arXiv:2601.08249v1 [math.RA] 13 Jan 2026

旁微分 Rota-Baxter 代数¨及其基于 Gröbner-Shirshov基的自由对象

Li Guo、Aniruddha Talele、Shilong Zhang 和 Shanghua Zheng

摘要。由微积分基本定理（FFTC）联系起来的导子与积分的代数化表述，导出了微分 Rota-Baxter 代数这一概念。该概念具有一系列显著的范畴性质，涉及微分算子和 Rota-Baxter 算子的（余）扩张、单子与余单子的提升，以及混合分配律。反过来，将这些性质作为公理，则得到一类称为旁微分 Rota-Baxter 代数的代数结构。

本文系统研究旁微分 Rota-Baxter 代数。在介绍其基本性质以及来自 Hurwitz 级数和差分代数的例子之后，本文为旁微分 Rota-Baxter 代数建立 Gröbner-Shirshov基理论。随后，给出了自由副微分罗塔-贝克代数的显式构造。

目录

1. 引言 2 1.1. 源于 FFTC 的代数结构 2 1.2. FFTC 及相关结构的范畴性质 2 1.3. FFTC 型代数的研究与本文布局 4 2. 旁微分 Rota-Baxter 代数 4 2.1. 旁微分 Rota-Baxter 代数的分类 4 2.2. 由 Hurwitz 级数得到的旁微分 Rota-Baxter 代数 5 2.3. 旁微分 Rota-Baxter 代数与内（差分）代数 8 3. 带算子代数的单项式序与 Gr¨obner-Shirshov 基 9 3.1 自由算子代数 9 3.2. 算子多项式恒等式 11 3.3. $S_\Omega(Z)$ 上的一个单项式序 12 3.4. Gr¨obner-Shirshov 基 16 4. 旁微分 Rota-Baxter 代数的 Gr¨obner-Shirshov 基 17 5. 自由非交换旁微分 Rota-Baxter 代数 20 5.1. 自由旁微分 Rota-Baxter 代数的线性基 20 5.2. I 型和 II 型旁微分 Rota-Baxter 代数的显式构造 22 5.3. III 型自由旁微分 Rota–Baxter 代数的显式构造 26 参考文献 27

日期：2026年1月14日。2020 数学主题分类17B38,16Z10,18C15, 13N99, 16S10, 16W99。关键词和短语微分 Rota-Baxter 代数，Rota-Baxter 代数，微分代数，微积分第一基本定理，Gr¨obner-Shirshov 基，自由代数，单子。1

1. 引言

本文系统研究了一类源于微分与积分分析、并通过微积分基本定理（FFTC）相互关联的代数结构，随后利用范畴性质对其进行刻画。通过 Gr¨obner-Shirshov 基的方法构造了自由对象。

1.1. **来自 FFTC 的代数结构**。分析的代数研究有着悠久而丰富的历史。在其具有里程碑意义的著作 [36]中，一个世纪前，Ritt 引入了微分代数，为微分分析和微分方程提供了一个代数框架。微分代数是一个结合代数 R，配备了一个线性算子 d，满足以下 Leibniz 法则。

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) \quad \text{for all} \quad x,\ y \in R. \tag{1}$$

经过包括 Kolchin、Kaplansky 和 Singer 在内的众多数学家的贡献，微分代数已发展成为一个涵盖微分伽罗瓦群、微分代数群和微分代数几何的重要领域。该领域还在数论、逻辑以及数学定理的机械化证明中得到应用 [29, 39, 41]。

作为差商 $(f(x+\lambda)-f(x))/\lambda$（其中标量$\lambda$非零）的代数抽象，微**分权为** λ [21] 的算子定义为满足以下方程

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) + \lambda d(x)d(y) \quad \text{for all} \quad x,\ y \in R \tag{2}$$

且$d(\mathbf{1}_R) = 0$。

另一方面，积分分析的代数抽象源于 G. Baxter 在 1960 [4] 中对概率论的研究。一种巴克斯特代数，后来称为**Rota-Baxter 代数**，定义为一个代数R，并配备一个线性算子P，满足以下单位元:

$$P(x)P(y) = P(P(x)y) + P(xP(y)) + \lambda P(xy) \quad \text{for all} \quad x,\ y \in R. \tag{3}$$

其中，λ 是一个固定常数，称为 Rota-Baxter 算子的**权**。当 $\lambda = 0$时，该单位元恰好是特殊情形下的分部积分公式。

继 Cartier 和 Rota [11, 38] 在组合学领域的开创性工作之后，Rota-Baxter 代数近期的迅速发展已促成了广泛应用，其范围从数论中的多重 ζ 值到微扰量子场论的重整化 [2, 14, 19, 20, 25, 37, 38]。

微分算子和积分算子通过著名的微积分第一基本定理（FFTC）相互关联。作为 FFTC 的代数抽象，带权 λ 的**微**分**Rota-Baxter 代数**的概念由 [21] 引入，它是一个三元组（R，d，P），满足

(i) (R,d) 是权为 λ 的微分代数，(ii) (R,P) 是权为 λ 的 Rota-Baxter 代数，(iii) 以下 FFTC 的代数抽象

$$dP = \mathrm{id}_R \text{ 成立。} \tag{4}$$

微分 Rota-Baxter 代数的一种变体是积分微分代数，相关研究见 [16, 22, 37]。

1.2. **FFTC 的范畴性质及相关结构**。将 FFTC 抽象为微分 Rota-Baxter 代数，使得对分析的进一步代数研究成为可能。沿着这一思路，[42, 43, 44], 开展了范畴方法的研究，并由此引出了本文将要研究的抛微分 Rota-Baxter 代数。

为充分说明研究这一主题的合理性，下面我们将概述范畴论研究 [42, 43, 44], 吸引了组合学、微分代数、概率论和计算机科学领域的关注 [5, 12, 15, 27, 40]。不关心研究动机的读者可以直接跳到第1.3节。

范畴论研究 [42, 43, 44] 分三个阶段进行，每篇文章对应一个阶段。

1.2.1. 阶段 *1*：*FFTC* 的范畴蕴含。 其中 [42]的发现是：将 FFTC 抽象为微分 Rota-Baxter 代数这一自然的代数结构，在单子的提升和混合分配律方面具有重要的范畴蕴含。

为概述 [42], 中的主要结果，我们固定一个代数 A。令 $A^{\mathbb{N}}$ 表示在 A [28, 21]上的 Hurwitz 级数代数。赋予自然的微分算子 ∂_A后，$A^{\mathbb{N}}$ 是 A上的余自由微分代数。在范畴意义下，存在一个给出微分代数的余单子 $\mathbf{C}$。另一方面，令 $\text{Ш}(A)$ 表示可混洗乘积代数 [20]。随后赋予自然定义的 Rota-Baxter 算子 P_A，则有序对（$\text{Ш}(A)$，P_A）是 A上的自由 Rota-Baxter 代数。这导出了一个给出 Rota-Baxter 代数的单子 $\mathbf{T}$。在 [21], 中，A 上的微分算子可唯一延拓为 $\text{Ш}(A)$ 上的微分算子，从而将 $\text{Ш}(A)$ 丰富为微分 Rota-Baxter 代数，得到 A上的自由微分 Rota-Baxter 代数。这被解释为单子 $\mathbf{T}$ 的提升。反过来，A 上的 Rota-Baxter 算子可唯一延拓为 $A^{\mathbb{N}}$上的 Rota-Baxter 算子，再次将 $A^{\mathbb{N}}$ 丰富为微分 Rota-Baxter 代数，从而得到 A上的余自由微分 Rota-Baxter 代数。这意味着存在余单子 $\mathbf{C}$ 的提升。此外，通过这一提升，我们得到单子 $\mathbf{T}$ 在余单子 $\mathbf{C}$ 上的分配律，反之亦然。

总之，通过 FFTC 将微分算子与 Rota-Baxter 算子耦合，具有以下性质。

性质1.1.（FFTC 范畴性质）：

(i) 微分算子的扩张，(ii) *Rota-Baxter* 算子的余扩张（覆盖），(iii) 余单子 $\mathbf{C}$ 的提升，(iv) 单子 $\mathbf{T}$的提升，(v) 存在 $\mathbf{C}$ 上 $\mathbf{T}$ 的混合分配律。

1.2.2. 阶段 *2*：其他约束下的 *FFTC* 范畴性质。 由 FFTC 定义的微分 Rota-Baxter 代数具有上述丰富的范畴性质，这自然引出一个问题：是否存在 FFTC 的类似构造，也能满足性质1.1中的 FFTC 范畴性质?

为回答这个问题， [42] 在 [43] 开展了后续研究。其中，FFTC 中的算子恒等式被视为关于两个非交换变量 x、y 的多项式恒等式，其中 x、y 分别表示微分算子和 Rota-Baxter 算子。于是，多项式 $\omega = \omega(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{k}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$ 被视为代数 R 上微分算子 $\mathrm{x} = \mathrm{d}$ 与 Rota-Baxter 算子 $\mathrm{y} = \mathrm{P}$ 之间的约束；取 $\omega(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{xy} - 1$ 时，便得到式（4）中的 FFTC。一般而言，若 $\mathrm{x} = \mathrm{d}$ 与 $\mathrm{y} = \mathrm{P}$ 满足由 $\omega(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ 给出的约束，则称三元组 (R, d, P) 为 ω 型抛微分 Rota-Baxter 代数。

一个重要的发现是 [43] 对于某个约束 ω在

$$\Omega := xy + \mathbf{k}[x] + y\mathbf{k}[x] = \{xy - (\phi(x) + y\psi(x)) \,|\, \phi, \psi \in \mathbf{k}[x]\}, \tag{5}$$

性质1.1 中的 FFTC 范畴性质实际上彼此等价。换句话说，某一给定类型的偏微分Rota-Baxter 代数 ω要么满足所有这些性质，要么一个也不满足。精确表述见 [43, 定理 3。15] 。

1.2.3. 阶段*3*：*FFTC* 类型代数结构的分类。 研究的下一阶段在 [44]，中开展，旨在明确确定满足任一（因而也满足所有）FFTC 范畴性质的类型 $\omega \in \Omega$。

考虑 Ω 的以下两个子集:

(6) $\Omega_0 := \{xy - a_0 \mid a_0 \in \mathbf{k}\} \cup \{xy - (by + yx) \mid b \in \mathbf{k}\}, \quad \Omega_{\mathbf{k}} := \{xy, xy - 1, xy - yx\}.$

文献表明[44]，对于 $\omega \in \Omega$，若类型为ω 抛微分Rota-Baxter 代数的权为零（分别地，权为任意值），那么它具有性质1.1 中任意一个、因而也就是全部 FFTC 范畴性质，当且仅当 ω 属于Ω_0 （分别地，属于 $\Omega_{\mathbf{k}}$）。

1.3. **FFTC 型代数的研究及本文结构**。由于式（ω 6）中分类的类型微分Rota-Baxter 代数具有与微分Rota-Baxter 代数相同的范畴性质，因此值得像微分Rota-Baxter 代数那样进行深入研究；相关研究始于 [21]。这正是本文的目的。

本文以下所称的**抛微**分**Rota-Baxter代数**，均指类型为 ω 且 ω 属于 Ω_0 或 $\Omega_{\mathbf{k}}$ 的抛微分 Rota-Baxter 代数。

以下是本文的结构概述。

第 2 节在定义 2.1 中将副微分 Rota-Baxter 代数分为三类。随后，我们给出由 Hurwitz 级数和差分代数得到的副微分 Rota-Baxter 代数的一些性质和例。

第 3 节介绍了一种针对本文研究而设计的新单项式序（命题3.16），并讨论了带算子代数的 Gr¨obner-Shirshov 基（定理3.20）。

第 4 节应用第 3 节中的一般理论，得到副微分 Rota-Baxter 代数的 Gr¨obner-Shirshov 基（定理4.1）。

第 ¨节中的副微分 Rota-Baxter 代数的 Gröbner-Shirshov 基为自由（非交换）副微分 Rota-Baxter 代数提供了线性基。第 4 节具体定义了乘法、微分算子和 Rota-Baxter 算子，从而为自由副微分 Rota-Baxter 代数提供了显式构造（定理5.8 和 5.10）。

记号。本文始终固定一个带单位元的交换环**k** 以及一个元素$\lambda \in \mathbf{k}$。除非另有说明，本文研究带单位元的结合**k**-代数范畴，其中的代数可以带线性算子，也可以不带。所有算子和张量积也都取在**k**上。因此，除非省略**k** 会引起歧义，否则将不再特别注明。记 $\mathbb{N}$ 表示自然数的加法幺半群 $\{0, 1, 2, 。 . .\}$ 以及 $\mathbb{N}_+ = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$ 正整数。

2. 抛微分 Rota-Baxter 代数

我们首先将抛微分 Rota-Baxter 代数分为三类，稍后将在本文中对其进行更深入的研究。然后，我们给出这些抛微分 Rota-Baxter 代数的一些性质和例子，它们来自 Hurwitz 级数和内代数。

2.1. **抛微分 Rota-Baxter 代数的分类**。如前所述，抛微分 Rota-Baxter 代数是一个代数 R，其配备了一个微分算子 d 和一个 Rota-Baxter 算子 P，二者的权为 λ，使得 d 和 P 满足集合 Ω_0 中的某个算子恒等式（当 $\lambda = 0$ 且 $\Omega_{\mathbf{k}}$ 对于任意 $\lambda \in \mathbf{k}$ 在式 (6) 中时：

(7) $\Omega_0 := \{dP - a_0\mathrm{id} \mid a_0 \in \mathbf{k}\} \cup \{dP - (bP + Pd) \mid b \in \mathbf{k}\}, \quad \Omega_{\mathbf{k}} := \{dP, dP - \mathrm{id}, dP - Pd\}.$

