}(S)$中针对 $|S| \geq 1$ 的指定布伦尼安零同伦变形之间的同伦，由 $D^n \times D^n \times D^n$中的一个嵌入 $3n$圆盘给出。由于 $D^n \times D^n \times D^n$ 中光滑 $3n$圆盘的空间是可缩的，因此对于每个 $S \subset \{1,2,3\}$，我们可以在 $\mathcal{B}(S)$中找到 $[f,g,h]$ 与 γ_S之间的同伦系统。证明完毕。□

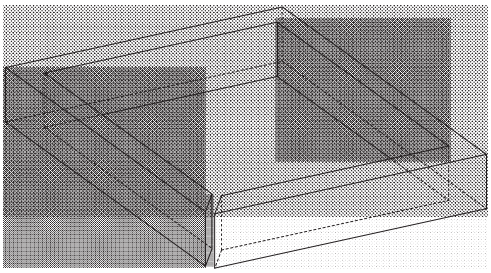
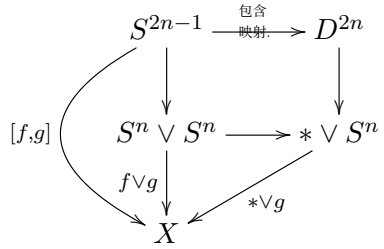
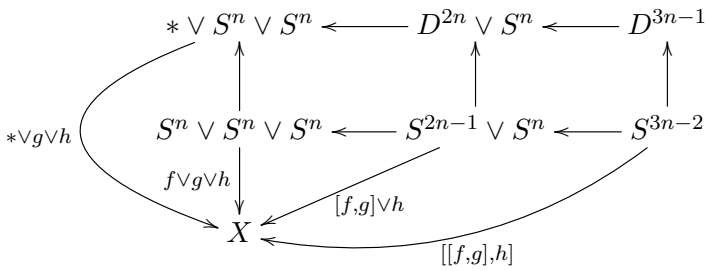


FIGURE 16. 两个零同伦变形的并集，它围成一个 $3n$圆盘。外边界是 W_{IHX} 与 $[[\gamma,\alpha],\beta]$ 和$[[\beta,\gamma],\alpha]$的指定零同伦变形的并集。内边界是(2)中给出的 $[[\alpha,\beta],\gamma]$ 的零同伦变形，它是通过将指定的零同伦变形推入立方体内部得到的。

注 4.16. 引理 4.15 的上述证明是以下同伦版本的类比。设$f,g,h\colon S^n \to X$为基点连续映射。回忆一下，若 f是零伦的，则有以下同伦交换图：



在这种情形下，我们有以下同伦交换图：



这表明，如果 f是零伦的，那么 $[[f,g],h] \simeq 0$。

4.5. **对称性**。我们固定 Int I^2 中的不同点 p_0、p_1、……、p_{r-1}，并认为类型为 $(a,\ \ldots\ldots,\ a;\ N)$ 的弦链环的标准对 $(I^N,\ I^a\cup\cdots\cup I^a)$ 由直积 $(I^2\times I^{N-2},\ \{p_0,p_1,\ldots,p_{r-1}\}\times I^a\times\{0\})$ 给出。我们取一个相对微分同胚 ρ_0: $(I^2,\ \partial I^2)\to(I^2,\ \partial I^2)$，它诱导 $\{p_0,p_1,\ldots,p_{r-1}\}$ 的循环置换，并将其延拓为相对微分同胚

$$\rho:=\rho_0\times\mathrm{id}_{I^{N-2}}\colon (I^2\times I^{N-2},(\partial I^2)\times I^{N-2})\to(I^2\times I^{N-2},(\partial I^2)\times I^{N-2}).$$

对于 $f\in\mathrm{Emb}_\partial(I^a\cup\cdots\cup I^a,I^N)$，定义 $\xi\colon\mathrm{Emb}_\partial(I^a\cup\cdots\cup I^a,I^N)\to\mathrm{Emb}_\partial(I^a\cup\cdots\cup I^a,I^N)$ 为 $\xi(f)=(-1)^{(r-1)(N-a-1)}\rho\circ f\circ(\rho|_{I^a\cup\cdots\cup I^a})^{-1}$，其中 $(-1)\colon\mathrm{Emb}_\partial(I^a\cup\cdots\cup I^a,I^N)\to\mathrm{Emb}_\partial(I^a\cup\cdots\cup I^a,I^N)$ 反转 I^{N-2} 的第一坐标。出现符号 $(-1)^{(r-1)(N-a-1)}$ 的原因是，对称化基本括号的叶形式满足

$$\theta_r\wedge\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{r-1}=(-1)^{(r-1)(N-a-1)}\theta_1\wedge\theta_2\wedge\ldots\wedge\theta_r.$$

(参见定义 10.5。我们应将 $k-1$ 和 k 替换为 $N-a-1$。)

定义 4.17（循环对称性）。如果弦环 $f\colon I^a\cup\cdots\cup I^a\to I^N$ 与 $\xi(f)$ 相对同伦，我们就称其具有循环对称性 f。我们还可以定义从标准包含映射出发的 $\mathrm{Emb}_\partial(I^a\cup\cdots\cup I^a,I^N)$ 中路径 φ_t 的循环对称性质：要求对于从 φ_1 到 $\xi(\varphi_1)$ 的任意同痕，对于所有 t，都存在从 φ_t 到 $\xi(\varphi_t)$ 的同痕，并且该同痕延拓了 $t=0,1$。

零同痕　　路径 $[f,g,h]\in\mathrm{Emb}_\partial(D^{3n-2},I^{4n-1}-(I^{3n-2})^{\cup 3})$ 可以修改为一条位于

$$\mathrm{Emb}_\partial((I^{3n-2})^{\cup 4},I^{4n-1})$$

将一个带穿孔的（$3n-2$）平面在 I^{4n-1} 中的平凡族附加到 D^{3n-2} 的嵌入上。我们假设，在这一嵌入族中，$(I^{3n-2})^{\cup 4}$ 的非标准分量标记为 0，其余三个标准分量依次标记为 $1,2,3$。考虑到这一点，我们将上述嵌入路径记为 $\omega_0^{(4)}$。

令 $\omega_1^{(4)}$、$\omega_2^{(4)}$、$\omega_3^{(4)}$ 分别表示 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{3n-2})^{\cup 4},\ I^{4n-1})$ 中由 $\xi(\omega_0^{(4)})$、$\xi^2(\omega_0^{(4)})$、$\xi^3(\omega_0^{(4)})$ 给出的嵌入路径。令

$$\omega_{T_4}=\omega_0^{(4)}\#\omega_1^{(4)}\#\omega_2^{(4)}\#\omega_3^{(4)},$$

其中，和式 # 是沿着 I^{3n-2} 逐分量拼接得到的。由定义可知，下面的引理显然成立。

Le引理 4.18（循环对称性）。路径 ω_{T_4} 具有循环对称性　　$y.$

定义 4.19（作为链的三重括号）。设 $m_4=4$。我们用 $\beta_{T_4}=\beta_{T_4}(T_4)$ 表示 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{3n-2})^{\cup 4},\ I^{4n-1})$ 中的链 $\frac{1}{m_4}\omega_{T_4}$。对于 T_4 的面图 σ，令 $\beta_{T_4}(\sigma)$ 表示由 σ 的迭代括号给出的 $\partial\beta_{T_4}$ 的相应分项。

定理 *1.6* 的证明（$\ell=4$）。每一项 $\omega_i^{(4)}$ 都满足雅可比关系（定理 4.8）和 Brunian 性质（引理 4.15），而 $\beta_{T_4}(T_4)$ 满足循环对称性（引理 4.18）。性质（边界）由定义显然成立。我们只需检查对称化不会破坏定理 4.8 的恒等式及其右端的分解结构。每一项 $\omega_i^{(4)}$ 的边界表示雅可比关系，因此可分解为三项（见图 17）：

$$\begin{aligned}\partial\omega_0^{(4)}&=\theta_1\#\theta_2\#\theta_3, & \partial\omega_1^{(4)}&=\xi(\theta_1)\#\xi(\theta_2)\#\xi(\theta_3),\\ \partial\omega_2^{(4)}&=\xi^2(\theta_1)\#\xi^2(\theta_2)\#\xi^2(\theta_3), & \partial\omega_3^{(4)}&=\xi^3(\theta_1)\#\xi^3(\theta_2)\#\xi^3(\theta_3).\end{aligned}$$

如果 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 分别对应图 1 左端的三个项，那么根据博罗米恩弦链的循环对称性（引理 4.5），我们有以下相对同痕关系：$\theta_1\sim\xi(\theta_2)\sim\xi^2(\theta_1)\sim\xi^3(\theta_2)$，$\theta_2\sim\xi(\theta_1)\sim\xi^2(\theta_2)\sim\xi^3(\theta_1)$，$\theta_3\sim\xi(\theta_3)\sim\xi^2(\theta_3)\sim\xi^3(\theta_3)$。更确切地说，

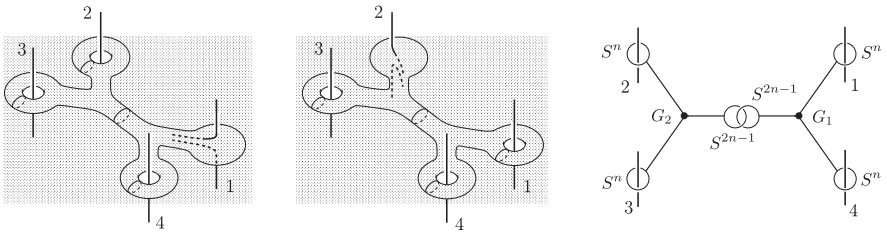


FIGURE 17. 左： θ_1。中： $\xi(\theta_2)$。右： Ψ-图 $G_1 \cup G_2$，对应于 θ_1。四个分支中的一个爬入把手体内部（阴影部分）；该把手体与 I^{4n-1} 中 $(I^{3n-2})^{\cup 3}$ 的管状邻域的补集相同。

- 弦环 θ_1 由两个类型为 $(n, n, 2n-1)$ 的 Ψ_3-图 G_1 和 G_2 复合而成（定义5.1和5.12）；其中，G_1 的叶与第一个和第四个 I^{3n-2} 分支以及 G_2的一片叶相链，而 G_2 的两片叶与第二个和第三个 I^{3n-2} 分支相链（见图 17 右侧）。
- 弦环 $\xi(\theta_2)$ 由两个 Ψ_3-图 G_1' 和 G_2' 复合而成，其中 G_1' 的叶分别与第二和第三个 I^{3n-2} 分支以及 G_2' 的一片叶相连，而 G_2' 的两片叶分别与第一个和第四个 I^{3n-2} 分支相连。

对 $G_1 \cup G_2$（定义 5.12）进行迭代手术得到 θ_1：先将第一个分支替换为 G_1 的一个小正则邻域中的嵌入怀特海德积，然后对与 G_2 的一片叶相连的 G_1 的特殊 S^{2n-1}-叶平行部分施行 G_2 上的手术。Ψ_3-手术的对称性表明，对 G_1 和 G_2 的手术分别可以变形为对 G_2' 和 G_1' 的手术。因此，我们有 $\theta_1 \sim \xi(\theta_2)$。其他项的相对同伦等价与此情形类似。由此可知，$\partial\omega_{T_4}$ 与四个 φ_{IHX} 的连通和相对同痕。证明完毕。□

由于根据引理 4.5，博罗米恩弦链的布伦尼安零同伦系统还具有循环对称性，因此定理 1.6 的证明中针对 $\ell = 4$ 的论证也证明了以下结论。

引理4.20。引理 *4.15* 中的 ω_{T_4} 的布伦尼安零同伦系统具有循环对称性质。

5. 顶点手术的运算

我们将介绍一些顶点手术的运算，以便为更一般的链环维数集合和更一般的树得到手术。由于定义较为技术性，读者初次阅读时可以跳过本节，在需要时再返回阅读，同时记住：存在一个将基本括号转换为一般维数下的括号的自然过程，这一过程在定理 1.10 中有所描述；对于图（例如图 22），也存在顶点手术的自然迭代，并且这种迭代同样配备了一个诱导的布伦尼安零同伦系统。

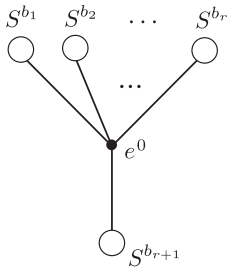
定义 5.1 (Ψ_{r+1}-图)。我们将类型为 $(b_1, \dots, b_{r+1})$ 的 Ψ_{r+1}-图 定义为由以下对象的不交并得到的空间：

- 球面 $S^{b_1}, \dots, S^{b_{r+1}}$，我们称之为叶，以及
- 一个 0-胞腔 e^0，我们称之为顶点，

对每个 i，在 S^{a_i} 和 e^0 之间粘接一个 1-胞腔 e_i^1，我们称之为边：

$$(S^{b_1} \amalg \cdots \amalg S^{b_{r+1}}) \cup e^0 \cup (e_1^1 \cup \cdots \cup e_{r+1}^1).$$

A Ψ-图是某个 Ψ_{r+1}-图（见图 18）。



类型为（b_1、.....、 b_{r+1}）的 FIGURE 18. Ψ_{r+1}-图。

我们将在定义 5.11 中，通过取 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1}\cup\cdots\cup I^{a_{r+1}}, I^d)$ 中的一个族（其中 $a_i = d-b_i-1$），定义在 d-流形中沿 Ψ_{r+1}-图进行手术。例如，嵌入怀特海德积给出了 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{2n-1}\cup I^{2n-1}\cup I^{2n-1}, I^{3n})$ 中的一个嵌入；利用它，可以定义沿一个类型为 (n,n,n)、其中顶点 e^0 为 3 价的 Ψ_3-图进行的手术。此外，我们还构造了 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1}\cup\cdots\cup I^{a_4}, I^d)$ 中的一条路径，其中 $a_1=a_2=a_3=a_4=3n-2$ 且 $d=4n-1\geq 7$；利用这条路径，可以定义沿一个类型为 (n,n,n,n) 的 Ψ_4-图进行的手术。同样，我们将在第 6 节和第 7 节中构造空间 $\Omega^{\ell-4}\mathrm{Emb}_\partial((I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})$ 中的一条路径，以定义沿一个类型为 $(n,n,\ldots,n)$ 的 Ψ_{r+1}-图进行的手术。下面，我们定义“悬挂”“去环化”和“迭代”这些运算，将 Ψ_{r+1}-手术推广到更一般的类型 $(b_1,\ldots,b_{r+1})$ 和树。

5.1. **悬挂**。

定义 5.2（预悬挂）。 我们假设弦环 f 中的前 j 个分支为： $I^{a_1}\cup\cdots\cup I^{a_r}\to I^d$ 是标准嵌入。相对于前 j 个分支的 f 的预悬挂是另一个嵌入。

$$\Sigma'_{1,2,\ldots,j} f\colon (I^{a_1}\cup\cdots\cup I^{a_j})\times I\cup I^{a_{j+1}}\cup\cdots\cup I^{a_r}\to I^d\times I = I^{d+1}$$

由.....定义的

$$(\Sigma'_{1,2,\ldots,j} f)(x_p,t) = (f(x_p),t)\quad \text{for } p=1,\ldots,j,$$
$$(\Sigma'_{1,2,\ldots,j} f)(x_p) = (f(x_p),\tfrac{1}{2})\quad \text{for } p=j+1,\ldots,r.$$

标准分量的标签可以互换，并且在标记为 $\{i_1,\ldots,i_j\}$ 的分量为标准包含映射的假设下，可以类似地为任意 $\{i_1,\ldots,i_j\}\subset\{1,\ldots,r\}$ 定义 $\Sigma'_{i_1,\ldots,i_j} f$ 。

在预悬挂 $\Sigma'_{1,2,\ldots,j}$ 下，类型的变化为

$$(a_1,\ldots,a_j,a_{j+1},\ldots,a_r;d)\to(a_1+1,\ldots,a_j+1,a_{j+1},\ldots,a_r;d+1).$$

注 5.3. 定义 5.2 中前 j 个分量为标准包含映射这一假设可以放宽。可以将其替换为以下条件：给定一个关于移除最后 $r-j$ 个分量的 f 的布伦尼安零同伦 γ。在这种情形下，可以先将 f 放入 $I^d\times\{\frac{1}{2}\}$，然后利用同伦 γ（针对前 j 个分量）的轨迹及其逆，将其延拓至两侧 $I^d\times[\frac{1}{2},1]$ 和 $I^d\times[0,\frac{1}{2}]$，从而定义预悬挂。由于最后 $r-j$ 个分量仅包含在 $I^d\times\{\frac{1}{2}\}$ 中，所得结果仍是一个弦环。若一个弦环具有一个布伦尼安零同伦系统，则可以按照该布伦尼安零同伦系统的规定，以规范的方式同时得到所有可能的预悬挂。

我们修改预悬挂的定义，以定义悬挂。我们希望弦环的悬挂中所有分支都具有最后一个坐标，从而可以将其扰动为一个单参数嵌入族的图。下面的定义类似于 [Wa21 的定义 5.2]。

定义 5.4（弦环的悬挂）。设 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_r \colon I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \to I^d$（其中$0 < a_i < d$, $i = 1, \dots r$）是 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}, I^d)$ 中的一个弦环，并配备一个框架同痕 $H_{1,t} \cup \cdots \cup H_{j,t} \colon I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_j} \to I^d$（$t \in [0,1]$），该同痕作用于前 j 个分支并固定边界 $\partial I^{a_1} \cup \cdots \cup \partial I^{a_j}$ 的一个邻域，满足 $H_{1,0} \cup \cdots \cup H_{j,0}$ 是前 j 个分支的标准嵌入，且 $H_{1,1} \cup \cdots \cup H_{j,1} = L_1 \cup \cdots \cup L_j$。假设对于每个 $k \geq j+1$, L_k，在重心 $a = (1/2, \dots, 1/2) \in I^{a_k} \subset I^d$ 周围半径较小的 d 球之外，均与标准包含映射 $I^{a_k} \to I^d$ 一致。那么，L 的悬挂 $L' = L'_1 \cup \cdots \cup L'_r \colon I^{a_1+1} \cup \cdots \cup I^{a_j+1} \cup I^{a_{j+1}} \cup \cdots \cup I^{a_r} \to I^{d+1}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
&L'_k(u_k, w) = (H_{k,\chi(w)}(u_k), w), \quad (\text{for } 1 \leq k \leq j),\\
&L'_k(u_k) = \begin{cases} (L_k(u_k), \frac{1}{2}) & (|u_k - a| \leq R),\\ (p_k, \mu_d^{-1} \circ \rho_{a_k} \circ \mu_{a_k}(u_k)) & (|u_k - a| \geq R), \end{cases} \quad (\text{for } j+1 \leq k \leq r),
\end{aligned}
$$

其中 $u_k \in I^{a_k}$、$w \in I$、$\chi \colon I \to [0,1]$ 是一个光滑函数，其支集包含于 $(1/2, 1)$ 的一个小邻域中，并且 $\chi(1/2) = 1$、$\mu_n \colon [0,1]^n \to [-1,1]^d$ 是由 $\mu_n(t_1, \dots, t_n) = (2t_1 - 1, \dots, 2t_n - 1, 0, \dots, 0)$ 定义的嵌入，而 $\rho_m \colon [-1,1]^d \to [-1,1]^d$ 是由下式定义的微分同胚

$$
\begin{aligned}
&\rho_r(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{m-1}, x'_m, x_{m+1}, \dots, x_{d-1}, x'_d), \text{ where}\\
&x'_m = x_m \cos\psi(|\boldsymbol{x}|) - x_d \sin\psi(|\boldsymbol{x}|), \quad x'_d = x_m \sin\psi(|\boldsymbol{x}|) + x_d \cos\psi(|\boldsymbol{x}|)
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

（这里 $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$），而 $\psi \colon [0, \sqrt{2}] \to [0, \frac{\pi}{2}]$ 是一个光滑函数，满足 $\frac{d}{dt}\psi(t) \geq 0$，它在 $[0, 2R]$ 上取值 0，并在 $[R', \sqrt{2}]$ 上取值 $\frac{\pi}{2}$，其中某个 R' 满足 $2R < R' < \frac{\sqrt{2}}{2}$。微分同胚 ρ_m 将半径为 $|\boldsymbol{x}|$ 的球面 $S^{d-1}_{|\boldsymbol{x}|}$ 沿 $x_m x_d$-平面旋转角度 $\psi(|\boldsymbol{x}|)$。旋转 $\rho_m|_{S^{d-1}_{R'}}$ 交换 x_m-轴与 x_d-轴。）由此得到的嵌入 L' 具有由原框架诱导的典范法向标架，因为嵌入 $\rho_m \circ \mu_m$ 可以扩展为微分同胚 ρ_m。通过置换坐标，使分支在 ∂I^{d+1} 附近与 ι 一致，带有诱导框架的 L' 可视为 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial(I^{a_1+1} \cup \cdots \cup I^{a_j+1} \cup I^{a_{j+1}} \cup I^{a_r}, I^{d+1})$ 的一个元素 $\Sigma_{1,2,\dots,j} L$（见图 19 左图）。其他分支选择下的悬挂由对称性类似地定义。

注 5.5. (1) 需要进行旋转 ρ_m，因为分支 $L'_1, \dots, L'_j$ 具有坐标w，它将对应于去环化的参数；我们也希望让 $L'_{j+1}, \dots, L'_r$ 在边界附近也具有坐标 w。坐标的置换可以通过将第 d 个因子移到第一个因子之前来实现。

(2) 注 5.3 也适用于弦环的悬挂。

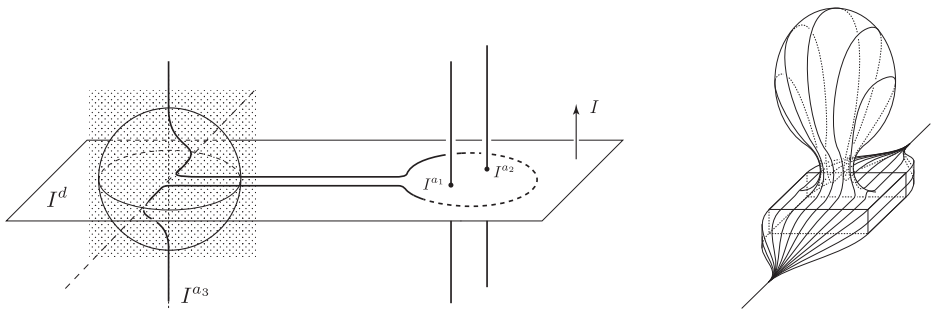


FIGURE 19. 关于前两个分支的悬挂，以及去环化。

5.2. **去环化**。我们可以通过将 $I^a \to I^d$ 视为在 I 上的 I^{a-1}族来为一个嵌入 $I^a \to I^d$ 关联一个$I^{a-1} \to I^d$ 单参数嵌入族$I^{a-1} \to I^d$。按照 [Wa21, §5.3], 中的做法，在边界 $\partial(I^{a-1} \times I)$附近修改（即“闭合”）该族 $= \partial I^{a-1} \times I \cup I^{a-1} \times \partial I$，即可得到一个嵌入环

嵌入 $I^{a-1} \to I^d$。我们将这一过程称为嵌入 $I^a \to I^d$ 的 去环化 （见图 19，右）。

定义 5.6（去环化）。 假设弦环 $f\colon I^{a_1} \cup$ 中除第 j 个分支外的所有分支都是标准嵌入 $\cdots \cup I^{a_r} \to I^d$。相对于第 j 个分支，对 f 进行的去环化 是一个嵌入环

$$I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_j-1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \to I^d,$$

通过对第 j 个分支应用上述去环化得到。这定义了一个映射

$$\mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}, I^d) \to \Omega\mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_j-1} \cup \cdots \cup I^{a_r}, I^d).$$

对第 j 个分支迭代去环化 p_j 次，我们将得到一个映射

$$\mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}, I^d) \to \mathrm{Map}_*(S^{p_1} \times \cdots \times S^{p_r}, \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1-p_1} \cup \cdots \cup I^{a_r-p_r}, I^d)).$$

注 5.7。 (1) 定义 5.6 中关于 f 除第 j 个分支外的所有分支都是标准嵌入这一假设可以放宽。可以将其替换为如下条件：给定一个关于移除第 j 个分支的 f 的布伦尼安零同伦 γ。

(2) 迭代去环化不依赖于分支选择的顺序，因为要进行去环化的分支的闭合与其他分支不相交，并且交换两个去环化的顺序不会改变结果。

(3) 最近在 [Kos24a、Kos24b、BG] 中使用了类似的构造，将一个圆盘变为圆盘的嵌入族。

我们将这一变换表示为

$$(a_1, \ldots, a_r; d) \to \Omega^{\boldsymbol{p}}(a_1 - p_1, \ldots, a_r - p_r; d), \tag{5.2}$$

其中 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots\ldots, p_r)$。

引理 5.8。 设 $f\colon I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \to I^d$ 是一个弦链环，满足 $a_j \geq 1$ 对所有 j，并配备一个零同伦 H，该零同伦作用于 f 在前 $r-1$ 个分支上的限制 $I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_{r-1}}$。以下类型为 $(a_1 + 1, \ldots\ldots, a_{r-1} + 1, a_r; d + 1)$ 的弦链环彼此相对同伦。

(a) 相对于 H 的悬挂 $\Sigma_{1,\ldots,r-1} f$。(b) 去环化的图

$$(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r; d) \to \Omega^{\boldsymbol{a}}(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r - 1; d)$$

f 对于 $\boldsymbol{a} = (0, \ldots, 0, 1)$ 的

引理 5.8 可以用与 [Wa21，引理 5.3 的证明 (2)] 相同的方法证明。

例 5.9。 令 $d = 2k$，并考虑与 $2k$ 圆盘中的 Y-图（或 Ψ_3-图）相关联的弦链环族，如图 20 左侧所示。

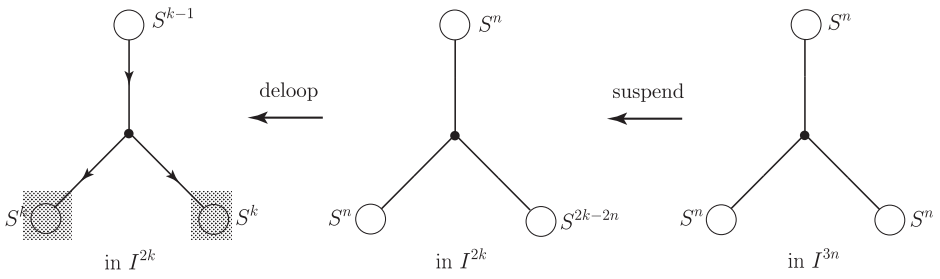


FIGURE 20

令 $\Delta = 2k-3n$, $a = 2n-k-1$，其中 n 是满足 $\binom{k+1}{2} \leq n \leq \binom{2k}{3}$ 的整数（当 $k=3$ 或 $k \geq 5$ 时，这样的 n 存在）。我们按如下方式迭代悬挂和去环化（图 20 ）：

$$\begin{aligned}
&(2n-1, 2n-1, 2n-1; 3n) \to (2n-1+\Delta, 2n-1+\Delta, 2n-1; 3n+\Delta) \\
&\to \Omega^{\boldsymbol{a}}(2n-1+\Delta-(a+\Delta), 2n-1+\Delta-(a+\Delta+1), 2n-1-(a+1); 3n+\Delta) \\
&= \Omega^{\boldsymbol{a}}(2n-1-a, 2n-2-a, 2n-2-a; 3n+\Delta) \\
&= \Omega^{\boldsymbol{a}}(k, k-1, k-1; 2k),
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a} = (a+\Delta,\ a+\Delta+1,\ a+1) = (k-n-1,\ k-n,\ 2n-k)$。我们得到一个以 $S^{\boldsymbol{a}} := S^{k-n-1} \times S^{k-n} \times S^{2n-k}$ (维数 $S^{\boldsymbol{a}} = k-1$) 为底空间的带框架嵌入族

$$I^k \cup I^{k-1} \cup I^{k-1} \to I^{2k}.$$

更一般地，若一个 Y 图有 j 条出边和 $3-j$ 条入边，则我们按如下方式迭代悬挂和去环化：

$$\begin{aligned}
&(2n-1, 2n-1, 2n-1; 3n) \to (2n-1+\Delta, 2n-1+\Delta, 2n-1; 3n+\Delta) \\
&\to \begin{cases} \Omega^{\boldsymbol{a}}(\underbrace{2n-1-a, \dots, 2n-1-a}_{3-j}, \underbrace{2n-2-a, \dots, 2n-2-a}_{j}; 3n+\Delta) & (j \geq 1), \\ \Omega^{\boldsymbol{a}}(2n-1-a, 2n-1-a, 2n-1-a; 3n+\Delta) & (j=0), \end{cases} \\
&= \Omega^{\boldsymbol{a}}(\underbrace{k, \dots, k}_{3-j}, \underbrace{k-1, \dots, k-1}_{j}; 2k), \text{ where}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{cases} (\underbrace{a+\Delta, \dots, a+\Delta}_{3-j}, \underbrace{a+\Delta+1, \dots, a+\Delta+1}_{j-1}, a+1) & (j \geq 1), \\ (a+\Delta, a+\Delta, a) & (j=0). \end{cases}$$

我们得到一个以 $S^{\boldsymbol{a}}$ (维数 $S^{\boldsymbol{a}} = (k-3) + j$) 为底空间的带框架嵌入族

$$(I^k)^{\cup 3-j} \cup (I^{k-1})^{\cup j} \to I^{2k}.$$

例5.10。令 $d = 2k$，并考虑一个与 $2k$ 圆盘中的 Ψ_4 图相关联的弦链环族，如图21左图所示。

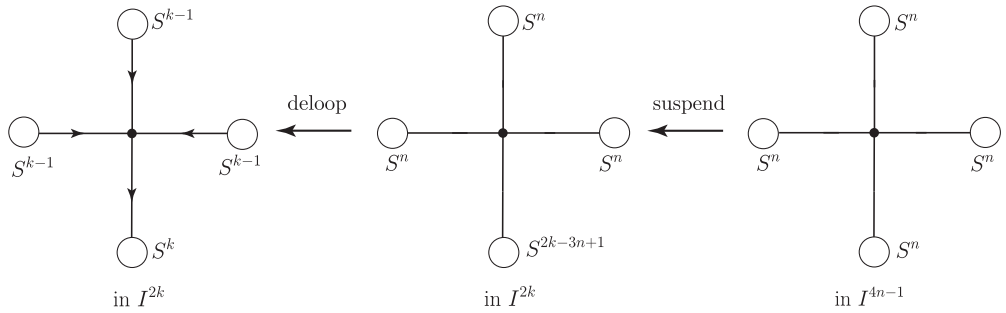


FIGURE 21

我们从第 4 节中讨论过的 IHX链 φ_{IHX} 在 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}((I^{3n-2})^{\cup 4},\ I^{4n-1})$中的零同伦路径开始。设 $\Delta = 2k-4n+1$, $a = 3n-k-2$，其中 n是一个整数，满足 $\binom{k+2}{3} \leq n \leq \binom{2k+1}{4}$（当 $k=4$ 或 $k \geq 6$时，这样的 n 存在）。我们按如下方式迭代悬挂和去环化（图 21）：

$$\begin{aligned}
&(3n-2, 3n-2, 3n-2, 3n-2; 4n-1) \\
&\to (3n-2+\Delta, 3n-2+\Delta, 3n-2+\Delta, 3n-2; 4n-1+\Delta) \\
&\to \Omega^{\boldsymbol{a}}(3n-2-a, 3n-2-a, 3n-2-a, 3n-2-(a+1); 4n-1+\Delta) \\
&= \Omega^{\boldsymbol{a}}(k, k, k, k-1; 2k),
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a} = (\Delta + a,\ \Delta + a,\ \Delta + a,\ a + 1) = (k - n - 1,\ k - n - 1,\ k - n - 1,\ 3n - k - 1)$。这些运算可以沿路径同时进行，从而得到一条定义在$S^{\boldsymbol{a}} := S^{k-n-1} \times S^{k-n-1} \times S^{k-n-1} \times S^{3n-k-1}$（维数为 $S^{\boldsymbol{a}} = 2k - 4$）上的带框架嵌入族的路径

$$I^k \cup I^k \cup I^k \cup I^{k-1} \to I^{2k}.$$

更一般地，若一个 Ψ_4-图有 j 条出边和 $4 - j$ 条入边，则我们按如下方式迭代悬挂与去环化：

$$\begin{aligned}
&(3n-2, 3n-2, 3n-2, 3n-2; 4n-1)\\
&\to (3n-2+\Delta, 3n-2+\Delta, 3n-2+\Delta, 3n-2; 4n-1+\Delta)\\
&\to \begin{cases} \Omega^{\boldsymbol{a}}(\underbrace{3n-2-a, \dots, 3n-2-a}_{4-j}, \underbrace{3n-3-a, \dots, 3n-3-a}_{j}; 4n-1+\Delta) & (j \geq 1),\\ \Omega^{\boldsymbol{a}}(\underbrace{3n-2-a, \dots, 3n-2-a}_{4}; 4n-1+\Delta) & (j = 0), \end{cases}\\
&= \Omega^{\boldsymbol{a}}(\underbrace{k, \dots, k}_{4-j}, \underbrace{k-1, \dots, k-1}_{j}; 2k), \text{ where}\\
&\qquad \boldsymbol{a} = \begin{cases} (\underbrace{a+\Delta, \dots, a+\Delta}_{4-j}, \underbrace{a+\Delta+1, \dots, a+\Delta+1}_{j-1}, a+1) & (j \geq 1),\\ (a+\Delta, a+\Delta, a+\Delta, a) & (j = 0). \end{cases}
\end{aligned}$$

We 得到一条位于 $S^{\boldsymbol{a}}$ 上（维数为 $S^{\boldsymbol{a}} = (2k-5) + j$）的带框架嵌入族的路径

$$(I^k)^{\cup 4-j} \cup (I^{k-1})^{\cup j} \to I^{2k}.$$

5. 迭代手术。

5.3.1. 对 Ψ_{r+1}-图进行手术。设给定一个对 (G, σ)，其中 G 是 Ψ_{r+1}-图，类型为 $(b_1, \dots, b_{r+1})$，位于 N-流形 X 中；以及一条链 $\sigma\colon B_\sigma \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial(I^{a_{r+1}}, I^N - (I^{N-b_1-1} \cup \dots \cup I^{N-b_r-1}))$，其中 $a_{r+1} + b_{r+1} = N - 1$，来自一个紧流形 B_σ。令 V 为 X 中 G 的一个小加厚。令 $c_p (p = 1, \dots, r+1)$ 为第 p 个叶，并令 δ_{r+1} 为 c_{r+1} 的一个张成圆盘。令 U 为 X 中 $V \cup \delta_{r+1}$ 的一个小闭正则邻域，它形变收缩到 $V \cup \delta_{r+1}$（图 22，左）。进一步假设，一个 a_{r+1}-圆盘 L 与 Int $\delta_{r+1} - V$ 横截地交于一点，并且 $L_U := (\mathrm{Int}\ L) \cap U$ 是一个闭 a_{r+1}-圆盘。

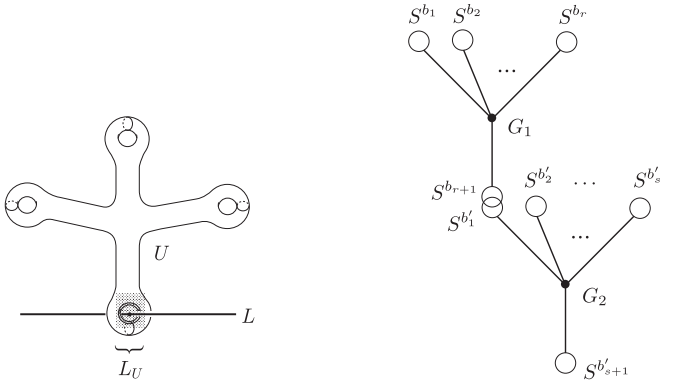


FIGURE 22. 左：X中 $V \cup \delta_{r+1}$ 的邻域 U。右：分别来自 G_1 和 G_2的两个球面$S^{b_{r+1}}$ 和 $S^{b'_1}$ 在 X 中构成一个霍普夫链环。

定义 5.11（Ψ_{r+1}-手术）。设 $\varphi^{(G,\sigma)}_{U\,t}, : L_U \to U (t \in B_\sigma)$ 是通过以下方式由嵌入族 $\sigma\colon B_\sigma \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial(I^{a_{r+1}},\ I^N - (I^{N-b_1-1} \cup \dots \cup I^{N-b_r-1}))$ 得到的嵌入族：

将分支 $I^{a_{r+1}}$ 与 L_U 识别。设 $\varphi^{(G,\sigma)} = \{\varphi_t^{(G,\sigma)}\}$: $B_\sigma \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(L,\ X)$ 是通过将 L_U 的包含映射替换为$\varphi^G_{U,\ t}$，由包含映射 $L \to X$ 得到的带框架嵌入族。我们称 $\varphi^{(G,\sigma)}$ 是通过在（G，σ）上进行 Ψ_{r+1}-手术 由包含映射 $L \to X$ 得到的。

5.3.2. Ψ_{r+1}图的复合。设 $a_i = N - b_i - 1\,(1 \le i \le r), a'_j = N - b'_j - 1\,(2 \le j \le s+1)$, 且

$$X = I^N - (I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \cup I^{a'_2} \cup \cdots \cup I^{a'_{s+1}}).$$

我们考虑 $G_1 \amalg G_2 \subset X$一个 Ψ_{r+1}图 G_1与一个Ψ_{s+1}图 G_2的不交并，二者的类型分别为（$b_1, \ldots, b_{r+1}$）和（$b'_1, \ldots, b'_{s+1}$），其中

- $r + s = \ell$,
- $b_{r+1} + b'_1 = N - 1$,
- （$r+1$）-th 球面 $S^{b_{r+1}}$在 G_1中与第一球面$S^{b'_1}$在 G_2中构成一个霍普夫链环，位于一个小球内,
- S^{b_i} ($i \ne r+1$)通过一条小子午线与 I^{a_i} 相链环，$S^{b'_j}$ ($j \ne 1$)通过一条小子午线与 $I^{b'_j}$ 相链环。

（见右侧图 22。）我们为 G_i 配备一个框架，即为叶、边和顶点选择法向标架。G_i 的框架用于将加厚平凡化（参数化）。令$V_1 \amalg V_2 \subset X$ 为 $G_1 \amalg G_2$的小型互不相交加厚。

5.3.3. 与 G_1 和 G_2上的手术复合。令 $G_1 \amalg G_2$ 为如上所述的两个可复合图。令(G_1，σ_1)、(G_2，σ_2)为§5.3.2中的两对。令 U_1，U_2 分别为 $G = G_1$，G_2的 U。假设圆盘 $L' = I^{a'_{s+1}}$ 与 G_2的第$s+1$片叶 c'_{s+1} 的张成圆盘 δ'_{s+1} 横截相交于一点。我们考虑一个 a_{r+1}圆盘 L，它是 G_2 的第一片叶 $S^{a'_1}$ 的一部分，使得族 $\varphi_t^{(G_1,\sigma_1)}$：$L_{U_1} \to U_1$ 延拓为嵌入族 $U_2 \to X$。我们也将这个延拓记作 $\varphi_t^{(G_1,\sigma_1)}$，这是记号的滥用。

定义 5.12 (迭代手术)。我们定义嵌入族 $\varphi^{G_1 \circ_1 G_2}{}_{(t,u)}$： $L' \to X$ ($t \in B_{\sigma_1}$, $u \in B_{\sigma_2}$) 如下:

$$\varphi^{G_1\circ_1 G_2}_{(t,u)} := \begin{cases} \varphi_t^{(G_1,\sigma_1)} \circ \varphi_{U_2,u}^{(G_2,\sigma_2)} & \text{on } L'_{U_2} := L' \cap U_2, \\ \mathrm{incl} & \text{on } L' - U_2. \end{cases}$$

族 $\{\varphi^{G_1\circ_1 G_2}{}_{(t,u)}\}$ 定义了一个链 $B_{\sigma_1} \times B_{\sigma_2} \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a'_{s+1}}, X)$。我们将此链记为

$$(L')^{(G_1,\sigma_1)\circ_1(G_2,\sigma_2)} \colon B_{\sigma_1} \times B_{\sigma_2} \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(L', X).$$