为了更有针对性、更加统一地研究旁微分Rota-Baxter代数，我们首先进行初步分析并对其分类。

首先考虑 dP –id 在 $\Omega_{\mathbf{k}}$ 的情形，它对应于微积分基本定理，并且已在 [21]中得到系统处理。接下来考虑 dP –$a$id 在 Ω_0 且 $a \in \mathbf{k}$的情形。在此情况下，权为零。当 a 非零时，该关系等同于 $a^{-1}dP$ – id。由于

$a^{-1}d$ 仍然是一个零权微分算子，因此我们可以归结到先前已经处理过的 $dP = \mathrm{id}$ 情形。当 $a = 0$时，我们有 $dP = 0$，与我们将要考虑的其他情形相比，这种情况非常退化。排除这些已处理或平凡的情形后，剩下需要考虑的算子多项式为

$$dP - Pd - bP, \quad b \in \mathbf{k}, \tag{8}$$

其中，当$b \neq 0$时，我们还要求 $\lambda = 0$。

因此，我们的研究将聚焦于以下三种类型的抛微分 Rota-Baxter 代数。

定义 2.1. 设 $\omega = dP - Pd - bP$ 如式（8）所示。称 I 型 ω 抛微分Rota-Baxter 代数为

（i）若算子d 和P 的权为$\lambda = 0$，且$b = 0$；（ii）若 d 和P 的权为 $\lambda \neq 0$，且$b = 0$；（iii）若d 和P 的权为 $\lambda = 0$，且$b \neq 0$。

显然，允许任意 $\lambda \in \mathbf{k}$，即可将 I 型与 II 型合并；允许任意 $b \in \mathbf{k}$，即可将 I 型与 III 型合并。虽然在大多数研究中，合并 I 型与 II 型很方便；但对于研究的某些其他方面，例如第 4 节的 Gr¨obner-Shirshov 基，则有必要分别考虑这三种互不相交的情形。

2.2. Hurwitz 级数构造的抛微分 Rota-Baxter 代数。设 A 为一个代数，令 $\mathrm{A}^{\mathbb{N}}$表示函数 $\mathrm{f}: \mathbb{N} \to \mathrm{A}$ 的 k-模。我们也将 $\mathrm{f} \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ 视为一个序列 $(\mathrm{f}_n) = (\mathrm{f}_0, \mathrm{f}1, \cdots)$，其中 $\mathrm{f}_n \in \mathrm{A}$，且对所有 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$，有 $\mathrm{f}_n := \mathrm{f}(\mathrm{n})$。然后，$\mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ 上的运算按分量定义。根据 [21], ，$\mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ 上的 λ-Hurwitz 乘积定义为

$$(fg)_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \lambda^k f_{n-j} g_{k+j}, \quad f, g \in R^{\mathbb{N}}. \tag{9}$$

定义一个线性映射

$$\partial_A : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}, \ \partial_A(f)_n = f_{n+1}, \quad f \in A^{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}.$$

命题 2.2。 ([21, 命题 2.7]) 对于代数 A，算子代数 $(A^{\mathbb{N}}, \partial_A)$ 是权为 λ的微分代数。

以下结果给出了一类抛微分 Rota-Baxter 代数。

命题 2.3。 设 (A, P) 是权为 λ 的 *Rota-Baxter* 代数，且 $(A^{\mathbb{N}}, \partial_A)$ 是权为 λ的微分代数。

(i) 设 $\lambda \in \mathbf{k}$ 且 $b = 0$。定义一个线性映射

$$\widehat{P} : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}, \quad \widehat{P}(f) := (P(f_0), P(f_1), P(f_2), \cdots), \ \textit{that is,} \ \widehat{P}(f)_n := P(f_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

Then the triple $(A^{\mathbb{N}}, \partial_A, \widehat{P})$ is a para-differential Rota-Baxter algebra of type I when $\lambda = 0$ or type II when $\lambda \neq 0$.

(ii) 设 $\lambda = 0$且 $b \neq 0$。定义

$$\widehat{P} : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}, \quad (\widehat{P}(f))_n := \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} b^{n-s} P(f_s). \tag{10}$$

则三元组（$A^{\mathbb{N}}$， ∂_A， $\widehat{\ }P$）是*I*型偏微分 *Rota-Baxter* 代数 *II.*

证明。 (i) 对于所有 $f \in A^{\mathbb{N}}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们计算

$$(\partial_A \widehat{P})(f) = (P(f_1), P(f_2), \cdots) = (\widehat{P}\partial_A)(f),$$

这就建立了交换关系：

$$\partial_A \widehat{P} = \widehat{P}\partial_A. \tag{11}$$

为了验证 P 是权 λ 的 Rota-Baxter 算子，我们对 $m \geq 0$ 使用归纳法，证明对所有 f、$g \in A^{\mathbb{N}}$ 均有：

$$(\widehat{P}(f)\widehat{P}(g))_m = (\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g) + \lambda fg))_m. \tag{12}$$

对于 $m = 0$ 的基础情形，由于 P 是 A 上权为 λ 的 Rota-Baxter 算子，故该恒等式成立。假设该恒等式对 $m = k$ 成立。那么对于 $m = k + 1$，我们计算得：

$$\begin{aligned}
&\left(\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g) + \lambda fg)\right)_{k+1} = \left(\partial_A(\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g) + \lambda fg))\right)_k \\
&= \left(\widehat{P}(\partial_A(\widehat{P}(f)g) + \partial_A(f\widehat{P}(g)) + \lambda\partial_A(fg))\right)_k \quad \text{(by Eq. (11))} \\
&= \left(\widehat{P}((\partial_A\widehat{P})(f)g + \widehat{P}(f)\partial_A(g) + \lambda(\partial_A\widehat{P})(f)\partial_A(g))\right)_k \\
&\quad + \left(\widehat{P}(\partial_A(f)\widehat{P}(g) + f(\partial_A\widehat{P})(g) + \lambda\partial_A(f)\partial_A(\widehat{P}(g)))\right)_k \\
&\quad + \left(\lambda\widehat{P}(\partial_A(f)g + f\partial_A(g) + \lambda\partial_A(f)\partial_A(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (2))} \\
&= \left(\widehat{P}((\widehat{P}\partial_A)(f)g + \partial_A(f)\widehat{P}(g) + \lambda\partial_A(f)g)\right)_k \\
&\quad + \left(\widehat{P}(\widehat{P}(f)\partial_A(g) + f(\widehat{P}\partial_A)(g) + \lambda f\partial_A(g))\right)_k \\
&\quad + \left(\lambda\widehat{P}((\widehat{P}\partial_A)(f)\partial_A(g) + \partial_A(f)(\widehat{P}\partial_A)(g) + \lambda\partial_A(f)\partial_A(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (11))} \\
&= \left(\widehat{P}(\partial_A(f))\widehat{P}(g) + \widehat{P}(f)\widehat{P}(\partial_A(g)) + \lambda\widehat{P}(\partial_A(f))\widehat{P}(\partial_A(g))\right)_k \quad \text{(by the induction hypothesis)} \\
&= \left(\partial_A(\widehat{P}(f))\widehat{P}(g) + \widehat{P}(f)\partial_A(\widehat{P}(g)) + \lambda\partial_A(\widehat{P}(f))\partial_A(\widehat{P}(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (11))} \\
&= \left(\partial_A(\widehat{P}(f)\widehat{P}(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (2))} \\
&= \left(\widehat{P}(f)\widehat{P}(g)\right)_{k+1}.
\end{aligned}$$

至此归纳完成，证明了 P 是权为 λ。 (ii) 对于任意 $f \in A^{\mathbb{N}}$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\left((\partial_A\widehat{P})(f)\right)_n = \left(\widehat{P}(f)\right)_{n+1} &= \sum_{s=0}^{n+1}\binom{n+1}{s}b^{n+1-s}P(f_s) \\
&= \sum_{s=1}^{n+1}\binom{n}{s-1}b^{n+1-s}P(f_s) + \sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}b^{n+1-t}P(f_t) \\
&= \left((\widehat{P}\partial_A)(f) + b\widehat{P}(f)\right)_n.
\end{aligned}$$

这就建立了如下关系：

$$\partial_A\widehat{P} = \widehat{P}\partial_A + b\widehat{P}. \tag{13}$$

$\widehat{\ }$为证明P 是一个权重 0 的 Rota-Baxter 算子，我们对m 使用归纳法，证明对于所有f、$g \in A^{\mathbb{N}}$:

$$\left(\widehat{P}(f)\widehat{P}(g)\right)_m = \left(\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g))\right)_m. \tag{14}$$

基础情形$m = 0$ 由P是权重 0 的 Rota-Baxter 算子这一事实可得。

假设该恒等式对$m = k$成立。那么对于$m = k + 1$，有

$$\begin{aligned}
&\left(\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g))\right)_{k+1} = \left(\partial_A(\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g)))\right)_k \\
&= \left(\widehat{P}(\partial_A(\widehat{P}(f)g) + \partial_A(f\widehat{P}(g))) + b\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (13))} \\
&= \left(\widehat{P}((\partial_A\widehat{P})(f)g + \widehat{P}(f)\partial_A(g))\right)_k + \left(\widehat{P}(\partial_A(f)\widehat{P}(g) + f(\partial_A\widehat{P})(g))\right)_k + \left(b\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (1))} \\
&= \left(\widehat{P}((\widehat{P}\partial_A)(f)g + \partial_A(f)\widehat{P}(g))\right)_k + \left(\widehat{P}(\widehat{P}(f)\partial_A(g) + f(\widehat{P}\partial_A)(g))\right)_k + \left(2b\widehat{P}(\widehat{P}(f)g + f\widehat{P}(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (13))} \\
&= \left(\widehat{P}(\partial_A(f))\widehat{P}(g) + \widehat{P}(f)\widehat{P}(\partial_A(g)) + 2b\widehat{P}(f)\widehat{P}(g)\right)_k \quad \text{(by the induction hypothesis)} \\
&= \left(\partial_A(\widehat{P}(f))\widehat{P}(g) + \widehat{P}(f)\partial_A(\widehat{P}(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (13))} \\
&= \left(\partial_A(\widehat{P}(f)\widehat{P}(g))\right)_k \quad \text{(by Eq. (1))} \\
&= \left(\widehat{P}(f)\widehat{P}(g)\right)_{k+1}.
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$由此完成归纳，证明P是权重 0 的 Rota-Baxter 算子。因此，$(A^{\mathbb{N}}, \partial_A, \widehat{\ }P)$ 是一个 III 型抛微分 Rota-Baxter 代数。 □

Hurwitz 级数与 [28] 中的形式幂级数之间的密切联系使得我们可以给出以下 I 型和 III 型抛微分 Rota-Baxter 代数的具体例子。关于 II 型抛微分Rota-Baxter代数的例子，参见第 2.3节。

例 2.4. (i) 令C 表示 $\mathbb{R}$-代数，即定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数代数，并令$C[[t]]$ 为系数取自C的形式幂级数代数。在$C[[t]]$ 上赋予导子

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_n t^n\right) := \left(\sum_{i=0}^{\infty} n u_n t^{n-1}\right).$$

于是，由 [28], 存在一个权重 0 的微分代数同构:

$$T : (C^{\mathbb{N}}, \partial_C) \to \left(C[[t]], \frac{d}{dt}\right), \quad f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} t^n. \tag{15}$$

积分

$$\int : C \to C, \quad \int(u) := \int_0^x u(s)\mathrm{d}s$$

是权重 0 的 Rota-Baxter 算子的经典例子。对于这个算子，命题 ⁀中的 Rota-Baxter 算子 ∫2.3.(i)，通过同构 T，得到 *Rota-Baxter* 算子

$$\overline{\int} := T \circ \widehat{\int} \circ T^{-1} : C[[t]] \to C[[t]], \quad \overline{\int}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x u_n(s)\mathrm{d}s\right) t^n.$$

因此，根据命题2.3(i)，三元组 $\left(C[[t]], \frac{d}{dt}, \overline{\int}\right)$是一个 I型抛微分 Rota-Baxter 代数。

(ii) 保持上述积分 $\int$ 和微分代数 $\left(C[[t]], \frac{d}{dt}\right)$ 不变。命题2.3中的 Rota-Baxter 算子 $\int$ $C^{\mathbb{N}}$ 上的命题 2.3.(ii) 中的算子，通过同构 T，定义了 Rota-Baxter 算子

$$\overline{\int} := T \circ \widehat{\int} \circ T^{-1} : C[[t]] \to C[[t]], \quad \overline{\int}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^{n-k} \int_0^x u_k(s)\mathrm{d}s\right) t^n.$$

由命题2.3(ii)，三元组 $\left(C[[t]], \frac{d}{dt}, \overline{\int}\right)$ 是一个 III 型抛微分 Rota-Baxter 代数。

下面再给出一些例子。

例2.5. 对于 $0 \neq b \in \mathbf{k}$，线性算子

$$d_{bx} : \mathbf{k}[x] \to \mathbf{k}[x], \quad d_{bx}(f(x)) = bx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)),$$

是一个权重 0 的微分算子，并且满足 $d_{bx}\int - \int d_{bx} = b\int$ 其中 $\int(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$。于是，三元组 $\left(\mathbf{k}[x], d_{bx}, \int\right)$ 是一个 III 型抛微分 Rota-Baxter 代数。

例2.6. 令$\mathbf{k}[x,y]$ 为两个变量x 和y上的多项式代数。根据Leibniz法则，偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}: \mathbf{k}[x, y] \to \mathbf{k}[x,y]$ 是一个权重 0 的微分算子。令$\int_y: \mathbf{k}[x,y] \to \mathbf{k}[x, y]$ 表示关于y的积分：

$$\int_y\left(\sum_{m,n} a_{m,n}x^m y^n\right) = \sum_{m,n} a_{m,n}x^m \int_0^y t^n\mathrm{d}t = \sum_{m,n} a_{m,n}x^m \frac{y^{n+1}}{n+1} \quad \text{for } \sum_{m,n} a_{m,n}x^m y^n \in \mathbf{k}[x,y].$$