当 L' 可以视为平凡时，我们将此链简记为 $\sigma_1 \circ \sigma_2$。

5.3.4. 通过纤维丛进行 Ψ_{r+1}-手术。将映射 $c\colon \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a_1} \cup \cdots \cup I_{a_{r+1}}, I^N) \to B\mathrm{Diff}_\partial(V)$ 后复合到族 σ： $B_\sigma \to \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_{r+1}}, I^N - (I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r}))$; $t \mapsto \varphi_t^{(G,\sigma)}$，得到映射 $B_\sigma \to B\mathrm{Diff}_\partial(V)$，它给出 B_σ 上的一个 (V, ∂)-丛。我们也称此丛是对 (G, σ) 进行 Ψ_{r+1}-手术得到的。按照注 2.10 中的做法，将映射 $\lambda\colon B\mathrm{Diff}_\partial(V) \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a_1} \cup \cdots \cup I_{a_{r+1}}, I^N)$ 后复合，即可恢复弦链环族 $\varphi^{(G,\sigma)}$。

那么，迭代手术的另一种定义如下。链σ_1： $B_{\sigma_1} \to B\mathrm{Diff}_\partial(V_1)$和 σ_2： $B_{\sigma_2} \to B\mathrm{Diff}_\partial(V_2)$给出映射

$$B_{\sigma_1} \times B_{\sigma_2} \longrightarrow B\mathrm{Diff}_\partial(V_1 \amalg V_2) \longrightarrow B\mathrm{Diff}_\partial(V_{12}), \tag{5.3}$$

其中，V_{12} 是从 I^N 中移除弦环分支 $I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \cup I^{a'_2} \cup \cdots \cup I^{a'_{s+1}}$的管状邻域后得到的把手体。将映射 $\lambda\colon B\mathrm{Diff}_\partial(V_{12}) \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \cup I^{a'_2} \cup \cdots \cup I^{a'_{s+1}},\ I^N)$如注 2.10 所述后复合到 (5.3)，可得到一个映射

$$B_{\sigma_1} \times B_{\sigma_2} \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \cup I^{a'_2} \cup \cdots \cup I^{a'_{s+1}}, I^N).$$

5.4. 布伦尼亚零同伦系统的复合。设 G_1 是一个 Ψ_{r+1}-图，G_2 是一个 Ψ_{s+1}-图，二者如 §5.3.2 中所述可复合。我们看到，对 $G_1 \amalg G_2$ 进行手术会诱导布伦尼亚零同伦系统的典范复合。对 G_1 和 G_2 进行手术后复合，可得到 $\mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a'_{s+1}},\ I^N - \bigcup_\lambda I^{a_\lambda})$中的一个嵌入族，其中 λ 遍历 $\{1,\dots,r\}\cup\{r+2,\dots,r+s\}$。我们作如下假设：

- 定理 1.6 中的链 ω_{T_ℓ} 对于 $\ell \le \max\{r+1, s+1\}$ 已经构造完成。
- G_1 和 G_2 属于这样的类型：它们可由 T_{r+1} 和 T_{s+1} 的基本情形（仅含 S^n 片叶）通过在 T_{r+1} 的第 $r+1$ 片叶以及 T_{s+1} 的第一片叶处进行迭代悬挂而得到。令 ω_{G_1} 和 ω_{G_2} 为以此方式得到的相应弦链环族。

- 对于立方图表 $\{\mathcal{E}_{G_1}(S_1)\}_{S_1}$ 和 $\{\mathcal{E}_{G_2}(S_2)\}_{S_2}$ 中的 ω_{G_1} 和 ω_{G_2}，我们分别有布伦尼亚零同伦系统 $\gamma_{G_1} = \{\gamma_{G_1}(S_1)\}_{\emptyset\neq S_1\subset\{1,\dots,r\}}$ 和 $\gamma_{G_2} =\{\gamma_{G_2}(S_2)\}_{\emptyset\neq S_2\subset\{1,\dots,s\}}$，其中

$$\mathcal{E}_{G_1}(S_1) = \mathrm{Emb}_\partial(I^{b'_1}, I^N - \textstyle\bigcup_{\lambda\notin S_1} I^{a_\lambda}),$$
$$\mathcal{E}_{G_2}(S_2) = \mathrm{Emb}_\partial(I^{a'_{s+1}}, I^N - \textstyle\bigcup_{\lambda\notin S_2} I^{a'_\lambda}),$$

对于 $b'_1 = a_{r+1}$和 $a'_\mu = a_{r+\mu}$，对于 $\mu\in\{2,\dots,s\}$。

对于 $S\subset\{1,\dots,r\}\cup\{r+2,\dots,r+s\}$，我们定义

$$\mathcal{E}_{G_1\circ_1 G_2}(S) = \mathrm{Emb}_\partial(I^{a'_{s+1}}, I^N - \textstyle\bigcup_{\lambda\notin S} I^{a_\lambda}).$$

定义 5.13（布鲁尼安零同伦的复合）。我们定义复合

$$\gamma_{G_1}\circ\gamma_{G_2} = \{(\gamma_{G_1}\circ\gamma_{G_2})(S)\}_S,$$
$$S = S'\amalg S'',\quad S'\subset\{1,\dots,r\},\quad S''\subset\{r+2,\dots,r+s\},$$

如下，其中 $(\gamma_{G_1}\circ\gamma_{G_2})(S)$ 是 $\mathcal{E}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$ 中的一个族。

(1) 当 $S'=\emptyset$, $S''\neq\emptyset$ 时，我们定义

$$(\gamma_{G_1}\circ\gamma_{G_2})(S) = \omega_{G_1}\circ\gamma_{G_2}(S''_{-r})$$

在 $\mathcal{E}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$ 中，其中 S''_{-r} 是通过将每个元素 x 替换为 $x-r$ 从 $S''\subset\{r+2,\dots,r+s\}$ 得到的。我们将 $\gamma_{G_1}(S')=\omega_{G_1}$ 视为 $\mathcal{E}_{G_1}(S')=\mathcal{E}_{G_1}(\emptyset)$ 中的一个族，并将 $\gamma_{G_2}(S''_{-r})$ 视为 $\mathcal{E}_{G_2}(S''_{-r})$ 中的一个族。

(2) When $S'\neq\emptyset$, $S''=\emptyset$, we define

$$(\gamma_{G_1}\circ\gamma_{G_2})(S) = (\gamma_{G_1}(S')\circ\omega_{G_2}) * \gamma_{G_2}(\{1\}),$$

其中 $(-)*\gamma_{G_2}(\{1\})$ 通过$\gamma_{G_2}(\{1\})$中的布鲁尼安零同伦，将 $\gamma_{G_1}(S')\circ\omega_{G_2}$ 中的每条路径延伸，从而得到 $\omega_{G_1}\circ\omega_{G_2}$的零同伦族。

(3) 当 $S'\neq\emptyset$, $S''\neq\emptyset$ 时，我们定义

$$(\gamma_{G_1}\circ\gamma_{G_2})(S) = (\gamma_{G_1}(S')\circ\gamma_{G_2}(S''_{-r}))*\gamma_{G_2}(\{1\}\cup S''_{-r}),$$

其中 $(-)*\gamma_{G_2}(\{1\}\cup S''_{-r})$ 在 $\gamma_{G_2}(\{1\}\cup S''_{-r})$ 中附加一个同伦，将 $\iota\circ\gamma_{G_2}(S''_{-r})$ 中的一条路径连接到 $\gamma_{G_2}(\{1\})$ 中的一条路径，并固定端点（图 23，灰色圆盘）。我们按如下方式为族 $(\gamma_{G_1}\circ\gamma_{G_2})(S)$ 中的路径族赋予结构。对于 $\gamma_{G_1}(S')$ $\gamma_{G_2}(S''_{-r})$ 中分别对应的一对路径 γ_1,γ_2，复合 $\gamma_1(t_1)\circ\gamma_2(t_2)$ 给出一个以 $(t_1,t_2)\in I^2$ 为参数的 $\mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}(I^{a'_{s+1}}, I^N - \bigcup_{\lambda\notin S} I^{a_\lambda})$ 中弦结的二参数族，其中 $(1,1)$ 对应于 $\omega_{G_1}\circ\omega_{G_2}$，$(t_1,0)$ 对应于 ι。我们赋予 I^2一个莫尔斯函数 $t_1^2(2-t_1)^2 + t_2^2(2-t_2)^2$ 的梯度流线一参数族结构（参见[Hut，例 3.3]）。侧面 $\{0\}\times I$ 在 $\mathcal{E}_{G_2}(\{1\}\cup S''_{-r})$ 中与通往 $\gamma_{G_2}(\{1\})$ 中路径的同伦相连。（参见图 23。）

引理 5.14。复合 $\gamma_{G_1}\circ\gamma_{G_2}$ 为该族定义了一个布伦尼安零同伦系统

$$\omega_{G_1}\circ\omega_{G_2}\colon B_{T_{r+1}}\times B_{T_{s+1}}\to\mathcal{E}_{G_1\circ_1 G_2}(\emptyset)$$

相对于超额较低的面。

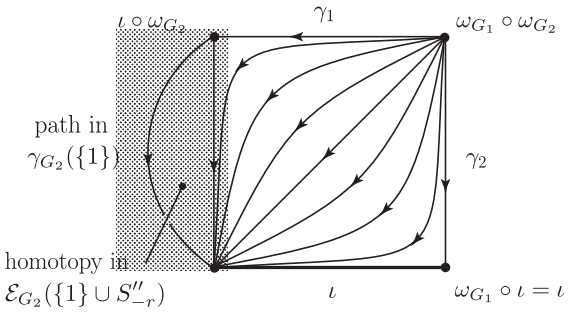


FIGURE 23. $\mathcal{E}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$中从$\omega_{G_1} \circ \omega_{G_2}$ 出发的零同伦单参数族结构（当 $S' \neq \emptyset$, $S'' \neq \emptyset$时）。

证明。 设 $(f_{u,v}, \gamma_{u,v})$, $(u, v) \in B_{T_{r+1}} \times B_{T_{s+1}}$ 是嵌入 $f_{u,v} = (\omega_{G_1} \circ \omega_{G_2})(u, v)$ 与限制 $\gamma_{u,v} = \{\gamma_{u,v}(S)\}_S$ （ $\gamma_{G_1} \circ \gamma_{G_2}$ 在 $f_{u,v}$ 上）的配对。根据定义 2.5，只需证明 $(f_{u,v}, \gamma_{u,v})$ 在每个 (u, v) 处均满足以下条件 (a) 和 (b)。

(a) $\gamma_{u,\ v}(S)$定义了一个映射 $\Delta^{|S|-1} \to \mathcal{B}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$，其中 $\mathcal{B}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$是映射 π_S: $\mathcal{E}_{G_1\circ_1 G_2}(\emptyset)$ $\to \mathcal{E}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$在$\iota$ 上的同伦纤维。(b) $\{\gamma_{u,v}(S)\}_{S\neq\emptyset}$ 关于态射 $S \overset{\subsetneq}{\hookrightarrow} S \cup \{i\}$相容。也就是说，以下图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{|S|-1} & \xrightarrow{\gamma_{u,v}(S)} & \mathcal{B}_{G_1\circ_1 G_2}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{|S|} & \xrightarrow{\gamma_{u,v}(S\cup\{i\})} & \mathcal{B}_{G_1\circ_1 G_2}(S \cup \{i\}) \end{array}$$

当 $S' = \emptyset$, $S'' \neq \emptyset$时，我们有$\gamma_{u,\ v}(S) = \omega_{G_1}(u) \circ \gamma_{G_2}(S''_{-r})(v)$，它是$\mathcal{B}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$中以 $\Delta^{|S''|-1}$为底的一个族，因为$\omega_{G_1}(u)$是单个嵌入，而$\gamma_{G_2}(S''_{-r})(v)$是$\mathcal{B}_{G_2}(S''_{-r})$中以 $\Delta^{|S''|-1}$ 为底的一个族。这证明了(a)对 $S' = \emptyset$成立。由$\{\gamma_{G_2}(S''_{-r})\}_{S''}$的相容性可得(b)对 $S' = \emptyset$ 成立。

当 $S' \neq \emptyset$, $S'' = \emptyset$时，我们有 $\gamma_{u,v}(S) = (\gamma_{G_1}(S')(u) \circ \omega_{G_2}(v)) * \gamma_{G_2}(\{1\})(v)$，这是一个以 $\Delta^{|S'|-1}$ 为底空间、取值于 $\mathcal{B}_{G_1\circ G_2}(S)$ 的族，因为 $\gamma_{G_1}(S')(u)$ 是一个以 $\Delta^{|S'|-1}$ 为底空间、取值于 $\mathcal{B}_{G_1}(S')$ 的族， $\omega_{G_2}(v)$ 是一个单独的嵌入，而 $\gamma_{G_2}(\{1\})(v)$ 是一条单独的路径。这证明了 $S'' = \emptyset$ 的 (a)。 $S'' = \emptyset$ 的 (b) 的相容性由 $\{\gamma_{G_1}(S')\}_{S'}$ 的相容性推出。

当 $S' \neq \emptyset$, $S'' \neq \emptyset$ 时，我们有 $\gamma_{u,v}(S) = (\gamma_{G_1}(S')(u) \circ \gamma_{G_2}(S''_{-r})(v)) * \gamma_{G_2}(\{1\} \cup S''_{-r})(v)$，其中

- $\gamma_{G_1}(S')(u)$ 是 $\mathcal{B}_{G_1}(S')$ 中 $\Delta^{|S'|-1}$ 上的一个族,
- $\gamma_{G_2}(S''_{-r})(v)$ 是 $\mathcal{B}_{G_2}(S''_{-r})$ 中 $\Delta^{|S''|-1}$ 上的一个族。

因此， $\gamma_{G_1}(S')(u) \circ \gamma_{G_2}(S''_{-r})(v)$由 $\Delta^{|S'|-1} \times \Delta^{|S''|-1} \times I$参数化，其中 I 按照定义 5.13 (3) 和图 23 中的方式参数化二维圆盘模型中的路径。附加$\gamma_{G_2}(\{1\}\cup S''_{-r})(v)(t)$后，可以用连接 $\Delta^{|S'|-1} * \Delta^{|S''|-1} = \Delta^{|S'|-1} \times \Delta^{|S''|-1} \times I/\sim = \Delta^{|S'|+|S''|-1}$参数化，其中 $\Delta^{|S'|-1} \times \Delta^{|S''|-1} \times \{0\}$ 被压缩为 $\Delta^{|S'|-1}$， $\Delta^{|S'|-1} \times \Delta^{|S''|-1} \times \{1\}$ 被压缩为 $\Delta^{|S''|-1}$。事实上，对于每个点(z_1, z_2) $\in \Delta^{|S'|-1} \times \Delta^{|S''|-1}$， $\gamma_{u,v}(S)(z_1, z_2)$中的单参数族在 $\mathcal{B}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$中可由一个从图 23 所示的二维圆盘模型到 $\mathcal{E}_{G_1\circ_1 G_2}(S)$的映射给出，正如定义 5.13 (3) 中所解释的。注意，从 $\gamma_{G_2}(\{1\})(v)$出发的路径是唯一的，且不依赖于(z_1, z_2)。在$\gamma_{u,v}(S)(z_1, z_2)$这一单参数族的两个端点处，它们对应于图 23 的二维圆盘中从右上角到左下角的两条边界路径；此时，由(z_1, z_2)参数化的 $\gamma_{G_1}(S')(u)$和 $\gamma_{G_2}(S''_{-r})(v)$中的路径分别退化为由 $\Delta^{|S'|-1}$ 和 $\Delta^{|S''|-1}$参数化的族。这证明了 $S' \neq \emptyset$, $S'' \neq \emptyset$的 (a)。

$S' \neq \emptyset$, $S'' \neq \emptyset$ 的 (b) 的相容性由 $\{\gamma_{G_1}(S')\}_{S'}$ 和$\{\gamma_{G_2}(S''_{-r})\}_{S''}$的相容性导出。注意，关于 $S' \amalg S'' \to (S' \amalg S'') \cup \{i\}$ 的 (b) 的相容性——当S' 或 S'' 为空、但添加 $\{i\}$ 后非空时——从二维圆盘模型中显而易见：经过左上角的边界路径是 $S'' = \emptyset$ 情形的像，而经过右下角的边界路径是 $S' = \emptyset$ 情形的像。□

引理5.15。 如果 G_1和 G_2都是 Ψ_3-图，那么定义 *5.13* 中关于布伦尼安零同伦系统 γ_{G_i} 的复合 $\gamma_{G_1} \circ \gamma_{G_2}$与引理*4.14*中的复合一致。

证明。 我们考虑关于移除 $\{1,2\} \cup \{4\}$的某个分支的布伦尼安零同伦的复合 $\gamma_{G_1} \circ \gamma_{G_2}$。零同伦 ($\gamma_{G_1} \circ \gamma_{G_2}$)($\{1\}$) 和 ($\gamma_{G_1} \circ \gamma_{G_2}$)($\{2\}$) 定义为 $S' \neq \emptyset$和 $S'' = \emptyset$的情形，在此情形下，($\gamma_{G_1} \circ \gamma_{G_2}$)($S$) = ($\gamma_{G_1}(S') \circ \omega_{G_2}$) $* \gamma_{G_2}(\{1\})$。零同伦 $\gamma_{G_1}(S') \circ \omega_{G_2}$ 由 G_2的第一片叶的 $(2n-1)$-把手核的张成圆盘所诱导，该圆盘沿着形如 U''的圆盘取定，正如引理4.14的证明中所述，其中 U''的细 (n)-把手沿着第四片叶延伸。零同伦 ($\gamma_{G_1} \circ \gamma_{G_2}$)($\{4\}$) 定义为 $S' = \emptyset$和 $S'' \neq \emptyset$的情形，在此情形下，($\gamma_{G_1} \circ \gamma_{G_2}$)($S$) = $\omega_{G_1} \circ \gamma_{G_2}(S''_{-2})$。这同样由形如 U'' 的圆盘给出，但细 $(2n-1)$- 把手沿着第一片叶与第二片叶的嵌入怀特海德积延伸。所得的张成圆盘由先前各情形中的圆盘通过变形 $U' \leftrightarrow U''$得到，对应于 U'，正如引理4.14的证明中所述。□

现在考虑交换 G_1 和 G_2 的角色时会发生什么。由 $\ell \leq \max\{r+1, s+1\}$ 满足定理 1.6 的假设可知，$\omega_{T_{r+1}}$ 和 $\omega_{T_{s+1}}$ 具有对称性，因此我们知道，利用关于移除 ω_{G_2} 中第 $(s+1)$ 个分支的布伦尼安零同伦，链 $\omega_{G_1} \circ \omega_{G_2}$ 可以在 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{a'_{s+1}} \cup \bigcup_\lambda I^{a_\lambda},\ I^N)$ 中变形为反向复合 $\omega_{G_2} \circ \omega_{G_1}$。

引理 5.16. 这种变形可以扩展为 $\omega_{G_1} \circ \omega_{G_2}$ 和 $\omega_{G_2} \circ \omega_{G_1}$ 所对应的布伦尼安零同伦系统之间的变形。

证明。 我们还将证明布伦尼安零同伦系统的循环对称性（见引理 6.19）。利用这一点，即可像 $\ell = 4$ 的定理 1.6 的证明那样推出该引理。注意，在变形过程中，图 23 中的灰色圆盘收缩为 ι 处的常值路径，而 ι 处的底部路径则扩展为 $\mathcal{E}_{G_1}(S' \cup \{r+1\})$ 中的同伦。□

5.5. **布伦尼安零同伦系统的悬挂**。 定义 5.4 中弦环的悬挂，会诱导出该弦环的布伦尼安零同伦系统的悬挂。

定义 5.17 （布鲁尼安零同伦的悬挂）。 设 $L\colon I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r} \to I^d (0 < a_i < d)$ 是 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_r},\ I^d)$ 中的一个弦环，并配备一个布伦尼安零同伦系统 $\{\gamma_L(S)\}_S$。设 L' 是相对于 L 的分支子集 $K \subset \Omega = \{1, \ldots, r\}$ 及布鲁尼安零同伦 $\gamma_L(\Omega \setminus K)$ 对 L 作出的悬挂。我们如下定义 L' 的诱导布鲁尼安零同伦系统 $\{\gamma_{L'}(S)\}_S$。

(1) 对于 $S \subset \Omega$，令 $J = \Omega \setminus S$。我们将零同伦 $\gamma_L(S)$ 变形为另一个零同伦，使其可以延拓为 $K \cup J$ 中各分支的零同伦。这是可行的，因为 $\gamma_L(S) \in \mathcal{B}(S)$ 可以变形为一个属于 $\mathcal{B}(\Omega \setminus (K \cup J)) \to \mathcal{B}(\Omega \setminus J) = \mathcal{B}(S)$ 像的零同伦。由此得到的零同伦延拓为零同伦 $\gamma_L(\Omega \setminus (K \cup J)) \in \mathcal{B}(\Omega \setminus (K \cup J))$，并通过映射 $\mathcal{B}(\Omega \setminus (K \cup J)) \to \mathcal{B}(\Omega \setminus J)$，诱导出 K 中各分支的零同伦。(2) 我们利用上一项中各分支的零同伦来悬挂 L。令 L'' 为所得的弦链环。于是， $K \cap J$ 中各分支的零同伦可以延拓为 L'' 的零同伦。因此，对于 J 中的分支，我们得到 L'' 的布鲁尼安零同伦。(3) 根据构造， L' 和 L'' 作为弦链环的单参数族是相对同伦的。因此，同痕延拓定理给出 L' 的布鲁尼安零同伦 $\gamma_{L'}(S)$，对应于 J 中的分支。

6. 5-valent vertex

本节中，我们证明 $\ell = 5$ 的定理 1.6。本文针对 $\ell \geq 5$ 的 ℓ 价顶点情形所作的构造，不如 §4 中四价顶点情形那样明确。由于一般的 ℓ 价顶点情形会相当复杂，我们先单独说明情形 $\ell = 5$，以便详细了解构造高阶括号所需的内容。 L_∞-代数（L，∂）中涉及四个 ∂-闭输入的括号关系，形式上写作

$$[[c,d],a,b]+[[a,b],c,d]+[[a,d],b,c]+[[b,c],a,d]+(-1)^n[[a,c],b,d]+(-1)^n[[b,d],a,c]$$
$$-[[a,c,d],b]-[[a,b,c],d]-[[b,c,d],a]-[[a,b,d],c]=\partial[a,b,c,d]$$

对于次数为 n 的 ∂-闭形式变量 a，b，c，d。我们将此关系称为 L_∞-代数[5]中的*10*项关系（简称*10T* 关系）。我们将构造一个弦环模型（“10T-链环”），表示该恒等式的左端（定义 6.2），并构造一条路径 $[f,g,h,k]$，位于空间 $\Omega\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{4n-3},\ X)$ 中（定义 6.7 和 6.17）。此阶段我们不会明确确定各项的定向。只需证明该构造对某些定向成立即可。我们将对其进行数次悬挂和去环化；就我们的目的而言，只需像定义 10.5 那样，为结果指定明确的定向。

6.1. 10T-链环。 我们需要为 10T 关系中各项的“和”定义一个合适的概念，从而得到一个表示上述恒等式左端的弦环（10T-链环）。所得弦环是 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-2},\ I^{5n-1}-(I^{4n-2})^{\cup 4})$ 中的一个嵌入，它将成为 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},\ I^{5n-2}-(I^{4n-3})^{\cup 4})$ 中某个带基点环的图。

首先，将 10T 关系左端的每一项表示为由嵌入 $I^{4n-2}\to I^{5n-1}-(I^{4n-2})^{\cup 4}$ 得到的同痕弦环。10T 关系中每一项的边界是三个 $[[[*,*],*],*]$ 型迭代怀特黑德括号之和，它给出一个弦环 $(I^{4n-3})^{\cup 5}\to I^{5n-2}$。我们假设该弦环的前四个分量是标准嵌入。

- 迭代括号 $[[[*,*],*],*]$：令 α_i：$I^{4n-3}\to I^{5n-2}-(I^{4n-3})^{\cup 4}$（$i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 10$）表示 10T 关系中第 i 项边界所对应的 5 分支弦环中的唯一指定分量。它是三个链环的连通和，每个链环均由三个类型分别为 $(n,\ n,\ 3n-2)$、$(2n-1,\ n,\ 2n-1)$、$(3n-2,\ n,\ n)$ 的 Ψ_3 图经迭代复合得到；这些图由 $(n,\ n,\ n;3n)$ 通过悬挂得到（定义 5.4），其含义见定义 5.12。（见图 24 左图。）
- 令 $m_4\alpha_i=4\alpha_i$：$I^{4n-3}\to I^{5n-2}-(I^{4n-3})^{\cup 4}$（$i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 10$）表示由 4 个 α_i 相加得到的嵌入。

- 迭代括号 $4[[*,*,*],*]$：令 $4\alpha_i'$：$I^{4n-2}\to I^{5n-1}-(I^{4n-2})^{\cup 4}$（$i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 10$）为从 $4\alpha_i$：$I^{4n-3}\to I^{5n-2}-(I^{4n-3})^{\cup 4}$ 得到的嵌入；该嵌入配备了由 ω_{T_4} 针对 4价顶点所诱导的零同伦，并取自定义 5.12 中零同伦的轨迹。它由一个 Ψ_4-图手术 ω'_{T_4} 和一个 Ψ_3-图手术 ω'_{T_3} 复合而成，前者的类型为 $(n,\ n,\ n,\ 2n-1)$，后者的类型为 $(3n-2,\ n,\ n)$，其意义见定义 5.12；它们由 ω_{T_4} 和 ω_{T_3} 通过悬挂得到（定义 5.4）。（见图 24 右图。）

引理 6.1。 I^{4n-2}有如下分解：

$$I^{4n-2}=A'\cup\bigcup_{i=1}^{10}C_i'$$

分解为 I^{4n-2} 的紧子流形 A'、C_i'，并且有一个嵌入

$$\Sigma_{10\mathrm{T}}\colon I^{4n-2}\to I^{5n-1}-(I^{4n-2})^{\cup 4}$$

[5]左端各项的符号由 10T 关系唯一确定，除整体反转和三重括号中的对称性外。在三重括号中。这可通过应用引理 C.1 和 C.2 证明。

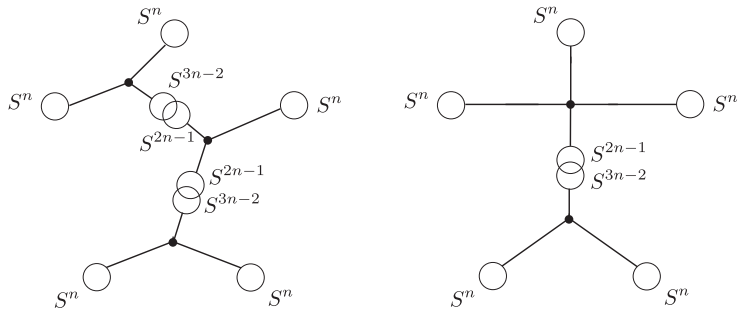


FIGURE 24. 在 $I^{5n-2}-(I^{4n-3})^{\cup 5}$ 中， Ψ-图的复合用于 $4\alpha_i$ 中的一项以及 $4\alpha'_i$。

使得

(1) C'_i 作为带边光滑流形与 I^{4n-2} 微分同胚，(2) 交 $C'_i \cap C'_j$ 要么为空，要么是一个公共的余维 *1* 面，且与 I^{4n-3} 微分同胚，(3) A' 是 $I^{4n-2} - \bigcup_{i=1}^{10} C'_i$ 的闭包，(4) $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 在 $\partial C'_i$ 上的限制由 $4\alpha_i$给出，且(5) $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 在 C'_i 上的限制由 $4\alpha'_i$给出，(6) $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 在 A' 上的限制与标准包含映射的限制一致。

从现在起，我们构造引理 6.1 的 $\Sigma_{10\mathrm{T}}$。我们使用“Lie-hedron” L_4（由 10 个顶点和 15 条边组成，见图 25），将 10 个弦链环 $4\alpha_i$： $I^{4n-3} \to I^{5n-2}-(I^{4n-3})^{\cup 4}$ 归纳地延拓为一个弦链环 $I^{4n-2} \to I^{5n-1} - (I^{4n-2})^{\cup 4}$（10T-链环）；其中每个弦链环都对应于 L_4 中某个顶点处与之相邻的三条边的并。具体做法是将从 $4\alpha_i$ 到 $4\alpha'_i$ 的延拓粘合起来。我们将看到，所得的弦链环是同痕平凡的（引理 6.5），但分解为 10 项的分解结构对于粘合不同图所对应的族至关重要。我们需要找出 10T 关系中不同项的两个边界项，同时不能破坏这三个三价图的嵌入族的分解结构。从现在起，我们分 6 步构造 10T-链环。

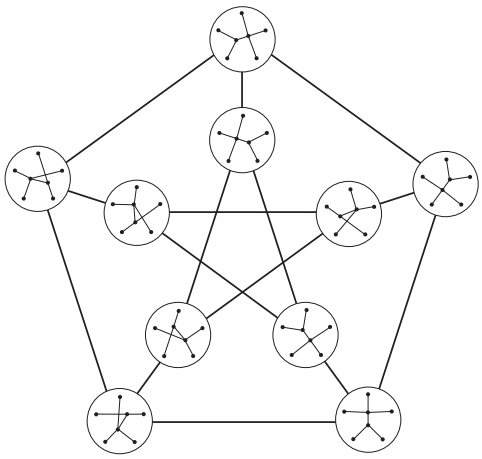


FIGURE 25. Lie-hedron L_4 ([MS、MSS]): Lie 类比的结合子多胞体 K_4.

6.1.1. 步骤 *1*：将 *Lie-hedron* 嵌入 I^{4n-2}。我们取 I^3 中的一个加厚带状图，如图 26 所示，它由三维立方体 A_1、A_2、……、$A_{10} \cong I^3$ 和杆 B_1、B_2、……、$B_{15} \cong D^2 \times I$ 组成。

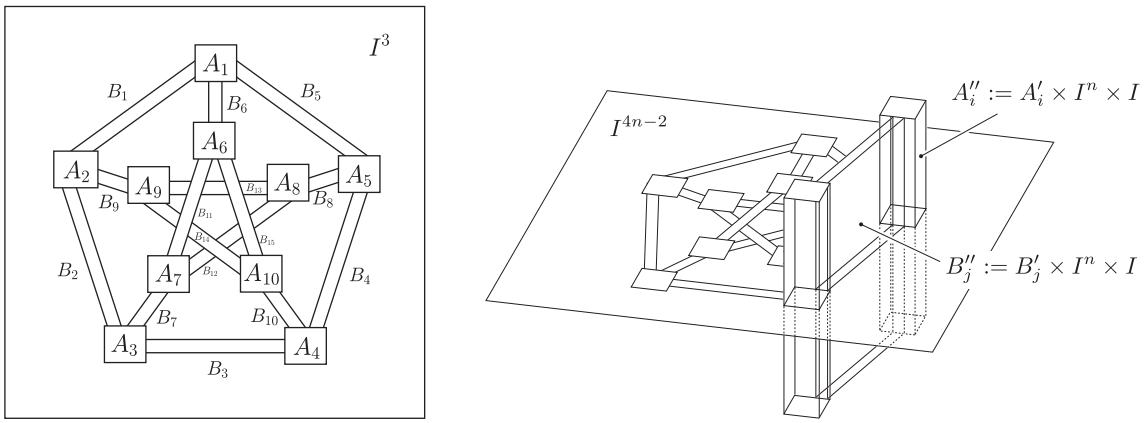


FIGURE 26. 步骤 1（左）和步骤 2（右）。

我们令 $a = \frac{1}{2}$，并取一个较小的正实数 ε，使得 $[a-2\varepsilon, a+2\varepsilon] \subset (0,\ 1)$。令 $A_i' = A_i \times [a-2\varepsilon, a+2\varepsilon]^{4n-5}$ 和 $B_j' = B_j \times [a-\varepsilon, a+\varepsilon]^{4n-5}$ 为 $(4n-2)$-圆盘，并将它们视为 $I^3 \times I^{4n-5} = I^{4n-2}$ 的子空间。其并集

$$N_{L_4} := \bigcup_i A_i' \cup \bigcup_j B_j' \tag{6.1}$$

是 I^{4n-2} 中的一个加厚带状图。

6.1.2. 步骤 *2*：在 N_{L_4} 中 $I^{5n-1} = I^{4n-2} \times I^n \times I$。令 $A_i'' = A_i' \times I^n \times I$ 和 $B_j'' = B_j' \times I^n \times I$ 为 $(5n-1)$-圆盘，并将它们视为 I^{5n-1} 的子空间。我们固定互不相同的值 $b_1, b_2, b_3, b_4 \in (0,1) \setminus \{a\}$ 并令

$$\sigma_j := I^{4n-2} \times (\underbrace{a, \dots, a}_{n}, b_j).$$

我们考虑 I^{5n-1} 中的四分支标准弦环 $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$。每个盒 A_i'' 与圆盘 σ_j 相交于 $A_i' \times (\underbrace{a, \dots, a}_{n}, b_j) \cong I^{4n-2}$。

6.1.3. 步骤 *3*：分解 N_{L_4} 为 *10* 个盒。我们将 $B_j \cong D^2 \times I$ 分解为两部分 $D^2 \times [0, \frac{1}{2}]$ 和 $D^2 \times [\frac{1}{2}, 1]$。随后可导出 B_j' 和 B_j'' 的分解，而这些分解又导出将 N_{L_4} 分解为 10 个盒的方式，每个盒都是通过连接三条 $\widetilde{\ }$ 加厚半边对 A_i' 进行扩展得到的。令 A'、A_i'' 分别表示包含 A_i'、A_i'' 的扩展盒。令 C_j 表示 B_j'' 中的中间面 $D^2 \times \{\frac{1}{2}\} \times [a-\varepsilon, a+\varepsilon]^{4n-5} \times I^n \times I$。

6.1.4. 步骤 *4*：取弦环 $(I^{4n-3})^{\cup 5} \to \widetilde{C}_j$。在这一步和下一步中，我们用非标准链环替换 I^{5n-1} 中的 N_{L_4}。面 $\widetilde{C}_j$ 是一个 $(5n-2)$-圆盘。我们在每个 C_j 内选取一个 5 分支弦 $\widetilde{\ }$ 链环，其中前四个分支是 $(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4) \cap C_j$。第五个分支由对应于 L_4 的第 j 条边的、具有三个三价顶点的树的迭代怀特海德积的 4 倍给出。这是 L_4 的一个顶点 i 对应的 $4\alpha_i$ 中的三个项之一。结果是一个弦环 $(I^{4n-3})^{\cup 5} \to \widetilde{C}_j$。

6.1.5. 步骤 *5*：取同痕弦环 $(I^{4n-2})^{\cup 5} \to \widetilde{A}_i''$，将其扩展至 $\widetilde{C}_j$。设 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ C_{j_1}、C_{j_2}、C_{j_3} 是与 A_i'' 相邻的三个面。C_{j_1}、C_{j_2}、C_{j_3} 中的弦环可通过与乘积结构 $B_{j_i}'' = C_{j_i} \times I$ 中的 I 取直积，扩展为 $\widetilde{\ }$ 中 $B_{j_1}'' \amalg B_{j_2}'' \amalg B_{j_3}''$ 的弦环。将所得弦链接族限制到 $C_{j_i} \times \partial I$ 后，可将其扩展至整个

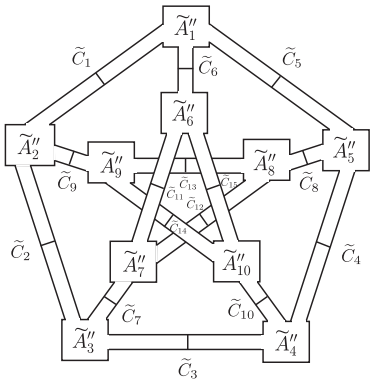


FIGURE 27. 步骤 3。

$\partial A'_i \times I^n \times I$，再通过标准包含映射（$I^{4n-2}$）$^{\cup 5} \to I^{5n-1}$的限制来实现。这给出了$\partial A'_i \times I^n \times I$中的一个链环，它与 4 倍 IHX 链环同痕；该链环由将定理 4.8 的 φ_{IHX} 悬挂得到，正如第 6.1 节开头对 α_i 的定义所述。再沿着 L_4第 i个顶点的迭代手术路径 $4\alpha'_i$（从定义 5.12 中的$\varphi_t^{G_1 \circ_1 G_2}$等开始），可将其扩展为一个同痕弦环（$I^{4n-2}$）$^{\cup 5} \to \widetilde{A}''_i$。

6.1.6. 步骤 *6*：延拓到整体 I^{4n-2}。我们通过标准包含 $I^{4n-2} \to I^{5n-1} - (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4)$ 将所得嵌入 $N_{L_4} \to I^{5n-1} - (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4)$（其中 N_{L_4} 在（6.1）中定义）延拓为从 I^{4n-2} 到 $I^{4n-2} - \mathrm{Int}\, N_{L_4}$ 的嵌入。下面的定义完成了引理 6.1 的证明。

定义 6.2（10T-链环）。令

$$\varphi_{10\mathrm{T}} = (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4) \cup \Sigma_{10\mathrm{T}} \colon (I^{4n-2})^{\cup 5} \to I^{5n-1}$$

所得的五分支弦环。这里，前四个分支是标准的，我们也将 σ_i 的包含映射记为 σ_i，并且第一分支在边界附近是标准的。我们将这个弦环称为 $\varphi_{10\mathrm{T}}$ *10T*-链环。

引理 *6.1* 的证明。设 $C'_i = \iota(I^{4n-2}) \cap \widetilde{C}_i$，其中 $\iota\colon\ I^{4n-2} \to I^{5n-1}$是（第五个分支的）标准包含映射$\widetilde{\ }$，而 C_i 是上文步骤 3 中的（$5n-2$）圆盘。令 A' 为$I^{4n-2} - \bigcup_{i=1}^{10} C'_i$的闭包。则性质 (1)–(6) 可由 $\Sigma_{10\mathrm{T}}$的构造得出。□

注 6.3。根据引理 6.13 关于 10T-链环的布鲁尼安性质，10T-链环同痕于一个弦环，使得对于任意$p \in \{1,2,3,4\}$，除第 p 个分支外的所有分支都是标准包含映射。由于 10T-链环在每个盒 $\widetilde{A}''_i \cong I^{5n-1}$上的限制都是一个弦环（$I^{4n-2}$）$^{\cup 5} \to \widetilde{A}''_i$，且引理 6.13 中的布鲁尼安性质是逐盒构造的，我们可以假设$\widetilde{\ }$变形保持分解为盒 A''_i。在定理 1.6 中证明 $\ell = 5$的 Ψ_5-手术的循环对称性质相对于盒分解的相容性时，稍后将用到这一性质。

6.2. **将 10T-链环视为环，以及 10T-链环零同伦的存在性**。以下引理表明，10T-链环可以变形为 Emb_∂(I^{4n-3})$^{\cup 5}$, I^{5n-2}) 中的一个嵌入环。

引理 6.4。设 $n \geq 2$。弦环 $\varphi_{10\mathrm{T}}$ 可以选为一个嵌入环的图

$$(I^{4n-3})^{\cup 5} \to I^{5n-2}.$$

证明。所需的弦链环可通过将 $\Sigma_{10\mathrm{T}}\colon\ I^{4n-2} \to I^{5n-1}$ 视为嵌入环 $I^{4n-3} \to I^{5n-2}$ 的轨迹来构造，具体如下。首先，我们注意到，上一小节步骤 4 中的弦链环 $(I^{4n-3})^{\cup 5} \to \widetilde{\ }C_j$ 可以表示为嵌入环的图

$(I^{4n-4})^{\cup 5} \to I^{5n-3}$。这是因为，在超额为 0 的树的三价顶点处使用的博罗米恩弦环，是由低维情形悬挂而得的。事实上，步骤 4 中的弦链环 $(I^{4n-3})^{\cup 5} \to \widetilde{C}_j \cong I^{5n-2}$可以通过以下类型的悬挂得到：

$$(3n-2, 3n-2, 3n-2, 3n-2, 4n-3; 4n-1) \to (4n-3, 4n-3, 4n-3, 4n-3, 4n-3; 5n-2).$$

（类型为（n, n, n, n）的 Ψ_4-图给出类型为（$3n-2, 3n-2, 3n-2, 3n-2$; $4n-1$）的弦链环，而类型为（n, n, n）的 Ψ_3-图给出类型为（$2n-1, 2n-1, 2n-1$; $3n$）的弦链环。对前两个分支应用（$n-1$）重悬于（$2n-1, 2n-1, 2n-1$; $3n$），得到（$3n-2, 3n-2, 2n-1$; $4n-1$）。 Ψ_4-图与（$n-1$）重悬的 Ψ_3-图复合，得到左侧（$3n-2, 3n-2, 3n-2, 3n-2, 4n-3$; $4n-1$）。）悬挂所得结果中维数为 $4n-3$ 的第五个分支可变形为（$n-1$）次去环化的图，其中$n-1 \geq 1$。根据引理 5.8，悬挂可以与去环化的图交换，由此得到类型为（$4n-4, 4n-4, 4n-4, 4n-4, 4n-4$; $5n-3$）的弦链环之环的图。