根据分部积分公式，$\int_y$ 是一个权重 0 的 Rota-Baxter 算子。此外，$\frac{\partial}{\partial x}\int_y = \int_y \frac{\partial}{\partial x}$，因为这两个算子作用于不同的变量。因此，三元组 $\left(\mathbf{k}[x、y], \frac{\partial}{\partial x、}, \int_y\right)$ 是一个 I型抛微分 Rota-Baxter 代数。

2.3. **抛微分**分 **Rota-Baxter 代数与内自同态（差分）代数**。差分代数的概念与微分代数一样，已经得到了广泛研究 [13, 33]。近年来，在李代数背景下，通过对李双代数和经典 Yang–Baxter方程进行范畴化，出现了更一般的内代数概念 [3]。

定义2.7。 (i) **内自同态代数**是一个配备了自同态 σ of$R$的代数R 。

(ii) 差分代数是指自同态为单射的内自同态代数 [13, 33]。(iii) 权 1 的内Rota–Baxter代数，是指配备了Rota-Baxter 代数 (R,P) 的自同态 σ 的权 1 Rota-Baxter 代数，满足$\sigma P = P\sigma$。(iv) 内自同态代数 (R, σ) 上的权 1 Rota-Baxter 算子，是指R上的 Rota-Baxter 算子，满足$P\sigma = \sigma P$。

因此，内Rota–Baxter代数等同于配备了 Rota-Baxter 算子的内自同态代数。

直接验证可知，当且仅当 $\mathrm{id} + d$ 是一个自同态 [21]时，$d : R \to R$ 是一个权 1 微分算子。再加入一个 Rota-Baxter 算子，即可直接得到以下推论。

命题 2.8. 设 R 为一个代数，$P,d : R \to R$ 为线性映射。以下陈述等价。

(i) 三元组(R,P,d) 是权1的 *II* 型旁微分 *Rota–Baxter* 代数；(ii) 数对(R,P) 是权1的 *Rota-Baxter* 代数，且$\mathrm{id} + d$ 是(R,P)的自同态；(iii) 数对$(R,\mathrm{id} + d)$ 是一个内自同态代数，并且 P 是$(R,\mathrm{id} + d)$上的 *Rota-Baxter* 算子。

这一等价关系提供了另一种构造 II 型旁微分 Rota–Baxter 代数的方法。下面给出一个具体例子。

例 2.9. 设$\mathbf{k}$ 是特征零的代数闭域。令$M_2^u(\mathbf{k})$ 表示2×2 上三角矩阵代数。定义

$$P : M_2^u(\mathbf{k}) \to M_2^u(\mathbf{k}), \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{22}-a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 [17,推论 3.6], P是权 1 的 Rota-Baxter 算子。另一方面，令

$$\sigma : M_2^u(\mathbf{k}) \to M_2^u(\mathbf{k}), \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{22}-a_{11} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

经过直接计算，σ是一个单射自同态。此外，我们有

$$P\sigma(E_{ij}) = \sigma P(E_{ij}), \quad 1 \le i \le j \le 2,$$

其中，E_{ij} 表示标准基矩阵，其(i,j)项为 1，其余项为 0。因此，$P\sigma = \sigma P$作用于$M_2^u(\mathbf{k})$。因此，我们有

$$P(\sigma - \mathrm{id}) = (\sigma - \mathrm{id})P.$$

根据命题 2.8, $(R,P,\sigma - \mathrm{id})$ 是一个 II 型抛物微分 Rota-Baxter 代数分代数 .

3. 算子代数的单项式序与Gr¨obner-Shirshov基

本节回顾自由 Ω-算子半群和由带括号字构造的自由 Ω-算子代数的显式构造。然后，我们应用这些构造引入一种单项式序，以研究算子代数的Gr¨obner-Shirshov基。

3.1. **自由带算子代数**。 我们沿用自由 Ω-算子代数的概念和构造， [18],这一概念可追溯至 Kurosh [31]。

定义 3.1。 [18]设 Ω 为一个集合。

(i) Ω-算子半群是指赋有算子族 α_ω ： S $\to$ S（ $\omega \in \Omega$）的半群 S。(ii) 从 (S 1, α_ω) 到 (S 2, β_ω) 的算子半群态射是指半群同态 f: $S_1 \to S 2$， 满足 f $\circ \alpha_\omega = \beta_\omega \circ$ f （ $\omega \in \Omega$）。(iii) Ω-算子 k-代数（分别地，Ω-算子非幺 k-代数）是指赋有线性算子族 P_Ω : = $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$的代数（分别地，非幺代数）A。(iv) 从 (A, $P_{A,\Omega}$) 到 (B, $P_{B,\Omega}$) 的算子 k-代数态射是指代数同态 f: A $\to$ B，满足 f $\circ P_{A,\omega} = P_{B,\omega} \circ$ f（ $\omega \in \Omega$）。

对于集合 Y，令 $S(Y)$ 表示由 Y 生成的自由半群，$M(Y)$ 表示由 Y 生成的自由幺半群；二者均由字母表 Y 中的字构造而成。

对于 $\omega \in \Omega$，记 $\lfloor Y \rfloor_\omega$ 为所有元素 $\lfloor y \rfloor_\omega$，$y \in Y$的集合。令

$$\lfloor Y \rfloor_\Omega := \sqcup_{\omega\in\Omega} \lfloor Y \rfloor_\omega .$$

现在我们构 构造以集合 Z 为基础的自由交换 Ω-作用半群，采用直接系

$$\left\{\tau_{n,n+1} : \mathfrak{S}_{\Omega,n-1}(Z) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z)\right\}_{n\geq 0}$$

造自由半群 $\mathrm{S}_{\Omega,\ n}(Z)$，其中$\tau_{n,\ n+1}$ 是半群同态。首先，我们定义 e

$$\mathfrak{S}_{\Omega,0}(Z) := S(Z), \quad \mathfrak{S}_{\Omega,1}(Z) := S(Z \sqcup \lfloor S(Z)\rfloor_\Omega). \tag{16}$$

到第一分量的包含映射 $Z \hookrightarrow Z \sqcup \lfloor \mathrm{S}_{\Omega,\ 0}\rfloor_\Omega$ 诱导出一个单射的半群同态

$$\tau_{0,1} : \mathfrak{S}_{\Omega,0}(Z) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{\Omega,1}(Z).$$

给定$n \geq 1$，假设根据归纳法，我们已定义 Ω-算子半群 $\mathrm{S}_{\Omega,\ i}(Z)$，并具有以下性质：$\mathrm{S}_{\Omega,\ i}(Z) = S(Z \cup \lfloor \mathrm{S}_{\Omega,\ i-1}\rfloor_\Omega)$，且对于所有$1 \leq i \leq n$，$\tau_{i-1,\ i} : \mathrm{S}_{\Omega,\ i-1}(Z) \hookrightarrow \mathrm{S}_{\Omega,\ i}(Z)$。然后定义

$$\mathfrak{S}_{\Omega,n+1}(Z) := S(Z \sqcup \lfloor \mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z)\rfloor_\Omega).$$

半群同态 $\tau_{n-1,\ n} : \mathrm{S}_{\Omega,\ n-1}(Z) \hookrightarrow \mathrm{S}_{\Omega,\ n}(Z)$ 给出一个单射

$$\lfloor \tau_{n-1,n}\rfloor_\Omega : \lfloor \mathfrak{S}_{\Omega,n-1}(Z)\rfloor_\Omega \to \lfloor \mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z)\rfloor_\Omega.$$

于是自然包含

$$\mathrm{id}_Z \sqcup \lfloor \tau_{n-1,n}\rfloor_\Omega : Z \sqcup \lfloor \mathfrak{S}_{\Omega,n-1}(Z)\rfloor_\Omega \hookrightarrow Z \sqcup \lfloor \mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z)\rfloor_\Omega$$

导出一个半群同态

$$\tau_{n,n+1} : \mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z) = S(Z \sqcup \lfloor \mathfrak{S}_{\Omega,n-1}(Z)\rfloor_\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{\Omega,n+1}(Z) = S(Z \sqcup \lfloor \mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z)\rfloor_\Omega).$$

这就完成了所需的直接系。然后取直接极限，我们得到一个半群

$$\mathfrak{S}_\Omega(Z) := \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{S}_{\Omega,n} = \varinjlim \mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z).$$

对于给定的 $\omega \in \Omega$，映射序列

$$P_{\omega,n} : \mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z) \longrightarrow \mathfrak{S}_{\Omega,n+1}(Z), \quad u \mapsto \lfloor u\rfloor_\omega,$$

通过取直接极限诱导出一个映射 P_ω 在 $\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 上。由 [18, 推论 3.6], $\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 与集合 $P_\omega := \{P_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ 构成 Ω-算子半群 Z上的自由。

将 $\mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 记为以 $\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 为基的 $\mathbf{k}$-模。在 $\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 上的乘法通过双线性扩展，并将集合映射 P_Ω 通过线性扩展，仍记为 P_Ω，我们得到一个 Ω-算子代数$\mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(Z)$。于是由 [18, 推论 3.7], $\mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 配备 P_ω 成为 Z 上的自由 Ω- 算子非幺代数。

通过平行构造，我们得到集合 Z 上的自由 Ω-算子幺半群 $\mathrm{M}_\Omega(Z)$，以及自由 Ω-算子幺代数 $\mathbf{k}\mathrm{M}_\Omega(Z)$。只需在上述自由 Ω-算子非幺代数的构造中，将自由半群 $S(Y)$ 处处替换为自由幺半群 $M(Y)$。

定义3.2。 $\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 中的元素称为**Ω-括号字**或**Ω-算子字**，也可简称为**括号字**或**算子字**。元素 $f \in \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 称为 **Ω- 括号多项式**或 **Ω- 算子多项式**，也可简称为**括号多项式**或**算子多项式**，除非另有说明。

当存在 为避免混淆，我们常省略“带括号的”和“算子”这两个修饰词 ”.

3.2. **算子多项式恒等式**。 本节将回顾算子多项式恒等式的概念，以及算子多项式恒等式代数的概念。

定义 3.3. (i) 设X为一个集合。对于$x_i \in X$且$1 \le i \le n$，元素 $\phi(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{k}S_\Omega(X)$称为一个**算子多项式恒等式** (OPI)。

(ii) 设 $\phi(x1, \cdots, x_n) \in \mathrm{k}S_\Omega(X)$是一个 OPI。若一个 Ω-算子代数 R 配备一族线性算子 $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$，并且对于所有$\omega \in \Omega$，$\phi(r_1, \ldots, r_n) = 0$对所有 $r_1, \ldots, r_n \in$都成立，则称 R 为一个 ϕ-代数，并称 P_ω 为一个 ϕ-算子。算子多项式恒等式代数是同时也是某个 ϕ-代数的任意代数，其中 ϕ。(iii) 更一般地，对于一族 OPI Φ，若一个算子代数 (A, P_Ω) 对所有 $\phi \in \Phi$都是一个 ϕ-代数，则称其为一个 Φ-代数。

定义3.4. 给定任意集合Z，以及子集$S \subset \mathbf{k}S_\Omega(Z)$，则**带算子理想**Id($S$) **是**$\mathbf{k}S_\Omega(Z)$**由**$S$ 生成的包含S的最小带算子理想。

设 Φ 是$\mathbf{k}S_\Omega(X)$中的一组OPI。设

$$S_\Phi(Z) := \left\{\phi(u_1, \cdots, u_n) \mid u_1, \cdots, u_n \in \mathfrak{S}_\Omega(Z),\ \phi \in \Phi\right\} \subset \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z).$$

用Id($S_\Phi(Z)$)表示由集合$S_\Phi(Z)$生成的带算子理想。

定理3.5。 [13, 35]设 $\Phi \subseteq \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X)$ 是一组*OPI*。设Z是一个集合。那么商$\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)/\mathrm{Id}(S_\Phi(Z))$ 是Z上的自由 Φ-代数。

例3.6。 设X 是一个集合，且$\Omega = \{D,P\}$ 是由两个不同元素组成的集合。设$\lambda \in \mathbf{k}$。令 Φ_{DRB} 为$\mathbf{k}S_\Omega(X)$中由以下三个OPI组成的子集：

(i) $\phi_1(x, y) := \lfloor xy\rfloor_D - \lfloor x\rfloor_D y - x\lfloor y\rfloor_D - \lambda\lfloor x\rfloor_D\lfloor y\rfloor_D$, (ii) $\phi_2(x) := \lfloor\lfloor x\rfloor_P\rfloor_D - x$, (iii) $\phi_3(x,y) := \lfloor x\rfloor_P\lfloor y\rfloor_P - \lfloor x\lfloor y\rfloor_P\rfloor_P - \lfloor\lfloor x\rfloor_P y\rfloor_P - \lfloor xy\rfloor_P$.

如果一个算子代数（$A, \{P, D\}$）是一个 Φ_{DRB}-代数，那么它就是一个权为 λ [21] 的微分 Rota-Baxter 代数。

定义 3.7. 设 $u \in \mathfrak{S}_\Omega(Z)$。

(i) 记作

$$u := v_1 \cdots v_k, \tag{17}$$

其中 $v_i \in Z \cup \lfloor S_\Omega(Z)\rfloor_\Omega$ 当 $1 \le i \le k$ 时。我们称 k 为 u 的**宽度**，记作 $|u|$.