接下来，我们将嵌入在 I^{4n-2} 中的把手体 N_{L_4} 调整到一般位置。也就是说，设 q: $I^{4n-2} = I^{4n-3} \times I \to I$ 为到最后一个因子的投影，则存在 $q|_{L_4}$的一列值$0 = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_r = 1$，使得

- $q^{-1}(c_i)$与 L_4 的边横截相交，
- $q^{-1}([c_i, c_{i+1}])$中包含的奇点要么是 L_4的一条边内部的 q 的单个临界点（a），要么是 L_4的单个顶点（b）。

（见图28。）我们还可以进一步假设， $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 到 $q^{-1}(c_i)$的限制是一个支集位于 $q^{-1}(c_i)$上的嵌入环 $I^{4n-4} \to I^{5n-3}$ 的图$\cap N_{L_4}$。

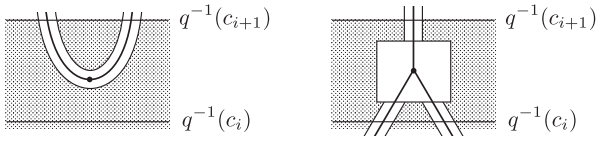


FIGURE 28. 类型 (a)（左）和 (b)（右）的奇点示例。

现在我们有一个序列 $\{\rho_i\}$，其中包含 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-4})^{\cup 5}, I^{5n-3})$ 中的带基点环，分别对应于 $\varphi_{10\mathrm{T}}|_{q^{-1}(c_i)}$、$i$ =0、1、.....、r。于是我们看到， $\varphi_{10\mathrm{T}}$ 在 $q^{-1}([c_i, c_{i+1}])$ 上的限制由环 ρ_i 和 ρ_{i+1} 之间的一个同伦给出。类型 (a) 的协边只是 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-4})^{\cup 5}, I^{5n-3})$ 中形如 $\gamma * \gamma^{-1}$ 的复合环的一个显式零伦，它是一条环路径。也就是说，环 ρ_i 和 ρ_{i+1} 可以视为一个映射 $I \times \{0,1\} \to \mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-4})^{\cup 5}, I^{5n-3})$，并且该映射可以延拓为一个从 $I \times I$ 出发的映射。另一方面，每棵超额 0 的树 τ 都给出一个环 $\gamma_\tau\colon I \to \mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-4})^{\cup 5}, I^{5n-3})$，而 N_{L_4} 对应 1-柄上的嵌入由 γ_τ 沿光滑映射 $h_\tau\colon I \times I \to I$ 的拉回给出；该 1-柄是由 h_τ 下 I 中一个正则值的原像加厚而成。 $\gamma * \gamma^{-1}$ 的显式零伦可以由拉回 $h_\tau^* \gamma_\tau\colon I \times I \to \mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-4})^{\cup 5}, I^{5n-3})$ 给出。类型 (b) 的协边可以选作一条环路径，因为带四价顶点的树在 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})$ 中的零同痕是通过悬挂构造的，并且可以提升到 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-4})^{\cup 5}, I^{5n-3})$ 中的零同痕（见引理 5.8）。□

引理 6.5。 设 $n \geq 3$。与弦环 $\varphi_{10\mathrm{T}}$ 相关联的嵌入空间 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})$ 中的带基点嵌入环，在取有限个副本的连通和后，在 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})$ 中是零伦。

证明。 相应的嵌入环给出了 $\pi_1(\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2}))$ 中的一个元素。根据推论2.4，自然映射

$$\pi_1(\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})) \to \pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-2})^{\cup 5}, I^{5n-1}))$$

对于 $n \geq 3$ 是一个同构。根据定理 2.1 和引理2.2，后一个群是有限的。也就是说，定理 2.1 中关于 $p_i = 4n-2$ 和 $m = 5n-1$ 的三个条件均不成立。第一个条件不成立，因为 $p_i = 4n-2$。第二和第三个条件根据推论 2.4 不成立。□

注 6.6。雅可比关系是零同痕的（定理 4.8），不能像引理 6.5 那样通过类似的论证证明，因为 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{3n-2})^{\cup 4},\ I^{4n-1}))$ 是无限的。然而，还有另一种定理4.8的证明，它基于链环的有理分类，并假设怀特海德积满足雅可比恒等式。结合第4节给出的证明，ω_{T_4} 的性质的证明以及高价情形中技术性论证的动机就更加清晰了。

由此，我们得到一个在 I^2 上的嵌入族，属于 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5},\ I^{5n-2})$。

定义6.7（四重括号）。我们固定一个正整数 q_5，使得如引理 6.5 中所述，q_5 个 $\varphi_{10\mathrm{T}}$ 的逐分支连通和在 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5},\ I^{5n-2})$ 中是零伦的。令 $\varphi^{(5)} = \{\varphi_s^{(5)}\}$、$\varphi_s^{(5)} \in \Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})$ 表示环 $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$的一个零伦，使得 $\varphi_0^{(5)} = \mathrm{const}_\iota$ 且 $\varphi_1^{(5)} = (\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$。

我们将固定假设 6.14 中 $\varphi^{(5)}$ 的一个相对同伦类。

6.3. **将 10T-链环表示为链的和**。为了将 10T 关系的左端表示为链的和，我们需要对环使用 3-链而非 1-链，因为嵌入 L_4 需要 3 维。也就是说，我们希望在去环化 $B^2\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},\ I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4})$ 中，十个 3- 链的和能够导出一个基点 3- 环路。在这里，我们不这样做，而是考虑图化映射

$$\mathrm{graph}\colon \Omega^3\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5}, I^{5n-4} - (I^{4n-5})^{\cup 4})) \to \Omega\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3}, I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4}))$$

并发现 10T-链环在 $\Omega^3\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5},\ I^{5n-4} - (I^{4n-5})^{\cup 4})$ 中有一个显式提升。这与 $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$ 的一个分支的去环化有关，具体由以下同伦交换图给出（见引理 5.8）：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^3\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5}, I^{5n-4} - (I^{4n-5})^{\cup 4})) & & \\ \text{图}\ \downarrow & \searrow^{\Sigma_{1,2,3,4}} & \\ \Omega\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3}, I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4})) & \xrightarrow[\text{去环化}]{} & \Omega^3\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5},\ I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4})) \end{array}$$

由于我们将对分支进行去环化以构造一般括号，因此 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5}, I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4}))$ 中的 3-链已足以满足我们的目的。以下结论可由引理 6.4 的证明得到。

引理 6.8。设 $n \geq 3$。弦环 $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$，作为 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3}, I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4}))$ 中的一个元素，可以提升到 $\Omega^3\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5}, I^{5n-4} - (I^{4n-5})^{\cup 4}))$。

证明。我们在引理 6.4 的证明中看到，嵌入 $\Sigma_{10\mathrm{T}}\colon I^{4n-2} \to I^{5n-1} - (I^{4n-2})^{\cup 4}$ 可以组织成一个双重环路 $I \times I \to \mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-4}, I^{5n-3} - (I^{4n-4})^{\cup 4})$。基于迭代二元括号悬挂结构的类似理由，它还可以进一步组织成一个三重环 $I^3 \to \mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5}, I^{5n-4} - (I^{4n-5})^{\cup 4})$。这里，我们需要用到这样一个事实：对于具有四价顶点的树，$\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3}, I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4})$ 中的零同痕是通过至少 $(4n-3) - (3n-2) = n-1$ 次悬挂构造的；当 $n \geq 3$ 时，至少为 2。特别地，引理 6.4 证明中的 (b) 型协边是 $\Omega^2\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5}, I^{5n-4} - (I^{4n-5})^{\cup 4})$ 中的一个同伦。□

引理 6.9。设 $n \geq 3$。以下类型的 $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$ 的去环化

$$\Omega(4n-3, 4n-3, 4n-3, 4n-3, 4n-3; 5n-2)$$
$$\to \Omega^3(4n-3, 4n-3, 4n-3, 4n-3, 4n-5; 5n-2)$$

可参数化如下。存在一个分解

$$I^3 = A \cup \bigcup_{i=1}^{10} K_i$$

为满足以下条件的闭子集 A、K_i，它们属于 I^3。

(1) K_i 是一个闭三维胞腔。(2) $\bigcup_{i=1}^{10} K_i$ 是 *§6.1.1* 中通过沿着余核 $D^2 \times \{\frac{1}{2}\}$ 切割把手 $B_j \cong D^2 \times I$ 得到的 $\bigcup_{i=1}^{10} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{15} B_j$ 的胞腔分解。(3) A 是 $I^3 - \bigcup_{i=1}^{10} K_i$ 的闭包。(4) $\varphi^{(5)}$ 在 A 上的限制是取标准包含映射为值的常值族

$$(I^{4n-3})^{\cup 4} \cup I^{4n-5} \hookrightarrow I^{5n-2}.$$

(5) $\varphi^{(5)}$ 在 K_i 上的限制给出 *10T*-链环中的第 i 项。

证明。</*style*>由 的构造可知，该引理几乎是显然的。我们将 视为 。可以对 中加厚的 *Lie-hedron* 进行各向同性变形，使其位于 的一个小邻域内（*1 2* ,...,12）}。然后，我们按照 §6.1 执行这 6 个步骤，以得到所需的族。□ − −

注 6.10。我们将对 $\varphi^{(5)}$ 多次应用悬挂和去环化，以定义在 I^{2k} 中、具有 k 或 $k-1$ 维叶的 Ψ_5-图上的手术，如例 6.20 所示。如果 $2k$ 足够大，所需去环化的总次数 $3k-7+j$ 至少为 2，因此可以应用引理 6.9。

如果我们将引理 6.8 的证明中把 $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 变为 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-5}, I^{5n-4} - (I^{4n-5})^{\cup 4})$ 中三重环的“去悬挂”过程，替换为自然映射

$$\Omega \mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3}, I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4}) \to \Omega^3 B^2 \mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3}, I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4}),$$

我们得到如下结果。

引理 6.11. 设 $n \geq 3$。弦环 $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$，视为

$$\Omega^3 B^2 \mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3}, I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4}),$$

可以参数化如下。存在一个分解

$$I^3 = A \cup \bigcup_{i=1}^{10} K_i$$

为 I^3 的闭子集 A、K_i，满足以下条件。

(1) K_i 是一个闭三维胞腔。(2) $\bigcup_{i=1}^{10} K_i$ 是在第 *6.1.1* 节中通过沿着余核 $D^2 \times \{\frac{1}{2}\}$ 切开把手 $B_j \cong D^2 \times I$而得到的 $\bigcup_{i=1}^{10} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{15} B_j$ 的胞腔分解。(3) A 是 $I^3 - \bigcup_{i=1}^{10} K_i$ 的闭包。(4) $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$ 在 A 上的限制是基点处的常值环。(5) $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$ 在 K_i 上的限制给出了 *10T*-链环中的第 i 项。

6.4. **指定 10T-链环的零同伦的类**。现在我们讨论引理 6.5 的零同伦的有理唯一性。

引理 6.12。对于 $n \geq 4$，空间 *ΩEmb*$_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})$ 中的零同伦路径 $\varphi^{(5)}$，除去扭元以及小球内秩 *1* 群 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-1}, I^{5n}))$ 中的一个纽结类的连通和外，它是唯一的。

证明。研究从基点到 10T-链环的 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})$ 中路径空间的 π_0，等价于研究 $\pi_2(\mathrm{Emb}((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2}))$。由推论 2.4 可得

$$\pi_2(\mathrm{Emb}((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})) \to \pi_1(\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-2})^{\cup 5}, I^{5n-1})) \to \pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-1})^{\cup 5}, I^{5n}))$$

对于 $n \geq 4$ 是同构。根据定理 2.1，群 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-1})^{\cup 5}, I^{5n}))$ 是无限的，但根据推论 2.4，自由部分由每个分支处添加的秩 1 群 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-1}, I^{5n}))$ 所给出的元素生成。□

引理 6.12 中的歧义可能会妨碍 Ψ_5-手术的相对布伦尼性质。下面，我们通过增加一个假设（下文的假设 6.14），消除对零同伦选择的歧义。为固定零伦 $\varphi^{(5)}$ 的相对同伦类，我们在立方图表 $\{\mathcal{B}(S)\}_{S\subset\{1,2,3,4\}}$ 中取一个（族） $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 的布伦尼安零同伦，其中 $\mathcal{B}(S)$ 是 $\mathcal{E}(\emptyset)\to\mathcal{E}(S)$ $\mathrm{Emb}_{\partial}^{\mathrm{fr}}(I^{4n-3},\ I^{5n-2}-\bigcup_{\lambda\notin S}\sigma_\lambda)$ 的同伦纤维。假设我们有一个迭代嵌入怀特海德积（Ψ_3-手术）的指定布伦尼安零同伦：我们在引理 4.15 的证明中看到，雅可比关系中的每一项都有一个指定的布伦尼安零同伦。

引理 6.13 (指定的布伦尼零同伦)。 将 *10T*-链环 $\varphi_{10\mathrm{T}}$视为$\Omega\mathrm{Emb}_{\partial}((I^{4n-3})^{\cup 5},I^{5n-2})$中的一个元素，它具有一套布伦尼安零同伦系统，该系统延拓了 *IHX* 链环的零同伦系统；这些 *IHX* 链环由对定理 *4.8* 的 φ_{IHX} 进行悬挂得到。特别地，分支 $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 作为$\Omega\mathcal{E}(\{1,2,3,4\})=\Omega\mathrm{Emb}_{\partial}(I^{4n-3},I^{5n-2})$中的嵌入环是平凡的。

证明。 我们按如下方式构造一套布伦尼安零同伦 $\{\gamma_{10\mathrm{T}}(S)\}_S$，使其延拓 $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 的先前零同伦系统。

Ψ_4-手术的一个布伦尼安零同伦：如引理 4.15 的证明中所述，雅可比关系各项的指定布伦尼安零同伦与 Ψ_4-手术共同构成一个“透镜”，它延拓为定义在 $(D^n)^{\times 3}$ 上的一个族。该延拓给出 Ψ_4-手术的一个指定布伦尼安零同伦，并且相对于前一项中雅可比关系的零同伦。

一个 Ψ_4-手术与一个 Ψ_3-手术复合的布伦尼安零同伦：引理 5.14 给出了类似 $[[[a,b],c],d]$ 或 $[[a,b,c],d]$ 的项的布伦尼安零同伦。这产生了 10T 关系中每一项的布伦尼安零同伦。 Ψ_4-手术与较低超额情形的相容性意味着，将这 10 项的布伦尼安零同伦粘合起来，便形成 $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 的布伦尼安零同伦。□

假设 6.14。 我们假设，作为环空间 $\Omega\mathrm{Emb}_{\partial}(I^{4n-3},I^{5n-2})$ 中一条路径的 10T-链环的零伦 $\varphi^{(5)}$，与引理 6.13 中给出的指定零伦相对同伦。

6.5. **的布鲁尼安性质** $\varphi^{(5)}$。与 §4.4 一样，我们只需在弦链环的前四个分支为标准包含映射的假设下，检验立方图表 $\{\mathcal{B}(S)\}_{S\subset\Omega'=\{1,2,3,4\}}$ 中零同伦的相对布伦尼性质。

引理 6.15 （相对布伦尼性质）。设 $n\geq 7$。存在一个正整数 r_5，使得 r 重连通和 $(\varphi^{(5)})^{\#r_5}$ 的零同伦 $\varphi^{(5)}$，相对于 $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5 r_5}$ 的指定布伦尼安零同伦系统，具有布鲁尼安性质。

证明。我们只考虑在 10T-链环 $(\varphi_{10\mathrm{T}})^{\#q_5}$ 中 $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 的布鲁尼安零同伦，并假设 $\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3\cup\sigma_4$ 是标准的。其他情形与此情形类似。根据定义 2.6，只需证明以下数据在 Ω 同伦极限 $\underset{\emptyset\neq S\subset\Omega'}{}\mathcal{B}(S)\ \simeq$中同伦

$\mathrm{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega'}\Omega\mathcal{B}(S)$（$\Omega'=\{1,2,3,4\}$），允许取有限个副本的连通和：

(1) 由自然映射 $\Omega\mathcal{B}(\emptyset)\ \to\mathrm{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega'}\Omega\mathcal{B}(S)$ 从 $\varphi^{(5)}\in\Omega\mathcal{B}(\emptyset)$ 诱导出的 $\mathrm{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega'}\Omega\mathcal{B}(S)$ 中的点。（回忆一下，$\mathcal{B}(S)$ 是由 $f\in\mathcal{E}(\emptyset)$ 与一个零同伦（路径） γ 构成的配对空间，其中该路径位于 $\mathcal{E}(S)=\mathrm{Emb}_{\partial}(I^{4n-3},I^{5n-2}-\bigcup_{\lambda\notin S}I_\lambda^{4n-3})$ 内，并从 f 出发。）(2) 指定系统 $\{\gamma_{10\mathrm{T}}(S)$：引理 6.13 中给出的 10T-链环的布伦尼安零同伦系统 $\Delta^{|S|-1}\to\Omega\mathcal{B}(S)\}_{\emptyset\neq S\subset\Omega'}$。这给出了 $\mathrm{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega'}\Omega\mathcal{B}(S)$ 的一个元素。

我们通过对 $|S|$ 进行归纳，构造 (1) 与 (2) 之间的同伦 $\{h(S)\}_{\emptyset\neq S\subset\Omega'}$。

设 $S=\{i\}$、$1\leq i\leq 4$。我们在 $\Omega\mathcal{B}(\{i\})$ 中构造 $h(\{i\})$，使其连接 $\varphi^{(5)}$ 与指定的零同伦 $\gamma_{10\mathrm{T}}(\{i\})$。注意，在固定端点下，$\Omega\mathcal{E}(S)$ 中路径的同伦类与 $\pi_1(\Omega\mathcal{E}(S))=\pi_2(\mathcal{E}(S))$ 一一对应，而后者同构于

$\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-1},\ I^{5n}-\bigcup_{\lambda\notin S} I_\lambda^{4n-1}))$，由推论 2.4 得出。根据定理 2.1 和引理 6.12 的证明，群 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-1},\ I^{5n}-\bigcup_{\lambda\notin S} I_\lambda^{4n-1}))$ 中的两个类——该群同构于 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-1})^{\cup 5},\ I^{5n}))$ 的子群，其中的类由首四个分支为标准的嵌入组成——当它们在指定分量上的像于 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-1},\ I^{5n}))$ 中相同时，这两个类相同。根据假设 6.14，后一条件成立。因此，我们可以找到连接这两个类的同伦 $h(\{i\})$。

假设 $S=\{i,j\}$, $1\le i<j\le 4$。我们构造 $\Omega\mathcal{B}(\{i,j\})$ 中的一个同伦，它连接环 $\varphi^{(5)}$（零同伦的环路）上的常值映射 $\mathrm{const}_{\varphi^{(5)}}$ 与 $\Omega\mathcal{B}(\{i,j\})$ 中给定的单参数族 $\gamma_{10\mathrm{T}}(\{i,j\})$。$\Omega\mathcal{B}(\{i\})$ 和 $\Omega\mathcal{B}(\{j\})$ 中的同伦选择，以及 $\gamma_{10\mathrm{T}}(\{i,j\})$，给出一个三角环 $\partial\Delta^2\to\Omega\mathcal{B}(\{i,j\})$，记作 λ_{ij}（图 29，左）。这是一个以 $\partial\Delta^2$ 为参数的 $\Omega\mathcal{E}(\{i,j\})$ 中路径族，从 10T-链环到标准包含映射。为使其零伦，我们考虑 $\Omega(\Omega\mathcal{E}(\{i,j\}))$ 中相对于固定端点的路径同伦类；这些类与 $\pi_1(\Omega^2\mathcal{E}(\{i,j\}))=\pi_3(\mathcal{E}(\{i,j\}))$ 一一对应，而后者由推论 2.4 可知同构于 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n},I^{5n+1}-\bigcup_{\lambda\notin\{i,j\}} I_\lambda^{4n}))$。根据定理 2.1，群 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n},I^{5n+1}-\bigcup_{\lambda\notin\{i,j\}} I_\lambda^{4n}))$ 中的两个类（该群同构于 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n})^{\cup 5},I^{5n+1}))$ 的子群，其中包含首四个分支为标准的嵌入类）有理地相同，当且仅当它们在 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n},I^{5n+1}))\otimes\mathbb{Q}$ 中的像相同；这个像通过提取指定分支得到。因此，三角环 $\lambda_{ij}\colon \partial\Delta^2\to\Omega\mathcal{B}(\{i,j\})$ 有理零伦，当且仅当 $\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n},I^{5n+1}))$ 中对应的元素有理平凡。若有必要，通过在小球中对环作连通和，可以改变 $h(\{i\})$ 和/或 $h(\{j\})$，从而使 (i,j) 满足这一条件。于是，可能需要先对有限个副本作连通和，之后便可找到一个同伦 $h(\{i,j\})$。

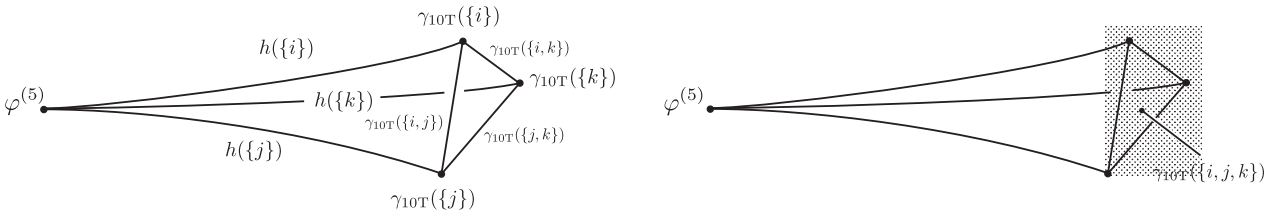


FIGURE 29. 左：具有固定端点的路径之间的同伦，其中 $\gamma_{10\mathrm{T}}(S)$ 位于 $\Omega\mathcal{B}(S)$ 中。右：在 $\Omega P\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},\ I^{5n-2})$ 中诱导出的同伦。若适当改变同伦 $h(\{i\})$、$h(\{j\})$、$h(\{k\})$，即可填满锥面的面。

我们需要证明，对于所有三角形 $\lambda_{ij}\colon\ \partial\Delta^2\to\Omega\mathcal{B}(\{i,j\})$，对 $h(\{k\})$ 所作的修改都能相容地进行。令 $P\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},I^{5n-2})$ 表示 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},I^{5n-2})$ 中以标准包含为终点的零同伦路径空间。令 $\iota_{ij}\colon\ \mathcal{B}(\{i,j\})\to P\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},I^{5n-2})$ 表示由包含映射 $I^{5n-2}-\bigcup_{\lambda\notin\{i,j\}} I_\lambda^{4n-3}\to I^{5n-2}$ 诱导的映射。只需证明，对于所有 (i,j)，三角形 $\lambda_{ij}\colon=\iota_{ij}\circ\lambda_{ij}\colon\ \partial\Delta^2\to\Omega P\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},I^{5n-2})$ 都能同时变为零伦。由于 $\gamma_{10\mathrm{T}}$ 给出了 $\mathrm{holim}_{\emptyset\neq S\subset\Omega'}\Omega\mathcal{B}(S)$ 的一个元素，因此同伦 $\gamma_{10\mathrm{T}}(\{i,j\})\colon\ \Delta^1\to\Omega\mathcal{B}(\{i,j\})$

对于 $1\le i<j\le 4$，可在 $\Omega\mathcal{B}(\Omega')=\Omega P\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},\ I^{5n-2})$ 中诱导出相应对象，并可将其延拓为族 $\gamma_{10\mathrm{T}}(\Omega')\colon\ \Delta^3\to\Omega P\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},\ I^{5n-2})$。根据引理 6.5，我们知道 $\gamma_{10\mathrm{T}}(\Omega')$ 还可以延拓到未约化锥 $C\Delta^3=\Delta^4$，其锥点映射到 $\varphi^{(5)}$（图 29，右）。事实上，根据引理 6.5，在 $\Omega P\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},\ I^{5n-2})$ 中存在一条从 $\varphi^{(5)}$ 到 3-单形重心的路径。这条路径与 3-单形的并给出了在 Δ^4 上的族的延拓。我们可以改变 $h(\{k\})$ 的相对同伦类，使得所诱导的三角形 λ_{ij} 同伦于 Δ^4 上的族中相应三角形的限制。于是 λ_{ij} 是零伦的，并构造出同伦 $h(\{i,j\})$。

接下来的情形 $|S| = 3$，4 与前一个情形几乎相同。我们可以改变上一步中选取的同伦，从而在当前步骤中找到一个同伦。注意，为了应用推论 2.4，我们需要 $|S| + 1 \leq n - 2$，而当 $n \geq 7$ 时这一点成立。□

6.6. **关于 $\varphi^{(5)}$ 的对称性**。路径 $\varphi^{(5)}$ in $\Omega\mathrm{Emb}_\partial(I^{4n-3},\ I^{5n-2} - (I^{4n-3})^{\cup 4})$ can be modified into a path in

$$\Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5}, I^{5n-2})$$

通过将四个被移除的分支变为标准包含映射的平凡族。我们假设，在这一嵌入族（$(I^{4n-3})^{\cup 5}$）中，与 $\Sigma_{10\mathrm{T}}$ 相关的非标准分量标记为 0，其余四个标准分量分别标记为 1，2，3，4。考虑到这一点，我们将上述嵌入路径记为 $\omega_0^{(5)}$。

令 $\omega_1^{(5)}$，$\omega_2^{(5)}$，$\omega_3^{(5)}$，$\omega_4^{(5)}$ 分别表示 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5},\ I^{5n-2})$ 中由 $\xi(\omega_0^{(5)})$、$\xi^2(\omega_0^{(5)})$、$\xi^3(\omega_0^{(5)})$、$\xi^4(\omega_0^{(5)})$ 给出的路径。令

$$\omega_{T_5} = \omega_0^{(5)} \# \omega_1^{(5)} \# \omega_2^{(5)} \# \omega_3^{(5)} \# \omega_4^{(5)},$$

其中，和 # 是沿 I^{4n-3} 通过逐分量拼接形成的。以下引理由定义显然可得。

引理 6.16（循环对称性）。 路径 ω_{T_5} 具有循环对称性质（定义 *4.17*）。

定义 6.17（作为链的四重括号）。 设 $m_5 = 5 \cdot q_5 \cdot r_5 \cdot m_4$（ q_5见定义6.7， r_5见引理 6.15）。我们将 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{4n-3})^{\cup 5},\ I^{5n-2})$ 中的链 $\frac{1}{m_5}\omega_{T_5}$ 记为 $\beta_{T_5} = \beta_{T_5}(T_5)$。对于 T_5的面图 σ，令 $\beta_{T_5}(\sigma)$ 表示由 σ的迭代括号给出的 $\partial\beta_{T_5}$ 中相应的分项，其形式为 $\frac{1}{m_5} \cdot \frac{m_5}{m_4 m_3}\omega'_{T_4} \circ \omega'_{T_3} = \frac{1}{m_4 m_3}\omega'_{T_4} \circ \omega'_{T_3}$。

注 6.18。 ω_{T_5} 的重数等于 ω_{T_5}边界中每棵超额 0 树的重数，即 $m_5 = 5 \cdot q_5 \cdot r_5 \cdot m_4$。

对 $\ell = 5$ 的定理 *1.6* 的证明。 由引理 6.5 和 10T-链环的定义可知， $\varphi^{(5)}$ 满足条件 (1)（相容性）、(2)（边界）和 (3)（L_∞-关系）。条件 (4)（布伦尼安）和 (5)（循环对称性）由引理 6.15 和 6.16 得出。我们只需检验对称化不会破坏 10T 关系及其左端的分解结构。证明与情形 $\ell = 4$ 类似。也就是说，每一项 $\omega_i^{(5)}$ 的边界都表示 10T 关系：

$$\partial\omega_i^{(5)} = \xi^i(\theta_1) + \cdots + \xi^i(\theta_{10}).$$

在这种情形下，由于 ω_{T_4} 的对称性， $\partial\omega_i^{(5)}$ 存在逐项相对同伦，它诱导出一个图同构，将 $\partial\omega_i^{(5)}$ 的 10T 图映到 $\partial\omega_0^{(5)}$ 的 10T 图（见注 6.3）。

因此， $\partial\omega_{T_5}$ 与 5 个 $\varphi_{10\mathrm{T}}$ 之和相对同伦。由此，分解为 10 项的分解结构得以保留。证明完毕。□

下面的引理将在接下来的情形 $\ell \geq 6$ 中用到，尤其是在循环对称性质的证明中。

引理 6.19。 引理 *6.15* 中 ω_{T_5} 的布伦尼安零同伦系统具有循环对称性质。

证明。 根据引理 4.5， ω_{T_4} 的布伦尼安零同伦系统具有循环对称性；再结合引理 5.16，即可得到此结论。我们在 $\ell = 5$ 的定理 1.6 的证明中沿用这些结果。□

6.7. ω_{T_5} **的悬挂与去环化。**

例 6.20。 设 $d=2k$，并考虑与 $2k$ 圆盘中的 Ψ_5-图相关联的弦链环族，如图30左侧所示。

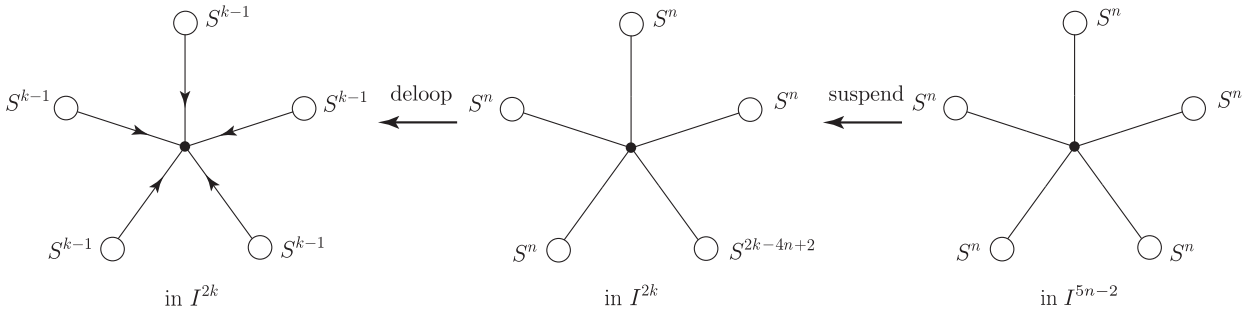


FIGURE 30

我们从第 6.1 节中构造的 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}((I^{4n-3})^{\cup 5},\ I^{5n-2})$ 中的环的零伦开始。令 $\Delta=2k-5n+2$, $a=4n-k-3$，其中 n 是一个整数，使得 $\frac{k+3}{4}\le n\le \frac{2k+2}{5}$（当 $k=4$，5 或 $k\ge 7$时，这样的n存在）。我们按如下方式迭代悬挂和去环化（图30）：

$$\begin{aligned}
&\Omega(4n-3,4n-3,4n-3,4n-3,4n-3;5n-2)\\
&\to \Omega(4n-3+\Delta,4n-3+\Delta,4n-3+\Delta,4n-3+\Delta,4n-3;5n-2+\Delta)\\
&\to \Omega\,\Omega^{\boldsymbol{a}}(4n-3-a,4n-3-a,4n-3-a,4n-3-a,4n-3-a;5n-2+\Delta)\\
&= \Omega\,\Omega^{\boldsymbol{a}}(k,k,k,k,k;2k),
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a+\Delta,\ a+\Delta,\ a+\Delta,\ a+\Delta,\ a)=(k-n-1,\ k-n-1,\ k-n-1,\ k-n-1,\ 4n-k-3)$。这一系列运算可以沿着路径同时进行，于是我们得到 $S^1\times S^{\boldsymbol{a}}$ 上的族的路径：$=S^1\times S^{k-n-1}\times S^{k-n-1}\times S^{k-n-1}\times S^{k-n-1}\times S^{4n-k-3}$（维数 $S^1\times S^{\boldsymbol{a}}=3k-6$）的带框架嵌入

$$I^k\cup I^k\cup I^k\cup I^k\cup I^k\to I^{2k}.$$

更一般地，如果一个 Ψ_5图具有 j 条出边和 $5-j$ 条入边，那么我们按如下方式迭代悬挂和去环化（n，Δ，a与上文相同）：

$$\begin{aligned}
&\Omega(4n-3,4n-3,4n-3,4n-3,4n-3;5n-2)\\
&\to \Omega(4n-3+\Delta,4n-3+\Delta,4n-3+\Delta,4n-3+\Delta,4n-3;5n-2+\Delta)\\
&\to \begin{cases}
\Omega\,\Omega^{\boldsymbol{a}}(\underbrace{4n-3-a,\dots,4n-3-a}_{5-j},\underbrace{4n-4-a,\dots,4n-4-a}_{j};5n-2+\Delta) & (j\ge 1),\\
\Omega\,\Omega^{\boldsymbol{a}}(\underbrace{4n-3-a,\dots,4n-3-a}_{5};5n-2+\Delta) & (j=0),
\end{cases}\\
&= \Omega\,\Omega^{\boldsymbol{a}}(\underbrace{k,\dots,k}_{5-j},\underbrace{k-1,\dots,k-1}_{j};2k),\ \text{where}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}=\begin{cases}
(\underbrace{a+\Delta,\dots,a+\Delta}_{5-j},\underbrace{a+\Delta+1,\dots,a+\Delta+1}_{j-1},a+1) & (j\ge 1),\\
(\underbrace{a+\Delta,\dots,a+\Delta}_{4},a) & (j=0).
\end{cases}$$

我们得到一条位于 $S^1\times S^{\boldsymbol{a}}$（维数 $S^1\times S^{\boldsymbol{a}}=3k-6+j$）上的带框架嵌入的族的路径

$$(I^k)^{\cup 5-j}\cup(I^{k-1})^{\cup j}\to I^{2k}.$$

注 6.21。对于 $\ell \geq 6$，可以类似地得到 Ψ_ℓ-手术。具体而言，我们将在第 7 节中为一个 ℓ价顶点构造基本括号，从而得到 $\Omega^{\ell-4}\mathsf{Emb}_\partial((I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup\ell},\ I^{\ell n-\ell+3})$ 中的一条路径。从这里出发，我们按如下方式迭代悬挂和去环化。设 $\Delta = 2k-\ell n+\ell-3$，以及$a=(\ell-1)n-k-(\ell-2)$，其中 n 是满足以下条件的整数

$$\frac{k+(\ell-2)}{\ell-1} \leq n \leq \frac{2k+(\ell-3)}{\ell}. \tag{6.2}$$

当 $2k$ 足够大时，这样的 n 存在。如果出边的数量 $j=0$,

$$\begin{aligned}
&\Omega^{\ell-4}((\ell-1)n-(\ell-2),\dots,(\ell-1)n-(\ell-2);\ell n-\ell+3)\\
&\to \Omega^{\ell-4}((\ell-1)n-(\ell-2)+\Delta,\dots,(\ell-1)n-(\ell-2)+\Delta,(\ell-1)n-(\ell-2);\ell n-\ell+3+\Delta)\\
&\to \Omega^{\ell-4}\,\Omega^{\boldsymbol{a}}((\ell-1)n-(\ell-2)-a,\dots,(\ell-1)n-(\ell-2)-a;\ell n-\ell+3+\Delta)\\
&= \Omega^{\ell-4}\,\Omega^{\boldsymbol{a}}(k,\dots,k;2k),
\end{aligned}$$

where $\boldsymbol{a}=(a+\Delta,\ \dots\dots,\ a+\Delta,\ a)$，对于 $1\leq j\leq \ell$ 中其他的 j 也类似，其中

$$\boldsymbol{a} = (\underbrace{a+\Delta,\dots,a+\Delta}_{\ell-j},\underbrace{a+\Delta+1,\dots,a+\Delta+1}_{j-1},a+1),$$

且 $\dim\ S^{\ell-4}\times S^{\boldsymbol{a}} = (\ell-2)k-\ell-1+j$。(6.2) 不等式在 $2k+(\ell-3\ \_\ k+)\ (\ell-2)\ _{\ell-1} \geq 1$ 时有整数解 ~~n~~，等价地，~~$2k \geq \frac{2\ell^2+2\ell-6}{\ell-2}$~~。另一方面，~~为子~~得到定理 1.6，我们需要假设 $n\geq 2\ell-3$，在证明中我们应用了定理 2.1 和推论 2.4。由此得到限制 $2\ell-3 \leq {}^{2k+}_{(\ell-3)\ \ell}$，这等价于

$$2k \geq 2\ell^2-4\ell+3.$$

这意味着当 $\ell\geq 4$ 时，上述条件 ~~$2k\geq \frac{2\ell^2+2\ell-6}{\ell-2}$~~ 成立。由于超额为 m 的图可能有 $(m+3)$ 价顶点，因此当 $2k\geq 2m^2+8m+9$ 时，上述构造适用。

7. 6-valent or higher vertex

我们证明 $\ell\geq 6$ 的定理 1.6。为价为 6 或更高的顶点构造基本括号，与 5价顶点的情形几乎完全平行。布伦尼安零同伦系统的存在，阐明了归纳构造所需的底层结构。本节仅描述高价顶点与此前情形的不同之处。

7.1. Lie-hedron。

在第 6 节中，我们使用了 Lie-hedron L_4，它是一个有 10 个顶点的图。对于具有更多叶的树的偏序集，我们使用自然定义的类似复形。

定义 7.1 (Lie-hedron[6])。对于 $T\in\mathcal{P}_{T_\ell}\setminus\{T_\ell\}$，令 $E^{\mathrm{int}}(T)$ 表示 T 中与叶不相交的内部边集合，并定义

$$\mathcal{M}_T = \{(\mu_e)_e\in[0,\infty)^{E^{\mathrm{int}}(T)} \mid \textstyle\sum_e \mu_e = 1\} \cong \Delta^{|E^{\mathrm{int}}(T)|-1}.$$

这是带有归一化条件的度量树模空间（的闭包）。$\mathcal{M}_T$ 的余维一面与面树 T/e 的 $\mathcal{M}_{T/e}$ 按规范方式微分同胚。对于 $\ell\geq 4$，我们定义（$\ell-4$）维几何单纯复形 $L_{\ell-1}$ 如下

$$L_{\ell-1} = \coprod_{T\in\mathcal{P}_{T_\ell}\setminus\{T_\ell\}} \mathcal{M}_T\Big/\sim,$$

其中，我们将余维为 ≥ 1 的面树 T' 所对应的 $\mathcal{M}_T$ 的面与 $\mathcal{M}_{T'}$ 等同。换言之，$L_{\ell-1}$ 是 $\mathcal{P}_{T_\ell}$ 的满子范畴 $\mathcal{P}_{T_\ell}\setminus\{T_\ell\}$ 的几何实现。

例如，L_3 是三个点的不交并，而 L_4 是图 25 中所示的图。

[6] This 是 Billera、Holmes、Vogtmann 在 [BHV 中研究的“树空间”的“原点的链接”].