(ii) 将属于 Z的相邻因子 $u = v_1 \ldots v_k$ 合并为一个属于 $M(Z)$ 的单项式，并在两个相邻的、形如 $\lfloor v\rfloor_{\omega_i}$ 的因子之间插入 $1 \in M(Z)$，其中$v \in S_\Omega(Z)$ 且 $\omega_i \in \Omega$，我们可以将u 唯一地写成规范形式

$$u = u_0\lfloor u_1^*\rfloor_{\omega_1} u_1 \cdots \lfloor u_r^*\rfloor_{\omega_r} u_r, \text{ 其中, } u_0, \cdots, u_r \in M(Z), \text{ 以及 } u_1^*, \cdots, u_r^* \in S_\Omega(Z)。 \tag{18}$$

如果我们记

$$u = v_0\lfloor v_1^*\rfloor_P \cdots \lfloor v_k^*\rfloor_P v_k, \quad \text{where } v_0, \cdots, v_k \in M(Z)\cup\lfloor\mathfrak{S}_\Omega(Z)\rfloor_{\Omega-\{P\}}, \text{ and } v_1^*, \cdots, v_k^* \in \mathfrak{S}_\Omega(Z) \tag{19}$$

我们将*P*-**宽度** 定义为u 的宽度k ，并记作 $|u|_P$。进一步，将*P*-**次数**$\deg_P(u)$定义为 u 在$\mathbf{k}S_\Omega(Z)$中作为单项式时的u中算子$\lfloor\ \rfloor_P$ 出现的总次数，按重数计。

3.3. **S(Z)**上的单项式序。 现在，我们在$\mathrm{S}_\Omega(Z)$上构造一个单项式序，其算子集为$\Omega = \{P,D\}$。

记号。为简化记号，在以下各节中，对于任意$u \in \mathrm{S}_\Omega(Z)$，我们将中缀记法 $\lfloor u \rfloor_P$（分别为 $\lfloor u \rfloor_D$）与$P(u)$（分别为$D(u)$）交替使用。

我们回顾关于序的以下概念。详见 [10, 35, 45] 进一步细节 s.

设Z为一个带有良序 $\leq_Z$的集合。对于$u = u_1 \cdots u_r \in S(Z)$，其中$u_1, \cdots, u_r \in Z$，定义 $\deg_Z(u) = r$。另定义 $\deg_Z(1) := 0$。定义

$$u \leq_{\mathrm{dz}} v \Leftrightarrow \deg_Z(u) \leq \deg_Z(v).$$

接着，我们定义**次数字典序** $\leq_{\mathrm{dlex}}$ 在$S(Z)$上的如下：对于任意$u = u_1 \cdots u_r$、$v = v_1 \cdots v_s \in S(Z)$，其中$u_1, \cdots, u_r$，且$v_1, \cdots, v_s \in Z$,

$$u \leq_{\mathrm{dlex}} v \Longleftrightarrow \begin{cases} u <_{\mathrm{dz}} v, \text{ or} \\ u =_{\mathrm{dz}} v \text{ and } u_1 \cdots u_r \leq_{\mathrm{lex}} v_1 \cdots v_r, \end{cases}$$

where $\leq_{\mathrm{lex}}$是 $S(Z)$ 上的字典序。那么， $\leq_{\mathrm{dlex}}$是 $S(Z)$ 上的良序 [1].

定义 3.8. 设 Z 是一个集合。$\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 上的**单项式序** 是 $\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 上的良序 $\leq$，满足

$$u < v \Rightarrow q|_u < q|_v, \quad u, v \in \mathfrak{S}_\Omega(Z) \text{ and } q \in \mathfrak{S}_\Omega^\star(Z).$$

下面介绍关于单项式序的其他概念。

定义 3.9. 设 Z 是一个集合，并设 $\leq$是 $\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 上的单项式序。

(i) 对于每个括号多项式$f \in \mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(Z)$，用$f$ 表示其首项括号单项式。若f 的系数为 1，则称f 为**首一**。(ii) 设$Z^\star := Z \cup \{\star\}$，其中 $\star \notin Z$。定义 **$\star$-括号词** 为 $\mathrm{S}_\Omega(Z^\star)$ 中仅出现一次 $\star$ 的括号词。用 $\mathrm{S}_\Omega{}^\star(Z)$ 表示 $\mathrm{S}_\Omega(Z^\star)$ 中由 $\star$-括号词组成的子集。设$q \in \mathrm{S}_\Omega{}^\star(Z)$，且$u \in \mathrm{S}_\Omega(Z)$。定义

$$q|_u := q|_{\star \mapsto u}$$

是由将q 中的符号 $\star$ 替换为u而得到的 $\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 中的括号词。

(iii) 更一般地，对于 $q \in \mathrm{S}_\Omega{}^\star(Z)$ 和 $s = \sum_i c_i u_i \in \mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(Z)$，其中 $c_i \in \mathbf{k}$ 且 $u_i \in \mathrm{S}_\Omega(Z)$，我们定义

$$q|_s := \sum_i c_i q|_{u_i}.$$

(iv) 设 $Z^{\star_1,\star_2} := Z \cup \{\star_1, \star_2\}$。类似地，我们将 **$(\star_1, \star_2)$-bracketed word** 定义为 $\mathrm{S}_\Omega(Z^{\star_1,\star_2})$ 中的一个带括号字，其中 $\star_1$ 和 $\star_2$ 各恰好出现一次，且均按重数计数。$(\star_1, \star_2)$- 带括号字的集合记作 $\mathrm{S}_\Omega{}^{\star_1,\star_2}(Z)$。

(v) 设 $q \in \mathrm{S}_\Omega{}^{\star_1,\star_2}(Z)$ 且 $u_1, u_2 \in \mathrm{S}_\Omega(Z)$。那么我们定义

$$q|_{u_1,u_2} := u|_{\star_1 \mapsto u_1, \star_2 \mapsto u_2},$$

为通过将q 中的符号 $\star_1$ 替换为u_1, , 并将q中的符号 $\star_2$ 替换为u_2，从而得到的 $\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 中的括号词。

根据以上记号，由子集 $SS \subseteq \mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega Z$ 生成的带算子理想 $\mathrm{Id}(S)$ 可表示为

$$\mathrm{Id}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i q_i|_{s_i} \;\middle|\; k \geq 1 \text{ and } c_i \in \mathbf{k}, q_i \in \mathfrak{S}_\Omega{}^\star(Z), s_i \in S \text{ for } 1 \leq i \leq k \right\}. \tag{20}$$

带算子半群$\mathfrak{S}_\Omega(Z)$上存在多种单项式序。详见 [32, 35, 34, 45]。为满足我们的目的，我们将构造一个定义在$\mathfrak{S}_\Omega(Z)$上的单项式序，类似于$\leq_{PD}$中给出的 [32]。

定义 3.10。设u和v是$\mathrm{S}_\Omega(Z)$中的元素。

(i) 定义

$$u \leq_{\mathrm{p}} v \Longleftrightarrow \deg_P(u) \leq \deg_P(v),$$

其中，**P-次数**$\deg_P(u)$是u中$P = \lfloor\ \rfloor_P$出现的次数。

(ii) 类似地，定义

$$u \leq_{\mathrm{d}} v \Longleftrightarrow \deg_D(u) \leq \deg_D(v),$$

其中，**D-次数**$\deg_D(u)$是u中$D = \lfloor\ \rfloor_D$出现的次数 u.

(iii) 对于u中$D = \lfloor\ \rfloor_D$的一次出现，如果括号D中包含k个Z中的元素，则称D的 ED-次数为$k-1$。u的**ED-次数** 记为$\deg_{\mathrm{ed}}(u)$，定义为u中所有D括号的 ED-次数之和。然后定义

$$u \leq_{\mathrm{ed}} v \Longleftrightarrow \deg_{\mathrm{ed}}(u) \leq \deg_{\mathrm{ed}}(v).$$

例如，令$x,y \in Z$。那么

$$\deg_{\mathrm{ed}}(D(xy)) = 1,\ \deg_{\mathrm{ed}}(D(x)D(y)) = \deg_{\mathrm{ed}}(xD(y)) = \deg_{\mathrm{ed}}(D(x)y) = 0,$$

因此，$D(x)D(y) <_{\mathrm{ed}} D(xy)$、$D(x)y <_{\mathrm{ed}} D(xy)$以及$xD(y) <_{\mathrm{ed}} D(xy)$。

(iv) [32, 定义 1.10] 设$u \in \mathrm{S}_\Omega(Z)$，且$u_1, \cdots, u_n \in Z$是$u$中出现的所有元素。对于$u$中的给定括号$P$，若有$k$个元素$u_{i_1}, \cdots, u_{i_k}$包含在$P$中，其中$i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, n\}$，则$P$的**GP-degree**定义为$n-k$。用$\deg_{\mathrm{gp}}(u)$表示$u$中所有括号$P$的 GP-degree 之和。于是定义

$$u \leq_{\mathrm{gp}} v \Longleftrightarrow \deg_{\mathrm{gp}}(u) \leq \deg_{\mathrm{gp}}(v).$$

例如，对于$x,y \in Z$，有

$$\deg_{\mathrm{gp}}(P(x)P(y)) = 2,\ \deg_{\mathrm{gp}}(P(xP(y))) = \deg_{\mathrm{gp}}(P(P(x)y)) = 1 \text{ and } \deg_{\mathrm{gp}}(P(xy)) = 0$$

因此$P(xy) <_{\mathrm{gp}} P(P(x)y) =_{\mathrm{gp}} P(xP(y)) <_{\mathrm{gp}} P(x)P(y)$。

(v) 根据滤过$\mathrm{S}_\Omega(Z) = \bigcup_{n\geq 0}\mathrm{S}_{\Omega,n}$，现在我们将$\mathrm{S}_\Omega(Z)$上的预序$\leq_{\mathrm{Dlex}}$定义为$\mathrm{S}_{\Omega,n}, n \geq 0$上一列良序$\leq_{\mathrm{Dlex}_n}$的直接极限，这些良序由以下递归构造。

(a) 当$n = 0$时，我们有$\mathrm{S}_{\Omega,n} = S(Z)$。令$u$、$v \in \mathrm{S}_{\Omega,0}(Z)$。定义

$$u \leq_{\mathrm{Dlex}_0} v \Longleftrightarrow u \leq_{\mathrm{dlex}} v.$$

(b) 对于给定的$\mathrm{n} \geq 0$，假设对于所有$0 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$，$\mathrm{S}_{\Omega,i}(\mathrm{Z})$上的良序$\leq_{\mathrm{Dlex}_i}$均已构造。$\mathrm{S}_{\Omega,n}(\mathrm{Z})$上的良序$\leq_{\mathrm{Dlex}_n}$通过如下方式在集合$\mathrm{P}(\mathrm{S}_{\Omega,n}(\mathrm{Z}))$（分别为$\mathrm{D}(\mathrm{S}_{\Omega,n}(\mathrm{Z}))$）上诱导出一个良序：当$\mathrm{u} \leq_{\mathrm{Dlex}_n} \mathrm{v}$且$\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{S}_{\Omega,n}(\mathrm{Z})$时，定义$\mathrm{P}(\mathrm{u}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{v})$（分别定义$\mathrm{D}(\mathrm{u}) \leq \mathrm{D}(\mathrm{v})$）。定义

$$u < v < w, \quad \forall u \in Z, v \in P(\mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z)), w \in D(\mathfrak{S}_{\Omega,n}(Z)). \tag{21}$$

例如，$P(x) <_{\mathrm{Dlex}_1} D(x)$，以及$P(D(x)) <_{\mathrm{Dlex}_2} D(P(x))$。

于是由 [30, P214，第七章，第 1 节，例 4], 可在$\mathrm{Z} \sqcup \mathrm{P}(\mathrm{S}_{\Omega,n}(\mathrm{Z})) \sqcup \mathrm{D}(\mathrm{S}_{\Omega,n}(\mathrm{Z}))$上得到一个良序。令$\leq_{\mathrm{Dlex}_{n+1}}$为$\mathrm{S}_{\Omega,n+1}(\mathrm{Z}) = \mathrm{S}(\mathrm{Z} \sqcup \mathrm{P}(\mathrm{S}_{\Omega,n}(\mathrm{Z})) \sqcup \mathrm{D}(\mathrm{S}_{\Omega,n}(\mathrm{Z}))$上由式 (21) 中给出的良序诱导的次数字典序。

取直接极限，可在 $\mathrm{S}(Z)$ 上得到一个预序

$$\leq_{\mathrm{Dlex}} := \varinjlim \leq_{\mathrm{Dlex}_n} . \tag{22}$$

通过直接计算可知，$\leq_{\mathrm{Dlex}}$ 是一个线性序。但它不是良序。下面给出一个反例：考虑序列 $P^n(xP(y)), n \geq 0$。于是有 $P^n(xP(y)) >_{\mathrm{Dlex}} P^{n+1}(xP(y))$，从而得到一个无限递减序列。

(vi) 最后，我们通过组合上述序关系，在 $\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 上定义一个序关系 $\leq_{\mathrm{dp}}$

$$u \leq_{\mathrm{dp}} v \Longleftrightarrow \begin{cases} u <_{\mathrm{dz}} v, \text{ or} \\ u =_{\mathrm{dz}} v, \text{and } u <_{\mathrm{ed}} v, \text{or} \\ u =_{\mathrm{dz}} v, u =_{\mathrm{ed}} v, \text{and } u <_{\mathrm{d}} v, \text{or} \\ u =_{\mathrm{dz}} v, u =_{\mathrm{ed}} v, u =_{\mathrm{d}} v, \text{and } u <_{\mathrm{gp}} v, \text{or} \\ u =_{\mathrm{dz}} v, u =_{\mathrm{ed}} v, u =_{\mathrm{d}} v, u =_{\mathrm{gp}} v, \text{and } u <_{\mathrm{p}} v, \text{or} \\ u =_{\mathrm{dz}} v, u =_{\mathrm{ed}} v, u =_{\mathrm{d}} v, u =_{\mathrm{gp}} v, u =_{\mathrm{p}} v, \text{and } u \leq_{\mathrm{Dlex}} v. \end{cases} \tag{23}$$

为了证明 $\leq_{\mathrm{dp}}$ 是一个良序，我们首先回顾关于预序的以下概念和结果 .

定义 3.11. [45, 定义 5.3]

(i) 设 $k \geq 1$，并设 $\leq_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq k$ 是集合 Y 上的预序。对于所有 $u, v \in Y$，我们递归地定义

$$u \leq_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k} v \Longleftrightarrow \begin{cases} u <_{\alpha_1} v, \text{or} \\ u =_{\alpha_1} v \text{ and } u \leq_{\beta} v, \end{cases} \tag{24}$$

其中 $\leq_\beta := \leq_{\alpha_2, \cdots, \alpha_k}$ 由归纳假设可良好定义。

(ii) 令 $k \geq 1$，并设 $(Y_i, \leq_{Y_i}), 1 \leq i \leq k$ 为偏序集。回顾一下，笛卡尔积 $Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_k$ 上的**字典序** $\leq_{\mathrm{clex}}$ 递归定义为

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \cdots, x_k) \leq_{\mathrm{clex}} (y_1, y_2, \cdots, y_k) \\ \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 <_{Y_1} y_1, \text{or} \\ x_1 = y_1 \text{ and } (x_2, \cdots, x_k) \leq_{\mathrm{clex}} (y_2, \cdots, y_k), \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $(x_2, \cdots, x_k) \leq_{\mathrm{clex}} (y_2, \cdots, y_k)$ 由归纳假设可良好定义。

引理 3.12。 (i) [34, 引理 1。7] 令 $k \geq 2$。设 $\leq_{\alpha_1}, \cdots, \leq_{\alpha_{k-1}}$ 为 Z 上的预线性序，并设 $\leq_{\alpha_k}$ 为 Z 上的线性序。则关系 $\leq_{\alpha_1, \cdots, \alpha_k}$ 是 Z 上的线性序。(ii) [26, P89, 定理 1。13] 设 $\leq_{Y_i}$ 为 Y_i 上的良序，且 $1 \leq i \leq k$，$k \geq 1$。则字典序 $\leq_{\mathrm{clex}}$ 是笛卡尔积 $Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_k$ 上的良序。

命题 3.13。 **</style}次序 是$\mathrm{S}_\Omega(Z)$上的良序。**

证明。由于 $\leq_{\mathrm{dz}}$、$\leq_{\mathrm{ed}}$、$\leq_{\mathrm{d}}$、$\leq_{\mathrm{gp}}$ 和 $\leq_{\mathrm{p}}$ 的取值均属于 $\mathbb{N}$，它们都是预线性序。由定义 3.10 (v)，序 $\leq_{\mathrm{Dlex}}$ 是线性序。再由引理 3.12 (i)，$\leq_{\mathrm{dp}}$ 是线性序。接下来证明 $\leq_{\mathrm{dp}}$ 满足下降链条件。假设 $\mathrm{u}_1 \geq_{\mathrm{dp}} \mathrm{u}_2 \geq_{\mathrm{dp}} \cdots$。由于 $\leq_{\mathrm{d}}$ 和 $\leq_{\mathrm{p}}$ 满足下降链条件，存在自然数 N_1, $\mathrm{N}_2 \geq 0$ 和 $\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2 \geq 0$，使得

$$\deg_D(u_{N_1}) = \deg_D(u_{N_1+1}) = \cdots = k_1$$

and

$$\deg_P(u_{N_2}) = \deg_D(u_{N_2+1}) = \cdots = k_2.$$

取 $N := \max\{N_1, N_2\}$，并令 $k := k_1 + k_2$。于是，对所有 $i \geq N$，都有 $u_i \in \mathrm{S}_{\Omega,k}(Z)$。由于 $\leq_{\mathrm{dp}}$ 在 $\mathrm{S}_{\Omega,k}(Z)$ 上的限制恰好是良序 $\leq_{\mathrm{Dlex}_k}$，后代链 $u_N \geq_{\mathrm{dp}} u_{N+1} \geq_{\mathrm{dp}} \cdots$ 意味着后代链 $u_N \geq_{\mathrm{Dlex}_k} u_{N+1} \geq_{\mathrm{Dlex}_k} \cdots$，因此经过有限步后稳定。□

定义 3.14. 称良序 $\leq_\alpha$ 在 $\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 上为**括号相容**（分别称为 **左乘相容**、分别称为 **右乘相容**），如果

$$u \leq_\alpha v \implies \lfloor u \rfloor_\omega \leq_\alpha \lfloor v \rfloor_\omega \,(\text{resp. } wu \leq_\alpha wv, \text{resp. } uw \leq_\alpha vw),\ \forall u, v, w \in \mathfrak{S}_\Omega(Z), \omega \in \Omega.$$

引理 3.15. [45, 引理 5.11] 良序 $\leq_\alpha$ 在 $\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 是单项式序，当且仅当 $\leq_\alpha$它是括号相容、左乘相容且右乘相容的。

命题 3.16. </style}序 是 $\mathbf{S}_\Omega(Z)$上的单项式序。

证明。 由命题 3.13， $\leq_{\mathrm{dp}}$ 是良序。根据引理 3.15，只需要验证 $\leq_{\mathrm{dp}}$ 是括号相容、左乘相容且右乘相容。也就是说，对于 $u \leq_{\mathrm{dp}} v$ 满足 $u,v \in \mathfrak{S}_\Omega(Z)$,

$$D(u) \leq_{\mathrm{dp}} D(v),\ P(u) \leq_{\mathrm{dp}} P(v),\ wu \leq_{\mathrm{dp}} wv,\ uw \leq_{\mathrm{dp}} vw,\ \forall w \in \mathfrak{S}_\Omega(Z).$$

我们只证明第一个不等式，因为其余不等式的验证方法类似。设 $u \leq_{\mathrm{dp}} v$。然后根据式（$\leq_{\mathrm{dp}}$（23）的定义，分六种情况讨论。

情况 1：设$u <_{\mathrm{dz}} v$。那么 $\deg_Z(u) < \deg_Z(v)$。因此

$$\deg_Z(D(u)) = \deg_Z(u) < \deg_Z(v) = \deg_Z(D(v)),$$

于是$D(u) <_{\mathrm{dz}} D(v)$，从而证明$D(u) <_{\mathrm{dp}} D(v)$。

情况 2：设$u =_{\mathrm{dz}} v$，且$u <_{\mathrm{ed}} v$。那么 $\deg_Z(u) = \deg_Z(v)$，且 $\deg_{\mathrm{ed}}(u) < \deg_{\mathrm{ed}}(v)$。由于 e

$$\deg_{\mathrm{ed}}(D(u)) = \deg_{\mathrm{ed}}(u) + \deg_Z(u) - 1, \quad \deg_{\mathrm{ed}}(D(v)) = \deg_{\mathrm{ed}}(v) + \deg_Z(v) - 1,$$

我们有 $\deg_{\mathrm{ed}}(D(u)) < \deg_{\mathrm{ed}}(D(v))$，因此$D(u) <_{\mathrm{ed}} D(v)$，从而得到$D(u) <_{\mathrm{dp}} D(v)$。

情况 3：设$u =_{\mathrm{dz}} v$，$u =_{\mathrm{ed}} v$，且$u <_{\mathrm{d}} v$。那么

$$\deg_Z(u) = \deg_Z(v),\ \deg_{\mathrm{ed}}(u) = \deg_{\mathrm{ed}}(v),\ \deg_D(u) < \deg_D(v).$$

因此$D(u) =_{\mathrm{dz}} D(v)$。由

$$\deg_{\mathrm{ed}}(D(u)) = \deg_{\mathrm{ed}}(u) + \deg_Z(u) - 1 = \deg_{\mathrm{ed}}(v) + \deg_Z(v) - 1 = \deg_{\mathrm{ed}}(D(v)),$$

我们得到$D(u) =_{\mathrm{ed}} D(v)$。根据 $\deg_D(D(u)) < \deg_D(D(v))$，有$D(u) <_{\mathrm{d}} D(v)$，因此$D(u) \leq_{\mathrm{dp}} D(v)$。

情形 4：设$u =_{\mathrm{dz}} v$，$u =_{\mathrm{ed}} v$，$u =_{\mathrm{d}} v$，且$u <_{\mathrm{gp}} v$。则

$$\deg_Z(u) = \deg_Z(v),\ \deg_{\mathrm{ed}}(u) = \deg_{\mathrm{ed}}(v),\ \deg_D(u) = \deg_D(v),\ \deg_{\mathrm{gp}}(u) < \deg_{\mathrm{gp}}(v).$$

So

$$\deg_Z(D(u)) = \deg_Z(D(v)),\ \deg_{\mathrm{ed}}(D(u)) = \deg_{\mathrm{ed}}(D(v)),$$
$$\deg_D(D(u)) = \deg_D(D(v)),\ \deg_{\mathrm{gp}}(D(u)) < \deg_{\mathrm{gp}}(D(v)),$$

从而证明$D(u) <_{\mathrm{dp}} D(v)$。

情形 5：令$u =_{\mathrm{dz}} v$、$u =_{\mathrm{ed}} v$、$u =_{\mathrm{d}} v$、$u =_{\mathrm{gp}} v$和$u <_{\mathrm{p}} v$。因此，我们得到

$$\deg_Z(u) = \deg_Z(v),\ \deg_{\mathrm{ed}}(u) = \deg_{\mathrm{ed}}(v),\ \deg_D(u) = \deg_D(v),$$
$$\deg_{\mathrm{gp}}(u) = \deg_{\mathrm{gp}}(v),\ \deg_P(u) < \deg_P(v).$$

因此,

$$\deg_Z(D(u)) = \deg_Z(D(v)),\ \deg_{\mathrm{ed}}(D(u)) = \deg_{\mathrm{ed}}(D(v)),\ \deg_D(D(u)) = \deg_D(D(v)),$$

$$\deg_{\mathrm{gp}}(D(u)) = \deg_{\mathrm{gp}}(D(v)),\ \deg_P(D(u)) < \deg_P(D(v)),$$

从而得到 $D(u) <_{\mathrm{dp}} D(v)$。

情形 6：设 $u =_{\mathrm{dz}} v$，$u =_{\mathrm{ed}} v$，$u =_{\mathrm{d}} v$，$u =_{\mathrm{gp}} v$，$u =_{\mathrm{p}} v$，且 $u \leq_{\mathrm{Dlex}} v$。则

$$\deg_Z(u) = \deg_Z(v),\ \deg_{\mathrm{ed}}(u) = \deg_{\mathrm{ed}}(v),\ \deg_D(u) = \deg_D(v),$$

$$\deg_{\mathrm{gp}}(u) = \deg_{\mathrm{gp}}(v),\ \deg_P(u) = \deg_P(v).$$

因此我们有

$$\deg_Z(D(u)) = \deg_Z(D(v)),\ \deg_{\mathrm{ed}}(D(u)) = \deg_{\mathrm{ed}}(D(v)),\ \deg_D(D(u)) = \deg_D(D(v)),$$

$$\deg_{\mathrm{gp}}(D(u)) = \deg_{\mathrm{gp}}(D(v)),\ \deg_P(D(u)) = \deg_P(D(v)).$$

由 $u \leq_{\mathrm{Dlex}} v$，存在 $n \geq 0$，使得 $u, v \in \mathrm{S}_{\Omega,n}(Z)$。于是 $u \leq_{\mathrm{Dlex},n} v$，因此根据 $\leq_{\mathrm{Dlex}}$的定义，$D(u) \leq_{\mathrm{Dlex},n+1} D(v)$，从而证明了 $D(u) <_{\mathrm{dp}} D(v)$。

总之，第一个不等式得证。 □

3.4. **格¨布纳-希尔施布鲁赫基**。我们先回顾一些记号，然后给出结合代数及多个线性算子的 Composition-Diamond 引理，以供后续应用 [10]。

Rota-Baxter 代数的组合-菱形引理已在 [8] 中得到。其他代数及更多参考文献见 [6,7, 9, 45] 。

定义 3.17. 设 $\leq$ 是 $\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 上的一个单项式序。设 f、$g \in \mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(Z)$ 是两个首一括号多项式。设 f 是 f 的首括号单项式，且 $|f|$ 是其宽度。若存在 μ、ν、$w \in \mathrm{S}_\Omega(Z)$，使得 $w = f\mu = \nu g$，且 $\max\{|f|, |g|\} < |w| < |f| + |g|$，我们称该括号多项式为

$$(f, g)_w^{\mu,\nu} := f\mu - \nu g$$

关于 f 和 g 的交叠组合，其对应于 (μ, ν)。若存在 $q \in \mathrm{S}_\Omega^\star(Z)$ 和 $w \in \mathrm{S}_\Omega(Z)$，使得 $w = f = q|_g$，我们称该括号多项式为

$$(f, g)_w^q := f - q|_g$$

关于**f** 与 **g** 相对于 **q**的包含组合。在任一情况下，我们称w 为相应交组合（或包含组合）的**歧义**。

定义 3.18。设 $w \in \Im_\Omega(Z)$, S 是 $\mathbf{k}\Im_\Omega(Z)$ 中的首一括号多项式的集合，且 $\mathrm{Id}(S)$ 是由 S 按照式 (20) 生成的括号理想。若算子多项式 $f \in \mathbf{k}\Im_\Omega(Z)$ 可以写成以下形式，则称其关于 （S, w）模.....平凡

$$f = \sum_i c_i q_i|_{s_i},$$

其中 $0 \neq c_i \in \mathbf{k}$，$q_i \in \mathrm{S}_\Omega^\star(Z)$，$s_i \in S$ 以及$q_i|_{s_i} <_\Phi w$。在这种情况下，我们还记作

$$f \equiv 0 \mod (S, w).$$

定义 3.19。由首一括号多项式组成的集合$S \subseteq \mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(Z)$称为关于**Gr¨obner- Shirshov 基** $\leq$，如果对于所有f、$g \in S$，每个形如 $(f, g)_w^{\mu,\nu}$的交叠组合都模 (S, w) 平凡，并且每个形如 $(f, g)_w^q$的包含组合都模 (S, w) 平凡。