7.2. **对6价顶点进行手术**。我们为25项关系构造了一个弦环模型，以及空间 $\Omega^2\mathrm{Emb}_\partial(D^{5n-4},\ I^{6n-3}-(I^{5n-4})^{\cup 5})$ 中的一条路径 ω_{T_6}。

7.2.1. 步骤 *1*：构造 *25T*-链环（引理 *6.1* 的类比）。6 价顶点的 Lie-hedron L_5 是一个二维单纯复形，由以下部分构成：

- 25 对应于超额 2 树的顶点（其中一个顶点为五价、一个为三价，或两个顶点均为四价），
- 105对应于超额 1 树的边（其中一个顶点为四价，两个顶点为三价），以及
- 105 对应于超额为 0 的树的三角形面（其中有四个三价顶点）。

我们取一个嵌入于 I^{5n-2} 中的 $(5n-2)$ 维把手体 N_{L_5}，它由 Lie-hedron L_5加厚得到。（图 31。）

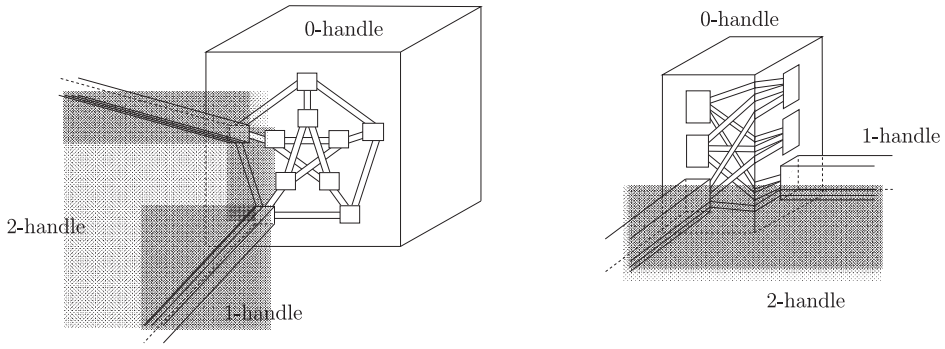


FIGURE 31. 靠近 0-把手的 N_{L_5} 把手体结构的一部分。左：一个具有一个 5 价顶点和一个 3 价顶点的树对应的顶点。右：一个具有两个 4 价顶点的树对应的顶点。

我们通过从较低超额族出发，按以下方式归纳扩展，构造一个“25T-链环”，它是弦链环 $(I^{5n-4})^{\cup 6}\to I^{6n-3}$ 的二参数族（见图 32）。

(1) 我们首先进行一些与重数有关的初步计算。我们观察到，25T-链环中的项具有 $\omega'_{T_5}\circ\omega'_{T_3}$ 或 $\omega'_{T_4}\circ\omega'_{T_4}$ 的形式，其中 ω'_{T_i} 由 ω_{T_i} 经悬挂得到。它们（超额 0 面）的重数分别为 m_5m_3 或 m_4^2。我们定义

$$\mu_6^\partial=\mathrm{lcm}(m_5m_3,m_4^2).$$

这将是 25T-链环中超额 0 面的重数。

(2) 我们将每个 2-把手 $D^2\times D^{5n-4}$ 嵌入 N_{L_5} 中，$I^{6n-1}-(I^{5n-2})^{\cup 5}$，这是一个在 D^2 上的嵌入平凡族 $D^{5n-4}\to I^{6n-1}-(I^{5n-2})^{\cup 5}$，表示 μ_6^∂ 倍的嵌入迭代怀特海德积，其类型为 $[[[[*,*],*],*],*]$ 或 $[[[*,*],*],[*,*]]$，位于 2-把手的余核（$5n-4$）圆盘处。

(3) 我们将其延拓到与每个 1-柄横截的余核（$5n-3$）圆盘上，该圆盘由 $\frac{\mu_6^\partial}{m_4}$ 倍的亏格数为 1 的树给出（含一个四价顶点和两个三价顶点）。

（4）我们将其延拓到每个 0-柄处的（$5n-2$）-圆盘上，该圆盘由超额 2 树（$\omega'_{T_5}\circ\omega'_{T_3}$ 或 $\omega'_{T_4}\circ\omega'_{T_4}$）与 $\frac{\mu_6^\partial}{m_5m_3}$ 或 $\frac{\mu_6^\partial}{m_4m_4}$ 的乘积给出。

（5）我们进一步通过标准嵌入将其延拓到 I^{5n-2} 的其余部分，从而得到一个嵌入$\Sigma_{25\mathrm{T}}$：$I^{5n-2}\to I^{6n-1}-(I^{5n-2})^{\cup 5}$。

与前一种情形（引理 6.4）一样，25T-链环

$$\varphi_{25\mathrm{T}}:=(\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3\cup\sigma_4\cup\sigma_5)\cup\Sigma_{25\mathrm{T}}\colon (I^{5n-2})^{\cup 6}\to I^{6n-1}$$

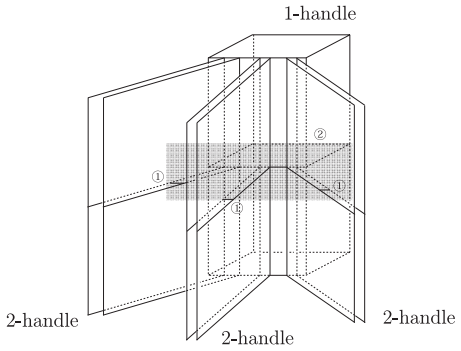


FIGURE 32. 先是 2-柄的余核，然后是 1-柄的余核。

可以选为一族嵌入的二参数族图 $(I^{5n-4})^{\cup 6} \to I^{6n-3}$。也就是说，Lie-hedron L_5 可以嵌入到 I^{5n-2} 中，使得对于投影 $q\colon\ I^{5n-2} = I^{5n-3} \times I \to I$，存在$q|_{L_5}$的一个值序列 $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_r = 1$，满足

- $q^{-1}(c_i)$与 L_5 的边和面横截相交，
- 包含在 $q^{-1}([c_i, c_{i+1}])$中的奇点要么是 L_5的一个顶点 (a)，要么是 L_5 某条边内部的一个临界点 (b)，要么是 L_5某个面内部的一个临界点 (c)。

$q^{-1}(c_i)$与 L_5 的交是嵌入在 I^{5n-3}中的一个图。根据引理 6.5 证明中的相同论证，$\Sigma_{25\mathrm{T}}$ 对 $q^{-1}(c_i)$ 的限制给出了一个$(I^{5n-4})^{\cup 6} \to I^{6n-3}$的嵌入环。于是，情形 (b) 和 (c) 的协边由环空间 $\Omega\mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-4})^{\cup 6}, I^{6n-3})$中的同伦给出。具体而言，我们有一列 $\{\rho_i\}$ 基点二重环$I^2 \to \mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-5})^{\cup 6}, I^{6n-4})$，对应于$\varphi_{25\mathrm{T}}|_{q^{-1}(c_i)}$、$i = 0$、1、.....、$r$。由此可见，$\varphi_{25\mathrm{T}}$对 $q^{-1}([c_i, c_{i+1}])$的限制由二重环 ρ_i和 ρ_{i+1}之间的同伦给出。二重环 ρ_i和ρ_{i+1}可视为映射 $I^2 \times \{0,1\} \to \mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-5})^{\cup 6}, I^{6n-4})$，并可将其延拓为从 $I^2 \times I$出发的映射。另一方面，每个亏格数为 0 的树 τ给出一个环 $\gamma_\tau\colon\ I \to \mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-5})^{\cup 6}, I^{6n-4})$；每个亏格数为 1 的树 τ'给出一个二重环$\gamma_{\tau'}\colon\ I^2 \to \mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-5})^{\cup 6}, I^{6n-4})$；而$N_{L_5}$相应把手上的嵌入由 γ_τ或 $\gamma_{\tau'}$沿光滑映射 $h_\tau\colon\ I^2 \times I \to I$或 $h_{\tau'}\colon\ I^2 \times I \to I^2$的拉回给出，其中把手是由 h_τ 或 $h_{\tau'}$下 I或I^2 中一个正则值的原像加厚而成。ρ_i 与 ρ_{i+1} 之间的显式同伦可由 $h_\tau^*\gamma_\tau$或 $h_{\tau'}^*\gamma_{\tau'}$的拉回给出。类型 (a) 的协边可选为一条二重环路径，因为亏格数为 2 的树在 Emb$_\partial((I^{5n-2})^{\cup 6}, I^{6n-1})$中的零同伦是通过悬挂构造的，并且可以提升到 $\Omega^2\mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-4})^{\cup 6}, I^{6n-3})$中的零同伦（见引理 5.8）。

为了得到引理 6.8 和 6.9 的类似结论，我们需要对 25T-链环进行五重去循环。也就是说，根据迭代括号的悬挂结构，将 25T-链环视为 $\Omega^2\mathrm{Emb}_\partial(I^{5n-4}, I^{6n-3} - (I^{5n-4})^{\cup 5})$ 的一个元素时，它可以提升到 $\Omega^5\mathrm{Emb}_\partial(I^{5n-7}, I^{6n-6} - (I^{5n-7})^{\cup 5})$。由于所需去循环的总数 $4k - 9 + j$（dim $S^2 \times S^{\boldsymbol{a}} = 4k - 7 + j$。见注 6.21）在 $k \geq 3$ 时至少为 $5 - 2 = 3$，这会带来至少五重去循环，因此我们可以应用引理 6.8 和 6.9 的类似结论，并将 L_5 嵌入去循环族的参数空间中。

如果我们用自然映射替换引理 6.8 的类比中的“去悬挂”过程，将 $\Sigma_{25\mathrm{T}}$ 变成 $\mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-7})^{\cup 6}, I^{6n-6})$中的五重环

$$\Omega^2\mathrm{Emb}_\partial(I^{5n-4}, I^{6n-3} - (I^{5n-4})^{\cup 5}) \to \Omega^5 B^3\mathrm{Emb}_\partial(I^{5n-4}, I^{6n-3} - (I^{5n-4})^{\cup 5}),$$

我们得到 th e 个 $B^3\mathrm{Emb}_\partial(I^{5n-4},\ I^{6n-3} - (I^{5n-4})^{\cup 5})$ 中由 25 个五维链之和构成的五重环。

7.2.2. 步骤 *2*：求出 *25T*-链环的一个零同伦 $\varphi^{(6)}$ （引理 *6.5* 的类似结论）。我们再次使用推论 2.4，得知自然映射

$$\pi_2(\mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-4})^{\cup 6}, I^{6n-3})) \to \pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-2})^{\cup 6}, I^{6n-1}))$$

对于 $n \geq 4$是一个同构。根据定理 2.1 和推论 2.4，当 $n \geq 4$ 且 $5n-2 \neq 3$ （模 4）时，后一个群是有限群。此外，即使 $5n-2 \equiv 3$ （模 4），25T-链环的每个单独分支也都有一个指定的零同伦，并且作为嵌入 $I^{5n-2} \to I^{6n-1}$，它是平凡的。因此，25T-链环是有理零同伦的。设 $\varphi^{(6)}$ 是 25T-链环的某个倍数（$\varphi_{25\mathrm{T}}$）$^{\#q_6}$ 的一个零同伦。

7.2.3. 步骤 *3*：布伦尼安性质与循环对称性质（引理 *6.15* 和 *6.16* 的类比）。如同前一种情形（引理 6.15 和 6.16 ），如果 n 足够大，并且我们作出一个类似于假设 6.14 的假设，即零同伦与每个分支的指定零同伦相对同伦，那么我们可以假设零同伦 $\varphi^{(6)}$具有有理布伦尼安性质和有理循环对称性。因此，存在一个正整数 r_6 ，使得（$\varphi^{(6)}$）$^{\#r_6}$ 相对于（$\varphi_{25\mathrm{T}}$）$^{\#q_6}$的布伦尼安零同伦指定系统具有布伦尼安性质，并且其对称化满足循环对称性质。此外，我们还有引理 6.19 的一个类比（布伦尼安零同伦系统的循环对称性），该结果通过使用引理 5.14 得到证明。因此，我们有零同伦路径（$\varphi^{(6)}$）$^{\#r_6}$的对称化 $\omega_{T_6} = \#_{i=1}^6 \omega_i^{(6)}$ 。

这里， n 满足相对布伦尼性质的条件由 $|S|+2 \leq n-2$ 给出，正如引理 6.15 证明的最后一部分所述；而 $|S| \leq 5$ 给出条件 $n \geq \max\{|S|+4\} = 9$。

定义 7.2。 令 $m_6 = 6 \cdot q_6 \cdot r_6 \cdot \mu_6^\partial$（$\mu_6^\partial$来自上面的步骤 1， q_6来自步骤 2， r_6来自步骤 3）。我们用 $\beta_{T_6} = \beta_{T_6}(T_6)$ 表示环空间 $\Omega^2\mathrm{Emb}_\partial((I^{5n-4})^{\cup 6},\ I^{6n-3})$ 中的链 $\frac{1}{m_6}\omega_{T_6}$。对于 T_6的面图 σ ，令$\beta_{T_6}(\sigma)$表示由 σ的迭代括号给出的$\partial\beta_{T_6}$ 中对应的分项，其形式为 $\frac{1}{m_6} \cdot \frac{m_6}{m_{\ell_1} m_{\ell_2}} \omega'_{T_{\ell_1}} \circ \omega'_{T_{\ell_2}} = \frac{1}{m_{\ell_1} m_{\ell_2}} \omega'_{T_{\ell_1}} \circ \omega'_{T_{\ell_2}}$。我们在该项中取 $\omega_\sigma = \omega'_{T_{\ell_1}} \circ \omega'_{T_{\ell_2}}$和 $m_\sigma = m_{\ell_1} m_{\ell_2}$ 。

定理 *1.6* 的证明 $\ell = 6$。根据 25T-链环的定义，条件 (1)（相容性）、(2)（边界）和 (3)（L_∞-关系）由 $\varphi^{(6)}$ 满足。条件 (4) （布伦尼安）和 (5) （循环对称性）由上面的步骤 3 得出。至此，证明完成。□

7.3. **对 ℓ价顶点的手术**。对 $\ell \geq 6$ 的 ℓ 价顶点进行手术可以总结如下，这与情形 $\ell = 6$ 平行。我们为（$2^{\ell-1}-\ell-1$）T-关系构造一个弦环模型，并如下构造空间 $\Omega^{\ell-4}\mathrm{Emb}_\partial(D^{(\ell-1)n-(\ell-2)},$ $I^{\ell n-\ell+3} - (I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup(\ell-1)})$ 中的一条路径 ω_{T_ℓ}。

7.3.1. 步骤 *1*：构造 $(2^{\ell-1}-\ell-1)$*T*-链环（引理 *6.1* 的类比）。对于一个 ℓ价顶点，Lie-hedron $L_{\ell-1}$是一个 $(\ell-4)$ 维单纯复形，由 $2^{\ell-1}-\ell-1$ 个顶点以及维数为 $\leq \ell-4$ 、由带有 ℓ 条带标号的腿的连通树参数化的胞腔组成。由惠特尼嵌入定理可知，若 $N \geq 2k+1$，则一个 k 维单纯复形可以分片光滑地嵌入 $\mathbb{R}^N$。由于 $(\ell-1)n-2 \geq 2(\ell-4)+1 = 2\ell-7$，我们可以取一个 $((\ell-1)n-2)$ 维把手体 $N_{L_{\ell-1}}$，它是通过将 Lie-hedron $L_{\ell-1}$加厚而嵌入 $I^{(\ell-1)n-2}$ 得到的。

我们通过从较低超额族归纳扩展，构造一个“$(2^{\ell-1}-\ell-1)$T-链环”，它是一个 $(\ell-4)$ 参数的弦链环族 $(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup\ell} \to I^{\ell n-\ell+3}$。

(1) 我们首先进行一些与重数相关的初步计算。我们注意到，$(2^{\ell-1}-\ell-1)$T-链环中的项具有 $\omega'_{T_{p+1}} \circ \omega'_{T_{q+1}}(p+q=\ell,\ p \geq 2,\ q \geq 2)$ 这样的形式，其中

$\omega'_{T_{p+1}}$ 和 $\omega'_{T_{q+1}}$ 是通过悬挂得到的。它们的重数（超额 0 面的重数）为$m_{p+1}m_{q+1}$。我们定义

$$\mu_\ell^\partial = \mathrm{lcm}(\{m_{p+1}m_{q+1} \mid p+q=\ell, p\geq 2, q\geq 2\}).$$

这将是（$2^{\ell-1}-\ell-1$）T-链环中超额 0 面的重数。显然，对于 $p+q=\ell$， p， $q\geq 2$，我们有$m_{p+1}m_{q+1} \mid \mu_\ell^\partial$，此外，我们将定义 m_ℓ 为 μ_ℓ^∂ 的整数倍，因此我们将有 $m_{p+1}m_{q+1} \mid m_\ell$。

（2）超额为 0 的树的弦链环族（它们是若干个悬垂的ω_{T_3}s 的复合）沿着带有系数 μ_ℓ^∂ 的 $N_{L_{\ell-1}}$ 的（$\ell-4$）-把手排列。然后，我们沿着 $N_{L_{\ell-1}}$ 的（$\ell-5$）-、（$\ell-6$）-、$\cdots$、0-把手，归纳地扩展这些族。 $\omega'_{T_{\ell_1}}$ 的复合的系数， $\omega'_{T_{\ell_2}}$， ……， $\omega'_{T_{\ell_i}}$（超额 $\ell-2-i$），其排列在一个（$i-2$）-把手上，是整数

$$\frac{\mu_\ell^\partial}{m_{\ell_1}m_{\ell_2}\cdots m_{\ell_i}}.$$

(3) 我们通过标准嵌入将其进一步延拓到 $I^{(\ell-1)n-2}$ 的其余部分，从而得到一个嵌入 $\Sigma_{(2^{\ell-1}-\ell-1)\mathrm{T}}$： $I^{(\ell-1)n-2}\to I^{\ell n-1}-(I^{(\ell-1)n-2})^{\cup(\ell-1)}$。

与前面的情形一样，$(2^{\ell-1}-\ell-1)$T-链环可以切分为 $(\ell-4)$-环在 $(I^{(\ell-1)n-(\ell-1)})^{\cup\ell}\to I^{\ell n-\ell+2}$ 中的初等路径。

为了得到引理 6.8 和 6.9 的类似结果，我们需要对 $(2^{\ell-1}-\ell-1)$ T-链环进行 $2(\ell-4)+1=(2\ell-7)$ 重去环化。具体而言，根据迭代括号的悬挂结构，作为 $\Omega^{\ell-4}\mathrm{Emb}_\partial(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)}, I^{\ell n-\ell+3}-(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup(\ell-1)})$ 中一个元素的 $(2^{\ell-1}-\ell-1)$T-链环，可提升到 $\Omega^{2\ell-7}\mathrm{Emb}_\partial(I^{(\ell-1)n-2\ell+5}, I^{\ell n-2\ell+6}-(I^{(\ell-1)n-2\ell+5})^{\cup(\ell-1)})$。由于所需去环化的总次数 $(\ell-2)k-\ell-1+j-(\ell-4)$（$\dim S^{\ell-4}\times S^{\boldsymbol{a}}=(\ell-2)k-\ell-1+j$。见注 6.21）至少为 $2\ell-7-(\ell-4)=\ell-3$ 当 $k\geq 3$ 时，因此至少需要进行 $(2\ell-7)$ 重去环化。于是我们可以应用引理 6.8 和 6.9 的类似结果，并将 $L_{\ell-1}$ 嵌入去环化族的参数空间中。

如果我们在引理 6.8 的类比中，用自然映射替换“去悬挂”过程，将 $\Sigma_{(2^{\ell-1}-\ell-1)\mathrm{T}}$ 变成 $\mathrm{Emb}_\partial(I^{(\ell-1)n-2\ell+5}, I^{\ell n-2\ell+6}-(I^{(\ell-1)n-2\ell+5})^{\cup(\ell-1)})$ 中的一个 $(2\ell-7)$ 重环

$$\begin{aligned}&\Omega^{\ell-4}\mathrm{Emb}_\partial(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)}, I^{\ell n-\ell+3}-(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup(\ell-1)})\\ &\to \Omega^{2\ell-7}B^{\ell-3}\mathrm{Emb}_\partial(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)}, I^{\ell n-\ell+3}-(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup(\ell-1)}),\end{aligned}$$

我们得到 $B^{\ell-3}\mathrm{Emb}_\partial(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)}, I^{\ell n-\ell+3}-(I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup(\ell-1)})$ 中的 $(2\ell-7)$ 重环，它是 $2^{\ell-1}-\ell-1$ $(2\ell-7)$-链的和。

7.3.2. 步骤 *2*：为$(2^{\ell-1}-\ell-1)$*T*-链环找到一个零同伦 $\varphi^{(\ell)}$（引理 *6.5* 的类比）。我们再次使用推论 2.4，得知自然映射

$$\pi_{\ell-4}(\mathrm{Emb}_\partial((I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3}))\to\pi_0(\mathrm{Emb}_\partial((I^{(\ell-1)n-2})^{\cup\ell}, I^{\ell n-1}))$$

是关于 $n\geq\ell-2$ 的同构。根据定理 2.1 和推论 2.4，当 $n\geq\ell-2$ 且 $(\ell-1)n-2\not\equiv 3$（模 4）时，后一个群是有限群。此外，即使 $(\ell-1)n-2\equiv 3$（模 4），$(2^{\ell-1}-\ell-1)$T-链环的每个单独分支都有一个指定的零同伦，并且作为嵌入它是平凡的 $I^{(\ell-1)n-2}\to I^{\ell n-1}$。因此，$(2^{\ell-1}-\ell-1)$T-链环是有理零同伦的。令 $\varphi^{(\ell)}$ 为 $(2^{\ell-1}-\ell-1)$T-链环的一个多重 $(\varphi_{(2^{\ell-1}-\ell-1)\mathrm{T}})^{\#q_\ell}$ 的零同伦。

7.3.3. 步骤 *3*：布伦尼安性质和循环对称性质（引理 *6.15* 和 *6.16* 的类比）。与前面的情形一样，我们可以假设零同伦 $\varphi^{(\ell)}$ 具有有理布鲁尼安性质和有理循环对称性，前提是 n 足够大，并且我们作出类似于假设 6.14 的假设：该零同伦与每个分支所指定的零同伦相对同伦。

因此，存在一个正整数 r_ℓ，使得 $(\varphi^{(\ell)})^{\#r_\ell}$ 相对于为 $(\varphi_{(2^{\ell-1}-\ell-1)\mathrm{T}})^{\#q_\ell}$ 指定的布伦尼安零同伦系统具有布伦尼安性质，且其对称化满足循环对称性质。此外，我们利用引理 5.14 证明了引理 6.19 的一个类比结果（布伦尼安零同伦系统的循环对称性）。因此，我们有零同伦路径 $(\varphi^{(\ell)})^{\#r_\ell}$ 的对称化 $\omega_{T_\ell} = \#_{i=1}^{\ell}\omega_i^{(\ell)}$。

这里，相对布鲁尼安性质对 n 的条件由 $|S|+\ell-4 \le n-2$ 给出，如引理 6.15 证明的最后部分所述，而 $|S| \le \ell-1$ 给出了条件 $n \ge \max\{|S|+\ell-2\} = 2\ell-3$。

定义 7.3。令 $m_\ell = \ell\cdot q_\ell\cdot r_\ell\cdot \mu_\ell^\partial$（$\mu_\ell^\partial$ 来自上文的步骤 1，q_ℓ 来自步骤 2，r_ℓ 来自步骤 3）。我们将 $\beta_{T_\ell} = \beta_{T_\ell}(T_\ell)$ 记为环空间 $\Omega^{\ell-4}\mathrm{Emb}_{\overline{\partial}}((I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup\ell}, I^{\ell n-\ell+3})$ 中的链 $\frac{1}{m_\ell}\omega_{T_\ell}$。对于 T_ℓ 的面图 σ，令 $\beta_{T_\ell}(\sigma)$ 表示由 σ 的迭代括号给出的 $\partial\beta_{T_\ell}$ 中相应的分项，其形式为 $\frac{1}{m_\ell}\cdot\frac{m_\ell}{m_{\ell_1}m_{\ell_2}}\omega'_{T_{\ell_1}}\circ\omega'_{T_{\ell_2}} = \frac{1}{m_{\ell_1}m_{\ell_2}}\omega'_{T_{\ell_1}}\overline{\circ\omega'_{T_{\ell_2}}}$。我们在此项中置入 $\omega_\sigma = \omega'_{T_{\ell_1}}\circ\omega'_{T_{\ell_2}}$ 和 $m_\sigma = m_{\ell_1}m_{\ell_2}$。

定理 *1.6* 的证明：$\ell \ge 6$。根据（$2^{\ell-1}-\ell-1$）T-链环的定义，$\varphi^{(\ell)}$满足条件 (1)（相容性）、(2)（边界）和 (3)（L_∞-关系）。条件 (4)（布伦尼安）和 (5)（循环对称性）则由上面的步骤 3 得出。证明完毕。□

8. Thickening of a vertex surgery: Proof of Theorem 1.10

8.1. **加厚概述**。我们有一条链

$$\omega_{T_\ell(p,q)}\colon B_{T_\ell(p,q)} \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k}),$$

其中 $B_{T_\ell(p,q)} = I^{\ell-3}\times S^{\boldsymbol{a}}$，它是某个维数为（$\ell-2$）$k-2\ell+q+3$的紧流形 $S^{\boldsymbol{a}}$，由 T_ℓ 的基本括号 ω_{T_ℓ} 经过悬挂和去环化得到（见 §5.1、§5.2、例 5.9、5.10 和 6.20）。我们通过逐步更新 $\omega_{T_\ell(p,q)}$，如下所示，来定义定理 1.10 的映射 $\omega_{T_\ell(p,q)}\colon B_{T_\ell(p,q)}\to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$。然后我们将定义 $\beta_{T_\ell(p,q)} = \frac{1}{m_\ell}\omega_{T_\ell(p,q)}$。

8.1.1. 定义域的简化 $\omega_{T_\ell(p,\ q)}$。首先，我们简化 $\omega_{T_\ell(p,\ q)}$ 的定义域。我们定义

$$\widehat{B}_{T_\ell(p,q)} = I^{\ell-3}\times S^{|\boldsymbol{a}|},$$

其中 $|\boldsymbol{a}| = (\ell-2)k-2\ell+q+3$。稍后在定义 8.4 中给出的 $B_{T_\ell(p,\ q)}$ 的定义略有不同，不过它与此处给出的定义同伦等价。我们将在引理 8.3 中看到，存在一个规范约化

$$\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}\colon \widehat{B}_{T_\ell(p,q)} \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$$

of $\omega_{T_\ell(p,\ q)}$。$\widehat{B}_{T_\ell(p,\ q)}$ 的边界 $\partial I^{\ell-3}\times S^{|\boldsymbol{a}|}$ 有一个分解

$$\partial I^{\ell-3}\times S^{|\boldsymbol{a}|} = A_{T_\ell(p,q)}\cup\bigcup_{\sigma\in\mathcal{P}_{T_\ell}} K(\sigma)$$

由 ω_{T_ℓ} 的边界所诱导（引理 6.9，第 7 节.2.1）。另一方面，对于超额为 $\ell-4$ 的有向树 $(\sigma,\alpha)\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$，其 $K(\sigma)\cong I^{\ell-4+|\boldsymbol{a}|}$ 在 $\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}$ 中为余维1，其迭代括号由类似 $(I^{\ell_1-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_1|})\times(I^{\ell_2-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_2|})$ 等的空间参数化，而该空间可能与 $K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 不同胚。因此，$\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 的面可能与由低次数顶点得到的链不一致。为弥补这一缺陷，我们将进一步加厚 $B_{T_\ell(p,q)}$，并将 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 延拓到加厚空间，使其边界由对低次数的括号运算进行迭代所得各项之和给出。

8.1.2. 多重链。 此外，为了将链中各项的重数考虑在内，我们对带角紧流形 W 定义其多重体

$$nW = \operatorname{colim}\Big(\coprod^n W \longleftarrow \coprod^n \partial W \longrightarrow \partial W\Big).$$

当空间 W不一定是流形，但其子空间 ∂W已指定时，也可以定义此概念。若 $(\sigma,\alpha) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ 的超额为 λ，则令 $n_\sigma = 2^\lambda$。我们定义

$$n_\sigma \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) = \begin{cases} \prod_{v\in V^{\mathrm{int}}(\sigma)} n_{T(v)} \widehat{B}_{T(v)} & ((\sigma,\alpha) \neq T_\ell(p,q)), \\ n_{T_\ell} \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)} & ((\sigma,\alpha) = T_\ell(p,q)), \end{cases}$$

其中 $V^{\mathrm{int}}(\sigma)$ 是 σ的内部顶点集合。这样做是为了使 (3.1) 或 (3.2) 的右端成为$\widehat{}$整数链。空间 $n_\sigma B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 参数化一条链

$$n_\sigma \widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\colon n_\sigma \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k}) \tag{8.1}$$

由.....得到 内部顶点 v中度数低于 T的顶点所对应的 σ的乘积 $n_{T(v)}\widehat{\omega}_{T(v)}$ ℓ.

8.1.3. $n_\sigma\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$定义域的加厚。我们将链 $n_\sigma\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$粘合在一起，并按如下方式将它们加厚。赋值 $(\sigma,\alpha)\mapsto n_\sigma\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 定义了一个函子 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)} \to\widehat{}$ $\widehat{}$拓扑空间范畴，其中，对于 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ 中的态射 $f\colon(\sigma,\alpha)\to(\sigma',\alpha')$，映射 $B_{T_\ell(p,q)}(f) : n_\sigma B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to n_{\sigma'} B_{T_\ell(p,q)}(\sigma',\alpha')$ $(n_{\sigma'} = 2n_\sigma)$ 由收缩低阶骨架诱导。注意，$\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(f)$ 将 $n_\sigma B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 中的所有座位映到多重体 $n_{\sigma'} B_{T_\ell(p,q)}(\sigma',\alpha')$ 的同一个面上。另有映射$\widehat{}$ $\widehat{}$ $n_\sigma B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)} \subset B_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)}$，它们共同定义了一个自然变换$\widehat{}$ $n_\sigma B_{T_\ell(p,q)}(-) \to K(-)/A_{T_\ell(p,q)}$。这给出一个交换图:

$$\begin{array}{ccccc} n_\sigma \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) & \longrightarrow & n_{\sigma'} \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma',\alpha') & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)} & \xrightarrow{\subset} & K(\sigma')/A_{T_\ell(p,q)} & \xrightarrow{\subset} & \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)} \end{array}$$

此外，它还有一个典范提升 $n_\sigma \widehat{B}_{T_\ell(p,\,q)}(\sigma,\ \alpha) \to K^{(n_{T_\ell})}(\sigma)/A_{T_\ell(p,\,q)}$，其中

$$K^{(n_{T_\ell})}(\sigma) = \begin{cases} K(\sigma) & ((\sigma,\alpha) \neq T_\ell(p,q)), \\ n_{T_\ell} \widehat{B}_{T_\ell(p,q)} & ((\sigma,\alpha) = T_\ell(p,q)). \end{cases}$$

$\widehat{}$**定义 8.1**。 我们定义 $B_{T_\ell(p,\,q)}\overline{\ }:=$同伦余极限 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ $n_\sigma B_{T_\ell}$ $(\sigma,\ \alpha)\in$ $(p,\ q)$ $(\sigma,\ \alpha)$。于是我们得到一个自然映射

$$\overline{B}_{T_\ell(p,q)} \longrightarrow \operatorname*{colim}_{(\sigma,\alpha)\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}} K^{(n_{T_\ell})}(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)} = n_{T_\ell}\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)}.$$

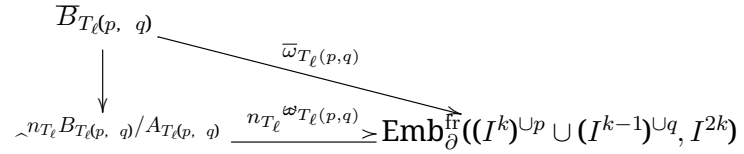
（参见 [Du，定义 4.5] ，了解同伦余极限的定义。）

注 8.2。 由于空间 $B_{T_\ell(p,\,q)}\overline{\ }$是通过沿边界粘合并压缩若干个带角光滑流形构造的，我们可以认为 $B_{T_\ell(p,\,q)}$ 具有有限 CW 复形的结构，并具有定义良好的基本类，其中粘合映射是胞腔映射。

8.1.4. 链的加厚$n_\sigma\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$. 我们将在 §8.2、8.3 和 8.4 中看到，链的集合$\{n_\sigma\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\}$ 可以扩展并粘合在一起，形成一个映射

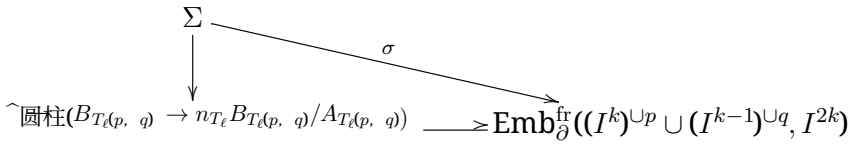
$$\overline{\omega}_{T_\ell(p,q)}\colon \overline{B}_{T_\ell(p,q)} \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$$

使得图表



在边界附近，在可压缩配边意义下（见下文）是交换的。此外，$\omega_{T_\ell\ (p,\ q)}$ 的相容性和布鲁尼安性质也成立，与定理 1.6 类似。这里，

- $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\ (\sigma,\ \alpha)}$ 是将$\beta_{T_\ell\ (p,\ q)}$ 限制到对$\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell\ (p,\ q)}$ 的满子范畴所取的同伦余极限上所得的结果，其中该满子范畴由可收缩为（σ，α）的有向树构成，
- 我们称两条链 $\omega_{T_\ell(p,q)}$ 和 $n_{T_\ell}\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 由可压缩配边 相关，若存在一个连续映射 $\sigma\colon \Sigma \to \mathrm{Emb}_{\mathrm{fr}\partial}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$，其定义域为有限 CW 复形 Σ，带有定向胞腔，使得 $\partial\sigma = \omega_{T_\ell(p,q)} - n_{T_\ell}\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 作为链成立，且下图交换。



其中，$\widehat{\mathrm{Cyl}}(B_{T_\ell(p,q)} \to n_{T_\ell} B_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)})$ 是自然映射$\frown B_{T_\ell(p,q)} \to n_{T_\ell} B_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)}$ 的映射柱。

8.2. **将球面合并到 $B_{T_\ell(p,q)}$ 中的一个球面里**。回忆一下，$B_{T_\ell(p,q)}$ 具有$I^{\ell-3} \times S^{\boldsymbol{a}}$的形式，其中，对于 $\boldsymbol{a} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$，有 $S^{\boldsymbol{a}} = \prod_{j=1}^{\ell} S^{\lambda_j}$。对于 $\Omega = \{1, \dots, \ell\}$ 的子集 J，我们定义 $S^{\boldsymbol{a}}$ 的子集 $S^{\boldsymbol{a}}[J] = \prod_{j=1}^{\ell} L_j$，其中

$$L_j = \begin{cases} S^{\lambda_j} & (j \in J), \\ \{t_0^j\} & (j \notin J). \end{cases}$$

$S^{\boldsymbol{a}}$的胖楔 $R^{\boldsymbol{a}}$是 $\Omega \setminus \{i\}$]的子集 $\bigcup_{i=1}^{\ell} S^{\boldsymbol{a}}$[。对于 $S^{\boldsymbol{a}}$ 的子集 Q，令 CQ 表示 Q 上的锥。那么存在同伦等价

$$S^{\boldsymbol{a}} \cup CR^{\boldsymbol{a}} \simeq S^{\boldsymbol{a}}/R^{\boldsymbol{a}} \simeq S^{|\boldsymbol{a}|},$$

其中 $|\boldsymbol{a}| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$。现在我们考虑一种由同伦余极限定义的、稍微加厚的锥的替代构造。为此，我们将锥 $CR^{\boldsymbol{a}}$ 视为 $S^{\boldsymbol{a}}[J]$ 上子锥 $C(S^{\boldsymbol{a}}[J])$ 的余极限：

$$CR^{\boldsymbol{a}} = \operatorname*{colim}_{\substack{J \subset \Omega \\ J \neq \Omega}} C(S^{\boldsymbol{a}}[J]).$$

接下来，我们将 $R^{\boldsymbol{a}}$ 的“加厚锥”定义为

$$\widehat{C}R^{\boldsymbol{a}} = \operatorname*{hocolim}_{\substack{J \subset \Omega \\ J \neq \Omega}} C(S^{\boldsymbol{a}}[J]).$$

$\widehat{\ }$我们通过自然映射$\widehat{\ }$将 $\operatorname{hocolim}_J S^{\boldsymbol{a}}[J]$ 中的子集粘合到 $R^{\boldsymbol{a}} = \operatorname{colim}_J S^{\boldsymbol{a}}[J]$ 上，从而将 $CR^{\boldsymbol{a}}$ 与 $S^{\boldsymbol{a}}$ 粘合，并将所得结果记为 $S^{\boldsymbol{a}} \cup CR^{\boldsymbol{a}}$。由于图表 $\{C(S^{\boldsymbol{a}}[J])\}_J$ 是余纤维的，自然映射给出了一个同伦$\widehat{\ }$等价 $S^{\boldsymbol{a}} \cup CR^{\boldsymbol{a}} \simeq S^{\boldsymbol{a}} \cup \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}$。

引理 8.3。设 $\ell \geq 3$。假设 k 足够大。针对 ℓ 价顶点手术的布伦尼安零同伦系统给出一个典范延拓

$$\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}\colon I^{\ell-3} \times (S^{\boldsymbol{a}} \cup \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}) \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$$

族 $\omega_{T_\ell(p,q)}$： $B_{T_\ell(p,q)} = I^{\ell-3} \times S^{\boldsymbol{a}} \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$。因此我们得到以下同伦交换图：

$$\begin{array}{ccc} I^{\ell-3} \times S^{\boldsymbol{a}} & & \\ \simeq \big\downarrow & \overset{\omega_{T_\ell(p,q)}}{\searrow} & \\ I^{\ell-3} \times S^{|\boldsymbol{a}|} & \longrightarrow & \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k}) \end{array}$$

证明。 对于每个满足条件 $J \neq \Omega$ 的子集 $J \subset \Omega$，利用关于移除标记为 $\Omega \setminus J$ 的分支的布伦尼安零同伦，构造 $\omega_{T_\ell(p,\ q)}$ 在 $C(S^{\boldsymbol{a}}[J])$ 上的一个延拓。根据同伦余极限的定义，这些延拓可从各个锥 $C(S^{\boldsymbol{a}}[J])$ 进一步延拓至 $\operatorname{hocolim}_J C(S^{\boldsymbol{a}}[J])$。□

8.3. 余维一面的可压缩性。 为证明定理 1.10，我们检查以下图表的同伦相干性：

$$\begin{array}{ccc} (-)^{\widehat{B}_{T_\ell}(p,\ q)}\ (-) & & \\ \big\downarrow & \overset{(-)\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(-)}{\searrow} & \\ K\ (-)\ /A_{T_\ell}(p,\ q) & \xrightarrow[\omega_{T_\ell(p,q)}|_{K(-)/A_{T_\ell(p,q)}}]{} & \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k}) \end{array}$$

其由 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell}(p,\ q)$ 参数化。为简便起见，我们检查相应图表在没有重数时的同伦相干性；由于它在多重体中只是一个座位，这已足够。

定义 8.4。 我们通过图表的推出定义 $\widehat{B}_{T_\ell}(p,\ q)$

$$I^{\ell-3} \times (S^{\boldsymbol{a}} \cup \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}) \longleftarrow \partial I^{\ell-3} \times \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}} \longrightarrow \partial I^{\ell-3} \times *,$$

其中左侧映射是包含映射，右侧映射是投影。边界 $\partial B_{T_\ell}(p,\ q)$ 由 $\widehat{B}_{T_\ell}(p,\ q)$ 的子空间 $\partial I^{\ell-3} \times (S^{\boldsymbol{a}}/\widehat{C}R^{\boldsymbol{a}})$ 定义。

这是将 $I^{\ell-3} \times (S^{\boldsymbol{a}} \cup \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}})$ 的子空间 $\partial I^{\ell-3} \times \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}$ 压缩到 $\partial I^{\ell-3} \times *$ 上所得的空间。由于将 $\partial I^{\ell-3} \times \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}$ 压缩到 $\partial I^{\ell-3} \times *$ 上不会影响同伦类型，因此 $\widehat{B}_{T_\ell}(p,\ q)$ 具有 $I^{\ell-3} \times S^{|\boldsymbol{a}|}$ 的同伦类型。对于 $(\sigma,\ \alpha) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell}(p,\ q)$，我们定义

$$\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) = \begin{cases} \prod_{v \in V^{\mathrm{int}}(\sigma)} \widehat{B}_{T(v)} & ((\sigma,\alpha) \neq T_\ell(p,q)), \\ \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)} & ((\sigma,\alpha) = T_\ell(p,q)). \end{cases}$$

如 §1.3 中所述。我们还将由引理 8.3 的映射 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 诱导的映射记为 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)} : \widehat{B}_{T_\ell(p,q)} \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$。设 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) : \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 为对 σ 中低于 T_ℓ 的内部顶点 v 取乘积所得到的映射。

引理 8.5。 设 $\ell \geq 3$。假设 k 足够大。令 $(\sigma,\alpha) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ 为 $\curvearrowright T_\ell(p,q)$ 的一个超额为 $\ell - 4$ 的面，即一个余维*1*的面。那么存在自然映射 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$，使下图在同伦意义下交换。

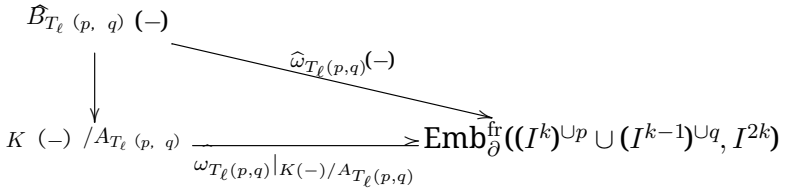
$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) & & \\ \big\downarrow & \overset{\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)}{\searrow} & \\ K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)} & \xrightarrow[\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}|_{K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}}]{} & \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k}) \end{array} \tag{8.2}$$