下面的组合-菱形引理是构造自由拟微分 Rota-Baxter 代数之基的有效工具。

定理 3.20。 (组合-菱形引理 [10, 24, 45]) 设 Z 是一个集合，且 $\leq$是 $\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 上的单项式序。设 S 是 $\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 中首一括号多项式构成的集合。令

$$\eta\colon \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z) \to \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)/\mathrm{Id}(S)$$

为 $\mathbf{k}$-模的典范同态。则以下陈述等价。

(i) S 是 $kS_\Omega(Z)$ 中的 *Gröbner-Shirshov* 基。 *(ii)* 若 $f \in Id(S)$，则对于某个 $s \in S$ 和 $u \in S^\star\,\Omega(Z)$，有 $f = u|_s$。 *(iii)* 令 $Irr(S) := S_\Omega(Z)\backslash\{q|_{\bar{s}} \mid s \in S, q \in S_\Omega^\star(Z)\}$。则 $kS_\Omega(Z) = kIrr(S) \oplus Id(S)$，且 $\eta(Irr(S))$ 是 $kS_\Omega(Z)/Id(S)$ 的 k-基。

我们还回顾下面的引理，以便后续应用。

引理 *3.21*. [32, 引理 *3.5*] 设 $\phi := \phi(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\psi := \psi(y_1, \ldots, y_m)$ 是两个算子多项式恒等式。设 Z 为一个集合，并给定 $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m \in S_\Omega(Z)$。如果存在 i 满足 $1 \leq i \leq n$，以及 $r \in S^\star\,\Omega(Z)$，使得 $u_i = r|_{\bar{\psi}}$，那么，带有 $w = \bar{\phi}$ 和 $q = \bar{\phi}(u1, \cdots, u_{i-1}, r, u_{i+1}, \cdots, u_n) \in S^\star\,\Omega(Z)$ 的包含组合 $(\phi, \psi)_w^q = \phi - q|_\psi$ 模 $(S^{\langle\phi,\psi\rangle}(Z), w)$ 平凡。在这种情况下，该组合称为完全包含合成。

4. 抛微分 Rota-Baxter 代数的 Gr¨obner-Shirshov 基

本节将给出 I、II 和 III 型抛微分 Rota-Baxter 代数的 Gr¨obner-Shirshov 基。设 d 是权为 λ 的微分算子，P 是代数 R 上权为 λ 的 Rota-Baxter 算子。它们满足如下算子恒等式:

$$dP - Pd - bP, \quad b \in \mathbf{k}. \tag{25}$$

回顾定义 2.1，三元组 (R, d, P) 称为抛微分 Rota-Baxter 代数，属于 **I 型** (分别为 **II 型**，分别为 **III 型**，如果等式（25）中的算子恒等式成立，其中

$$\lambda = 0, b = 0, \quad (\text{resp. } \lambda \neq 0, b = 0, \text{ resp. } \lambda = 0, b \neq 0).$$

我们将给出它们的定义关系，将其视为 $\mathbf{k}S_\Omega(\{x,y\})$ 中的元素，然后证明这些定义关系构成了上述三种抛微分 Rota-Baxter 代数的 Gr¨obner-Shirshov 基。

对于 I 型旁微分 Rota–Baxter 代数，即 $\lambda = 0$和 $b = 0$，其定义算子恒等式为

(i) φ_{1,1}(x, y) :=P(x)P(y) −P(xP(y)) −
P(P(x)y), (ii) φ_{2,2}(x, y) :=D(xy) −D(x)y −xD(y),
(iii) φ_{3,3}(x) :=DP(x)−PD(x).

设 X 是一个集合。设 $\Phi := \{\phi_k := \phi_k(x_1, \cdots, x_n) \mid k \geq 1$，其中 $x_1, \cdots, x_n \in X\} \subseteq \mathbf{k}S_\Omega(X)$ 是一个 OPI 族。对于任意给定的集合Z，记

$$S_\Phi(Z) := \{\phi_k(u_1, \cdots, u_n) \mid \phi_k \in \Phi, u_1, \cdots, u_n \in \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)\}.$$

特别地，我们令

$$S_{\Phi_\mathrm{I}}(Z) := \{\phi_{\mathrm{I},1}(u, v),\ \phi_{\mathrm{I},2}(u, v), \phi_{\mathrm{I},3}(u) \mid u, v \in \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)\}. \tag{26}$$

类似地，对于 II 型旁微分Rota-Baxter代数，我们有 $\lambda \neq 0$、$b = 0$，并且其定义关系 Φ_{II} 由以下 OPI 构成。

(i) $\phi_{\mathrm{II},1}(x,y) := P(x)P(y) - P(xP(y)) - P(P(x)y) - \lambda P(xy)$,
(ii) $\phi_{\mathrm{II},2}(x,y) := D(xy) - D(x)y - xD(y) - \lambda D(x)D(y)$,
(iii) $\phi_{\mathrm{III},3}(x) := DP(x) - PD(x)$.

考虑集合

$$S_{\Phi_{\mathrm{II}}}(Z) := \{\phi_{\mathrm{II},1}(u,v),\ \phi_{\mathrm{II},2}(u,v), \phi_{\mathrm{III},3}(u) \mid u,v \in \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)\}. \tag{27}$$

最后，对于 III 型旁微分 Rota–Baxter 代数，我们有 $\lambda = 0$，$b \neq 0$。定义关系的集合 Φ_{III} 由以下 OPI 组成：

(i) $\phi_{\mathrm{III},1}(x, y) := P(x)P(y) - P(xP(y)) - P(P(x)y)$,
(ii) $\phi_{\mathrm{III},2}(x, y) := D(xy) - D(x)y - xD(y)$, (iii) $\phi_{\mathrm{III},3}(x) = DP(x) - PD(x) - bP(x)$。

考虑集合

$$S_{\Phi_{\mathrm{III}}}(Z) := \{\phi_{\mathrm{III},1}(u,v),\ \phi_{\mathrm{III},2}(u,v), \phi_{\mathrm{III},3}(u) \mid u,v \in \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)\}. \tag{28}$$

定理 4.1。设 $\mathrm{T} \in \{\mathrm{I}、\ \mathrm{II}、\ \mathrm{III}\}$。集合 $S_{\Phi_{\mathrm{T}}}(Z)$ 是 *Gröbner-Shirshov* 基，位于 $\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 中，关于单项式序 $\leq_{\mathrm{dp}}$ 见式(23)。

证明。我们首先验证 I 型的情形。设 $\phi_i := \phi_{\mathrm{I},i}(u, v)$，$\phi_j := \phi_{\mathrm{I},j}(u, v) \in S_{\Phi_{\mathrm{I}}}(Z)$，$i, j \in \{1, 2, 3\}$。记 $i \wedge j$ 为 ϕ_i 和 ϕ_j 的 OPI合成，这意味着或者 ϕ_i 位于交叠组合的左侧而 ϕ_j 位于右侧，或者在包含合成中，ϕ_j 包含于 ϕ_i 中。所有合成的歧义 t 如下列出：对于所有 $u, v, w \in kS_\Omega(Z)$ 以及 $r \in S_\Omega^\star(Z)$，

$1 \wedge 1$ $P(u)P(v)P(w)$，$P(r|_{P(u)P(v)})P(w)$，$P(u)P(r|_{P(v)P(w)})$。

$1 \wedge 2$ $P(r|_{D(uv)})P(w)$，$P(u)P(r|_{D(vw)})$。$1 \wedge 3$ $P(r|_{DP(u)})P(v)$，$P(u)P(r|_{DP(v)})$。$2 \wedge 1$ $D(r|_{P(u)P(v)}w)$，$D(ur|_{P(v)P(w)})$，$D(P(u)P(v))$。

$2 \wedge 2$ $D(r|_{D(uv)}w)$，$D(ur|_{D(vw)})$。$2 \wedge 3$ $D(r|_{DP(u)}v)$，$D(ur|_{DP(v)})$。$3 \wedge 1$ $DP(r|_{P(u)P(v)})$。

$3 \wedge 2$ $DP(r|_{D(uv)})$。$3 \wedge 3$ $DP(r|_{DP(u)})$。

我们注意到，除两个带下划线的组合之外，所有组合都属于适用引理3.21 的包含组合。下面详细说明这两个带下划线的情形，以作示例。

考虑第一个带下划线的项 $P(r|_{P(u)P(v)})P(w)$。根据引理 3.21，先取

$$\phi := \phi_{\mathrm{I},1}(u_1,u_2) = P(u_1)P(u_2) - P(u_1P(u_2)) - P(P(u_1)u_2), \quad \bar{\phi} = P(u_1)P(u_2),$$
$$\psi := \phi_{\mathrm{I},1}(v_1,v_2) = P(v_1)P(v_2) - P(v_1P(v_2)) - P(P(v_1)v_2), \quad \bar{\psi} = P(v_1)P(v_2),$$

然后取 $i = 1$、$v_1 = u$、$v_2 = v$、$u_1 = r|_{P(v_1)P(v_2)} = r|_{P(u)P(v)}$、$u_2 = w$、$q = P(r)P(u_2) = P(r)P(w)$。于是

$$\bar{\phi} = P(u_1)P(u_2) = P(r|_{P(u)P(v)})P(w) = q|_{\bar{\psi}}.$$

现在由引理 3.21，$\phi - q|_\psi$ 关于 $(S_{\Phi_{\mathrm{I}}}(Z), t)$ 模.....平凡。

接下来考虑第二个下划项 $D(r|_{P(u)P(v)}w)$。在引理 3.21 中，我们首先取

$$\phi := \phi_{\mathrm{I},2}(u_1,u_2), \quad \bar{\phi} = D(u_1u_2),$$
$$\psi := \phi_{\mathrm{I},1}(v_1,v_2), \quad \bar{\psi} = P(v_1)P(v_2),$$

and，然后取 $i = 1, u_1 = P(u)P(v), u_2 = w, v_1 = u, v_2 = v, q = D(rw)$。然后我们有e

$$\bar{\phi} = D\left(r|_{P(v_1)P(v_2)}u_2\right) = D(r|_{P(u)P(v)}w) = q|_{P(u)P(v)} = q|_{\bar{\psi}}.$$

由引理 3.21，可知 $\phi - q|_{\psi}$ 模（$S_{\Phi_{\mathrm{I}}}(Z)$，t）平凡。

经过上述分析，我们只需检查两个带下划线的情形。

首先考虑　　带下划线的歧义 $t = P(u)P(v)P(w)$。接下来我们计算合成　　n

$\phi_1(u,v)P(w) - P(u)\phi_1(v,w)$

$= -P(uP(v))P(w) - P(P(u)v)P(w) + P(u)P(vP(w)) + P(u)P(P(v)w)$

$= -\phi_1(\mathrm{uP(v)}, \mathrm{w}) - \mathrm{P(uP(v)P(w))} - \mathrm{P(P(uP(v))w)} - \phi_1(\mathrm{P(u)v}, \mathrm{w}) - \mathrm{P(P(u)vP(w))} - \mathrm{P(P(P(u)v)w)} + \phi_1(\mathrm{u}, \mathrm{vP(w)}) + \mathrm{P(uP(vP(w))} + \mathrm{P(P(u)vP(w))} + \phi_1(\mathrm{u}, \mathrm{P(v)w}) + \mathrm{P(uP(P(v)w))} + \mathrm{P(P(u)P(v)w)} = -\phi_1(\mathrm{uP(v)}, \mathrm{w}) - \phi_1(\mathrm{P(u)v}, \mathrm{w}) + \phi_1(\mathrm{u}, \mathrm{vP(w)}) + \phi_1(\mathrm{u}, \mathrm{P(v)w}) + \mathrm{P}(\phi_1(\mathrm{u}, \mathrm{v})\mathrm{w}) - \mathrm{P(u}\phi_1(\mathrm{v,w})).$

对于每一项，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{\phi_1(uP(v), w)} &= P(uP(v))P(w) <_{\mathrm{dp}} P(u)P(v)P(w),\\
\overline{\phi_1(P(u)v, w)} &= P(P(u)v)P(w) <_{\mathrm{dp}} P(u)P(v)P(w),\\
\overline{\phi_1(u, vP(w))} &= P(u)P(vP(w)) <_{\mathrm{dp}} P(u)P(v)P(w),\\
\overline{\phi_1(u, P(v)w)} &= P(u)P(P(v)w) <_{\mathrm{dp}} P(u)P(v)P(w),\\
\overline{P(\phi_1(u, v)w)} &= P(P(u)P(v)w) <_{\mathrm{dp}} P(u)P(v)P(w),\\
\overline{P(u\phi_1(v, w))} &= P(uP(v)P(w)) <_{\mathrm{dp}} P(u)P(v)P(w).
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$(f, g)_t^{\mu,\nu} \equiv 0 \mod (S_{\Phi_{\mathrm{I}}}(Z), t).$$

接下来考虑带下划线的歧义 $t = D(P(u)P(v)) = \phi_2(u,v)\overline{= D(\star)}|_{\phi_1(u,v)}$。我们有如下复合：

$$\begin{aligned}
&\phi_2(P(u), P(v)) - D(\phi_1(u, v))\\
&= -DP(u)P(v) - P(u)DP(v) + DP(uP(v)) + DP(p(u)v)\\
&= -\phi_3(u)P(v) - PD(u)P(v) - P(u)\phi_3(v) - P(u)PD(v) + \phi_3(uP(v)) + PD(uP(v))\\
&\quad + \phi_3(P(u)v) + PD(P(u)v)\\
&= -\phi_3(u)P(v) - \phi_1(D(u), v) - P(D(u)P(v)) - P(PD(u)v) - P(u)\phi_3(v)\\
&\quad - \phi_1(u, D(v)) - P(uPD(v)) - P(P(u)D(v)) + PD(uP(v)) + PD(P(u)v)\\
&= -\phi_3(u)P(v) - \phi_1(D(u), v) - P(u)\phi_3(v) - \phi_1(u, D(v)) + P(\phi_2(u, P(v)) + P(\phi_2(P(u), v)))\\
&\equiv 0 \mod (S_{\Phi_{\mathrm{II}}}(Z), t).
\end{aligned}$$

感谢

$$\begin{aligned}
\overline{\phi_3(u)P(v)} &= DP(u)P(v) <_{\mathrm{dp}} D(P(u)P(v)),\\
\overline{\phi_1(D(u), v)} &= PD(u)P(v) <_{\mathrm{dp}} D(P(u)P(v)),\\
\overline{P(u)\phi_3(v)} &= P(u)DP(v) <_{\mathrm{dp}} D(P(u)P(v)),\\
\overline{\phi_1(u, D(v))} &= P(u)PD(v) <_{\mathrm{dp}} D(P(u)P(v)),\\
\overline{P(\phi_2(u, P(v)))} &= PD(uP(v)) <_{\mathrm{dp}} D(P(u)P(v)),\\
\overline{P(\phi_2(P(u), v))} &= PD(P(u)v) <_{\mathrm{dp}} D(P(u)P(v)),
\end{aligned}$$

我们得到

$$(f,g)_t^{\mu,\nu} \equiv 0 \mod (S_{\Phi_{\mathrm{I}}}(Z),t).$$

这就完成了 I 型情形的证明。

II 型和 III 型的情形可类似地验证。 □

5. 自由非交换抛微分 Rota-Baxter 代数

在本节中，我们将利用抛微分 Rota-Baxter 代数的 Gr¨obner-Shirshov 基，彻底确定自由非交换抛微分 Rota-Baxter 代数。在定义 2.1 中给出的三类抛微分 Rota-Baxter 代数中，我们将合并讨论 I 型和 II 型。然后修改这一方法来处理 III 型。

5.1. **自由抛微分**Rota-Baxter 代数的一个线性基。令 $\mathrm{T} \in \{\mathrm{I}、\mathrm{II}、\mathrm{III}\}$ 和 $\Omega = \{D, P\}$。令

$$\eta: \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z) \to \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(Z)), \tag{29}$$

为带算子代数的典范商同态。在商带算子代数$\mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(Z)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_\mathrm{T}}(Z))$中，定义商运算

$$\overline{D} := D \mod \mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(Z)), \quad \overline{P} := P \mod \mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(Z)),$$

并令 $\bar{*}$ 为模 $\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(Z))$ 的商，其中连接定义在 $\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)$ 上。根据定理 3.5，可得

定理 5.1。令 $T \in \{\mathrm{I}、\mathrm{II}、\mathrm{III}\}$。采用上述记号，$(\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(Z))、\ \bar{*}、\ \overline{D}、\overline{P})$ 是类型为 T 的自由非交换微分 *Rota-Baxter* 代数。

定理 ¨4.1 中得到的 $\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(Z))$ 的 Grobner-Shirshov 基为该自由非交换微分 Rota-Baxter 代数给出了如下线性基。

定理 5.2。固定 $\mathrm{T} \in \{\mathrm{I}、\mathrm{II}、\mathrm{III}\}$。令

$$\mathrm{Irr}(S_{\Phi_\mathrm{T}}(Z)) := \mathrm{S}_\Omega(Z)\backslash\{q_1|_{P(u)P(v)}、\ q_2|_{D(uv)}、\ q_3|_{DP(u)} \mid u、\ v \in \mathrm{S}_\Omega(Z)、\ q_i \in \mathrm{S}_\Omega^{\star}(Z)、\ 1 \le i \le 3\}。 \tag{30}$$

那么，$\eta(\mathrm{Irr}(S_{\Phi_T}(Z)))$ 是$\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(Z)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(Z))$的线性基。

证明。令 $\mathrm{T} \in \{\mathrm{I}、\mathrm{II}、\mathrm{III}\}$。根据定理 4.1，$\mathrm{S}_{\Phi_\mathrm{T}}(Z)$ 是 $\mathrm{kS}_\Omega(Z)$ 中的 Gr¨obner-Shirshov 基。此外，根据式 (26)–(28)，$\phi_{\mathrm{T}},1(u, v)$、$\phi_{\mathrm{T}},2(u, v)$ 和 $\phi_{\mathrm{T}},3(u)$ 在 $\mathrm{S}_{\Phi_\mathrm{T}}(Z)$ 中关于 $\le_{\mathrm{dp}}$ 的首项分别为 P(u)P(v)、D(uv) 和 D(P(u))。因此，根据定理 3.20，$\eta(\mathrm{Irr}(\mathrm{S}_{\Phi_\mathrm{T}}(Z)))$ 是 $\mathrm{kS}_\Omega(Z)/\mathrm{Id}(\mathrm{S}_{\Phi_\mathrm{T}}(Z))$ 的线性基。□

接下来，我们通过将线性基 $\mathrm{Irr}(S_{\Phi_\mathrm{T}}(Z))$ 明确地识别为$S_{\Phi_\mathrm{T}}(Z)$ 的一个子集；该子集是在先前关于微分 Rota-Baxter 代数的研究ff中得到的 [21, 23]。为此，我们先回顾一些记号 [19, 21, 23]。为与先前文献保持一致，并避免后文的记号冲突，我们将使用 X 而非Z 作为自由算子代数的生成集$\mathfrak{S}_\Omega(X)$。

对于 $\mathrm{S}_\Omega(X)$ 的任意子集合 Y 和 Z，我们将Y 与 Z 的交替积 定义为

$$\Lambda(Y,Z) := \left(\bigcup_{r\ge1}(YP(Z))^r\right)\bigcup\left(\bigcup_{r\ge0}(YP(Z))^rY\right)\bigcup\left(\bigcup_{r\ge1}(P(Z)Y)^r\right)\bigcup\left(\bigcup_{r\ge0}(P(Z)Y)^rP(Z)\right).$$

接下来，我们通过以下递归构造一个集合序列。首先，定义

$$\mathfrak{X}_0 := S(\Delta(X)).$$

对于 $\Delta(X) := \{D^n(x) \mid x \in X, n \geq 0\}$。一般而言，对于 $n \geq 1$，我们定义

$$\mathfrak{X}_n := \Lambda(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_{n-1}). \tag{31}$$

因此，X_n 可以明确表示为如下的不交并。

$$\mathfrak{X}_n = \left(\bigcup_{r\geq 1}(\mathfrak{X}_0 P(\mathfrak{X}_{n-1}))^r\right) \bigcup \left(\bigcup_{r\geq 0}(\mathfrak{X}_0 P(\mathfrak{X}_{n-1}))^r \mathfrak{X}_0\right) \bigcup \left(\bigcup_{r\geq 1}(P(\mathfrak{X}_{n-1})\mathfrak{X}_0)^r\right) \bigcup \left(\bigcup_{r\geq 0}(P(\mathfrak{X}_{n-1})\mathfrak{X}_0)^r P(\mathfrak{X}_{n-1})\right).$$

由式（31），我们得到 $\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}_1$。对于给定的 $k \geq 1$，假设 $\mathfrak{X}_{n-1} \subseteq \mathfrak{X}_n$ 对所有 $n \leq k$ 都成立，因此可得

$$\mathfrak{X}_k = \Lambda(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_{k-1}) \subseteq \Lambda(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_{k+1}.$$

于是我们得到一个直接系。然后取其直接极限，得到一个集合

$$\mathfrak{X}_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{X}_n = \varinjlim \mathfrak{X}_n. \tag{32}$$

X中的元素$_\infty$ 称为**微分 Rota-Baxter 括号词**，或简称为**微分 Rota-Baxter 括号词** [23]。对于每个微分 Rota-Baxter 括号词$u \in \mathfrak{X}_\infty$，$u$ 有唯一的**标准分解**

$$u = u_1 \cdots u_k, \tag{33}$$

其中每个u_i 交替地属于 X_0 或属于 $P(X_\infty)$，且 $1 \leq i \leq k$。这类似于 [19,引理 4.2.5(c)]。我们称k 为u的**宽度**，记作 $b(u)$。此外，令

$$\mathrm{dep}_P(u) := \min\{k \mid u \in \mathfrak{X}_k\},$$

并称其为u的P**-深度**。记$\mathbf{k}X_\infty$ 为以集合 X_∞为基的自由模。

命题 5.3。

$$\mathfrak{X}_\infty = \mathrm{Irr}(S_{\Phi_T}(X)). \tag{34}$$

证明。令 $S_{\phi_T} := S_{\Phi_T}(X)$，并令 $\mathrm{Id}_{\Phi_T} := \mathrm{Id}(S_{\Phi_T}) = \mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(X))$。令 $\eta: kS_\Omega(X) \to kS_\Omega(X)/\mathrm{Id}_{\Phi_T}$为 $T \in \{I, II\}$ 的典范同态。由式 (30) 可知

$$\mathrm{Irr}(S_{\Phi_T}(X)) := \mathfrak{S}_\Omega(X) \backslash \{q_1|_{P(u)P(v)},\ q_2|_{D(uv)},\ q_3|_{DP(u)} \mid u, v \in \mathfrak{S}_\Omega(X),\ q_i \in \mathfrak{S}_\Omega^\star(X),\ 1 \leq i \leq 3\}.$$

对于$n \geq 0$，我们定义

$$I_n := \{u \in \mathrm{Irr}(S_{\Phi_T}) \mid \mathrm{dep}_P(u) \leq n\} \subseteq \mathfrak{S}_\Omega(X).$$

因此，对所有$n \geq 0$，都有$I_n \subseteq I_{n+1}$，并且

$$\mathrm{Irr}(S_{\Phi_T}) = \bigcup_{n\geq 0} I_n. \tag{35}$$

由式 (31)，对所有 $u \in X_n$，都有 $\mathrm{dep}_P(u) \leq n$，且 u 不以 P(x)P(y)、D(xy) 和 DP(x) 为子词，其中 $x,y \in S_\Omega(X)$。因此 $X_n \subseteq I_n$。

另一方面，我们用 $n \geq 0$ 作归纳法证明 $I_n \subseteq X_n$。对于任意 $u \in I_0$，，我们有 $\mathrm{dep}_P(u) = 0$，因此 $u \in S_{\{D\}}(X)$。接着由式 (17)，$u = v_1 v_2 \cdots v_k \in I_0$，，其中 $v_i \in X \cup \lfloor S_\Omega(X) \rfloor_\Omega$，对 $1 \leq i \leq k$ 且 $\Omega = \{D\}$。由于 u 不可能以 D(xy) 为子词，因此当 $n \geq 1$ 时，$v_i \in X \cup D^n(X)$。于是，$u \in S(\Delta(X)) = X_0$，，因此 $I_0 \subseteq X_0$。假设对于某个 $n \geq 0$，$I_n \subseteq X_n$。考虑 $u \in I_{n+1}$。由式 (19)，我们可以写成

$$u = v_0 \lfloor v_1^* \rfloor_P v_1 \cdots \lfloor v_k^* \rfloor_P v_k, \quad v_0, v_1 \cdots, v_k \in M(X) \cup \lfloor \mathfrak{S}_\Omega(X) \rfloor_D, \quad v_1^*, \cdots, v_k^* \in \mathfrak{S}_\Omega(X)$$

假设对于某个 $v_{t_0} = \lceil v_{t_0} \rfloor_D \in \lfloor S_\Omega(X) \rfloor_D$。由于对于 x、$y \in S_\Omega(X)$，u 不包含 $P(x)P(y)$、$DP(x)$ 和 $D(xy)$ 作为其子词，我们有 $v_{t_0} \in \Delta(X)$。这表明 $v_i \in \overline{M(X)} \cup$

$\lfloor \Delta(X) \rfloor_D$。对于所有带有 $j = 1, \cdots, k$ 的 $v_j^* \in \mathrm{S}_\Omega(X)$，我们有 $\mathrm{dep}_P(v_j^*) \leq n$，因此根据归纳法假设，$v_j^* \in \mathrm{X}_n$。于是，$\lfloor v_j^* \rfloor_P \in \lfloor \mathrm{X}_n \rfloor_P$。这给出 $u \in \mathrm{X}_{n+1}$，从而得到 $I_{n+1} \subseteq \mathrm{X}_{n+1}$，归纳法得证。

于是由公式（35），证明得证。 □

令 $\iota : \mathbf{k}\mathrm{X}_\infty \to \mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(X)$ 为自然包含。设 $\theta = \eta \circ \iota$。令

$$\text{Ш}_q^{\mathrm{NC}}(X) := \mathbf{k}\mathfrak{X}_\infty.$$

于是得到如下交换图。

(36)
$$\begin{array}{ccc} \text{Ш}_q^{\mathrm{NC}}(X) & \xhookrightarrow{\iota} & (\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X), D, P) \\ & \searrow^{\theta} & \downarrow \eta \\ & & (\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(X)), \bar{*}, \overline{D}, \overline{P}) \end{array}$$

由命题 5.3，可得

引理 5.4。 采用上述记号，有线性同构

$$\theta : \mathbf{k}\mathfrak{X}_\infty \xrightarrow{\iota} \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X) \xrightarrow{\eta} \mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(X)). \tag{37}$$

5.2. **I 型和 II 型抛微分Rota-Baxter 代数的显式构造**。 我们可以利用公式（37）中的线性双射 θ，将自由抛微分 Rota-Baxter 代数 $(\mathbf{k}\mathrm{S}_\Omega(X)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(X)), \bar{*}, D, P)$ 上的乘法、微分算_子和 Rota-Baxter 算子传递到$\text{Ш}^{\mathrm{NC}}(X) := \mathbf{k}\mathrm{X}_\infty$，从而得到同构

$$\left(\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(X)), \bar{*}, \overline{D}, \overline{P}\right) \cong \left(\text{Ш}^{\mathrm{NC}}(X), \theta^{-1}\bar{*}(\theta\otimes\theta), \theta^{-1}D\theta, \theta^{-1}P\theta\right) \tag{38}$$