证明。引理 8.5 可通过将 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 和 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}|_{K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}}$ 延伸到投影 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 的映射圆柱来证明。具体而言，面树 (σ,α) 有两个由一条中间边连接的内部顶点 v_1, v_2。(8.2) 中左侧的垂直映射可如下给出。我们有 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) = B_{T(v_1)} \times B_{T(v_2)} = (I^{\ell_1-3}\times S^{\boldsymbol{a}_1})\times(I^{\ell_2-3}\times S^{\boldsymbol{a}_2})$，以及 $\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) = \widehat{B}_{T(v_1)}\times\widehat{B}_{T(v_2)} \simeq (I^{\ell_1-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_1|})\times(I^{\ell_2-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_2|})$；而 $K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 同胚于 $I^{\ell_1-3}\times I^{\ell_2-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|}$ 的一个商空间。投影 $\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 是由商映射 $(I^{\ell_1-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_1|})\times(I^{\ell_2-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_2|}) \to I^{\ell_1-3}\times I^{\ell_2-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|}$ 诱导的。我们需要证明，将 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 限制到 $(I^{\ell_1-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_1|})\vee(I^{\ell_2-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_2|})$ 后是零伦的。回想一下，定义 5.12 中两个 Ψ-图的迭代手术是通过选择一个对应于外部顶点的分支来定义的。根据引理 8.9，我们可以改变定义 5.12 中 G_1 和 G_2 的叶的选取方式，使得对于每个 i，都选取 G_i 中一个与内部边不相交的一价顶点。于是，根据布鲁尼安性质，移除 σ 内部边中间处的叶所对应的分支后，将 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 限制到 $I^{\ell_i-3}\times S^{|\boldsymbol{a}_i|}$ 是零伦的。因此，$\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 在同伦意义下经由 $K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 分解。□

8.4. 高余维分层上的相容性。 我们要求余维 1 分层的面沿余维 2 分层保持一致，对更高余维分层也依此类推。例如，在 $B_{\partial_j\partial_i T_5(p,\ q)}$ 上，其中 $\partial_j\partial_i T_5(p,\ q)$ 是 IHX 关系中来自 $\partial_i T_5(p,\ q)$ 处四价顶点的一个项（对应一个三价图）。为了保证沿余维 2 分层的一致性，我们将$B_{\partial_j\partial_i T_5(p,\ q)}\times\Delta^2$ 粘合到每个余维 2 分层上。

我们需要证明，加厚后，链 $\widehat{\omega}_{T_{\ell(p,\ q)}}(\sigma,\ \alpha)$ 被相容地粘合在一起。根据 [Du 的注 9.6 和命题 9.7],，给出一个映射 hocolim $\mathcal{X}(-) \to Z$ 等价于给出一个同伦相干图表 $\mathcal{X}(-) \to Z$，因此以下引理足以满足要求。

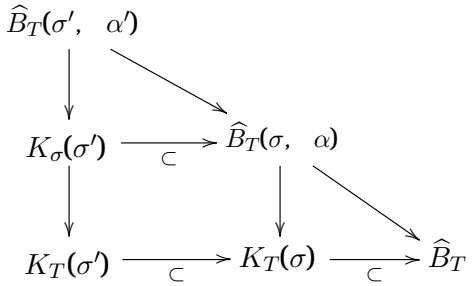
引理 *8.6.* 设 $\ell \geq 3$。假设 k充分大。图表 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(-) : B_{T_\ell(p,q)}(-) \to \mathit{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 和 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}|_{K(-)/A_{T_\ell(p,q)}}$: $K(-)/A_{T_\ell(p,q)} \to \mathit{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 均由偏序集 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ 参数化，并且相对于自然变换$B_{T_\ell(p,q)}(-) \to K(-)/A_{T_\ell(p,q)}$ 相容。也就是说，以下图表是同伦相干的。



证明。 为简便起见，我们令 $T = T_\ell(p,q)$，并将 $K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 记作 $K_T(\sigma)$。

我们先检查余维 2 分层处的同伦相干性。设 $(\sigma,\alpha) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_T$是 T的一个超额为 $\ell-4$的面，并设 $(\sigma',\alpha') \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_T$是 (σ,α) 的一个超额为 $\ell-5$的面。换句话说，序列$T \leftarrow (\sigma,\alpha) \leftarrow (\sigma',\alpha')$ 是通过收缩两条边得到的。假设 (σ,α) 是$T_{\ell_1}(p_1,q_1)$ 和 $T_{\ell_2}(p_2,q_2)$ 的并，二者在一条内部边处相接。我们有 $B_T(\sigma,\alpha) = B_{T_{\ell_1}(p_1,q_1)} \times B_{T_{\ell_2}(p_2,q_2)}$。假设 (σ',α') 是由 $T_{\ell_1}(p_1,q_1)$ 的一个面诱导得到的，并且是 $T_{\ell_3}(p_3,q_3)$、$T_{\ell_4}(p_4,q_4)$、以及 $T_{\ell_2}(p_2,q_2)$ 的并。那么我们有 $B_T(\sigma',\alpha') = B_{T_{\ell_3}(p_3,q_3)} \times B_{T_{\ell_4}(p_4,q_4)} \times B_{T_{\ell_2}(p_2,q_2)}$。令 $K_\sigma(\sigma') :=$

$\frown K_{T_{\ell_1}(p_1,\ q_1)}(\sigma') \times B_{T_{\ell_2}(p_2,\ q_2)}$。我们考虑以下交换图：



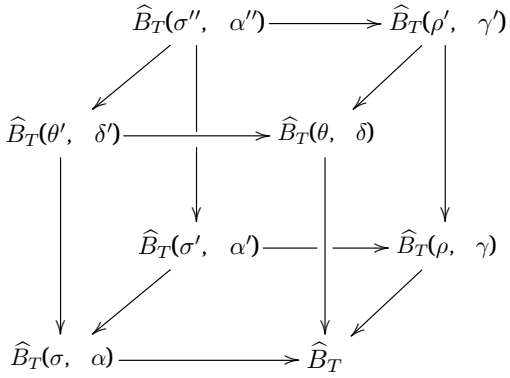
其中每个垂直箭头都对应于引理 8.5 的投影映射。从这个三角图到 $\mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 的图表的同伦相干性，来自对左下方方块的限制；这是成立的，因为 $\widehat{\omega}_T(\sigma,\alpha)|_{K_\sigma(\sigma')}$ 与 $\widehat{\omega}_T|_{K_T(\sigma')}$ 之间的同伦，是 $\widehat{\omega}_T(\sigma,\alpha)$ 与 $\widehat{\omega}_T|_{K_T(\sigma)}$ 之间同伦的限制。

接下来，我们考虑另一列 $T \leftarrow (\rho,\gamma) \leftarrow (\rho',\gamma')$，其中依次收缩两条边，且 $(\sigma',\alpha') = (\rho',\gamma')$。在这种情形下，我们考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}_T(\rho',\gamma') & = & \widehat{B}_T(\sigma',\alpha') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{B}_T(\rho,\gamma) \supset K_\rho(\rho') & & K_\sigma(\sigma') \subset \widehat{B}_T(\sigma,\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{B}_T \supset K_T(\rho') & = & K_T(\sigma') \subset \widehat{B}_T \end{array} \tag{8.3}$$

我们验证从 (8.3) 到 $\mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 的图表的同伦相干性。令$X = \widehat{B}_T(\sigma',\alpha')$、$Y = \mathrm{Emb}_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$，并令 Q 为由 $B_T(\sigma',\alpha') \to K_T(\sigma')$ 压缩的球面$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$（见 §8.2）的胖楔。于是，序列 $B_T(\sigma',\alpha') \to \frown K_\sigma(\sigma') \to K_T(\sigma')$ 和 $B_T(\rho',\gamma') \to K_\rho(\rho') \to K_T(\sigma')$ 的同伦给出了 $\widehat{\omega}_T(\sigma',\alpha')$ 的两个延拓 $X \cup CQ \to Y$。$\widehat{\ }$到同伦余极限 $X \cup CQ \to Y$ 的延拓，给出了这两个延拓的统一延拓。

高余维分层的情形也类似。例如，我们考虑一个取边界面的序列$T \leftarrow (\sigma,\ \alpha) \leftarrow (\sigma',\ \alpha') \leftarrow (\sigma'',\ \alpha'')$。由于序列 $T \leftarrow (\sigma,\ \alpha) \leftarrow \widehat{\ } (\sigma',\ \alpha') \leftarrow (\sigma'',\ \alpha'')$ 对应于将 B_T 中的三个独立因子压缩，我们得到以下交换三维立方体图。



该图表各面的同伦相干性由前一种情形（余维为 2）推出。三维立方体的同伦相干性则可仿照前一种情形，通过延拓到同伦余极限$\frown X \cup CQ \to Y$得到。□

推论 8.7. 诱导映射的图表

$$\begin{array}{ccc} \overline{B}_{T_\ell(p,q)} = \operatorname*{hocolim}_{(\sigma,\alpha)} n_\sigma \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) & & \\ \downarrow & \xrightarrow{\overline{\omega}_{T_\ell(p,q)}} & \\ n_{T_\ell}\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)} = \operatorname*{colim}_{\sigma} K^{(n_{T_\ell})}_{T_\ell(p,q)}(\sigma) & \xrightarrow[n_{T_\ell}\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}]{} & \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k}) \end{array}$$

是同伦交换的。

为证明定理 1.10，我们回顾一下定义 2.8 中关于布伦尼安性质的提升问题解释。根据这一解释，我们有如下结果。

引理 8.8。 链 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}\colon I^{\ell-3} \times (S^{\boldsymbol{a}} \cup \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}) \to \mathcal{E}(\emptyset)$ 具有一个布伦尼安零同伦自然系统，且与 $\omega_{T_\ell(p,q)}\colon I^{\ell-3} \times S^{\boldsymbol{a}} \to \mathcal{E}(\emptyset)$的零同伦自然系统相容。

证明。链 $\widehat{\omega}_{T_3(p,q)}\colon I^{\ell-3}\times(S^{\boldsymbol{a}}\cup\widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}) \to \mathcal{E}(\emptyset)$ 自然地诱导出一个提升 $I^{\ell-3}\times(S^{\boldsymbol{a}}\cup\widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}) \to P$，如下所示。 $\mathcal{B}(S)$ 中的每个零同伦都给出一条路径 $\gamma(S)\colon I \to \mathcal{E}(\emptyset)$，它也是加厚锥 $I^{\ell-3}\times(R^{\boldsymbol{a}} \cup \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}) \to \mathcal{E}(\emptyset)$ 中 $\widehat{\omega}_{T_3(p,q)}$ 的限制。路径 $\gamma(S) = \{\gamma(S)(u)\}_{u\in I}$ 自然配备了零同伦 $\{\gamma(S)(u + (1-u)t)\}_{u\in I}$，由此得到 $\gamma(S)$ 到 $\mathcal{B}(S)$ 的提升。对 $I^{\ell-3}\times(R^{\boldsymbol{a}} \cup \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}})$ 中所有从 $I^{\ell-3}\times R^{\boldsymbol{a}}$ 出发的路径进行这一提升，我们便得到 $\widehat{\omega}_{T_3(p,q)}$ 的提升$I^{\ell-3}\times(S^{\boldsymbol{a}} \cup \widehat{C}R^{\boldsymbol{a}}) \to P$。□

定理 *1.10* 的证明。关于较低超额树的相容性以及超额为 0 的树所满足的条件，显然成立。布鲁尼安性质由引理 8.8 得出。

还需证明 L_∞-关系 (1.3)。我们已经有由定理 1.6(2) 诱导的 $\omega_{T_\ell(p,q)}$ 和 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 的边界结构。它是来自 $B_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)}$ 的边界$\widehat{\ }$面 $K_{T_\ell(p,q)}(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 的链之和。通过上述加厚过程，$B_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)}$ 的边界面$\frown$ $\frown K_{T_\ell(p,q)}(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 被替换为 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 的加厚，从而得到 $\partial\omega_{T_\ell(p,q)}$ 的一个面，该面对应于 (σ,α)。证明完毕。□

引理 8.9。 设 $\alpha\colon I^{\ell'-3} \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(I^{p_1}\cup I^{p_2}\cup I^{p_3-\lambda}\cup\cdots\cup I^{p_{\ell'}-\lambda}, I^{N-\lambda})_\iota$ 是一个类型为 $(p_1, p_2, p_3-\lambda, \ldots, p_{\ell'}-\lambda; N-\lambda)$ 的弦链环族，它由定理 *1.6* 的一个 ℓ' 价基本括号运算经悬挂得到。设 $\alpha_1, \alpha_2\colon I^{\ell'-3} \to \Omega^\lambda\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(I^{p_1}\cup I^{p_2}\cup I^{p_3}\cup\cdots\cup I^{p_{\ell'}}, I^N)_\iota$ 是由 α 按如下方式得到的嵌入族（见图 *33*）。

(1) 族 α_1 是通过沿着关于移除第一个分支的布鲁尼安零同伦（注 *5.3*），在第 2、3、4、. . . 、ℓ' 个分支处对 α 进行悬挂而得到的；随后再关于第二个分支进行去环化。

$$\begin{aligned}(p_1, p_2, p_3-\lambda, \ldots, p_{\ell'}-\lambda; N-\lambda) &\to (p_1, p_2+\lambda, p_3, \ldots, p_{\ell'}; N)\\ &\to \Omega^\lambda(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{\ell'}; N)\end{aligned}$$

(2) 族 α_2 是通过沿着关于移除第二个分支的布鲁尼安零同伦，在第1、3、4、.....、ℓ'个分支处将 α 悬挂而得到的，随后再相对于第一个分支进行去环化。

$$\begin{aligned}(p_1, p_2, p_3-\lambda, \ldots, p_{\ell'}-\lambda; N-\lambda) &\to (p_1+\lambda, p_2, p_3, \ldots, p_{\ell'}; N)\\ &\to \Omega^\lambda(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{\ell'}; N)\end{aligned}$$

于是， α_1 与 α_2 之间存在一个同伦，并且该同伦与超额较低的图所对应的同伦相容。对于其他分支对，结论也同样成立。

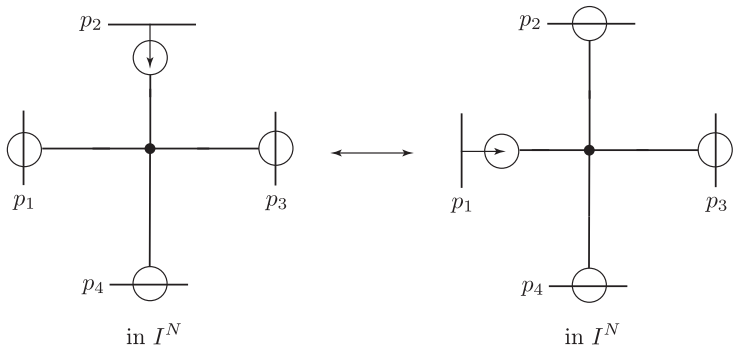


FIGURE 33. 交换分支以进行去环化。

证明。为简洁起见，我们只证明 $\ell' = 4$ 与 $\lambda = 1$ 的情形，因为其他情形的证明相同。在这种情形下，α 是一个类型为$(p_1,\ p_2,\ p_3 - 1,\ p_4 - 1;\ N-1)$的弦链环路径。对于其中每个 $t \in [0,1]$，我们都找到 $\alpha_1(t)$与 $\alpha_2(t)$之间的一个同伦，使其随 t平滑变化。

由引理 4.15，α 关于移除第一个分支具有布鲁尼安零同伦。关于最后三个分支的悬挂 $\Sigma_{2,3,4}\alpha(t)$ 是利用此布鲁尼安零同伦定义的，并产生一个类型为 $(p_1, p_2+1, p_3, p_4;\ N)$ 的弦环。于是，路径 $\alpha_1(t)$ 就是此弦环中第二个分支的去环化。其图是一个类型为 $(p_1+1, p_2+1, p_3+1, p_4+1;\ N+1)$ 的弦环 M。

这里可以看到，第二个分支去环化所得的图与关于第 1、3、4 个分支的悬挂可以通过一个小同痕相互变换（引理 5.8）。类似地，悬挂 $\Sigma_{2,3,4}\alpha(t)$ 可以通过一个小同痕变换为第一个分支去环化所得的图。因此，M 可视为一个类型为 $\Omega^{(1,1,0,0)}(p_1-1, p_2-1, p_3-1, p_4-1; N-1)$ 的二参数族的图，而 $\alpha_1(t)$ 与 $\alpha_2(t)$ 之间的差别在于选择参数空间 I^2 的 I-方向来取部分图。更明确地说，$\alpha_1(t)$（对每个固定的 t）可以变形为序列

$$\begin{aligned}(p_1,p_2,p_3-1,p_4-1;N-1) &\to \Omega^{(1,0,0,0)}(p_1-1,p_2,p_3-1,p_4-1;N-1)\\ &\to \Omega^{(1,1,0,0)}(p_1-1,p_2-1,p_3-1,p_4-1;N-1)\end{aligned}$$

取图，其中 $\Omega^{(1,0,0,0)}$ 等是（5.2）中的记号，并且 $\alpha_2(t)$（对每个固定的 t）可变形为以下序列

$$\begin{aligned}(p_1,p_2,p_3-1,p_4-1;N-1) &\to \Omega^{(0,1,0,0)}(p_1,p_2-1,p_3-1,p_4-1;N-1)\\ &\to \Omega^{(1,1,0,0)}(p_1-1,p_2-1,p_3-1,p_4-1;N-1)\end{aligned}$$

取图。变形为 I^2 上的族之后，I^2 中任意一个 I 方向都会给出一个图，它是类型为 $(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4;\ N)$ 的弦环。第一次图化中 I 方向的两种选择可以相互变形（见图 34）。□

8.5. **的提升**$_{p,\overline{q})}$ **到** Emb。现在我们证明此前在 §2.3 中暂缓证明的引理 2.9。

引理 *8.10*（引理 *2.9*）。对于 $\ell \geq 3$，定理 *1.10* 中的链 $\omega_{T_\ell(\overline{p},q)}$：$B_{T_\ell(p,q)} \to Emb_\partial^{\mathrm{fr}}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 可提升到空间 $Emb_\partial(N_{I^k}^{\cup p} \cup N_{I^{k-1}}^{\cup q}, I^{2k})_{\overline{\iota}}$，且此提升与较低超额树 $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)} \setminus \{T_\ell(p,q)\}$ 对应的提升相容。

根据 (2.4)，只需将 $\omega_{T_\ell(p,q)}$ 提升至 $\mathrm{Emb}_\partial((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota$。粗略地说，$\omega_{T_\ell(p,q)}$ 的布伦尼安零同伦系统会导出一个到 $\mathrm{Emb}_\partial((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})_\iota$ 的提升。更准确地说，设 $\mathcal{E}(\emptyset) = \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_\ell}, I^N)$ 和 $\mathcal{E}(\emptyset) = \mathrm{Emb}_\partial(I^{a_1} \cup \cdots \cup I^{a_\ell}, I^N)_\iota$。我们

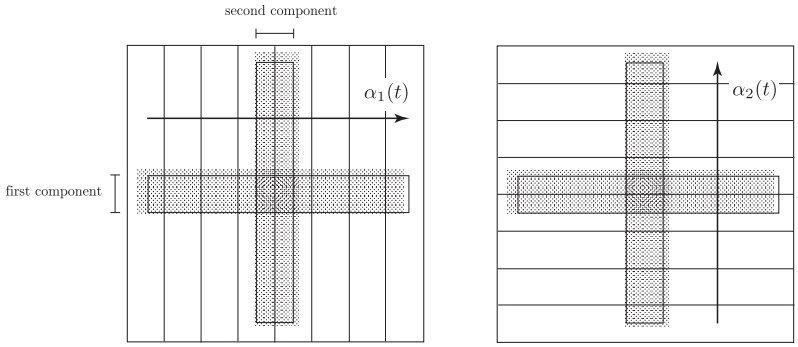


FIGURE 34. 对于每个固定的 t，单参数族 $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$。竖直（分别为水平）灰色矩形包含第二个（分别为第一个）分支可能不是标准形式的参数。

考虑下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & \longrightarrow & \prod_{1\le i\le \ell} \mathcal{B}(\Omega \setminus \{i\}) \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{E}}(\emptyset) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\emptyset) & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{E}(\emptyset)^{\times \ell} \end{array}$$

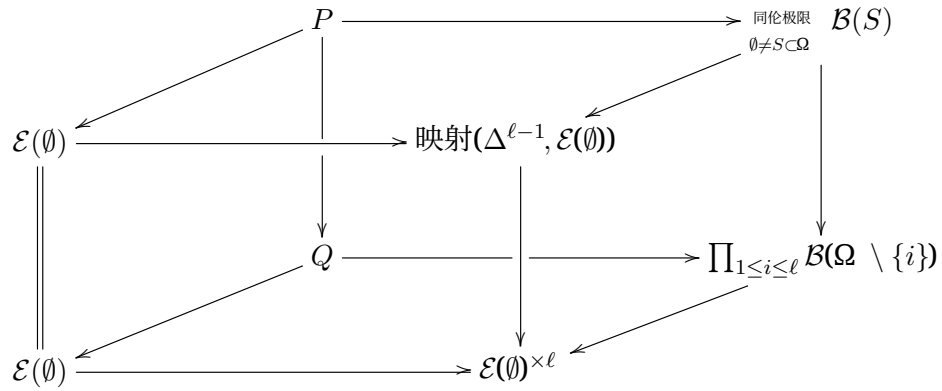
其中右侧方块是拉回方块，最右侧的竖直映射是投影 $\mathcal{B}(\Omega \setminus \{i\}) \to \mathcal{E}(\emptyset)$ 的乘积，而左侧的斜箭头则由将零同伦视为零正则同伦所诱导。由此得到以下引理。

Lem命题 8.11。 如果族 $\sigma\colon B \to \mathcal{E}(\emptyset)$ 存在到 Q 的提升，那么 σ 存在到 $\mathcal{E}(\emptyset)$ 的提升 .

到 Q 的提升由定义 2.8 中到 P 的提升诱导而来，如下所示。将 $\Delta^{\ell-2}$ 限制到重心上，得到限制映射

$$\prod_{1\le i\le \ell} \mathrm{Map}(\Delta^{\ell-2}, \mathcal{B}(\Omega \setminus \{i\})) \to \prod_{1\le i\le \ell} \mathcal{B}(\Omega \setminus \{i\}).$$

此映射在 $\prod_{1\le i\le \ell} \mathrm{Map}(\Delta^{\ell-2}, \mathcal{B}(\Omega \setminus \{i\}))$ 的因子上的后复合给出如下交换图：



其中，竖直映射 $\mathrm{Map}(\Delta^{\ell-1}, \mathcal{E}(\emptyset)) \to \mathcal{E}(\emptyset)^{\times \ell}$ 是对 $\Delta^{\ell-1}$ 的余维 1 面的重心的限制。因此，我们有如下结论。

引理 8.12. 如果一个族 $\sigma\colon B \to \mathcal{E}(\emptyset)$ 可提升到 P，那么 σ 也可提升到 Q。

引理 *8.10* 的证明。 对于 $\ell = 3$，我们取 $\omega_{T_3} \in \mathrm{Emb}_{\partial}((I^{2n-1})^{\cup 3},\ I^{3n})$ 到 $\mathrm{holim}_{\emptyset \neq S \subset \Omega} \mathcal{B}(S)$ 的提升，如引理 4.5 的证明所示。接着，悬挂和去环化自然地诱导出相应的零正则同伦

如 §5.5 所示。因此，我们得到一个提升 $S^{\boldsymbol{a}} \to P$，它是 $\omega_{T_3(p,\ q)}\colon\ S^{\boldsymbol{a}} \to \mathcal{E}(\emptyset) := \mathrm{Emb}_{\partial}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q},\ I^{2k})$ 的提升。由引理 8.12 和引理 8.11，我们得到一个提升 $S^{\boldsymbol{a}} \to \mathcal{E}(\emptyset)$。此外，延拓 extension $\widehat{\omega}_{T_3(p,\ q)}\colon\ S^{\boldsymbol{a}} \cup CR^{\boldsymbol{a}} \to \mathcal{E}(\emptyset)$ 根据引理 8.8 自然地诱导出一个提升 $S^{\boldsymbol{a}} \cup CR^{\boldsymbol{a}} \to P$。接着，再次由引理 8.12 和引理 8.11，我们得到 $\widehat{\omega}_{T_3(p,\ q)}$ 的一个提升 $S^{\boldsymbol{a}} \cup CR^{\boldsymbol{a}} \to \mathcal{E}(\emptyset)$。

在证明的其余部分，我们假设 $\ell \geq 4$。首先注意到 $\omega_{T_\ell}\colon\ I \to \Omega^{\ell-4}\mathrm{Emb}_{\partial}^{\mathrm{fr}}((I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup \ell}, I^{\ell n-\ell+3})_\iota$ 可提升到 $\Omega^{\ell-4}\mathrm{Emb}_{\partial}((I^{(\ell-1)n-(\ell-2)})^{\cup \ell}, \overline{I^{\ell n-\ell+3}})_\iota$。为简便起见，记 $a = (\ell-1)n-(\ell-2)$ 和 $N = \ell n-\ell+3$。我们重新定义 $\mathcal{E}(\emptyset) := \mathrm{Emb}_{\partial}((I^a)^{\cup \ell}, I^N)_\iota$ 以及 $\mathcal{E}(\emptyset) := \mathrm{Emb}_{\partial}((I^a)^{\cup \ell}, I^N)_\iota$。要给出 $\omega_{T_\ell}\colon\ I \to \Omega^{\ell-4}\overline{\mathcal{E}(\emptyset)}$ 到 $\Omega^{\ell-4}\overline{Q}$ 的一个提升，只需找到一条路径

$$I \to \prod_{1 \leq i \leq \ell} \Omega^{\ell-4}\mathcal{B}(\Omega \setminus \{i\})$$

到由 $(\omega_{T_\ell})^{\times \ell}$ 给出的点，该点被视为 $\prod_{i=1}^{\ell} \Omega^{\ell-4}\mathcal{B}(\Omega \setminus \{i\})$ 中的一个元素，并提升 $(\omega_{T_\ell})^{\times \ell}\colon\ I \to (\Omega^{\ell-4}\mathcal{E}(\emptyset))^{\times \ell} = \Omega^{\ell-4}(\mathcal{E}(\emptyset))^{\times \ell}$。注意，$\omega_{T_\ell}$ 既可以视为 $\Omega^{\ell-4}\mathcal{E}(\emptyset)$ 中的一条路径，也可以视为 $\Omega^{\ell-4}\mathcal{B}(\Omega \setminus \{i\})$ 中的一个元素。此外，我们要求它与为 T_ℓ 的面树所作的选择相容。$\Omega^{\ell-4}Q$ 中的这条路径由 ω_{T_ℓ} 的布伦尼安性质（定义 2.8 和引理 8.12）给出的 $\omega_{T_\ell}\colon\ I \to \Omega^{\ell-4}\mathcal{E}(\emptyset)$ 的提升 $I \to \Omega^{\ell-4}P$ 诱导；接着，引理 8.11 表明它会诱导一个提升 $I \to \Omega^{\ell-4}\mathcal{E}(\emptyset)$。

最后，我们注意到，为了从 ω_{T_ℓ} 得到 $\omega_{T_\ell(p,q)}$ 而进行的悬挂和去环化，自然会导出如上构造的零正则同伦路径所对应的悬挂和去环化。此外，由于从 $\omega_{T_\ell(p,q)}$ 到 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 的延拓是由布伦尼安零同伦系统定义的，根据引理 8.8，我们得到从零正则同伦族到 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 所对应族的自然延拓。到 $\omega_{T_\ell(p,q)}$ 所对应族的延拓也类似。□

9. 变形到有理同伦群

在本节中，我们证明定理 E。$\overrightarrow{\mathcal{GC}}$ 中的组合循环 $5\vec{\gamma}$ 是有向图 (X, α_X) 和 (Y, α_Y) 的 $\mathbb{Z}$-线性组合。为了证明 $[\phi_\gamma]$ 属于有理 Hurewicz 映射的像，我们将说明 $\phi_{5\vec{\gamma}}$ 可以表示为一个映射

$$\kappa_{5\vec{\gamma}}\colon K_{5\vec{\gamma}} \to B\mathrm{Diff}_{\partial}(D^{2k})$$

来自某个有限的 $8k-10$ 维复形 $K_{5\vec{\gamma}}$，它是通过沿边界粘合有限个紧致定向流形片而得到的（引理 9.3）。随后我们将进一步证明，循环 $\kappa_{5\vec{\gamma}}$ 与某个球形循环有理地同调等价。

9.1. 复形 $K_{5\vec{\gamma}}$。

我们定义偏序集 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$，它由以下超额至多为 2 的有向图组成。

- $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 中超额为 2 的有向图，对应于 $\mathbb{Z}$-线性组合 $5\vec{\gamma}$ 中的各项。若有向图 (Γ, α) 在 $5\vec{\gamma}$ 中的系数为整数 λ，则我们在 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 中取 (Γ, α) 的 $|\lambda|$ 个副本。例如，若 $5\vec{\gamma}$ 中有一项 $2(X, \alpha_X)$，那么 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 中 (X, α_X) 的副本数为 2，并且我们将这两个副本视为不同的元素。
- $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 中的超额 1 有向图，是通过展开 (X, α_X) 或 (Y, α_Y) 中的一个价为 ≥ 4 的顶点得到的。这种情形下不取副本。
- $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 中的超额 0 有向图，是由前一项中的图得到的。这种情形下同样不取副本。

若 $(\Gamma, \alpha) \to (\Gamma', \alpha')$ 是由 (Γ, α) 收缩若干条边得到的，则称其为态射；若 $(\Gamma, \alpha) \leq (\Gamma', \alpha')$ 是由 (Γ, α) 收缩若干条边得到的，则称其为序。

9.1.1. 拼接各个部分 $B_{(\Gamma,\alpha)}$ 。复形 $K_{5\vec{\gamma}}$ 将在引理 9.3 中定义为某个图表 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}} \to \mathsf{Top}$ 的同伦余极限。对于有向图 (Γ,α)，我们定义

$$\widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} := \prod_{v\in V(\Gamma)} \widehat{B}_{T(v)},$$

其中，对于 ℓ，p，q，由 α确定的 $T(v) = T_\ell(p,\ q)$，以及 $B_{T(v)}$已在 §8.3 中定义。这个空间 $B_{(\Gamma,\alpha)}$具有球面的乘积的同伦类型。我们定义

$$\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)} = \mathrm{ext}\circ c\circ \prod_{v\in V(\Gamma)} \widehat{\omega}_{T(v)} \colon \widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k}),$$

其中 $c\colon \prod_v \mathsf{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p_v}\cup (I^{k-1})^{\cup q_v},\ I^{2k}) \to \prod_v B\mathrm{Diff}_\partial(V_v)$ 是 §2.3 中定义的映射，而 ext: $\prod_v B\mathrm{Diff}_\partial(V_v) \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 是在 $D^{2k} - \mathsf{Int}(V_1\cup\cdots\cup V_{|V(\Gamma)|})$ 上按恒等映射延拓。我们将 Γ 的重数 m_Γ 定义为

$$m_\Gamma = \prod_{v\in V(\Gamma)} m_{\ell_v},$$

其中 ℓ_v是 v的价。这是 $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$中超额 0（3 价）图的重数。令

$$\mu_{5\vec{\gamma}} = \mathrm{lcm}(\{m_\Gamma \mid (\Gamma,\alpha)\in \mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}\}).$$

那么，循环 $\phi_{5\vec{\gamma}}$可以表示为映射 $\frac{1}{\mu_{5\vec{\gamma}}}$的倍数—

$$\overline{\omega}_{5\vec{\gamma}} := \operatorname*{hocolim}_{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}} \frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)} \colon \operatorname*{hocolim}_{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}} \frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} = \operatorname*{colim}_{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}} \frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} \overline{B}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k}),$$

其中 $n_\Gamma = 2^{\mathrm{excess}(\Gamma)}$，而 $\operatorname*{colim}_{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}} \frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} B_{(\Gamma,\alpha)}$ 对 $(\Gamma,\ \alpha)$ 在 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$中的多个副本各包含一个 $\frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} B_{(\Gamma,\alpha)}$。也就是说，类 $[\omega_{5\vec{\gamma}}] \in H_{8k-10}(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k});\mathbb{Q})$ 由 $(8k-10)$-链表示，该链是对各片段 $\frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma}\omega_{(\Gamma,\alpha)}$的（定向）顶胞腔取限制后求和所得：$B_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$。将链的集合 $\frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$扩展到同伦余极限 $\frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$的可能性，可由第 8 节的结果推出。

9.1.2. 拼接各个部分 $M_{(\Gamma,\alpha)}$ 。我们修改这个循环，以简化各个域的同调。回忆§8.3，对于某个 $\ell(v)$ 和 $\boldsymbol{a}(v)$，每个 $\widehat{B}_{T(v)}$ 都与 $I^{\ell(v)-3}\times S^{|\boldsymbol{a}(v)|}$ 同伦等价；并且 $\widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)}$ 与 $I^e\times\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}$ 同伦等价，其中 e 是 Γ 的超额。我们可以将每个 $\widehat{B}_{T(v)}$ 替换为 $I^{\ell(v)-3}\times S^{|\boldsymbol{a}(v)|}$，而不改变循环 $\omega_{5\vec{\gamma}}$ 所得到的同调类。因此我们令 anew

$$\widehat{B}_{T(v)} = I^{\ell(v)-3}\times S^{|\boldsymbol{a}(v)|},$$

以及 $\widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} = I^e\times\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}$。

引理 9.1。令 $R_{(\Gamma,\alpha)}$ 为乘积 $\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}\subset \widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)}$ 中的胖楔（见*§8.2*），并令$\partial_\sqcup I^e = (I\times\partial I^{e-1})\cup(\{0\}\times I^{e-1})$。我们通过以下图表的同伦推出定义空间 $M_{(\Gamma,\alpha)}$。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)}\cup(I^e\times\widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) & \longleftarrow & \partial_\sqcup I^e\times(\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}\cup\widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) \longrightarrow C(\partial_\sqcup I^e\times\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}). \\ \downarrow & & \\ M_{(\Gamma,\alpha)} & & \end{array} \tag{9.1}$$

(1) 我们有 $M_{(\Gamma,\alpha)} \simeq \begin{cases} S^{8k-12} & (e=0) \\ D^{8k-12+e} & e\geq 1 \end{cases}$. ()(2) 存在从 $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}\colon \widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 到映射 $^{\varepsilon_{(\Gamma,\alpha)}}\colon M_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$的延拓。

空间 $M_{(\Gamma,\alpha)}$ 是通过将自然映射 $\partial_\sqcup I^e\times(\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}\cup\widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) \to C(\partial_\sqcup I^e\times\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|})$ 的映射柱附加到 $\widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)}\cup(I^e\times\widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)})$ 上得到的。定义 $M_{(\Gamma,\alpha)}$ 的动机将由断言 (1) 清楚地体现出来。断言 (2) 等价于

- 存在一个延拓 $\widehat{B}_{(\Gamma,\ \alpha)} \cup (I^e \times \widehat{C}R_{(\Gamma,\ \alpha)}) \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ of $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\ \alpha)}$，
- 其在子空间 $\partial_\sqcup I^e \times (\prod_v S^{|\boldsymbol{a}_{(v)}|} \cup \widehat{C}R_{(\Gamma,\ \alpha)})$ 上的限制，同伦于 $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\ \alpha)}|_{\partial_\sqcup I^e \times \prod_v S^{|\boldsymbol{a}_{(v)}|}}$ 的某个零伦的限制。

证明。(1) 由于当 $e = 0$ 时，(9.1) 中右边的两项为空，因此只需考虑 $e \geq 1$ 这一情形。由于 $(\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}) \cup \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)} \simeq S^{8k-12}$，我们得到以下同伦等价

$$\widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} \cup (I^e \times \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) = (I^e \times \prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}) \cup (I^e \times \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) \simeq I^e \times S^{8k-12},$$
$$\partial_\sqcup I^e \times (\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|} \cup \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) \simeq \partial_\sqcup I^e \times S^{8k-12}, \qquad C(\partial_\sqcup I^e \times \prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}) \simeq *,$$

并且我们有以下同伦交换图。

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} \cup (I^e \times \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) & \longleftarrow & \partial_\sqcup I^e \times (\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|} \cup \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) & \longrightarrow & C(\partial_\sqcup I^e \times \prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}) \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\
I^e \times S^{8k-12} & \longleftarrow & \partial_\sqcup I^e \times S^{8k-12} & \longrightarrow & *
\end{array}$$

T对两行取同伦推出，我们得到同伦等价 ce

$$M_{(\Gamma,\alpha)} \simeq C_*\Sigma^{e-1}S^{8k-12} \simeq D^{8k-12+e},$$

其中 C_* 是约化锥。

(2) 我们分两步证明这一点。第一步是证明 $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$ 可延拓到 $I^e \times CR_{(\Gamma,\alpha)}$ 上。我们选择 Γ 的一棵生成树 Γ_0。存在一个递增序列 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_r = \Gamma_0, r = |V(\Gamma)|$，由 Γ_0 的连通子树组成，使得

- I_1 由一个顶点构成。
- 对每个 $i \leq r-1$，I_{i+1} 都是通过在 I_i 上添加一条边得到的连通树。

令 $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ 为 D^{2k} 中用于定义 $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$（见 §9.1.1）的互不相交把手体集合。令 J_i 为 $\mathcal{V}$ 中与 I_i 的顶点集合相对应的子集。于是，对 J_i 中把手体进行手术，可得到 I^{2k} 中由若干立方体构成的弦链环族。具体而言，J_i 的迭代手术可以合并为对单个把手体进行的手术，其某些叶可能彼此相链。对较大把手体进行的手术对应一个弦链环族。对于 J_r 的弦链环族，我们有一个布伦尼安零同伦系统，它是通过对延拓 $J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_r$ 迭代引理 5.14 而归纳构造的。对于 J_r 的弦链环族，若其在 $B_{(\Gamma,\alpha)}$ 上存在一个系统布伦尼安零同伦，则该族可按引理 8.3 延拓到 $I^e \times \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}$ 上。因此，我们有 $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$ 的延拓 $\widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} \cup (I^e \times \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$。

下一步是将上一段得到的映射延拓到 $M_{(\Gamma,\alpha)}$ 的其余部分，也就是延拓到 $\partial_\sqcup I^e \times (\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|} \cup \widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) \to C(\partial_\sqcup I^e \times \prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|})$ 的映射柱上。之所以能够延拓，是因为我们可以假设，对于价为 ≥ 4 的顶点 v in Γ，映射 $\widehat{\omega}_{T(v)}: B_{T(v)} \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p_v} \cup (I^{k-1})^{\cup q_v}, I^{2k})$ 的限制 $\partial_\sqcup I^{\ell(v)-3} \times S^{|\boldsymbol{a}|}$ 是常值映射。于是，根据 $T(v)$ 中括号的布鲁尼安性质，映射 $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$ 可以通过同伦变形为这样的映射：$\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$ 在 $\partial_\sqcup I^e \times \prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}$ 上的限制是常值映射。□

我们希望将映射 $\varepsilon_{(\Gamma,\alpha)}$：$M_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 拼接在一起，而不是将映射 $\widehat{\omega}_{(\Gamma,\alpha)}$：$\widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 拼接在一起，从而在 $B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 中得到一个与 $\omega_{5\vec{\gamma}}$ 同调等价的循环。为了将所得映射 $K_{5\vec{\gamma}} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 视为一个循环，我们需要在 $K_{5\vec{\gamma}}$ 上取一个基本类，该基本类由 $K_{5\vec{\gamma}}$ 中所有按 §10.1 规则定向的（有向）$(8k-10)$-胞腔之和定义。为了使这些 $(8k-10)$-胞腔之和在 $K_{5\vec{\gamma}}$ 上给出一个循环，我们还需要进一步修改 $M_{(\Gamma,\alpha)}$，因为每个 $(8k-10)$ 维片段 $M_{(\Gamma,\alpha)}$ 的边界中可能存在一些未被其他

来自不同图的片段抵消的子集。为方便起见，我们通过以下图表的同伦推出定义 $\partial M_{(\Gamma,\alpha)}$ 。

$$\begin{array}{ccc} (\{1\}\times\partial I^{e-1})\times(\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}\cup\widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) & \longrightarrow & C((\{1\}\times\partial I^{e-1})\times\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}) \\ \downarrow & & \\ (\{1\}\times I^{e-1})\times(\prod_v S^{|\boldsymbol{a}(v)|}\cup\widehat{C}R_{(\Gamma,\alpha)}) & & \end{array}$$

$\mathrm{T}^{\varepsilon(\Gamma,\alpha)}$ 到 $\partial M_{(\Gamma,\alpha)}$ 的限制表示了$^{\varepsilon(\Gamma,\alpha)}$ 的边界，作为一条链 .

对于一个超额为 2 的图（ $M_{(\Gamma,\alpha)}$ ，Γ），其边界的裸子集是以下子集的正则邻域的补集。

- 对于超额为 2 的图（X， α_X），较低超额图的各部分被粘合到嵌入于 ∂M（X，α_X）中的 Lie-hedron L_4 的正则邻域内的圆盘上。
- 对于超额为 2 的图（Y， α_Y），较低超额图的各部分被粘合到嵌入于 ∂M（Y，α_Y）中的完全二分图 K_3，3 的正则邻域内的圆盘上（如图 31 所示。）

无论在哪种情形下，都存在一个嵌入于 $\partial M_{(\Gamma,\alpha)}$ 中的图 G ，使得$^{\varepsilon(\Gamma,\alpha)}$ 在 $\partial M_{(\Gamma,\alpha)}$ 中去掉 G 的开正则邻域 N_G 后所得补集 $\partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G$ 上的限制是零伦。因此，我们得到如下结果。

引理 9.2. 设 $(\Gamma,\alpha) = (X,\alpha_X)$ 或 (Y,α_Y)。设 G 是如上所述的 $\partial M_{(\Gamma,\alpha)}$ 中的嵌入图。映射 $^{\varepsilon(\Gamma,\alpha)}$: $M_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 有一个延拓 $\widehat{\varepsilon}_{(\Gamma,\alpha)}$: $\widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$，其中

$$\widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)} = M_{(\Gamma,\alpha)} \cup C(\partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G) \simeq M_{(\Gamma,\alpha)}/(\partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G).$$

对于 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 中对应于将 $\frown$ $\frown\Gamma$ 的一条边 (v_1,v_2) 收缩为 Γ' 的一个顶点 v 的态射 $(\Gamma,\alpha) \to (\Gamma',\alpha')$，自然映射 $M_{(\Gamma,\alpha)} \to M_{(\Gamma',\alpha')}$ 由塌缩映射$\frown$ $\frown$ $\frown B_{T(v_1)} \times B_{T(v_2)} \to B_{T(v)}$及其诱导映射 $R_{(\Gamma,\alpha)} \to R_{(\Gamma',\alpha')}$诱导得到。注意，延拓 $\widehat{\varepsilon}_{(\Gamma,\alpha)}$ 取决于引理 9.1(2) 的证明中 Γ_0 的选择以及序列 $\{I_i\}$ 。我们看到，不同的选择会给出同伦相容的延拓。

引理 9.3。图表 $\widehat{\varepsilon}_\bullet$: $\widehat{M}_\bullet \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 由 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 参数化，具有同伦相干性。因此我们有一个自然延拓

$$\operatorname*{hocolim}_{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}} \frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{\varepsilon}_{(\Gamma,\alpha)} \colon \operatorname*{hocolim}_{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}} \frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k}),$$

其中 $n_\Gamma = 2^{excess(\Gamma)}$。我们定义 $K_{5\vec{\gamma}}$：=同伦余极限$_{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}} \frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)}$ 以及 $\kappa_{5\vec{\gamma}}$：=同伦余极限$_{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}} \frac{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{\varepsilon}_{(\Gamma,\alpha)}$。

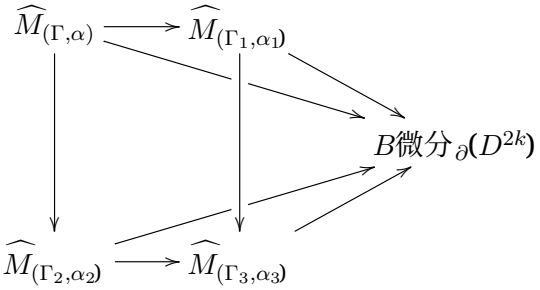
证明。首先，对于 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 中的态射 $(\Gamma,\ \alpha) \to (\Gamma',\ \alpha')$，我们考虑以下图表的同伦交换性。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)} & & \\ \downarrow & \searrow^{\widehat{\varepsilon}_{(\Gamma,\alpha)}} & \\ \widehat{M}_{(\Gamma',\alpha')} & \xrightarrow[\widehat{\varepsilon}_{(\Gamma',\alpha')}]{} & B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k}) \end{array} \tag{9.2}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由引理 8.5，我们知道链在 $B_{(\Gamma,\alpha)}$ 和 $B_{(\Gamma',\alpha')}$ 上的限制之间存在同伦。我们还知道，对于 Γ 的生成树 Γ_0 以及在加厚锥 $CR_{(\Gamma,\alpha)}$上延拓$\widehat{\varepsilon}_{(\Gamma,\alpha)}$ 的选取，图表 (9.2) 是同伦交换的。也就是说，若分别选取 Γ 和 Γ'的生成树 Γ_0 和 Γ'_0 ，使它们与 $\Gamma \to \Gamma'$中一条边的收缩相容，并相容地选取 $\Gamma_0\widehat{\ }$和 Γ'_0 的布伦尼亚零同伦系统，那么加厚锥 $CR_{(\Gamma,\alpha)}$ 和

$\widehat{CR}_{(\Gamma',\alpha')}$ 上的延拓在同伦意义下相容。对于一般选取的 Γ 和 Γ'的生成树 Γ_0 和 Γ'_0（它们可能与边收缩不相容），我们回顾以下一般事实：若 P是维数为 ≥ 1的球面的乘积，且 $Q \subset P$是这些球面的胖楔，则由包含映射诱导的映射 $\Sigma Q \to \Sigma P$ 分裂，其余纤维为 $\Sigma(P/Q)$（[BBCG，第1662]页）。由此可知，正合序列 $[\Sigma Q, Z] \to [P/Q, Z] \to [P, Z]$ 中的第一个映射是平凡的。因此，将映射 $P \to Z$ 延拓至 $P \cup CQ \to Z$ 的延拓在同伦意义下唯一[7]。我们将这一$\widehat{\ }$事实应用于 $P = B_{(\Gamma,\alpha)}$ 和 $Q = R_{(\Gamma,\alpha)}$，从而得到图表 (9.2) 的同伦交换性。

接下来我们考察下列图表的同伦相干性。



我们知道，在这个方形中的每条箭头处，(9.2) 都满足同伦交换性。我们考虑上述方形$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$中从 $M_{(\Gamma,\alpha)}$ 到 $M_{(\Gamma_3,\alpha_3)}$的两条路径上，这两种相干性之间是否存在同伦。在这种情形下，我们考虑纤维化序列

$$\mathrm{Map}_*(\Sigma P, Z) \to \mathrm{Map}_*(\Sigma Q, Z) \to \mathrm{Map}_*(P/Q, Z) \to \mathrm{Map}_*(P, Z)$$

上一段中空间 P, Q 的带基点映射空间。由于同态$\pi_1(\mathrm{Map}_*(P/Q, Z)) \to \pi_1(\mathrm{Map}_*(P, Z))$是单射，因此，单个映射 $P \to Z$的延拓单参数族 $P/Q \simeq P \cup CQ \to Z$ 在空间 $\mathrm{Map}_*(P/Q, Z)$中是零伦的。我们将这一$\widehat{\ }$事实应用于 $P = B_{(\Gamma,\alpha)}$ 和 $Q = R_{(\Gamma,\alpha)}$，从而得到所需的同伦相干性。□

$\widehat{\ }$9.2. $M_{(\Gamma,\alpha)}$**的同调。**

引理 9. **4.** 设$(\Gamma, \alpha) = (X, \alpha_X)$ 或(Y, α_Y)。令 G 如引理 *9.2* 中所述。则有

$$H_*(m\widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)}; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{m-1} & (* = 8k-10), \\ \mathbb{Q}^{b_1(G)} & (* = 8k-12), \\ 0 & (1 \leq * \leq 8k-13, * = 8k-11), \\ \mathbb{Q} & (* = 0). \end{cases}$$

$\widehat{\ }$证明。 为计算 $mM_{(\Gamma,\alpha)} \simeq mM_{(\Gamma,\alpha)}/(\partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G)$的同调，我们考虑三元组 $(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G)$的同调正合列：

$$\to H_*(\partial M_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q}) \to H_*(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q}) \to H_*(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)}; \mathbb{Q}) \to \tag{9.3}$$

根据引理 9.1(1)，我们有 $H_*(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)}; \mathbb{Q}) \cong H_*(D^{8k-10}, \partial D^{8k-10}; \mathbb{Q})^{\oplus m}$。此外，由同伦等价 $\partial M_{(\Gamma,\alpha)} \simeq S^{8k-11}$ 以及亚历山大对偶，我们有

$$\widetilde{H}_*(\partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q}) \cong \widetilde{H}^{8k-12-*}(N_G; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{b_1(G)} & (* = 8k-13), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

[7]两种延拓选择之间的同伦可以利用布鲁尼安性质构造。具体而言，沿生成树 Γ_0 在 Q 上的零伦，是通过加厚锥构造的；该加厚锥由中间 Ψ-图的布伦尼安零同伦系统复合而成。两个生成树可以通过图 Γ 中一系列局部修改相互关联，其中每次修改都会产生一个由布伦尼安零同伦系统诱导的加厚锥之间的同伦。

于是可得　　由对 $(\partial M_{(\Gamma,\alpha)},\ \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G)$ 的同调正合列可得

$$H_*(\partial M_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (* = 8k-11), \\ \mathbb{Q}^{b_1(G)} & (* = 8k-12), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

那么，长正合列 (9.3) 如下：

$$\begin{array}{rccccc} H_{8k-10}: & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & \mathbb{Q}^m \\ H_{8k-11}: & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & 0 \\ H_{8k-12}: & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{b_1(G)} & \xrightarrow{\cong} & ? & \longrightarrow & 0 \\ H_{8k-13}: & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\cong} & ? & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_0: & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\cong} & ? & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由于连接同态

$$H_{8k-10}(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)}; \mathbb{Q}) \to H_{8k-11}(\partial M_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q})$$

是满射，我们有

$$H_*(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{m-1} & (* = 8k-10), \\ \mathbb{Q}^{b_1(G)} & (* = 8k-12), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

□

引理 9.5. 设(Γ, α)是由(X, α_X)或(Y, α_Y)经过一次扩张得到的超额 *1* 图。设 G 是 $\partial M_{(\Gamma,\alpha)}$中的三个互不相同的点。那么我们有

$$H_*(m\widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)}; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{m-1} & (* = 8k-11), \\ \mathbb{Q}^2 & (* = 8k-12), \\ 0 & (1 \leq * \leq 8k-13, * = 8k-10), \\ \mathbb{Q} & (* = 0). \end{cases}$$

证明。 证明过程与引理 9.4 类似。也就是说，N_G 同伦等价于一个由三个点组成的集合，并且我们有 $H_*(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)};\ \mathbb{Q}) \cong H_*(D^{8k-11}, \partial D^{8k-11};\ \mathbb{Q})^{\oplus m}$，以及

$$\widetilde{H}_*(\partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q}) \cong \widetilde{H}^{8k-13-*}(N_G; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{b_0(G)-1} & (* = 8k-13), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$H_*(\partial M_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{b_0(G)} & (* = 8k-12), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

于是，在此情形下，三元组 $(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G)$ 对应的长正合列 (9.3) 如下：

$$\begin{array}{rccccc} H_{8k-11}: & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & \mathbb{Q}^m \\ H_{8k-12}: & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{b_0(G)} & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & 0 \\ H_{8k-13}: & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\cong} & ? & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_0: & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\cong} & ? & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由于连接同态 $H_{8k-11}(mM_{(\Gamma,\alpha)},\ \partial M_{(\Gamma,\alpha)}; \mathbb{Q}) \to H_{8k-12}(\partial M_{(\Gamma,\alpha)},\ \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G;\ \mathbb{Q})$ 将 $\mathbb{Q}^m$ 映到 $\mathbb{Q}^{b_0(G)}$的一个一维子空间上，因此我们有

$$H_*(mM_{(\Gamma,\alpha)}, \partial M_{(\Gamma,\alpha)} - N_G; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{m-1} & (* = 8k-11), \\ \mathbb{Q}^{b_0(G)-1} & (* = 8k-12), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

□

9.3. **同伦余极限的同调**。我们利用同伦余极限同调的谱序列研究 $K_{5\vec{\gamma}}$ 的有理同调（参见例如 [Du，命题 18.17]）。

定理 9.6 (例如 [Du，定理 18.3(a)])。设 $D\colon \mathcal{I} \to$ 拓扑空间范畴 是一个空间图表。存在一个谱序列

$$E^2_{p,q} = H_p(\mathcal{I}; H_q(D;\mathbb{Q})) \Rightarrow H_{p+q}(\operatorname{hocolim} D;\mathbb{Q}).$$

微分具有如下形式 $d^r : E^r_{p,\ q} \to E^r_{p-r,\ q+r-1}$。

我们将其应用于引理 9.3 中的 $K_{5\vec{\gamma}}$——同伦余极限 $\underset{(\Gamma,\alpha)\in\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}}{}{}^{\mu_{5\vec{\gamma}}}_{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)}$。由于根据引理 9.4 和 9.5，$H_*(\overset{\mu_{5\vec{\gamma}}}{m_\Gamma} n_\Gamma \widehat{M}_{(\Gamma,\alpha)};\ \mathbb{Q}) = 0$ 对于 $1 \le * \le 8k-13$ 成立，且 $\mathcal{I}_{5\vec{\gamma}}$ 的几何实现是二维的，因此我们有 $E^2_{p,\ q} = 0$ 对于 $3 \le p+q \le 8k-13$ 成立。于是得到如下结论。

引理 9.7. (1) $H_i(K_{5\vec{\gamma}};\ \mathbb{Q}) = 0$ 对 $3 \le i \le 8k-13$ 成立。

(2) $H_{8k-10}(K_{5\vec{\gamma}};\ \mathbb{Q})$ 有一个非平凡的基本类。

我们还将用到以下结果（另见定理 1.1）。

定理 9.8 (Kontsevich–Soibelman–Randal-Williams ([KRW]))。$B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 有理地是 $(2k-2)$-连通的。

定理 9.9. 映射 $\kappa_{5\vec{\gamma}*}\colon\ H_{8k-10}(K_{5\vec{\gamma}};\ \mathbb{Q}) \to H_{8k-10}(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k});\ \mathbb{Q})$ 的像由 $\kappa_{5\vec{\gamma}}\colon\ K_{5\vec{\gamma}} \to B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 诱导，且包含在有理 *Hurewicz* 映射的像中

$$\pi_{8k-10}(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})) \otimes \mathbb{Q} \to H_{8k-10}(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k});\mathbb{Q}).$$

证明。由于容易看出，$B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k})$ 是一个道路连通、同伦交换的 H-空间，且其怀特海德积平凡 $[\alpha,\beta] = [\alpha,0] + [0,\beta] = 0$，因此 $H_*(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k});\mathbb{Q})$ 是由其有理同伦群生成的分次多项式代数（[MM，附录]）。由定理 9.8 可知，$H^{8k-10}(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k});\mathbb{Q})$ 由不可分解类以及形如 $p \cup q$ 的类生成，其中 $p \in H^i$、$q \in H^j$、$i+j = 8k-10$ 和 $2k-1 \le i,\ j \le 6k-9$。由引理 9.7 以及 $3 \le 2k-1$、$6k-9 \le 8k-13$ 可得 $\kappa^*_{5\vec{\gamma}}(p \cup q) = \kappa^*_{5\vec{\gamma}} p \cup \kappa^*_{5\vec{\gamma}} q = 0$。因此，$\kappa_{5\vec{\gamma}*}$ 在 $H_{8k-10}(B\mathrm{Diff}_\partial(D^{2k});\mathbb{Q})$ 中的像只能由不可分解类检测到。这意味着 $\kappa_{5\vec{\gamma}*}$ 的像包含在有理 Hurewicz 映射的像中。□

10. Leaf forms and orientations

我们将在一次顶点手术中引入叶形式，以证明该手术的非退化性，并确定其定向约定。这揭示了顶点手术中的一种隐藏结构，而该结构与图复形相契合。

10.1. **链的半边定向**。我们将有向图的每条边 e 分裂为一对半边 $e_\pm$，排列方式使得 e 从 e_- 指向 e_+。我们认为 $\deg e_+ = k-1$ 和 $\deg e_- = k$。于是，一个标号 $E(\Gamma) \to \{1,2,\dots,|E(\Gamma)|\}$ 确定了

$$\bigwedge_{e\in E(\Gamma)} (e_+ \wedge e_-) = \bigwedge_{v\in V(\Gamma)} o(v) \tag{10.1}$$

$\mathbb{R}$-向量空间的定向，该空间由半边集合张成，其中 $o(v)$ 是与顶点 v 相 incident 的半边的楔积，可能还乘以一个符号 -1。我们称 $o(v)$ 为 v 的顶点定向。这为顶点手术的定向提供了一种选择。

例 10.1。假设 $d = 2k \ge 6$ 为奇数。那么 $k-1$ 和 k 分别为偶数和奇数。对于(3.5)中的有向图 $(X,\ \alpha_X)$，我们按照图 35 将边分解为半边。

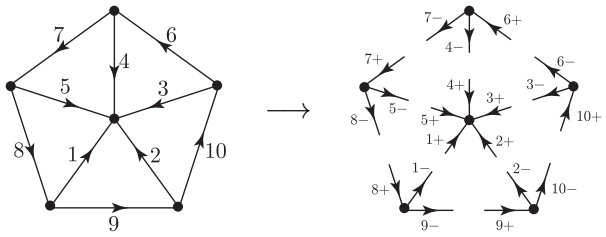


FIGURE 35. (X, α_X)的半边分解。

从 1 到 10 的边标记给出了定向

$$\bigwedge_{i=1}^{10}(e_{i+}\wedge e_{i-}) = (e_{1+}e_{2+}e_{3+}e_{4+}e_{5+})\wedge(e_{6+}e_{4-}e_{7-})\wedge(-e_{7+}e_{5-}e_{8-}) \\ \wedge(-e_{8+}e_{1-}e_{9-})\wedge(-e_{9+}e_{2-}e_{10-})\wedge(-e_{10+}e_{3-}e_{6-}),$$

其中 $\deg\ e_{i+} = k-1$（偶数），$\deg\ e_{i-} = k$（奇数），并省略了一些 $\wedge$。我们将每个顶点对应的因子排列成：$+$（入射）元素排在 $-$（出射）元素之前。

10.1.1. 法向 ***Thom*** 类（η-形式）。对于定向流形 N中的拓扑闭定向光滑子流形 A，我们用 η_A 表示 A的法丛 ν_A 的 Thom 类的一个闭形式代表。我们将 ν_A 的全空间与 $A \subset N$ 的一个小管状邻域 N_A等同，并假设 η_A 的支集包含于 N_A中。它有一个有用的性质：当 N和 A 均为紧致空间时，上同调类 $[\eta_A]$ 是基本类 $[A] \in H_*(N, \partial N)$的庞加莱–勒夫谢茨对偶。对于 N 中的另一个定向子流形 B，若 $\dim\ B = \text{=codim}\ A$，则积分$\int_N \eta_A \wedge \eta_B = \int_B \eta_A$ 给出 N中的交叉配对 $A \cdot B$。

10.1.2. 定向 V_i丛。顶点定向 $o(v)$ 定义了与分类映射 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)} : \widehat{B}_{T_\ell(p,q)} \to B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(V_v)$ 相关联的 V_v-丛 $\pi_{T_\ell(p,q)}$: $\widehat{E}^{T_\ell}{}_{(p,q)} \to \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}$，具体如下。

我们通过如下定义的叶形式之积，定义 $\widehat{E}^{T_\ell}{}_{(p,q)}$ 的定向 $o(\widehat{E}^{T_\ell}{}_{(p,q)})$。

定义 10.2（叶形式）。设 $b_1, \dots, b_\ell \subset \mathrm{Int}\ V_v$，其中 ℓ 是顶点 v的价。设 Ψ_ℓ-图的定向叶所给出的球面为 $b_1, \dots, b_\ell \subset$（见定义 5.1）。设 Ψ_ℓ-图的叶的子午球面为 $a_1, \dots, a_\ell \subset \partial V_v$，其定向由条件 $\mathrm{Lk}(b_i, a_j) = \delta_{ij}$给出。设$\widetilde{a}_j = \widehat{B}_{T_\ell(p,q)} \times a_j$。设 $\lambda_j = \dim\ b_j$，并将 V_v视为 $\widehat{E}^{T_\ell}{}_{(p,q)}$ 的纤维。对于 a_j的叶形式 θ_{a_j}，它是 $\widehat{E}^{T_\ell}{}_{(p,q)}$ 上的闭 λ_j-形式，满足

(1) $\int_{b_j} \theta_{a_m} = (-1)^{\dim a_m - 1}\delta_{jm}$对于满足 $\dim\ b_j + \dim\ a_m = 2k-1$.^ 的 (j,m)。(2) 对于 $\widetilde{a}_j$的某种共定向，θ_{a_j} 在 $B_{T_\ell(p,q)} \times \partial V_v$ 上的限制是 $\pm\eta_{\widetilde{a}_j}$。

符号 $(-1)^{\dim a_m - 1}$ 的由来是我们有 $\int_{b_j} \eta_{S(a_m)} = (-1)^{\dim a_m - 1}\delta_{jm}$ ([Wa21，引理 4.1])。值得回顾的是，用于定义 Ψ_3-手术的博罗米恩弦链，其张成流形为 $S(a_1)\ S(a_2)\ S(a_3) \subset V_v$，它们以一般位置相交，且三元交于一点。因此我们有 $\int_{V_v} \eta_{S(a_1)} \wedge \eta_{S(a_2)} \wedge \eta_{S(a_3)} = \pm 1$。在这种情况下，我们将选择能够推广 η-形式的叶形式。

我们以相容的方式，为所有可能的 ℓ, p, q（其中 $p+q=\ell$）选择叶形式 $\widehat{E}^{T_\ell}{}_{(p,q)}$。

引理 10.3。存在满足以下条件的叶形式 θ_{a_j}，它们位于 $\widehat{E}^{T_\ell}{}_{(p,q)}$ 中。

(1)（相容性）系统 $\{\theta_{a_j}\}_j$ 与较低超额树的系统在以下意义下相容。设 (σ, α) 是 $T_\ell(p,q)$ 的一个余维一面树，它通过在中点切割内部边而分解为两棵树 $T' = T_{\ell_1}(p_1, q_1)$ 和 $T'' = T_{\ell_2}(p_2, q_2)$，

得到该点。令 $V_{T'} \amalg V_{T''} \subset V_v$ 为 T' 和 T''、$\widehat{}$分别对应的 Ψ-图的把手体之并集。令 $\theta'_{a_1}, \dots, \theta'_{a_{\ell_1}}$（分别地，$\theta''_{a_{\ell_1+1}}, \dots, \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）为 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) = \frown \quad \frown B_{T'} \times B_{T''}$ 上叶 T'（分别为 T''）在与 $T_\ell(p,q)$ 的外部半边相对应的外部半边处的叶形式。于是，θ'_{a_j}（分别地，θ''_{a_j}）由 θ_{a_j} 通过映射$\frown \quad \widehat{} \quad \frown B_{T_\ell(p,q)}((\sigma,\alpha) \to T_\ell(p,q)) : B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to B_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)}$ 上的自然丛映射诱导，该映射将一个纤维 $V_{T'} \amalg V_{T''}$嵌入 V_v。

(2)（非退化性）乘积 $\theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell}$ 是定义在 Int $E^{T_\ell(p,q)}$给出了 $H^{p(k-1)+qk}(\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}, \partial\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}; \mathbb{R})$ 中的非平凡上同调类，使得

$$\int_{\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}} \theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell} = \pm m_\ell.$$

$\widehat{}$注意，$p(k-1)+qk = \ell k - p = 2k +$的维数为 $B_{T_\ell(p,q)}$。

我们将引理 10.3 的证明推迟到 §10.2。该证明技术性强且篇幅较长；此处先假设该引理成立。

注 10.4. 这是 Ψ-手术的一项关键性质。事实上，在 [Wa21] 中计算积分不变量时，叶形式的非退化性是唯一用到博罗米安链环性质的地方，也正因如此，三价性才至关重要。在第一部分中，这一性质用于处理链的定向。虽然第一部分中使用它只是为了确定定向，但这是一项微妙的工作，类似于辨别左手和右手博罗米安链环。在第二部分中，这一性质用于计算相关不变量，该不变量可表示为形式积分乘积之和，如引理 10.6 所示。特别地，非退化性 (2) 类比于博罗米恩弦链的非平凡性，并且是将我们的构造延拓到更高价顶点时确保其非平凡性的关键要素。

定义 10.5（Ψ手术的定向）。我们定义 $o(\widehat{B}_{T_\ell(p,q)})$，使得定向 $o(\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}) = o(\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}) \wedge o(D^{2k})$ 与由非平凡德拉姆上同调类给出的定向一致

$$[\theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell}] \in H^{p(k-1)+qk}(\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}, \partial\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}; \mathbb{R}).$$

以下引理由上述约定显然可得。

引理 10.6。按照上文关于 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$ 的定向约定，并相对于引理 *10.3* 中的叶形式，我们有

$$\int_{\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}} \theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell} = m_\ell.$$

注记 10.7。定义 10.2 中的叶形式可以自然地推广到任意（V_v，∂）-丛。特别地，它们可以定义在（V_v，∂）-丛 $\pi^{T_\ell(p,q)}$ 上：$E^{T_\ell(p,q)} \to B_{T_\ell(p,q)}$，其中 $B_{T_\ell(p,q)} = \widehat{}$同伦余极限 $\varinjlim_{(\sigma,\alpha)\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}} B_{T_\ell(p,q)}$ (σ,α)（见定义 8.1）。

引理 10.8。存在叶形式 θ_{a_j}，定义在 $E^{T_\ell(p,q)}$ 上，并满足以下条件。

(1) 形式 θ_{a_j} 延拓了定义在 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$ 上的形式。(2) 对于 $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$ 中的较低超额树 σ，系统 $\{\theta_{a_j}\}_j$ 与定义在 E^σ 上的系统相容。(3) 乘积 $\theta_{a_1} \wedge \overline{\cdots} \wedge \theta_{a_\ell}$ 满足

$$\int_{\overline{E}^{T_\ell(p,q)} - (2^{\ell-3}\widehat{E}^{T_\ell(p,q)})} \theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell} = 0.$$

换言之，将 $2^{\ell-3}\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$ 加厚为 $E^{T_\ell(p,q)}$ 不会改变$\theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell}$ 的积分。

引理 10.8 将在 §10.2 的末尾证明。

10.1.3. $(,\partial)$ 的定向-丛。 $o(v)$ 的乘积 (10.1) 定义了 (D^{2k},∂)-丛的一个定向

$$\pi^{(\Gamma,\alpha)}\colon \widehat{E}^{(\Gamma,\alpha)} \to \widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} := \prod_v \widehat{B}_{T(v)}$$

对应于分类映射 $\omega_{(\Gamma,\alpha)} = \prod_v \widehat{\omega}_{T(v)}\colon \widehat{B}_{(\Gamma,\alpha)} \to B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k})$, 如下所示。

(i) v in $o(v)$ 处半边的乘积顺序决定了 $T(v)$ 与 $T_\ell(p,\ q)$ 的一个识别，从而决定了 V_v 与加厚弦链环 $(N_{I^k})^{\cup p}\cup(N_{I^{k-1}})^{\cup q} \to I^{2k}$ 的补集之间的一个识别。若 $o(v)$ 具有 $-$ 符号，则我们将 $o(\widehat{B}_{T(v)})$ 定义为由 $o(B_{T_\ell(p,\ q)})$ 诱导的定向的反向。

(ii) (10.1) 中因子 $o(v)$ 的顺序定义了 $B_{(\Gamma,\alpha)}$ 的一个定向 $o(B_{(\Gamma,\alpha)}) = \bigwedge_v o(B_{T(v)})$，其中我们假设乘积 $\bigwedge_v o(B_{T(v)})$ 的顺序与 (10.1) 右端的顺序一致。随后，(D^{2k},∂)-丛的全空间 $\widehat{E}^{(\Gamma,\alpha)}$ 由 $\bigwedge_v o(\widehat{B}_{T(v)})\wedge o(D^{2k})$ 定向。我们称所得的 $\widehat{E}^{(\Gamma,\alpha)}$ 定向为半边定向。

$B_{(\Gamma,\alpha)}$ 的定向诱导出 $B_{(\Gamma,\alpha)}$中各流形部分的定向。

定理 10.9. 假设 k 充分大。线性映射 $\phi\colon \mathcal{GC}^{(\le\ell)} \to S_*(B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_{\partial}(D^{2k}); \mathbb{Q})$满足以下恒等式（模去退化链）

$$\partial\overline{\phi}_{(\Gamma,\alpha)} = \overline{\phi}_{\partial(\Gamma,\alpha)}.$$

由定理 1.10 和 1.11 可知，该恒等式在$\partial(\Gamma,\ \alpha)$的各项符号范围内成立。因此，我们只需检验 $B_{(\Gamma,\alpha)}$边界上诱导的定向。

10.2. **相容叶形式：引理 10.3 的证明**。 我们对 ℓ作归纳，证明引理 10.3。该证明类似于附录 A 中四价顶点手术里张成子流形之间交的证明，也类似于 Hain 在 S^3 ([Hai, 例 3], 中构造的、定义在博罗梅安环补集上的形式联络（或 Maurer–Cartan元）；另见注 A.5。下文考虑自然映射

$$F_{(\sigma,\alpha)} := \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}((\sigma,\alpha)\to T_\ell(p,q))\colon \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)}.$$

我们称光滑流形 M 中的若干光滑子流形 S_1、……、S_r 横截相交，若在每个交点 $p\in\bigcap_i S_i$ 处，正交补 $(T_pS_i)^\perp$ （作为 T_pM 的子空间）之和相对于 M 上任意黎曼度量都是直和。

对于 $\ell = 3$，以下引理已足够。

引理10.10。 对于 $\ell = 3$，在 $T_3(p,q)$ 的 Ψ_3-手术中，存在满足引理 *10.3* 的非退化条件的叶形式。

证明。 $T_3(p,q)$ 的 Ψ_3-手术由类型为 $(2n-1, 2n-1, 2n-1; 3n)$ 的博罗米恩弦链通过迭代悬挂和去环化得到，如例 5.9 所示。由引理 5.8 可知，去环化的图与悬挂同痕，因此，族 $\widehat{\omega}_{T_3(p,q)} : B_{T_3(p,q)} \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$ 的图与从 $(2n-1, 2n-1, 2n-1;\ 3n)$ 经过迭代悬挂得到的图同痕。由 [Wa21、定义 3.4 和引理 3.7]可知，$\widehat{\omega}_{T_3(p,q)}$ 的图是一个博罗米恩弦链。因此，其各分支具有带框架的张成子流形，这些子流形在一点处横截相交。张成子流形的 η 形式满足所需性质。□

引理 10.11. 假设 $b\ge 1$，并且我们在平凡的 V_v 丛 $I^b\times V_v \to I^b$ 限制到 $\partial(I^b\times V_v)$ 上的叶形式，其中 $V_v \simeq (S^{k-1})^{\vee p}\vee(S^k)^{\vee q}$。那么它们可以延拓到$I^b\times V_v$上。

证明。 我们考虑以下正合序列。

$$\begin{aligned} &H^{k-1}(I^b\times V_v;\mathbb{R})\to H^{k-1}(\partial(I^b\times V_v);\mathbb{R})\to H^k(I^b\times V_v,\partial(I^b\times V_v);\mathbb{R})\to\\ &H^k(I^b\times V_v;\mathbb{R})\to H^k(\partial(I^b\times V_v);\mathbb{R})\to H^{k+1}(I^b\times V_v,\partial(I^b\times V_v);\mathbb{R})\to \end{aligned} \tag{10.2}$$

根据 Poincar´e–Lefschetz 对偶性，我们有

$$\begin{cases} H^{k+1}(I^b\times V_v,\partial(I^b\times V_v);\mathbb{R})\cong H^{k+b}(I^b\times V_v;\mathbb{R}),\\ H^k(I^b\times V_v,\partial(I^b\times V_v);\mathbb{R})\cong H^{k+1+b}(I^b\times V_v;\mathbb{R}). \end{cases}$$

由于 $b\geq 1$，且 $I^b\times V_v\simeq (S^{k-1})^{\vee p}\vee(S^k)^{\vee q}$，右端为零。因此，(10.2) 中左侧的映射是满射的，我们得到在 I^b 上的一个延拓。□

引理 10.12 (相容性)。 对于 $\ell>3$，假设当$3\leq\ell'<\ell$且 $p'+q'=\ell'$时，*Lemma 10.3* 对 $\widehat{\omega}_{T_{\ell'}(p',q')}$ 成立。对于 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$，相应的 V_v-丛中存在满足引理 *10.3* 的相容性条件 *(1)* 的叶形式。

证明。首先，我们注意到，面树 (σ,α) 的族 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 在将 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 限制到 $\partial\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}$ 后诱导出叶形式。回忆一下，$\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}=I^{\ell-3}\times S^\lambda$ 对于某个 $\lambda>0$，并且 $\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)=\widehat{B}_{T'}\times\widehat{B}_{T''}=(I^{\ell_1-3}\times S^{\lambda_1})\times(I^{\ell_2-3}\times S^{\lambda_2})=I^{\ell-4}\times S^{\lambda_1}\times S^{\lambda_2}$对于某些 $\ell_1,\ell_2\geq 3,\lambda_1,\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=\lambda$。根据引理 8.5，我们可以变形该族

$$\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\colon \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q},I^{2k})$$

使得其在 $(I^{\ell_1-3}\times S^{\lambda_1})\vee(I^{\ell_2-3}\times S^{\lambda_2})$ 的一个小邻域上的限制为常值。此外，$\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 上的叶形式可在 $(I^{\ell_1-3}\times S^{\lambda_1})\vee(I^{\ell_2-3}\times S^{\lambda_2})$ 附近变形为标准张成圆盘的 η-形式。由引理 10.11，变形后，我们在 $F_{(\sigma,\alpha)}$ 的像上相应的 V_v-丛中得到叶形式。对 $T_\ell(p,q)$ 的所有余维一面图 (σ,α) 执行此操作后，我们在由族 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 中的叶形式诱导、位于 $\partial\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}=\partial I^{\ell-3}\times S^\lambda$ 上的族 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}|_{\partial\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}}$ 中得到叶形式。注意，通过如引理 8.6 中那样用同伦族将同伦延拓到余维一面上，$\partial B_{T_\ell(p,q)}$ 的余维一面上的诱导叶形式沿高余维的面彼此相容。

接下来，我们证明，在 $\partial B_{T_\ell(p,q)}$ 上得到的叶形式可以延拓到 $B_{T_\ell(p,q)}$ 上。为简单起见，我们考虑 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 在 $I^k\mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_\partial((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q},I^{2k})$ 上的拉回 $\widehat{\omega}^{\square}_{T_\ell(p,q)}\colon I^{\ell-3}\times I^\lambda\to$。假设我们在 $\widehat{\omega}^{\square}_{T_\ell(p,q)}$ 对 $\partial(I^{\ell-3}\times I^\lambda)=\partial I^{\ell-3+\lambda}$ 的限制上有叶形式。那么由引理 10.11，我们得到一个延拓到 $I^{\ell-3+\lambda}\times V_v$ 上。□

引理 10.13 (非退化性)。 对于 $\ell>3$，假设只要满足$3\leq\ell'<\ell$和 $p'+q'=\ell'$，引理 *10.3* 就对 $\widehat{\omega}_{T_{\ell'}(p',q')}$ 成立。引理 *10.12* 中得到的族 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$ 中的叶形式满足引理 *10.3* 的非退化条件 *(2)*。

我们将在本小节余下部分证明引理 10.13。附录 A 中给出了一个更明确的 $\ell=4$ 动机示例。这里给出的证明是附录 A 中证明的上同调类比。引理 10.13 的证明思路如下。

(a) 在基底 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)=B_{T'}\times B_{T''}$上的 $V_{T'}\amalg V_{T''}$丛上存在叶形式 $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}},\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$，其中 (σ,α) 是 $T_\ell(p,q)$ 的一棵余维一面树。(b) 将叶形式 $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}},\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$ 延拓为 V_v 丛上$B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$上的形式后（回忆一下 $V_{T'}\amalg V_{T''}\subset V_v$），所得形式满足某个同调条件。(c) 在$\pi^{-1}_{T_\ell}(p,q)(\mathrm{Im}\ F_{(\sigma,\alpha)})$上的叶形式 $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}},\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$，其中$\pi_{T_\ell(p,q)}\colon \widehat{E}^{T_\ell(\overline{p,q})}\to\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}$是映射$\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}\colon\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}\to B\mathrm{Diff}^{\mathrm{fr}}_\partial(V_v)$（§10.1.2）的关联 V_v丛，并由 V_v丛上$B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$上的 $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}},\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$ 诱导而来，满足关于其支集的某些条件。

(d) $\pi_{T_\ell(p,q)}^{-1}(\mathrm{Im}\ F_{(\sigma,\alpha)})$上的诱导叶形式 $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}},\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$ 可以拼接在一起，并延拓为 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$上的形式。(e) $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$ 上的延拓叶形式满足关于其支集的某些条件。(f) 计算 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$ 上延拓叶形式的楔积的积分。

10.2.1. (a) $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 上的 $V_{T'}\amalg V_{T''}$ 丛的叶形式。设

$$\pi_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\colon \widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\to \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$$

设其为与 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha):\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}((I^k)^{\cup p}\cup(I^{k-1})^{\cup q},I^{2k})$ 相关联的 $V_{T'}\amalg V_{T''}$ 丛。设 $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}}$（分别为 $\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）是 $V_{T'}\amalg V_{T''}$ 丛 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 上的叶形式，对应于 $T'=T_{\ell_1}(p_1,q_1)$（分别为 $T''=T_{\ell_2}(p_2,q_2)$）中与 $T_\ell(p,q)$ 的叶相对应的叶。设 ξ'（分别为 ξ''）是 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 上的叶形式，对应于 (σ,α) 的内部边中不对应于 $T_\ell(p,q)$ 的叶的那一侧，即 T'（分别为 T''）上的叶。根据引理 10.13 的假设，所有这些叶形式的次数均为 k 或 $k-1$，并且沿因子 $B_{T'}$（分别为 $B_{T''}$）满足引理 10.3 的条件。

10.2.2. (b) 叶形式延拓到 V_v-丛上的同调性质 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$。假设 σ 上内部边的边的方向 α 从 T' 的内部顶点指向 T'' 的内部顶点。那么这些形式的乘积给出上同调类

$$\begin{aligned}&[\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}}]\in H^{p_1(k-1)+(q_1-1)k}(\widehat{E}^{T'},\partial\widehat{E}^{T'};\mathbb{R})\cong H_k(\widehat{E}^{T'};\mathbb{R}),\\&[\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}]\in H^{(p_2-1)(k-1)+q_2k}(\widehat{E}^{T''},\partial\widehat{E}^{T''};\mathbb{R})\cong H_{k-1}(\widehat{E}^{T''};\mathbb{R}).\end{aligned}\tag{10.3}$$

注意，根据引理 10.13 的假设，类 $[\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}}\wedge\xi']$ 和 $[\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}\wedge\xi'']$ 分别是 $H^{p_1(k-1)+q_1k}(\widehat{E}^{T'},\partial\widehat{E}^{T'};\mathbb{R})$ 和 $H^{p_2(k-1)+q_2k}(\widehat{E}^{T''},\partial\widehat{E}^{T''};\mathbb{R})$ 中非平凡的最高次数上同调类。

让我们考察这些体积形式的积分的精确取值。回想一下，在定义（$2^{\ell-1}-\ell-1$）T-链环时，我们取了形式 $\omega'_{T'}\circ\omega'_{T''}$各项的有限个副本，其中 $\omega'_{T'}\circ\omega'_{T''}$的系数是整数 $\mu^{\partial}_{\ell}{}_{m_{\ell_1}m_{\ell_2}}$。为了定义 ω_{T_ℓ}（定义 7.3），我们取了更多个（$2^{\ell-1}-\ell-1$）T-链环副本，而 $\partial\omega_{T_\ell}$中 $\omega'_{T'}\circ\omega'_{T''}$的最终系数是整数 $m_\ell{}_{m_{\ell_1}m_{\ell_2}}$。因此，$\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 可以表示为复合 $(m_\ell{}_{m_{\ell_1}m_{\ell_2}}\widehat{\omega}_{T'})\circ\widehat{\omega}_{T''}$，这给出一个 V_v-丛；也可以表示为 $m_\ell{}_{m_{\ell_1}m_{\ell_2}}\widehat{\omega}_{T'}$与 $\widehat{\omega}_{T''}$的乘积，这给出一个 $V_{T'}\amalg V_{T''}$-丛。注意，$\widehat{\omega}_{T'}$与 $m_\ell{}_{m_{\ell_1}m_{\ell_2}}\widehat{\omega}_{T''}$ 的乘积给出相同的结果。现在假设采用前一种乘积，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{E}^{T'}}\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}}\wedge\xi'=\frac{m_\ell}{m_{\ell_1}m_{\ell_2}}\cdot m_{\ell_1}=\frac{m_\ell}{m_{\ell_2}},\\&\int_{\widehat{E}^{T''}}\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}\wedge\xi''=m_{\ell_2}\end{aligned}\tag{10.4}$$

根据引理 10.13 和引理 10.6 的归纳假设。

现在我们来看看，$\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$中的叶形式如何诱导出 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$相应面上的叶形式；后者是一个 V_v-丛。回想一下，$V_{T'}\amalg V_{T''}\subset V_v$。对于 $T=T'$或 T''，令 $\widehat{E}^T(V_v)\to\widehat{B}_T$为由$\pi_T\colon\ \widehat{E}^T\to\widehat{B}_T$ 通过将纤维 V_T借助平凡丛延拓到 V_v而得到的(V_v,∂)-丛。从 $\widehat{E}^{T'}$和 $\widehat{E}^{T''}$拉回得到的 $V_{T'}\amalg V_{T''}$-丛 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$上的叶形式，可以通过在 $V_v-\mathrm{Int}\,(V_{T'}\amalg V_{T''})$中用 η-形式延拓（叶的子午球面的）$\times I$，延拓为 V_v-丛上的叶形式。

引理 10.14。（*10.3*）中的类属于将形式延拓为零的自然映射的核

$$H^*(\widehat{E}^T,\partial\widehat{E}^T;\mathbb{R})\to H^*(\widehat{E}^T(V_v),\partial\widehat{E}^T(V_v);\mathbb{R}),\quad T=T',T'',$$

因此，存在一个定义在 $\widehat{E}^T(V_v)$ 上的形式 θ_T，其支集紧包含于$\mathrm{Int}\ \widehat{E}^T(V_v)$ 中，使得

$$d\theta_{T'} = \theta'_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta'_{a_{\ell_1}} \ \ and \ \ d\theta_{T''} = \theta''_{a_{\ell_1+1}} \wedge \cdots \wedge \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}.$$

证明。这是因为 Ψ-手术具有关于与内部边处的叶相对应的分支的布鲁尼安性质，其中纤维从 V_T 到 V_v的延拓对应于消去内部边处的叶。T的外部叶的叶形式可以在 $\widehat{E}^T(V_v)$ 中变形，而不改变其在 $\partial\widehat{E}^T(V_v)$ 邻域上的限制，使其成为标准张成圆盘的 η-形式。□

观察 *10.15.* 设 $U_1 \subset Int\ B_{T'}$（分别为 $U_2 \subset Int\ B_{T''}$）是一个小开球，使得 $\theta'_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta'_{a_{\ell_1}}$（分别为 $\theta''_{a_{\ell_1+1}} \wedge \cdots \wedge \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）的支集包含于 $\pi^{-1}_{T'}(U_1)$（分别为 $\pi^{-1}_{T''}(U_2)$）中。我们可以假设，$\theta'_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta'_{a_{\ell_1}}$（分别为 $\theta''_{a_{\ell_1+1}} \wedge \cdots \wedge \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）在 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 中的支集包含于 $\pi_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)^{-1}(U_1 \times \widehat{B}_{T''})$ 中（分别包含于 $\pi_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)^{-1}(\widehat{B}_{T'} \times U_2)$ 中）（见图 *36* 左侧）。

10.2.3. (c) 关于由 $\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 上的 V_v-丛上的叶形式所诱导的、定义在 $\pi^{-1}_{T_\ell}(p,q)(\mathrm{Im}\ F_{(\sigma,\alpha)})$ 上的叶形式的支集。设 $\theta'_{a_1}, \ldots, \theta'_{a_{\ell_1}}$（分别地，$\theta''_{a_{\ell_1+1}}, \ldots, \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）为 T'（分别地，T''）的叶在映像 $F_{(\sigma,\alpha)}\colon \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha) \to \widehat{B}_{T_\ell(p,q)}/A_{T_\ell(p,q)}$ 上的叶形式；这些叶形式由 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 上的 $\theta'_{a_1}, \ldots, \theta'_{a_{\ell_1}}$（分别地，$\theta''_{a_{\ell_1+1}}, \ldots, \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）诱导而来，如引理 10.12 中所述。

为了理解 $\theta'_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta'_{a_{\ell_1}}$ 和 $\theta''_{a_{\ell_1+1}} \wedge \cdots \wedge \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$ 的支集，为简单起见，我们考虑拉回 $\widehat{\omega}^{\square}_{T_\ell(p,q)}\colon I^{\ell-3+\lambda} \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{fr}}_{\partial}((I^k)^{\cup p} \cup (I^{k-1})^{\cup q}, I^{2k})$，它来自 $\widehat{\omega}_{T_\ell(p,q)}$，如引理 10.12 的证明中所示。令 $K^{\square}(\sigma,\alpha) \subset \partial I^{\ell-3+\lambda}$ 为投影到 $F_{(\sigma,\alpha)}$ 的像上的子集。滥用记号，我们也用 $\theta'_{a_1}, \ldots, \theta'_{a_{\ell_1}}$（分别用 $\theta''_{a_{\ell_1+1}}, \ldots, \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）表示 $K^{\square}(\sigma,\alpha) \times V_v$ 上的拉回叶形式。令 $K^{\circ}(\sigma,\bar{\alpha}) = \mathrm{Im}\ F_{(\sigma,\alpha)} - A_{T_\ell(p,q)}$，将其视为 $B_{T_\ell(p,q)}$ 的子集，并将其与自然映射 $K^{\square}(\sigma,\alpha) \to K(\sigma,\alpha)/A_{T_\ell(p,q)}$ 下的微分同胚原像认同。

假设 10.16。$\theta'_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta'_{a_{\ell_1}}$（分别为 $\theta''_{a_{\ell_1+1}} \wedge \cdots \wedge \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）在$K^{\circ}(\sigma,\alpha) \times V_v$上的支集的像，在投影 $K^{\circ}(\sigma,\alpha) \times V_v \to K^{\circ}(\sigma,\alpha)$ 下包含于开集 U_1（分别为U_2）中；该开集要么是 $\mathrm{Int}\ K^{\circ}(\sigma,\alpha)$ 中的一个开球，要么是 $K^{\circ}(\sigma,\alpha)$ 中一条从边界到内部的弧的一个小开邻域。此外，存在 $O(\sigma,\alpha)$ 的一个开邻域，它包含 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 中 $U_1 \times U_2$ 的闭包，使得

- $F_{(\sigma,\alpha)}$ 在 $O(\sigma,\alpha)$ 上的限制是一个嵌入，并且
- 在 $\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 中，U_i 的原像 $W_i = F^{-1}{}_{(\sigma,\alpha)}(U_i)$ 满足

$$W_1 \cap O(\sigma,\alpha) = (U_1 \times \widehat{B}_{T''}) \cap O(\sigma,\alpha), \quad \text{and} \quad W_2 \cap O(\sigma,\alpha) = (\widehat{B}_{T'} \times U_2) \cap O(\sigma,\alpha).$$

见图 36。

我们可以更精确地描述叶形式的支集，并且可以假设将叶形式限制在子集 $O(\sigma,\alpha)$ 上时，它们之间具有更直接的重合。

引理 10.17。令 $O(\sigma,\bar{\alpha}) = F_{(\sigma,\alpha)}(O(\sigma,\alpha))$。我们可以假设存在 $K^{\circ}(\sigma,\alpha)$ 的开子集 D_1和D_2，使得

(i) $U_i \subset D_i$对于 $i = 1, 2$。 $D_1 \cap D_2 \subset O(\sigma,\alpha)$。(ii) 叶形式 $\theta'_{a_1}, \ldots, \theta'_{a_{\ell_1}}$与 η-形式一致，即 $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{\ell_1}$的标准张成圆盘的 η-形式（见定义 *10.2*），在 $K^{\circ}(\sigma,\alpha) - D_1$ 上至多相差符号。此外，对于所有 $1 \le i \le \ell_1$, $1 \le j \le \ell_2$，我们在 $K^{\circ}(\sigma,\alpha) - D_1$ 上有 $\theta'_{a_i} \wedge \theta''_{a_{\ell_1+j}} = 0$。

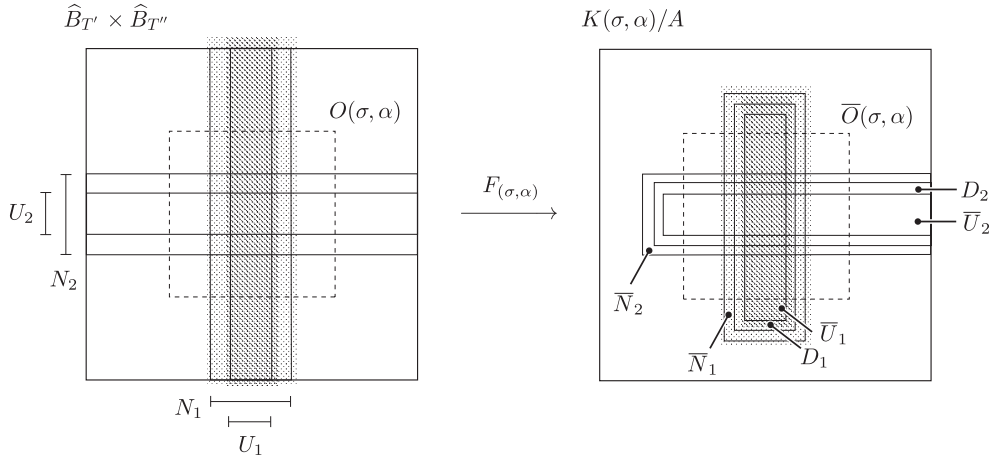


FIGURE 36. 左： $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}}$ 或 $\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$ 可能非零处。右： $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}}$ 或 $\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$ 可能非零处。

(iii) 叶形式 $\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$ 与 η-形式一致，即 $\widetilde{a}_{\ell_1+1},\dots,\widetilde{a}_{\ell_1+\ell_2}$ 的标准张成圆盘的 η-形式，在 $K^\circ(\sigma,\alpha)-D_2$ 上至多相差符号。此外，对于所有 $1\le i\le\ell_1$, $1\le j\le\ell_2$, 我们在 $K^\circ(\sigma,\alpha)-D_2$ 上有 $\theta'_{a_i}\wedge\theta''_{a_{\ell_1+j}}=0$。

(iv) $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}}$（分别为 $\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）在 $\overline{O}(\sigma,\alpha)$ 上的限制经映射 $F_{(\sigma,\alpha)}$ 拉回后，与 $\theta'_{a_1},\dots,\theta'_{a_{\ell_1}}$（分别为 $\theta''_{a_{\ell_1+1}},\dots,\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$）在 $O(\sigma,\alpha)$ 上的限制一致。

对于纤维丛全空间上的形式 α，令 $\mathrm{supp}_b(\alpha)$ 表示 α 的支集在丛投影下的像。

引理 10.18。令 $\{1,\dots,\ell_1\}\amalg\{\ell_1+1,\dots,\ell_1+\ell_2\}$ 表示与余维一面树 σ 相关联的 $T_\ell(p,q)$ 的外部顶点（叶）的集合的分解。那么

$$\mathrm{supp}_b(\overline{\theta}'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\overline{\theta}'_{a_{\ell_1}})\cap\mathrm{supp}_b(\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+\ell_2}}),$$

它是 $\partial I^{\ell-3+\lambda}$ 的子集，包含于 $K^\circ(\sigma,\alpha)$ 的内部中（并且与 $K^\circ(\sigma',\alpha')$ 不相交，其中 $\sigma'\neq\sigma$, $\sigma'\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,\,q)}\setminus\{T_\ell(p,q)\}$）。

证明。令 $\sigma'\neq\sigma$ 为 $T_\ell(p,q)$ 的另一个余维一面树，它通过切开 σ' 的内部边分解为两棵树 T',T''。令 $J_1\amalg J_2$ 表示与这一对 T',T'' 相关联的 $T_\ell(p,q)$ 的外部顶点集合的分解。那么，$\{1,\dots,\ell_1\}$ 和 $\{\ell_1+1,\dots,\ell_1+\ell_2\}$ 中至少有一个不包含于 J_1 或 J_2。不妨设 $\{1,\dots,\ell_1\}\not\subset J_1$ 且 $\{1,\dots,\ell_1\}\not\subset J_2$。那么存在指标 $j,j'\in\{1,\dots,\ell_1\}$，使得 $j\in J_1$ 且 $j'\in J_2$。由引理 10.17，对于 (σ',α')，第 j-个叶在 $O(\sigma',\alpha')$ 上的叶形式 θ'_{a_j} 的支集包含于 $O(\sigma',\alpha')\times V_{\widetilde{T}'}$，而第 j' 个叶的叶形式 $\theta'_{a_{j'}}$ 的支集包含于 $O(\sigma',\alpha')\times V_{\widetilde{T}''}$。因此，由于 $V_{\widetilde{T}'}\cap V_{\widetilde{T}''}=\emptyset$，我们有 $\theta'_{a_j}\wedge\theta'_{a_{j'}}=0$ 属于 $O(\sigma',\alpha')\times V_v$。此外，根据引理 10.17 (ii)、(iii)，$\theta'_{a_j}\wedge\theta'_{a_{j'}}=0$ 在 $(K^\circ(\sigma',\alpha')-D_1)\cup(K^\circ(\sigma',\alpha')-D_1)=K^\circ(\sigma',\alpha')-(D_1\cap D_2)$ 上成立，其中在分解 $J_1\amalg J_2$ 中我们考虑 $D_1,D_2\subset K^\circ(\sigma',\alpha')$。这表明 $\theta'_{a_j}\wedge\theta'_{a_{j'}}=0$ 在 $K^\circ(\sigma',\alpha')$ 上成立。□

10.2.4. (d) $_{p,\,q)}(\mathrm{Im}\,F_{(\sigma,\alpha)})$ 上的诱导叶形式可以粘合在一起，并延拓为定义在 $\widehat{E}^{T_\ell(p,\,q)}$ 上的形式。$K^\circ(\sigma,\alpha)\times V_v$ 上，对应于 $T_\ell(p,\,q)$的余维一面图$(\sigma,\,\alpha)$的叶形式可以粘合在一起，并延拓为定义在 $I^{\ell-3+\lambda}\times V_v$上的形式。特别地，对于固定余维一面树 σ 的外部叶集合的分解 $\{1,\dots,\ell_1\}\amalg\{\ell_1+1,\dots,\ell_1+\ell_2\}$,

$(\sigma,\ \alpha)$，由引理 10.11 可知，$\partial I^{\ell-3+\lambda}\times V_v$ 上的乘积 $\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}}$ 和 $\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$可以延拓为闭形式 $P_{T'}$ 和 $P_{T''}$，其次数分别为 $p_1(k-1)+(q_1-1)k$和$(p_2-1)(k-1)+q_2k$。这些形式定义在 $I^{\ell-3+\lambda}\times V_v\simeq V_v$ 上，是延拓叶形式的楔积，并且由于维数原因是恰当的。因此，存在定义在 $I^{\ell-3+\lambda}\times V_v$上的形式 $Q_{T'}$和 $Q_{T''}$，使得当 $T=T'$或 T''时，

$$P_T=dQ_T. \tag{10.5}$$

要证明引理 10.13，只需证明以下命题。

引理 10.19。

$$\int_{I^{\ell-3+\lambda}\times V_v}P_{T'}\wedge P_{T''}=\pm m_\ell.$$

10.2.5. (e) 关于 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$上的延拓叶形式的支集。

引理 10.20。 我们可以假设

$$\mathrm{supp}_b(Q_{T'})\cap\mathrm{supp}_b(\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+\ell_2}})$$

在 $\partial I^{\ell-3+\lambda}$ 中包含于 $K^\circ(\sigma,\alpha)$ 的内部。此外，可以选择 $Q_{T'}$ 和 $\theta_{T'}$（见引理 *10.14*），使得存在开集 $N_1\subset B_{T'}$ 和 $N_1\subset K^\circ(\sigma,\alpha)$满足以下条件（见图 *36*）。

(i) $U_1\subset N_1$和$\overline{\ }U_1\subset D_1\overline{\subset}N_1$。*(ii)* $\mathrm{supp}_b(Q_{T'})\cap K^\circ(\sigma,\alpha)$ 包含于 N_1。$\widehat{\ }$*(iii)* $\mathrm{supp}_b(\theta_{T'})\subset B_{T'}$包含于 $\overline{N_1}$。$\widehat{\ }$*(iv)* $N_1\cap U_2\subset O(\sigma,\alpha)$，以及 $(N_1\precsim B_{T''})\cap U_2\subset O(\sigma,\alpha)$。*(v)* N_1 在 $\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$中的原像 $Y_1=F^{-1}{}_{(\sigma,\alpha)}(N_1)$ 满足

$$Y_1\cap O(\sigma,\alpha)=(N_1\times\widehat{B}_{T''})\cap O(\sigma,\alpha).$$

(vi) ${F^*}_{(\sigma,\alpha)}Q_{T'}$ 的拉回在 $O(\sigma,\alpha)$上的限制，与 $\theta_{T'}$ 在$\widehat{\ }$投影 $B_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\to B_{T'}$下的拉回一致。

证明。 前一个断言成立，是因为我们可以假设 $\mathrm{supp}_b(Q_{T'})$ 包含于 $\partial I^{\ell-3+\lambda}$ 中 $\mathrm{supp}_b(\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}})$ 的某个小开邻域内，方法是根据超额较低的面，归纳地在 $\mathrm{supp}_b(\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}})$ 的可缩邻域的限制上构造 $Q_{T'}$。于是，根据假设 10.16和引理 10.18，我们看到 $\mathrm{supp}_b(Q_{T'})\cap\mathrm{supp}_b(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}})$ 包含于 $O(\sigma,\ \alpha)$ 中。

关于 $Q_{T'}$ 和 $\theta_{T'}$ 的选取的后一断言，可以用与引理 10.12 类似的论证证明，该引理讨论了在 $(I^{\ell_1-3}\times S^{\lambda_1})\vee(I^{\ell_2-3}\times S^{\lambda_2})$附近对形式的变形。具体而言，满足 (iii) 的 N_1 以及 (i) 中的 $U_1\subset N_1$ 之所以存在，是因为 $\theta_{T'}$ 的支集必定包含 $\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}}$ 的支集。我们也可以假设 N_1是 U_1的一个小邻域。引理 10.12 中，在 $(I^{\ell_1-3}\times S^{\lambda_1})\vee(I^{\ell_2-3}\times S^{\lambda_2})$附近对 $\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}}$（的拉回）进行变形时，也会同时对 $\theta_{T'}$的拉回进行变形；我们可以根据变形结果在 $\partial I^{\ell-3+\lambda}$上定义 $Q_{T'}$，然后将其延拓到 $I^{\ell-3+\lambda}$上，因此得到 (vi)。由于可以在 $(I^{\ell_1-3}\times S^{\lambda_1})\vee(I^{\ell_2-3}\times S^{\lambda_2})$的一个小邻域内完成对 $\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}}$（的拉回）的变形，我们可以假设 $O(\sigma,\alpha)$ 上相关形式的限制保持不变，并且可以选择 N_1使 (v) 成立。因此 (iv) 也成立。由于 $K^\circ(\sigma,\alpha)$ 中 $Q_{T'}$的支集必定包含 $\theta'_{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta'_{a_{\ell_1}}$的支集，因此有 $U_1\subset N_1$，由此得到 (i)。由 $\theta_{T'}$和 $Q_{T'}$ 的构造可直接得到条件 (ii) 和 (iii)。□

10.2.6. (f) 计算 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}$ 上延拓叶形式的楔积的积分。下面的引理是引理 A.3 的一个类似结果。

引理 10.21. 对于 $T_\ell(p,q)$ 的任意余维一面图(σ,α)，有

$$\int_{I^{\ell-3+\lambda}\times V_v} P_{T'}\wedge P_{T''} = \int_{\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)} \theta_{T'}\wedge(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}).$$

证明。 由 (10.5) 和斯托克斯定理可得

$$\int_{I^{\ell-3+\lambda}\times V_v} P_{T'}\wedge P_{T''} = \int_{I^{\ell-3+\lambda}\times V_v} dQ_{T'}\wedge P_{T''} = \int_{\partial(I^{\ell-3+\lambda}\times V_v)} Q_{T'}\wedge(\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+\ell_2}}).$$

由于 $Q_{T'}\wedge(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}})$ 的支集包含于 $K^\circ(\sigma,\alpha)\times V_v\subset\partial I^{\ell-3+\lambda}\times V_v$ 中（引理 10.20 的前半部分），因此最后一个积分可改写为

$$\begin{aligned}\int_{K^\circ(\sigma,\alpha)\times V_v} Q_{T'}\wedge(\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+\ell_2}}) &= \int_{(\overline{N}_1\cap\overline{U}_2)\times V_v} Q_{T'}\wedge(\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+\ell_2}})\\ &= \int_{\overline{O}(\sigma,\alpha)\times V_v} Q_{T'}\wedge(\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\theta}''_{a_{\ell_1+\ell_2}}),\end{aligned} \tag{10.6}$$

其中，第一个等式由假设 10.16 和引理 10.20 (i)、(ii) 得出。第二个等式由引理 10.20 (iv) 得出。我们通过将形式拉回到 (V_v,∂)-丛$\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\to\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 上来计算这个积分。也就是说，$F^*_{(\sigma,\alpha)}Q_{T'}$ 是 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 上的一个形式。由引理 10.17 (iv) 和引理 10.20，积分 (10.6) 可改写为

$$\begin{aligned}\int_{O(\sigma,\alpha)\times V_v} F^*_{(\sigma,\alpha)}Q_{T'}\wedge(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}) &= \int_{O(\sigma,\alpha)\times V_v}\theta_{T'}\wedge(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}})\\ &= \int_{((N_1\times\widehat{B}_{T''})\cap O(\sigma,\alpha))\times V_v}\theta_{T'}\wedge(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}})\\ &= \int_{\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)}\theta_{T'}\wedge(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}),\end{aligned} \tag{10.7}$$

其中，第一个等式由引理 10.20 (vi) 得出，第二个等式由引理 10.20 (iii)、(v) 得出，第三个等式由引理 10.20 (iv) 得出。□

被积函数 $\theta_{T'}\wedge(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}})$ 的支集包含于 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\to\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)=\widehat{B}_{T'}\times\widehat{B}_{T''}$ 的子丛中，该子丛的纤维为 $V_{T''}$，且沿 $\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 的因子 $\widehat{B}_{T'}$ 是平凡的。因此，只需在子集 $\widehat{E}^{T''}\times\widehat{B}_{T'}$ 上对 $\theta_{T'}\wedge(\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}})$ 进行积分；该子集是 $\widehat{E}^{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)\to\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma,\alpha)$ 的平凡子 $V_{T''}$-丛。

$$\begin{array}{ccccc}\widehat{E}^{T''}(V_v)\times\widehat{B}_{T'} & \longleftarrow & \widehat{E}^{T''}\times\widehat{B}_{T'} & \xrightarrow{\pi_{T''}\times\mathrm{id}} & \widehat{B}_{T''}\times\widehat{B}_{T'}\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{pr}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{pr}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{pr}}\\ \widehat{E}^{T''}(V_v) & \longleftarrow & \widehat{E}^{T''} & \xrightarrow{\pi_{T''}} & \widehat{B}_{T''}\end{array}$$

为此，我们注意到，形式 $\theta''_{a_{\ell_1+1}}\wedge\cdots\wedge\theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}$ 是相应形式在投影 $\widehat{E}^{T''}\times\widehat{B}_{T'}\to\widehat{E}^{T''}$ 下的拉回。回忆一下，引理 10.14 的 $\theta_{T'}$ 定义在 $\widehat{E}^{T'}(V_v)$ 上，并且可以沿 $\times\widehat{B}_{T'}$ 拉回到 $\widehat{E}^{T''}(V_v)$。我们仍将该拉回记作 $\theta_{T'}$。我们考虑沿纤维 $B_{T'}$ 对 $\theta_{T'}|_{\widehat{E}^{T''}\times\widehat{B}_{T'}}$ 的纤维^积分。

引理 10.22。T 纤维积分 $\int_{\widehat{B}_{T'}}\theta_{T'}$ 到 $\widehat{E}^{T''}$ 的限制与 $\pm\binom{m_\ell}{m_{\ell_2}}\xi''$ 上同调等价。 —

证明。设 $c' \subset \partial V_{T'}$（分别为 $c'' \subset \partial V_{T''}$）是 $(\sigma,\ \alpha)$ 中内部边的 T'（分别为 T''）的叶的子午球面。因此，c' 与对应叶的核心球面的链接数为± 1。设 $\widetilde{c'} = \widehat{B}_{T'} \times c' \subset \widehat{E}^{T'}$。那么我们有

$$\int_{\widetilde{c'}} \theta_{T'} = \int_{\partial \widehat{E}^{T'}} \theta_{T'} \wedge \eta_{\widetilde{c'}} = \int_{\partial \widehat{E}^{T'}} \theta_{T'} \wedge \xi' = \int_{\widehat{E}^{T'}} d\theta_{T'} \wedge \xi' = \int_{\widehat{E}^{T'}} (\theta'_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta'_{a_{\ell_1}}) \wedge \xi' = \frac{m_\ell}{m_2}$$

根据斯托克斯定理、关于叶形式的假设以及 (10.4)。由于 $(\sigma,\ \alpha)$ 的内部边的 T'' 之叶的 b'' 核心球面在 V_v 中与 $\pm c'$ 和 $\int_{\widetilde{c'}} = \int_{c'} \int_{\widehat{B}_{T'}}$ 同调等价，我们有

$$\int_{b''} \int_{\widehat{B}_{T'}} \theta_{T'} = \pm \int_{c'} \int_{\widehat{B}_{T'}} \theta_{T'} = \pm \frac{m_\ell}{m_2} = \pm \int_{b''} \frac{m_\ell}{m_2} \xi''.$$

对于 T'' 的其他叶的 b''' 核心球面，我们有 $\int_{b'''} \int_{\widehat{B}_{T'}} \theta_{T'} = 0$，因为 $\theta_{T'}$ 的支集与 $V_{T''}$ 中的外部叶不相交。这刻画了 $\int_{\widehat{B}_{T'}} \theta_{T'}$ 在 $\widehat{E}^{T''}$ 中的上同调类。□

引理 *10.19* 和引理 *10.13* 的证明。根据引理 10.21，只需计算引理 10.21 中等式右端的积分$\widehat{\ }$。我们先根据引理 10.22 沿着 $\widehat{E}^{T''} \times \widehat{B}_{T'}$ 的纤维 $B_{T'}$ 对 (10.7) 的被积形式积分

$$\int_{\widehat{B}_{T'}} \theta_{T'} \wedge (\theta''_{a_{\ell_1+1}} \wedge \cdots \wedge \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}) \sim \pm \frac{m_\ell}{m_{\ell_2}} \xi'' \wedge (\theta''_{a_{\ell_1+1}} \wedge \cdots \wedge \theta''_{a_{\ell_1+\ell_2}}).$$

然后，对 $\widehat{E}^{T''}$ 上这个形式积分，得到 (10.7)，由 (10.4) 可得 $\widehat{E}^{T''}$ 的值为 $\pm m_\ell$。这就完成了引理 10.19 的证明，进而也完成了引理 10.13 的证明。□

引理 *10.8* 的证明。引理 10.8 中关于 $E^{T_\ell}{}_{(p,\ q)}$ 上叶形式的存在性和相容性的断言 (1) 和 (2)，可由引理 10.12 的相容性立即推出。引理 10.8 中的断言 (3) 即下文的引理 10.23。□

引理 10.23。

$$\int_{\overline{E}^{T_\ell(p,q)} - (\widehat{E}^{T_\ell(p,q)})^{(2^\ell-3)}} \theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell} = 0.$$

证明。由假设 10.16 以及引理 10.17 和 10.18 可知，$\theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell}$的支集与 $E^{T_\ell}{}_{(p,\ q)} - (\widehat{E}^{T_\ell}{}_{(p,\ q)})^{(2^\ell-3)}$ 的交是映射 $F_{(\sigma,\alpha)}$：$O(\sigma,\ \alpha) \to O(\sigma,\ \alpha)$ 的映射圆柱 $\mathrm{Cyl}(F_{(\sigma,\alpha)})$ 的不交并上的 $(V_v,\ \partial)$-丛。由于 $\theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_{\ell_1}}$和$\theta_{a_{\ell_1+1}} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_{\ell_1+\ell_2}}$的支集在 $O(\sigma,\ \alpha)$上不相交，因此我们在那里有 $\theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_\ell} = 0$，所以在 $\mathrm{Cyl}(F_{(\sigma,\alpha)})$ 上的拉回也是如此。□

10.3. 诱导定向：定理 10.9 的证明。我们先在局部考察，并描述余维为一的面 $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{T_\ell(p,q)}$对应的$\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(T_\ell(p,q))$和$\widehat{B}_{T_\ell(p,q)}(\sigma)$的定向之间的关系。令 $T = T_\ell(p,q)$，并假设 σ 由 $T' = T_{\ell_1}(p_1,q_1)$和 $T'' = T_{\ell_2}(p_2,q_2)$中的两个内部顶点 v_1和 v_2组成。回忆一下，存在一个$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$自然映射 $B_T(\sigma) \to K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)} \subset \partial B_T/A_{T_\ell(p,q)}$。$B_T(\sigma)$ 的定向由 $B_T/A_{T_\ell(p,q)}$ 的$\widehat{\ }$定向诱导而来：先在 $K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$上诱导，再拉回到 $B_T(\sigma)$。我们比较 $B_T(\sigma) = B_{T'} \times B_{T''}$的以下定向：

$\widehat{\ }$（a）由 $o(B_T)$ 诱导，而$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$（b） $o(B_{T'}) \wedge o(B_{T''})$ 则由树 σ 的组合数据所确定的定向约定决定。

我们采用以下约定来诱导边界的定向。对于一个紧致、连通、可定向且边界非空的 m-流形 M，我们用一个非平凡德拉姆上同调类 $[\upsilon_M] \in H^m(M, \partial M; \mathbb{R})$ 表示 M 的定向，其中该类由一个在 M 的内部具有紧支撑的闭 m-形式 υ_M 表示。由于对 $(M, \partial M)$ 的正合序列中的连接同态 $\delta\colon H^{m-1}(\partial M; \mathbb{R}) \to \to H^m(M, \partial M; \mathbb{R})$ 是同构，因此存在一个典范的非平凡元素 $\delta^{-1}([\upsilon_M]) \in H^{m-1}(\partial M; \mathbb{R})$。更明确地说，由于 υ_M 在 M 中是恰当的，因此存在一个 $(m-1)$-形式 ζ，定义在 M 上，使得 $\upsilon = d\zeta$。根据斯托克斯定理，我们有 $\int_M \upsilon_M = \pm \int_{\partial M} \zeta$，其中符号取决于 ∂M 上定向的选取。这表明，ζ 在 ∂M 上的限制在 $H^{m-1}(\partial M; \mathbb{R})$ 中代表一个非平凡类，并且有 $\delta([\zeta|_{\partial M}]) = [\upsilon_M]$。

以下是证明定理 10.9 的关键引理。

引理 10.24。$B_T(\sigma) = B_{T'} \times B_{T''}$ 的定向 (a) 为 $o(B_{T'}) \wedge o(B_{T''})$。

证明。设 v 是 T 的内部 ℓ 度顶点。设 e 是 σ 的内部边，且 e_+，e_- 是 e 的半边分解。对于顶点定向 $o(v)$，我们将 $o(v)'$ 记作 σ 中与 v_1 相 incident 且属于 v_2 的所有外半边的楔积，其中乘积的顺序与收缩 σ 的内部边时 $o(v)$ 的顺序一致。我们假设顶点定向$o(v)$ $o(v_1)$ $o(v_2)$ 满足以下恒等式：

$$o(v_1) \wedge o(v_2) = (e_+ \wedge e_-) \wedge o(v)'. \tag{10.8}$$

这与（1.1）中 split(Γ, v) 各项的定向一致。

Ac 根据 §10.1 中的定义 10.5，参数空间 B_T 的定向使得

$$o(\widehat{B}_T) \wedge o(D^{2k}) = \textstyle\bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j, \tag{10.9}$$

其中 θ_j 是 V-丛 $\widehat{E}^T$ 中的叶形式，如引理 10.3 所述。乘积（10.9）给出了 E_T 的一个定向。根据定义 10.5 和（10.8），参数空间 $B_{T'}$ 和 $B_{T''}$ 的定向使得

$$o(\widehat{B}_{T'}) \wedge o(\widehat{B}_{T''}) \wedge o(D^{2k})^{\wedge 2} = (\eta_1 \wedge \eta_2) \wedge \textstyle\bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta'_j, \tag{10.10}$$

其中 θ'_j 是 $V_{T'} \times V_{T''}$-丛在 $K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 上的叶形式的拉回，如引理 10.3 所述；η_i $(i = 1,2)$ 是与第 i 个内部顶点相邻的内部半边所对应的叶的叶形式。

为了关联 $o(B_T)$ 和 $o(B_{T'}) \wedge o(B_{T''})$，我们考虑由 $o(\widehat{B}_T) \wedge o(D^{2k})^{\wedge 2}$ 在纤维 $V \times V$（位于 $\partial \widehat{B}_T$ 上）所诱导的定向。由于当 $V \times V$ 中的一个点趋近对角线 Δ_V 时，(10.10) 中的乘积 $\bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta'_j$ 收敛到 (10.9) 中的 $\bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j$，我们可以在 Δ_V 附近比较 (10.9) 和 (10.10)。

我们证明 $\rho = 1$。我们考虑一个位于 B_T 上、纤维为 $V \times V$ 的丛，它与 $\pi_{T_\ell(p,q)}$ 相关联，并考虑当两个点重合时，(10.10) 在一个边界点处的极限。若将 V 与 $V \times V$ 中的对角线 Δ_V 等同起来，则定向 (10.9) 典范地诱导出一个定向

$$o(\widehat{B}_T) \wedge o(D^{2k})^{\wedge 2} = (\textstyle\bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j) \wedge o(N\Delta_V) \tag{10.11}$$

B_T 上 Δ_V 某点处的 $V \times V$ 丛，其中 $o(N\Delta_V)$ 是 Δ_V 的法丛的定向，使得 $o(D^{2k})^{\wedge 2} = o(\Delta_V) \wedge o(N\Delta_V)$。我们可以取与 $o(N\Delta_V)$ 相容的 η_{Δ_V} 来表示 $o(N\Delta_V)$。因此，下面的闭形式给出了定向（10.11）。

$$\eta_{\Delta_V} \wedge \textstyle\bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j. \tag{10.12}$$

接下来我们考虑定向 (10.10)。令 V_1，$V_2 \subset V$ 为两个互不相交的把手体，它们是对应于 σ 的两个 Ψ-图的小正则邻域（如 U 中图 22 左图所示）。乘积 (10.10) 给出了 $V_1 \times V_2$-丛 ϖ_σ 的一个定向：$\widehat{E}^{T'} \times \widehat{E}^{T''} \to \widehat{B}_{T'} \times \widehat{B}_{T''}$。令 U 为 $B_{T'} \times B_{T''}$ 中的一个小开球，并令 U 为 B_T 中的一个半开球，使得 ∂U 包含于面 $K(\sigma)/A_{T_\ell(p,q)}$ 中，且体积形式 $\bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j$ 的支集包含于 $\pi_{T_\ell}^{-1}(p,q)$ $(\widetilde{U})$ 中。我们假设

$\widehat{\quad}\qquad\widehat{\quad}\qquad\widehat{\quad}\qquad\widetilde{\quad}$在映射 $B_T(\sigma) = B_{T'} \times B_{T''} \to K(\sigma)/A_{T_\ell}$ $(p,\ q)$ 下，U的像包含于 ∂U 中。我们考虑与映射 $U \to \partial U$ 相关联的、到 $\pi_T = \pi_{T_\ell}(p,\ q)$ 的 $V \times V$-丛 $\widetilde{U} \times (V \times V) \to \widetilde{U}$：$\pi_T^{-1}(\widetilde{U}) \to \widetilde{U}$，以及它在映射 $U \to \partial U$ 下的拉回 $U \times (V \times V) \to U$。

式 (10.10) 右端的闭形式 $\eta_1 \wedge \eta_2$ 在 $H^*(\varpi_\sigma^{-1}(U);\mathbb{R}) \cong_\sim \qquad\qquad \sim H^*(V_1 \times V_2;\mathbb{R})$ 中给出一个上同调类。令 $\varpi_T\colon U \times (V \times V) \to U$ 为与 π_T 相关联的 $V \times V$-丛。下面的断言由引理 B.1 得出。

断言 10.25。$\eta_1 \wedge \eta_2$ 上的闭形式 $\varpi_\sigma^{-1}(U) = U \times (V_1 \times V_2)$ 可以延拓为 $\widetilde{\eta}$ 上的形式$\sim U \times (V \times V)$，使得

- $\widetilde{\eta}$ 在领圈 $([0,\varepsilon) \times \partial U) \times (V_1 \times V_2) \subset U \times (V \times V)$ 上的限制与 $\eta_1 \wedge \eta_2$ 的拉回一致，$\sim$
- $\widetilde{\eta}$ 在 $U \times$ （$V \times V - N\Delta_V$）上的限制是闭的，并且
- $d\widetilde{\eta} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j'$ 在 $H^{4k+\text{维数}_c}$ $\widehat{B}_T$（ϖ_T^{-1}（$\widetilde{U}$）$\partial\varpi_T^{-1}$（$\widetilde{U}$）；$\mathbb{R}$）的德拉姆上同调类与 $\upsilon_T \wedge \bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j'$ 的德拉姆上同调类一致，其中 υ_T 是一个闭的 $2k$-形式，其支集包含在 $\widetilde{U} \times \Delta_V$ 的一个小管状邻域内；该形式通过映射 $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k}$ 从 $\mathbb{R}^{2k}$ 上的具有紧支撑的标准体积形式拉回得到；$(x,\ y) \mapsto y - x$。

由于$\bigwedge_{j\in E(T')} \theta_j'$和$\bigwedge_{j\in E(T'')} \theta_j'$的支集分别包含在 V_1和 V_2中，因此（$\eta_1 \wedge \eta_2$）$\wedge \bigwedge_j \theta_j'$的支集包含在 $V_1 \times V_2$中。$\eta_1 \wedge \eta_2$在 $\varpi_\sigma^{-1}(U)$中的上同调类是唯一能够给出 $V_1 \cup V_2$中两个分支链环的链接数的类。对于其他余维1的面图 σ，可得到与上文断言10.25中相同的公式$\upsilon_T \wedge \bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j'$。这表明，按照上述约定得到的 $B_T(\sigma)$上的定向，都是从同一个形式 $\bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j$“诱导”而来的。

我们得到如下结果。

- 我们有 $[\eta_{\Delta_V} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j] = [\upsilon_T \wedge \bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j']$ 在 $H^{4k+\text{维数}_c}$ $\widehat{B}_T(\varpi_T^{-1}(\widetilde{U})\ \partial\varpi_T^{-1}(\widetilde{U});\mathbb{R})$ 中。
- $d\widetilde{\eta} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j'$的类通过 $o(\widehat{B}_{T'}) \wedge o(\widehat{B}_{T''}) \wedge o(D^{2k})^{\wedge 2}$ 诱导出，其中 δ^{-1} 是连接同态的逆

$$\delta\colon H_c^{4k+\dim \widehat{B}_T - 1}(\partial\varpi_T^{-1}(\widetilde{U});\mathbb{R}) \to H_c^{4k+\dim \widehat{B}_T}(\varpi_T^{-1}(\widetilde{U}), \partial\varpi_T^{-1}(\widetilde{U});\mathbb{R})$$

在顶次数上同调之间。

由于类 $[\eta_{\Delta_V} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\ell} \theta_j]$ 表示（10.11），因此由 $o(B_T)$ 在 $\widehat{B}_{T'} \times \widehat{B}_{T''}\widehat{\quad}\qquad\widehat{\quad}\qquad\widehat{\quad}$上诱导的定向为 $o(B_{T'}) \wedge o(B_{T''})$。□

$\widehat{\quad}$**定理 *10.9* 的证明。** 现在我们来计算由$\sim o(B_{(\Gamma,\alpha)})$诱导的$B_{\mathrm{split}(\Gamma,v_j)}$ 的一个面的定向，其中v_j 是 Γ的一个 ℓ价顶点。我们在$T(v_j)$的外部半边上固定一个与顶点定向 $o(v_j)$一致的标号。令 Γ_σ为和式 split(Γ, v_j)中与 $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{T(v_j)}$对应的一项所表示的图。令 e为分裂v_j后得到的 Γ_σ的边。假设(Γ,α)的定向可以改写为

$$\bigwedge_{v\in V(\Gamma)} o(v) = \mu\, o(v_j) \wedge \bigwedge_{\substack{v\in V(\Gamma)\\ v\neq v_j}} o(v)$$

对于某个 $\mu \in \{-1, 1\}$。根据 split(Γ, v) 的定向约定，这诱导出 Γ_σ 的如下定向：

$$o(\Gamma_\sigma) := \mu\,(e_+ \wedge e_-) \wedge o(v_j)' \wedge \bigwedge_{v\neq v_j} o(v) = \mu\, o(v_{j1}) \wedge o(v_{j2}) \wedge \bigwedge_{v\neq v_j} o(v),$$

其中 v_{j1}、v_{j2} 是 e 的边界顶点，第二个等式由 (10.8) 得出。回想一下，

$\widehat{\ }o(v_j)$ 决定了 $o(B_T(v_j))$，$o(v_{j1}) \wedge o(v_{j2})$ 决定了 $o(B_{T'}) \wedge o(B_{T''})$，并且根据引理 10.24，$o(B_T(v_j))$ 诱导出

$\widehat{\ }o(B_{T'}) \wedge o(B_{T''})$，由此可知，从 $o(B_{(\Gamma,\alpha)}) = \widehat{\ }\bigwedge_v o(B_T(v)) = \mu\, o(B_{T(v_j)}) \wedge \bigwedge_{v\neq v_j} o(B_{T(v)})$ 诱导出的 B_{Γ_σ} 上的定向为

$$\mu\, o(\widehat{B}_{T'}) \wedge o(\widehat{B}_{T''}) \wedge \bigwedge_{v\neq v_j} o(\widehat{B}_{T(v)}).$$

这与由 $o(\Gamma_\sigma)$ 确定的结果一致。 □

11. Concluding remarks

本文中价为 $\ell \geq 5$ 的基本括号运算的构造不够明确。

问题 11.1. 从弦链环的显式族构造 $\ell \geq 5$ 的基本括号运算。

为了满足基本括号运算的主要性质，我们需要施加条件$n \geq 2\ell - 3$，这导致了定理 A 中的限制 $2k \geq 2\mu^2 + 8\mu + 10$。若能对此问题[8]作出肯定的解决，这一结果便可得到改进。特别是，如果我们的结果能够推广到$2k = 4$，那么 [LX] 的主要结果便会得到加强。我们知道，对于 $S^n \times S^n \times S^n \times S^n$，存在引理4.9中构造的一个自然类比，它在某种程度上类似于 4 个点在 D^n 上的构形空间的 Fulton–MacPherson 紧化。然而，我们难以将其与路径边界上的 10T-链环（第 6.1 节）的分解结构联系起来，也不知道这样的模型是否可行。若能将我们的构造与 [KKV20、KKV24、Koy、Kos24a、Kos24b] 的工作进行比较，将会很有意思。

已知，$\mathrm{Emb}_\partial(I^{m_1} \amalg \cdots \amalg I^{m_r}, I^n)_\iota$的有理同伦型对于 $n - m_i \geq 3$可以用（毛）图复形（[AT, BoaW, DH, FTW]）来表示（符号 $\mathrm{Emb}_\partial(A, B)_{f_0}$ 见 §2.3）。解决以下问题将有助于从几何角度构造嵌入空间的有理同伦型。

问题 11.2. 给出一种与本文类似的构造，

$$H_*(\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(I^m, I^n)_\iota; \mathbb{Q}) \quad (n - m \geq 3),\ or$$
$$H_*(\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(I^{m_1} \amalg \cdots \amalg I^{m_r}, I^n)_\iota; \mathbb{Q}) \quad (n - m_i \geq 3)$$

使用毛图，并将其与 *Longoni* 和 *K. Sakai* 的构造联系起来；该构造涉及四价顶点（[Lo,Sa]，另见 [PS]）。

Appendix A. Leaf forms via spanning manifolds

引理 10.3 的叶形式可以由弦链环张成流形的 η-形式给出。我们发现，对于四价顶点的基本括号，对应的弦链环族存在具有所需交性质的张成流形。虽然本节内容并非本文主要结果所必需，但它有助于更明确地理解引理 10.3 和定理 10.9 的证明。

A.1. 跨越基本括号及其四重交的流形。叶 t

$$e_t \colon (I^{3n-2})^{\cup 4} \to I^{4n-1}, \quad (\text{where } t \in [0,1])$$

是 IHX 链环 e_1 的零同伦：$(I^{3n-2})^{\cup 4} \to I^{4n-1}$。因此，$e_1$是以下三个弦链环之和$e_1^1$，$e_1^2$，$e_1^3$：$(I^{3n-2})^{\cup 4} \to I^{4n-1}$ 分别对应 IHX 关系中的三项。对于每个

[8]若仅为改进维数限制，或许还有其他策略。

$j \in \{1,2,3\}$ 并且对于 e_1^j 的每个分支 a_ℓ^j，存在一个紧致定向的 $(3n-1)$-子流形 $S(a_\ell^j)$，它包含于 I^{4n-1}，使得

- $\partial S(a_\ell^j)$ 是字符串 a_ℓ^j（沿 ∂I^{4n-1} 取向）的闭包，
- $S(a_\ell^j) \cap a_m^j = \emptyset$ 如果 $m \neq \ell$。

（见图 37。）

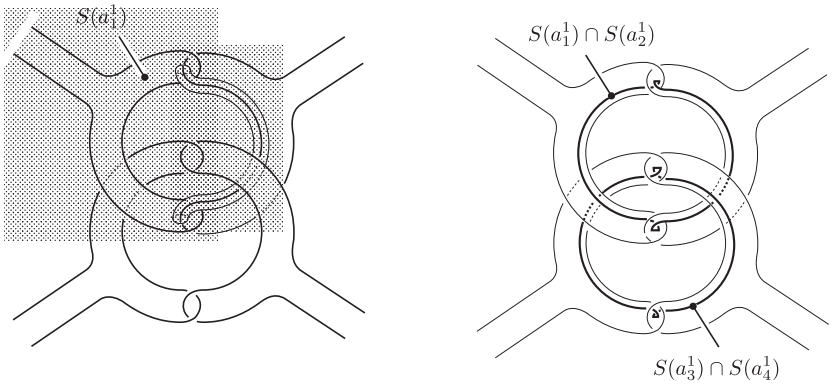


FIGURE 37. 跨越流形 $S(a_\ell^1)$（对应第一项）。双重点的轨迹构成一个链接数为 ± 1 的链环。

总和 的（$3n-1$）子流形 S（a_ℓ^j）可以在 $I^{4n} = I^{4n-1} \times I$ 中按如下方式闭合 .

- 设 $\widetilde{a}_\ell$（$\ell = 1$，2、3、4）为 $I^{4n} = I^{4n-1} \times I$ 中 e_t 的第 ℓ 个分支的轨迹。
- 设 a_ℓ^0（$\ell = 1$、2、3、4）为标准包含映射 e_0 的分支。
- 设 S（a_ℓ^0）为 $I^{4n-1} \times \{0\}$ 中 a_ℓ^0 的张成圆盘。
- 设 S（a_ℓ^1）$\natural S$（a_ℓ^2）$\natural S$（a_ℓ^3）表示 $I^{4n-1} \times \{1\}$ 的（$3n-1$）子流形，它通过将 S（a_ℓ^j）连接起来并进行缩放而得到，使其边界为 e_1 的第 ℓ 个分支闭包。

令 S_ℓ 为 I^{4n} 中通过闭合（$3n-1$）-流形得到的闭合（$3n-1$）-流形

$$(S(a_\ell^1) \natural S(a_\ell^2) \natural S(a_\ell^3)) \cup \widetilde{a}_\ell \cup -S(a_\ell^0) \subset I^{4n}$$

by g沿边界粘合（∂S（a_ℓ^0）$-$ Int a_ℓ^0）$\times I \subset \partial I^{4n-1} \times I$。（参见图38 .）

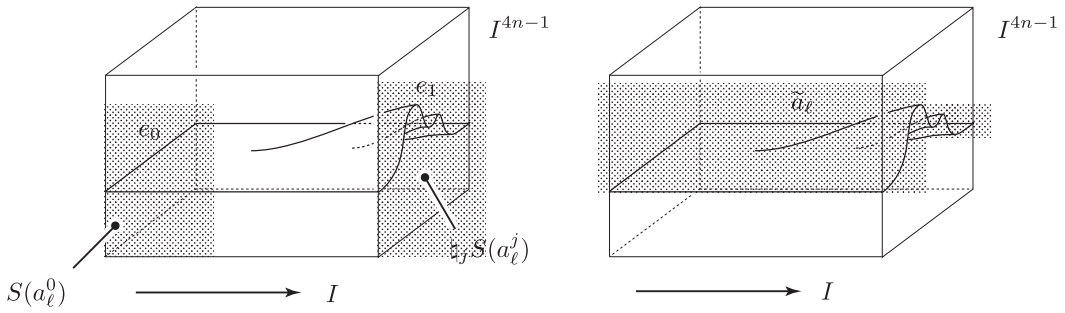


FIGURE 38.（$3n-1$）-流形 $\natural_j S$（a_ℓ^j）、S（a_ℓ^0）和 $\widetilde{a}_\ell$（$I^{4n-1} \times I$）。

对于整数 $\lambda > 0$，令 λS_ℓ 表示 I^{4n} 中定义的闭合 $(3n-1)$-流形，其定义方式与 S_ℓ 类似，但使用 λ 份 $S(a_\ell^1) \natural S(a_\ell^2) \natural S(a_\ell^3)$ 之和。以下命题是利用四价顶点手术计算构形空间积分的一项关键性质。

命题 A.1。 存在一个整数 $\lambda > 0$，使得对于每个 ℓ， λS_ℓ 这个 $(3n-1)$-流形都是某个紧致、带框架、定向的 $3n$-子流形 C_ℓ 的边界。该子流形位于 I^{4n} 中，并满足以下性质。

(1) $C_\ell \cap \widetilde{a}_m = \emptyset$ 若 $m \neq \ell$。(2) 代数四重交数 $\langle C_1, C_2, C_3, C_4\rangle$ 非零。

通过庞特里亚金–汤姆构造可以验证 λ 和子流形 C_ℓ 的存在性：利用障碍，检验从弦 $\widetilde{a}_1 \cup \widetilde{a}_2 \cup \widetilde{a}_3 \cup \widetilde{a}_4 \subset I^{4n}$ 的开管状邻域的补集 E 到 S^n 的（光滑）映射的延拓；该映射可能存在于 $H^{3n}(E, \partial E;\ \pi_{3n-1}(S^n))$ 和 $H^{4n}(E, \partial E;\ \pi_{4n-1}(S^n))$ 中。又由于 $\pi_{3n-1}(S^n)$ 和 $\pi_{4n-1}(S^n)$ 是有限的，它们在可能取有限个副本后会消失。因此，较为非平凡的部分是关于四重交数的陈述。

注 A.2。 流形 $S(a_\ell^1) \natural S(a_\ell^2) \natural S(a_\ell^3)$ 不应替换为沿零同伦通过同伦延拓从 $S(a_\ell^0)$ 诱导出的流形；在这种情形下，四重交为零。我们必须固定 IHX侧上的行为，以规范传播子。注意， $S(a_\ell^i)$ 可以显式取定。

感谢 Masamichi Takase 提出了以下引理。

引理 A.3。 设 $\lambda S_1, \lambda S_2, \lambda S_3, \lambda S_4 \subset I^{4n}$ 如上。假设

- $\lambda S_1, \lambda S_2, \lambda S_3, \lambda S_4$ 在 ∂I^{4n} 中横截相交（横截性见 *§10.2*），且只有二重交（没有三重交），
- 对每一对 (i, j)，交集 $\lambda S_i \cap \lambda S_j$ 是 ∂I^{4n} 中一个嵌入的 $(2n-1)$-球面，
- 对于每个 i，$(3n-1)$ 流形 λS_i 是某个 $3n$ 维子流形 $C_i \subset I^{4n}$ 的边界，
- C_i 之间的交处于一般位置。

设 $\langle C_1, C_2, C_3, C_4\rangle$ 为 C_1, C_2, C_3, C_4 之间四重交的代数数（按符号计数）。对于 $\{1,2,3,4\}$的任意划分 $\{\{i,j\},\{\ell,m\}\}$，有如下恒等式：

$$\langle C_1, C_2, C_3, C_4\rangle = \pm \mathrm{Lk}(\lambda S_i \cap \lambda S_j, \lambda S_\ell \cap \lambda S_m).$$

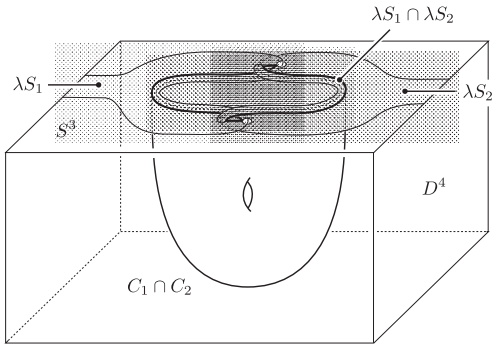


FIGURE 39. $n = 1$的例子。纽结 $\lambda S_1 \cap \lambda S_2$是曲面 $C_1 \cap C_2$在 I^4中的边界。

证明。 对于 $\{1,2,3,4\}$ 的一个划分 $P = \{\{i,j\},\{\ell,m\}\}$，$I^{4n}$ 的子流形 $C_i \cap C_j$ 和 $C_\ell \cap C_m$ 可能相交于有限个点，每个点都对应于 $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ 上 $\mathrm{Lk}(\lambda S_i \cap \lambda S_j,\ \lambda S_\ell \cap \lambda S_m)$ 发生变化的一个点。反过来， $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ 上的任意一点都可以视为 $\mathrm{Lk}(\lambda S_i \cap \lambda S_j,\ \lambda S_\ell \cap \lambda S_m)$ 的一个分岔点。注意，双曲面 $C_i \cap C_j$ 之间的交可能不是一般位置的；例如， $C_i \cap C_j$ 与 $C_\ell \cap C_m$ 的交可能恰好与 $C_i \cap C_\ell$ 和 $C_j \cap C_m$ 的交同时发生。由四重交点的局部模型（图 40）可知，在每个四重交点处，对于所有 P，$\mathrm{Lk}(\lambda S_i \cap \lambda S_j,\ \lambda S_\ell \cap \lambda S_m)$ 的数量都会发生变化。□

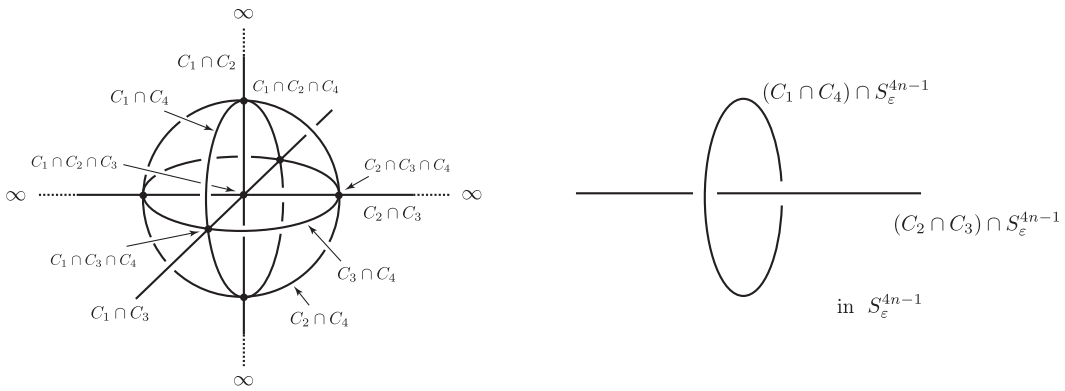


FIGURE 40. 与小的 $(4n-1)$-球面 $S_\varepsilon^{4n-1}\subset \mathrm{Int}\ I^{4n}$ 在 $C_1\cap C_2\cap C_3\cap C_3$中的一点附近的交 $(C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_3)\cap S_\varepsilon^{4n-1}$。链接数 $\mathrm{Lk}((C_i\cap C_j)\cap S_\varepsilon^{4n-1},\ (C_\ell\cap C_m)\cap S_\varepsilon^{4n-1})$ 对任意划分 $\{i,j\}\cup\{\ell,m\}=\{1,2,3,4\}$.) 都是 ±1

注 A.4. 引理 A.3 中关于 λS_i 之间的交不存在三重点这一假设实际上并非必要。如果存在三重点，那么双球面 $\lambda S_i\cap\lambda S_j$ 是浸入的，而且 $C_i\cap C_j$ 也同样是浸入的。

命题 *A.1* 的证明。如上所述，存在 I^{4n} 中的子流形 C_ℓ，使得 $\partial C_\ell=\lambda S_\ell$。不失一般性，假设 C_1、C_2、C_3、C_4之间的交为一般位置，且引理 A.3 的假设成立。于是根据引理 A.3 和 $\mathrm{Lk}(\lambda S_i\cap\lambda S_j$、$\lambda S_\ell\cap\lambda S_m)=\pm\lambda$（见图 37），可得 $C_1\cap C_2\cap C_3\cap C_4$ 的点数非零。□

注 A.5. 设 $\theta_i=\eta_{C_i}(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 为命题 A.1 中子流形 C_i of E 的 η-形式。设 θ_{ij} $(1\le i<j\le 4)$、θ_{ijk} $(1\le i<j<k\le 4)$ 和 $\theta_{ij,k}$ $(1\le i<j\le 4,\ 1\le k\le 4)$ 是 E 上次数分别为 $2n-1$、$3n-1$、$3n-2$ 的形式，使得

$$d\theta_{ij}=-\theta_i\wedge\theta_j,\qquad d\theta_{ijk}=-\theta_i\wedge\theta_j\wedge\theta_k,\qquad d\theta_{ij,k}=\theta_{ijk}-\theta_{ij}\wedge\theta_k,$$

其中，我们认为，对于置换 $\sigma\colon\{i,j,k\}\to\{i,j,k\}$，当$i<j<k$时有 $\theta_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}=(-1)^{n^2r}\theta_{ijk}$，而当 $\theta_{\sigma(i)}\wedge\theta_{\sigma(j)}\wedge\theta_{\sigma(k)}=(-1)^{n^2r}\theta_i\wedge\theta_j\wedge\theta_k$时，若 i、j、k 中至少有两个相同，则 $\theta_{ijk}=0$。形式 θ_{ij} 可表示为球面不交并 $C_i\cap C_j$（位于 I^{4n} 中，在边界 $C_i\cap C_j$ 附近作了修改）的张成圆盘的 η-形式；形式 θ_{ijk} 可表示为球面 $C_i\cap C_j\cap C_k$ 的张成圆盘的 η-形式；而 $\theta_{ij,k}$ 可表示为球面 $C_i\cap C_j\cap C_k$ 的两个张成圆盘之间的一个张成圆盘，分别对应 θ_{ijk} 和 $\theta_{ij}\wedge\theta_k$。设 $\mathbb{L}=\mathbb{L}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 是在 $\mathbb{R}$ 上由次数为 n 的变量 x_1,x_2,x_3,x_4 自由生成的 L_∞-代数，其中有 $\partial x_i=0$、$\partial[x_i,x_j]=0$ 和 $\partial[[x_i,x_j],x_k]=0$。设 $I^4\mathbb{L}$ 是由至少含 4 个输入的括号生成的 $\mathbb{L}$ 的子空间。定义 $\theta\in\Omega^*(E)\otimes\mathbb{L}/I^4\mathbb{L}$ 为

$$\theta=\sum_{1\le i\le 4}\theta_i x_i+\sum_{1\le i<j\le 4}\theta_{ij}[x_i,x_j]+\sum_{\substack{1\le i<j\le 4,\\ 1\le k\le 4}}\theta_{ij,k}[[x_i,x_j],x_k]$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le 4}\theta_{ijk}[x_i,x_j,x_k]\pmod{I^4\mathbb{L}}.$$

那么它满足毛雷尔–嘉当方程的一个版本：

$$d\theta-\partial\theta+\frac{1}{2!}[\theta,\theta]+\frac{1}{3!}[\theta,\theta,\theta]=0\pmod{I^4\mathbb{L}}.$$

这是一个与 S^3 中博罗梅安环的构造类似，见 [Hai, 例 3] .

Appendix B. Extending closed forms

引理 B.1. 设 M 是一个紧流形，且 D 是 M 的一个零余维紧子流形。假设在 D、M 上分别给定闭 i-形式 α、β。如果对于 S_i 中任意分片光滑的 i-循环 $c(D;\ \mathbb{R})$，以下恒等式成立：

$$\int_c \alpha = \int_c \beta,$$

那么存在 α 在 M 上的一个闭延拓，它与 β 上同调等价。

证明。令 $j\colon D \to M$ 为包含映射。假设意味着 $j^*[\beta] = [\alpha]$ 属于 $H^i(D;\ \mathbb{R})$，该空间通过积分 $\omega \leftrightarrow (c \mapsto \int_c \omega)$ 与 $\mathrm{Hom}(H_i(D;\mathbb{R})\ \mathbb{R})$ 等同。这表明 α 存在所需的延拓。□

Appendix C. The signs in the Jacobi identity

Le引理 C.1。对于 *§4.3* 中定义的三重括号，以下恒等式成立 :

$$\partial[a,b,c] = [[a,b],c] + (-1)^{pq+pr}[[b,c],a] + (-1)^{pr+qr}[[c,a],b].$$

证明。我们分别考虑 $\mathbb{R}^p$、$\mathbb{R}^q$、$\mathbb{R}^r$、$\mathbb{R}^s$ 的单位圆盘 D^p、D^q、D^r、D^s。我们取点t $=(1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$ $\in D^p$、 u $=(1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$ $\in D^q$、 v $=(1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$ $\in D^r$。我们考虑 $D^p \times D^q \times D^r \times D^s$ 中的胞腔$D^p \times D^q \times D^r = D^p \times D^q \times D^r \times \{0\}$。我们选择 $D^p \times D^q \times D^r$ 的以下定向：

$$o = \partial x_1 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_1 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_1 \wedge \cdots \wedge \partial z_r,$$

这里将 ∂_{x_1} 等简记为 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 等。由 o诱导的边界面定向如下：

(1) $\partial D^p \times D^q \times D^r$ at $(t,0,0)$: $\partial x_2 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_1 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_1 \wedge \cdots \wedge \partial z_r$
(2) $D^p \times \partial D^q \times D^r$ at $(0,u,0)$: $(-1)^p \partial x_1 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_2 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_1 \wedge \cdots \wedge \partial z_r$
(3) $D^p \times D^q \times \partial D^r$ at $(0,0,v)$: $(-1)^{p+q} \partial x_1 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_1 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_2 \wedge \cdots \wedge \partial z_r$

在 $\partial(D^p \times D^q \times D^r)$ 中的 $(p+q+r-2)$-循环 $[[a,b],c]$ 可由 $(p+q+r-2)$-流形 $\partial(D^p \times D^q) \times \partial D^r \cong S^{p+q-1} \times S^{r-1}$ 沿 $\mathrm{pt} \times S^{r-1}$附加一个 r-把手（其核为 D^r）得到。从 (3) 诱导的 $\partial(D^p \times D^q) \times \partial D^r$ 在 $(t,0,v)$ 处的定向为

$$(-1)^{p+q} \partial x_2 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_1 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_2 \wedge \cdots \wedge \partial z_r.$$

由于零同伦圆盘 $[a,b,c] \subset \partial(D^p \times D^q \times D^r)$ 与 $(D^p_{1-\varepsilon} \times D^q_{1-\varepsilon}) \times \partial D^r$互为补集，它的定向为

$$(-1)^{p+q-1} \partial x_2 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_1 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_2 \wedge \cdots \wedge \partial z_r$$

在 $(t,\ 0,\ v)$ 处。另一方面， $[a,b]$ 由球面 $\partial(D^p \times D^q)$ 表示，其定向$\partial x_2 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_1 \wedge \cdots \wedge \partial y_q$在 $(t,\ 0)$ 处为 $\in \partial D^p \times D^q$。设 $U^{p+q-1} \subset \partial(D^p \times D^q)$ 为 $(p+q-1)$-胞腔。那么，由球面 $\partial(U^{p+q-1} \times D^r)$ 表示的循环 $[[a,b],c]$ 具有如下定向

$$(-1)^{p+q-1} \partial x_2 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_1 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_2 \wedge \cdots \wedge \partial z_r$$

在 $(t,\ 0,\ v)$ 处。这给出了 $[[a,b],c]$的系数 1。

在 $\partial(D^p \times D^q \times D^r)$ 中，$(p+q+r-2)$-循环 $[[b,c],a]$ 可由 $(p+q+r-2)$-流形 $\partial D^p \times \partial(D^q \times D^r) \cong S^{p-1} \times S^{q+r-1}$ 沿着$S^{p-1} \times$ 点附加一个 p-把手（以 D^p 为核）得到。在 (1) 中诱导出的 $\partial D^p \times \partial(D^q \times D^r)$ 在 $(t,\ u,\ 0)$ 处的定向为

$$(-1)^{p-1} \partial x_2 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_2 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_2 \wedge \cdots \wedge \partial z_r.$$

由于零同伦圆盘 $[a,b,c] \subset \partial(D^p \times D^q \times D^r)$ 与 $\partial D^p \times (D^q_{1-\varepsilon} \times D^r_{1-\varepsilon})$ 互为补集，它的定向为

$$(-1)^{p} \partial x_2 \wedge \cdots \wedge \partial x_p \wedge \partial y_2 \wedge \cdots \wedge \partial y_q \wedge \partial z_2 \wedge \cdots \wedge \partial z_r$$

在 $(t,\ u,\ 0)$ 处。另一方面，由球面 $\partial(D^q\times D^r)$ 表示的 $[b,c]$ 在 $(v,\ 0)\in\partial D^q\times D^r$ 处具有定向 $\partial y_2\wedge\cdots\wedge\partial y_q\wedge\partial z_1\wedge\cdots\wedge\partial z_r$。令 $U^{q+r-1}\subset\partial(D^q\times D^r)$ 为 $(q+r-1)$-胞腔。那么，由球面 $\partial(U^{q+r-1}\times D^p)$ 表示的循环 $[[b,c],a]$ 的定向为

$$\begin{aligned}&(-1)^{q+r-1}\partial y_2\wedge\cdots\wedge\partial y_q\wedge\partial z_1\wedge\cdots\wedge\partial z_r\wedge\partial x_2\wedge\cdots\wedge\partial x_p\\&=(-1)^{p(q+r-1)}\partial x_2\wedge\cdots\wedge\partial x_p\wedge\partial y_2\wedge\cdots\wedge\partial y_q\wedge\partial z_1\wedge\cdots\wedge\partial z_r\end{aligned}$$

在 $(t,\ u,\ 0)$ 处。这给出了 $[[b,c],a]$ 的系数 $(-1)^{p(q+r-1)}(-1)^p=(-1)^{pq+pr}$。

在 $\partial(D^p\times D^q\times D^r)$ 中的 $(p+q+r-2)$-循环 $[[c,a],b]$，可通过沿点 $\times S^{q-1}$ 附加一个 q-把手（以 D^q 为核）到 $(p+q+r-2)$-流形 $\partial(D^r\times D^p)\times\partial D^q\cong S^{r+p-1}\times S^{q-1}$ 上得到。由 (2) 诱导的 $\partial(D^r\times D^p)\times\partial D^q$ 在 $(0,\ t,\ u)$ 处的定向为

$$(-1)^p\partial x_2\wedge\cdots\wedge\partial x_p\wedge\partial y_2\wedge\cdots\wedge\partial y_q\wedge\partial z_1\wedge\cdots\wedge\partial z_r.$$

由于零同伦圆盘 $[a,b,c]\subset\partial(D^p\times D^q\times D^r)$ 与 $(D^r_{1-\varepsilon}\times D^p_{1-\varepsilon})\times\partial D^q$ 互为补集，因此其定向为

$$(-1)^{p-1}\partial x_2\wedge\cdots\wedge\partial x_p\wedge\partial y_2\wedge\cdots\wedge\partial y_q\wedge\partial z_1\wedge\cdots\wedge\partial z_r$$

在 $(0,\ t,\ u)$ 处。另一方面，$[c,a]$ 由球面 $\partial(D^r\times D^p)$ 表示，其在 $(0,\ t)\in D^r\times\partial D^p$ 处的定向为 $(-1)^{pr}\partial x_2\wedge\cdots\wedge\partial x_q\wedge\partial z_1\wedge\cdots\wedge\partial z_r$。令 $U^{p+r-1}\subset\partial(D^r\times D^p)$ 为 $(p+r-1)$-胞腔。那么，循环 $[[c,a],b]$ 由球面 $\partial(U^{p+r-1}\times D^q)$ 表示，其定向为

$$\begin{aligned}&(-1)^{pr}(-1)^{p+r-1}\partial x_2\wedge\cdots\wedge\partial x_p\wedge\partial z_1\wedge\cdots\wedge\partial z_r\wedge\partial y_2\wedge\cdots\wedge\partial y_q\\&=(-1)^{pr+qr+p-1}\partial x_2\wedge\cdots\wedge\partial x_p\wedge\partial z_1\wedge\cdots\wedge\partial z_r\wedge\partial y_2\wedge\cdots\wedge\partial y_q\end{aligned}$$

在 $(0,\ t,\ u)$ 处。这给出了 $[[c,a],b]$ 的系数 $(-1)^{pr+qr+p-1}(-1)^{p-1}=(-1)^{pr+qr}$。 □

引理 C.2。

$$\begin{aligned}&[b,a,c]=(-1)^{pq}[a,b,c],\quad [a,c,b]=(-1)^{qr}[a,b,c],\quad [c,b,a]=(-1)^{pq+pr+qr}[a,b,c],\\&[c,a,b]=(-1)^{qr+pr}[a,b,c],\quad [b,c,a]=(-1)^{pq+pr}[a,b,c].\end{aligned}$$

换言之，$[-,-,-]$ 在分次意义下是对称的。

证明。由三重括号的构造可知，用于定义 $[a,b,c]$ 的零同伦圆盘在因子置换下是对称的，但符号可能相反。对等式两边取边界，再应用引理 C.1，即可得到本引理中的关系。□

References

[AT] G. Arone, V. Turchin, *On the rational homology of high-dimensional analogues of spaces of long knots*, 《几何与拓扑》18 (2014)，第 3 期，1261–1322。[BBGC] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, *The polyhedral product functor: A method of decomposition for moment-angle complexes arrangements and related spaces* **225** 2010 1634 1668 ，《数学进展》（），–。[BNM] D. Bar-Natan, B. McKay, *Graph Cohomology - An Overview and Some Computations*, 草稿，2001。[BHV] L.J. Billera, S.P. Holmes, K. Vogtmann, *Geometry of the Space of Phylogenetic Trees*, 《数学进展应用》27 (2001)，733–767。[BoaW] P. Boavida de Brito, M. Weiss, *Spaces of smooth embeddings and configuration categories*, 《拓扑学杂志》11 (2018)，第 1 期，65–143。[BW] B. Botvinnik, T. Watanabe, *Families of diffeomorphisms and concordances detected by trivalent graphs*, 《拓扑学杂志》16 (2023)，第 1 期，207–233。[BWII] B. Botvinnik, T. Watanabe, *Brunnian links and Kontsevich graph complex II*, 准备中。[Br] F. Brown, *Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$*, 《数学年刊》175 (2) (2012)，949–976。[BrWi] S. Brun, T. Willwacher, *Graph homology computations*, 纽约数学杂志 30 (2024)，58–92。[BG] R. Budney, D. Gabai, *Knotted 3-balls in S^4*, arXiv:1912.09029。[CST] J. Conant, R. Schneiderman, P. Teichner, *Jacobi identities in low-dimensional topology*, Compos. Math. 143 (2007)，第 3 期，780–810。[CFS] D. Crowley, S. Ferry, M. Skopenkov, *The rational classification of links of codimension >2*, 《数学论坛》26 (2014)，第 1 期，239–269。

[Du] D. Dugger, *A primer on homotopy colimits*, https://pages.uoregon.edu/ddugger/hocolim.pdf
[ ] *Long knots and maps between operads* **16** 2012 2, 919 955 DH W.
[ ] *On the rational homotopy groups of the diffeomorphism groups of discs*
Dwyer, K. Hess, .《几何与拓扑》（），第 – 期 FH F.T. Farrell, W.C. Hsiang, , *spheres*
and aspherical manifolds ，《代数与几何拓扑》（1976 年于加利福尼亚州斯坦福大学举行的纯数学研讨会论文集），第 1 部分，纯数学研讨会论文集第 XXXII 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1978 年，第 325–337 页。[FHT] Y. F´elix, S. Halperin, J-C. Thomas, 《有理同伦论》，数学研究生教材第 205 卷，Springer-Verlag，纽约，2001 年，xxxiv+535 页。[FTW] B. Fresse, V. Turchin, T. Willwacher, *The rational homotopy of mapping spaces of E_n operads*, arXiv:1703.06123。[GGP] S. Garoufalidis, M. Goussarov, M. Polyak, *Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds*, 《几何与拓扑》5 (2001)，75–108。[GO] S. Garoufalidis, T. Ohtsuki, *On finite type 3-manifold invariants. III. Manifold Weight Systems*, 《拓扑学》37 (1998)，第 2 期，227–243。[Go] T. Goodwillie, *A multiple disjunction lemma for smooth concordance embeddings*, 美国数学会回忆录第 86 卷，第 431 号，1990 年。[GKW] T. Goodwillie, J. Klein, M. Weiss, *Spaces of smooth embeddings, disjunction and surgery*, 《手术理论综述》第 2 卷，221–284。数学年刊研究丛书第 149 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2001 年。[Gou] M. Goussarov, *Finite type invariants and n-equivalence of 3-manifolds*, 巴黎科学院通讯，第一辑，数学 329 (1999)，第 6 期，517–522。[Hab] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, 《几何与拓扑》4 (2000)，1–83。[Hab2] K. Habiro，私人通信。[HW] K. Habiro, T. Widmer, *Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds*, 《拓扑学杂志》10 (2017)，第 2 期，585–631。[Hae] A. Haefliger, *Enlacements de sphères en codimension supériure à 2*, 《数学评论通讯》41 (1966/67)，51–72。[Hai] R.M. Hain, *Iterated integrals, intersection theory and link groups*, 《拓扑学》24 (1985)，第 1 期，45–66。[Hil] P.J. Hilton, *On the homotopy groups of the union of spheres*, 《伦敦数学学会杂志》30 (1955)，154–172。[Hut] M. Hutchings, *Lecture notes on Morse homology (with an eye towards Floer theory and pseudoholomorphic curves)* 2002 ，秋季 . [KKV20]
R. Komendarczyk, R. Koytcheff, I. Voli
´ *Diagram complexes formality and configuration space integrals* c, , , ,《季刊数学 *for spaces of braids* **71** 2020 2, 729 779
杂志》（），第 – 期。[KKV24] R. Komendarczyk, R. Koytcheff, I. Voli
´ *Diagrams for primitive cycles in spaces of pure braids and string* c, ,《格勒诺布尔 *links* **74** 2024 4, 1745 1807
傅里叶研究所年刊》（）第 – 期。[Kon] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, 《第一届欧洲数学大会》，第 II 卷（巴黎，1992），数学进展丛书第 120 卷（Birkhauser，巴塞尔，1994），97–121。[Kos24a] D. Kosanovi
´ *Embedding calculus and grope cobordism of knots* **451** 2024 109779, c, ,《数学进展》 118
（），论文编号，第 页。[Kos24b] D. Kosanovi´c, *Knotted families from graspers*, 《拓扑学杂志》17 (2024)，第 2 期，论文编号 e12337，共 42 页。[Koy] R. Koytcheff, *Graphing, homotopy groups of spheres, and spaces of long links and knots*, 《数学论坛：Sigma》13:e35 (2025)，1–42。[KMV] R. Koytcheff, B. Munson, I. Voli
´ *Configuration space integrals and the cohomology of the space of homotopy* c, ,《结理论 *string links* **22** 2013 11, 1350061, 73
及其分支》，（），第 期。[KrRW] M. Krannich, O. Randal-Williams, *Diffeomorphisms of discs and the second Weiss derivative of B*拓扑空间范畴(–), arXiv:2109.03500。[KRW] A. Kupers, O. Randal-Williams, *On diffeomorphisms of even-dimensional discs*, 《美国数学会杂志》38 (2025)，63–178。[LX] J. Lin, Y. Xie, *Configuration space integrals and formal smooth structures*, arXiv:2310.14156。[Lo] R. Longoni, *Nontrivial classes in $H^*(\mathrm{Imb}(S^1,\mathbb{R}^n))$ from nontrivalent graph cocycles*, 《国际几何方法与数学物理杂志》1 (2004)，639–650。[MS] M. Markl, S. Shnider, *Coherence constraints for operads, categories and algebras*, 《第 20 届冬季“几何与物理”学校论文集》（Srn ´ 2000 2 2001 66, 29 57
ı, ），巴勒莫数学环学报（），增刊（），第 – 期。[MSS] M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff, 《代数、拓扑与物理中的算子序列》。数学调查专著第 96 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002 年。x+349 页。[Ma] W.S. Massey, *Higher order linking numbers*, 1969 年代数拓扑会议（1968 年于伊利诺伊大学芝加哥环城分校举行），第 174–205 页。[Mat] S. Matveev, *Generalized surgery of three-dimensional manifolds and representation of homology spheres*, 《科学院数学通讯》42 (1988)，651–656。[May] J.P. May, 《迭代环空间的几何》，数学讲义第 271 卷，Springer-Verlag，柏林，1972 年，第 viii+175页。

[MM] J.W. Milnor、J.C. Moore, *On the Structure of Hopf Algebras*, 《数学年刊》（第 2 辑），81（1965），211–264。[MV] B. Munson、I. Volic, 《立方同伦论》，新数学专著丛书 28，剑桥大学出版社，2015 年，625 页。[NT] M. Nakaoka、H. Toda, *On Jacobi identity for Whitehead products*, 《大阪市立大学工业高等专门学校学报》A 辑 5（1954），1–13。[Oh96] T. Ohtsuki, *Finite type invariants of integral homology 3-spheres*, 《结理论及其分支》5（1996），101–115。[Oh02] T. Ohtsuki, 《量子不变量：纽结、3 维流形及其集合研究》，《纽结与万物》丛书 29，世界科技出版公司，新泽西州里弗埃奇，2002 年。xiv+489 页。[PS] E. Pelatt 和 D.P. Sinha, *A geometric homology representative in the space of knots*, 《流形与 K理论》，《当代数学》682，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017 年，第 167–188 页。[Sa] K. Sakai, *Nontrivalent graph cocycle and cohomology of the long knot space*, 《代数几何与拓扑》8（3）（2008），1499–1522。[STT] P.A. Songhafouo Tsopm´en´e、V. Turchin, *Rational homology and homotopy of high-dimensional string links*, 《数学论坛》30（2018），第 5 期，1209–1235。[St] J. Stasheff, *L-infinity and A-infinity structures*, 《高阶结构》3（1）（2019），292–326。[UM] H. Uehara、W.S. Massey, *The Jacobi identity for Whitehead products.Algebraic geometry and topology*。纪念 S. Lefschetz 的研讨会，361–377，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1957 年。[Wa09] T. Watanabe, *On Kontsevich's characteristic classes for higher dimensional sphere bundles I: The simplest class* **262** 2009 3, 683 712 *II: Higher classes* **2** 2009 624 660 , 《数学杂志》（），第 – 期。，《拓扑学杂志》（），–。[Wa18] T. Watanabe, *Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of* Diff(S^4), arXiv:1812.02448。[Wa21] T. Watanabe, *Addendum to: Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of* Diff(S^4) *(homological interpretation)*, arXiv:2109.01609。[Wa22] T. Watanabe, *Corrigendum to the article: On Kontsevich's characteristic classes for higher-dimensional sphere bundles II: Higher classes* **15**, 1, 2022 347 357 , 《拓扑学杂志》第（）期，-。[We] M.S. Weiss, *Rational Pontryagin classes of Euclidean fiber bundles*, 《几何与拓扑》25（7）（2021），3351–3424。[Wi] T. Willwacher, *M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck-Teichmüller Lie algebra*, 《数学发明》200（2015），第 3 期，671–760。[WZ] T. Willwacher、M. ˇZivkovi´c, *Multiple edges in M. Kontsevich's graph complexes and computations of the* c, , 《数学进展》*dimensions and Euler characteristics* **272** 2015 553 578（），–。

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR, 97405, USA
Email address: botvinn@uoregon.edu

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
Email address: tadayuki.watanabe@math.京都-u.ac.jp