自由拟微分 Rota-Baxter 代数在 X 上。这里 $\bar{*}$ 是 $\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(X))$ 上由定理 $\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X)$ 上的连接诱导的乘法5.1，并且

$$\theta^{-1}\bar{*}(\theta\otimes\theta)(u\otimes v) = \theta^{-1}(\theta(u)\bar{*}\theta(v)).$$

我们的目标是明确描述运算 $\theta^{-1}(\bar{*}(\theta\otimes\theta))$、$\theta^{-1}D\theta$、$\theta^{-1}P\theta$，从而显式构造自由拟微分 Rota-Baxter 代数。

我们首先描述传递过来的 Rota-Baxter 算子 $\theta^{-1}P\theta$。

注意，若 u 属于 X_∞，则 $P(u)$ 仍属于 X_∞。因此我们有一个线性映射

$$P_{\mathfrak{X}} : \mathbf{k}\mathfrak{X}_\infty \to \mathbf{k}\mathfrak{X}_\infty, \quad P_{\mathfrak{X}}(u) := P(u). \tag{39}$$

引理 5.5. 我们有

$$P_{\mathfrak{X}} = \theta^{-1}\overline{P}\theta. \tag{40}$$

证明。 由于对所有$u \in \mathrm{X}_\infty$，$P\eta = \eta P$ 且 $\iota(u) = u$，因此我们有

$$(\theta^{-1}\overline{P}\theta)(u) = (\theta^{-1}\overline{P}\eta\iota)(u) = \theta^{-1}\overline{P}\eta(u) = \theta^{-1}\eta(P(u)) = \theta^{-1}\eta\iota(P(u)) = \theta^{-1}\theta(P(u)) = P_{\mathfrak{X}}(u). \quad \square$$

接下来，我们定义一个二元运算 $\diamond$在 $\text{Ш}^{\mathrm{NC}}_q(X)$ 上，将其定义为 $\bar{*}$的传输乘积。我们使用以下递归，其方式类似于集合上自由 Rota-Baxter 代数中两个 Rota-Baxter 字的乘积所用的递归。更多详情请参见 [19, 定理 4.2。16]

考虑 b 基u、$v \in \mathfrak{X}_\infty$。利用公式（33）中的标准分解，写 e

$$u = u_1 \cdots u_m, \quad v = v_1 \cdots v_n,$$

满足 $\mathrm{b}(u) = m \geq 1$ 且 $\mathrm{b}(v) = n \geq 1$。我们根据和 $\mathrm{l} := \mathrm{dep}_P(u) + \mathrm{dep}_P(v) \geq 0$，通过归纳法定义 $u \diamond v$。对于基础情形 $\mathrm{l} = 0$，有 $\mathrm{dep}_P(u) = \mathrm{dep}_P(v) = 0$，因此 u、v 属于 $\mathrm{X}_0 = S(\Delta(X))$。在这种情况下，我们定义 $u \diamond v = uv$，即拼接乘积。

对于给定的 $k \geq 0$，假设对所有满足 u、$v \in \mathrm{X}_\infty$ 且 $0 \leq \mathrm{l} \leq k$ 的 $u \diamond v$，都已定义了 $u \diamond v$。考虑满足 $\mathrm{l} = \mathrm{dep}_P(u) + \mathrm{dep}_P(v) = k + 1$ 的 u、$v \in \mathrm{X}_\infty$。根据 $\mathrm{b}(u) = \mathrm{b}(v) = 1$ 是否成立，我们分两种情况讨论。

情况 1。 设 $\mathrm{b}(u) = \mathrm{b}(v) = 1$，也就是说，$u$和$v$ 属于 X_0 或属于 $P(\mathrm{X}_\infty)$。于是

$$u \diamond v = \begin{cases} P(\bar{u} \diamond P(\bar{v})) + P(P(\bar{u}) \diamond \bar{v}) + \lambda P(\bar{u} \diamond \bar{v}), & \text{if } u = P(\bar{u}) \text{ and } v = P(\bar{v}), \\ uv, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{41}$$

第一行中的乘积由归纳假设可知是良定义的，因为

$$\mathrm{dep}_P(\bar{u}) + \mathrm{dep}_P(P(\bar{v})) = \mathrm{dep}_P(P(\bar{u})) + \mathrm{dep}_P(\bar{v}) = k \quad \text{and} \quad \mathrm{dep}_P(\bar{u}) + \mathrm{dep}_P(\bar{v}) = k - 1.$$

第二行中的乘积是连接。

情况 2。 设 $\mathrm{b}(u) > 1$ 或 $\mathrm{b}(v) > 1$。于是定义

$$u \diamond v = u_1 \cdots u_{m-1}(u_m \diamond v_1)v_2 \cdots v_n, \tag{42}$$

其中 $w_m \diamond v_1$ 已由式（41）定义，其余乘积均为连接。将 $\diamond$ 按双线性延拓，可得 $\diamond$ 在 $\mathbf{k}\mathfrak{X}_\infty$ 上的一个二元运算。

引理 5.6。 对于上面定义的乘积 $\diamond$，我们有

$$u \diamond v = \theta^{-1}(\theta(u) \bar{*} \theta(v)), \quad u, v \in \mathfrak{X}_\infty. \tag{43}$$

证明。 对和 $\mathrm{l} := \mathrm{dep}_P(u) + \mathrm{dep}_P(v) \geq 0$使用归纳法。若 $\mathrm{l} = 0$，则 u、$v \in S(\Delta(X)) \subseteq \mathrm{X}_\infty$，因此 $u \diamond v = uv$。由于对于所有 $a \in \mathrm{X}_\infty$，$\iota(a) = a$，我们有

$$\theta(u) \bar{*} \theta(v) = \eta(u) \bar{*} \eta(v) = \eta(uv) = \theta(uv).$$

因此 $uv = \theta^{-1}(\theta(u) \bar{*} \theta(v))$. 等式（43）在此情况下成立。现在假设对于所有$u$、$v \in \mathfrak{X}_\infty$ 满足 $\mathrm{l} \leq k$的情形，等式（u、$v \in \mathfrak{X}_\infty$ 满足 $\mathrm{l} = k + 1$。需要考察两种情况。

情况 1。 令 $\mathrm{b}(u) = \mathrm{b}(v) = 1$。那么，要么对于某些 $\bar{}u$、$\bar{}v \in \mathrm{X}_\infty$，有 $u = P(\bar{}u)$、$v = P(\bar{}v)$；要么 u、v 中的一个属于 $S(\Delta(X))$。对于前一种情况，我们有

$$\begin{aligned}
\theta(u) \bar{*} \theta(v) &= \eta(P(\bar{u})) \bar{*} \eta(P(\bar{v})) \\
&= \overline{P}(\eta(\bar{u})) \bar{*} \overline{P}(\eta(\bar{v})) \quad (\text{by } \eta P = \overline{P}\eta) \\
&= \overline{P}\Big(\eta(\bar{u}) \bar{*} \overline{P}(\eta(\bar{v})) + \overline{P}(\eta(\bar{u})) \bar{*} \eta(\bar{v}) + \lambda \eta(\bar{u}) \bar{*} \eta(\bar{v})\Big) \\
&= \overline{P}\Big(\theta(\bar{u}) \bar{*} \theta(P(\bar{v})) + \theta(P(\bar{u})) \bar{*} \theta(\bar{v}) + \lambda \theta(\bar{u}) \bar{*} \theta(\bar{v})\Big) \\
&= \overline{P}\Big(\theta(\bar{u} \diamond P(\bar{v})) + \theta(P(\bar{u}) \diamond \bar{v}) + \lambda \theta(\bar{u} \diamond \bar{v})\Big) \quad (\text{by the induction hypothesis}) \\
&= \overline{P}\Big(\eta(\bar{u} \diamond P(\bar{v})) + \eta(P(\bar{u}) \diamond \bar{v}) + \lambda \eta(\bar{u} \diamond \bar{v})\Big) \\
&= \eta\Big(P(\bar{u} \diamond P(\bar{v}) + P(\bar{u}) \diamond \bar{v} + \lambda \bar{u} \diamond \bar{v})\Big) \\
&= \eta(u \diamond v) \quad (\text{by Eq. (41)}) \\
&= \theta(u \diamond v) \quad (\text{by } \iota(u \diamond v) = u \diamond v \in \mathbf{k}\mathfrak{X}_\infty).
\end{aligned}$$

对于后一种情况，我们得到 $uv \in \mathrm{X}_\infty$，因此 $\iota(uv) = uv$。于是

$$\theta(u) \bar{*} \theta(v) = \eta(u) \bar{*} \eta(v) = \eta(uv) = \theta(uv).$$

再次由式（41），$u \diamond v = uv$，因此式（43）成立。

情况 2。假设 $\mathrm{b}(u) \geq 2$ 或 $\mathrm{b}(v) \geq 2$。将u和v写成它们的标准分解：

$$u = u_1 \cdots u_m, \quad v = v_1 \cdots v_n,$$

其中，每个u_i, $1 \leq i \leq m$以及每个v_j, $1 \leq j \leq n$，都交替地属于 X_0 或$P(\mathrm{X}_\infty)$。于是

$$\begin{aligned}
\theta(u) \bar{*} \theta(v) &= \eta(u) \bar{*} \eta(v) \\
&= \eta(u_1 \cdots u_{m-1}) \bar{*} (\eta(u_m) \bar{*} \eta(v_1)) \bar{*} \eta(v_2 \cdots v_n) \\
&= \eta(u_1 \cdots u_{m-1}) \bar{*} \theta(u_m \diamond v_1) \bar{*} \eta(v_2 \cdots v_n) \quad \text{(by Case 1)} \\
&= \eta(u_1 \cdots u_{m-1}) \bar{*} \eta(u_m \diamond v_1) \bar{*} \eta(v_2 \cdots v_n) (\text{by } \iota(u \diamond v) = u \diamond v \in \mathbf{k}\mathfrak{X}_\infty) \\
&= \eta(u_1 \cdots u_{m-1} u_m \diamond v_1 v_2 \cdots v_n) \\
&= \eta(u \diamond v) \quad \text{(by Eq. (42))} \\
&= \theta(u \diamond v) \quad (\text{by } \iota(u \diamond v) = u \diamond v \in \mathbf{k}\mathfrak{X}_\infty),
\end{aligned}$$

证明等式 (43)。 □

最后，我们定义 kX_∞ 上的线性算子 $\mathrm{d}_{\mathfrak{X}}$，并将其与$\theta^{-1}\mathrm{D}\theta$等同。只需对基元素 $\mathrm{u} \in \overline{\mathrm{X}}_\infty$定义 $\mathrm{d}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{u})$。现在我们对 $\mathrm{dep}_P(\mathrm{u}) = \mathrm{n} \geq 0$进行归纳。如果 $\mathrm{n} = 0$，则 $\mathrm{X}_0 = \mathrm{S}(\Delta(\mathrm{X}))$，因此 $\mathrm{u} \in \mathrm{S}(\Delta(\mathrm{x}))$。我们可以将 u 写成 $\mathrm{u} = \mathrm{u}_1 \cdots \mathrm{u}_m$，其中 $\mathrm{u}_i \in \Delta(\mathrm{X})$，且 $\mathrm{m} \geq 1$。接下来我们对 $\mathrm{m} \geq 1$进行归纳来定义 $\mathrm{d}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{u})$。如果 $\mathrm{m} = 1$，则 $\mathrm{u} \in \Delta(\mathrm{X})$，并定义

$$d_{\mathfrak{X}}(u) := D(u). \tag{44}$$

由归纳假设，对于 $m \geq 2$，我们定义

$$d_{\mathfrak{X}}(u) := d_{\mathfrak{X}}(u_1 u_2 \ldots u_m) = d_{\mathfrak{X}}(u_1) u_2 \cdots u_m + u_1 d_{\mathfrak{X}}(u_2 \cdots u_m) + \lambda d_{\mathfrak{X}}(u_1) d_{\mathfrak{X}}(u_2 \cdots u_m). \tag{45}$$

假设对于给定的 $\mathrm{n} \geq 0$，所有满足 $\mathrm{dep}_P(\mathrm{u}) \leq \mathrm{n}$ 的 $\mathrm{u} \in \mathrm{X}$，其 $\mathrm{d}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{u})$ 均已定义。考虑满足 $\mathrm{dep}_P(\mathrm{u}) = \mathrm{n} + 1$ 的 $\mathrm{u} \in \mathrm{X}_\infty$。由公式 (33) 及 $\mathrm{X}_{n+1} = \Lambda(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_n)$，$\mathrm{u} = \mathrm{u}_1 \cdots \mathrm{u}_m$，其中 u_i或者属于 $\mathrm{X}_0(= \mathrm{S}(\Delta(\mathrm{X}))$，或者属于 $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n)$。当 $\mathrm{m} = 1$ 且 $\mathrm{u}_i \in \mathrm{X}_0$, 时，$\mathrm{d}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{u})$ 已由 $\mathrm{n} = 0$ 的初始步骤定义。当 $\mathrm{m} = 1$ 且 $\mathrm{u} \in \mathrm{P}(\mathrm{X}_\infty)$ 时，对某个 $\bar{}\mathrm{u} \in \mathrm{X}_n$，将 $\mathrm{u} = \mathrm{P}(\bar{}\mathrm{u})$ 记作.....。然后定义

$$d_{\mathfrak{X}}(u) := P_{\mathfrak{X}}(d_{\mathfrak{X}}(\bar{u})), \tag{46}$$

其中 $d_{\mathfrak{X}}(\bar{}u)$ 由归纳假设良定义，因为 $\mathrm{dep}_P(\bar{}u) \leq n$。若 $m \geq 2$，则我们还递归地定义 $d_{\mathfrak{X}}(u)$，定义见公式 (45) 和 (46)。

引理 5.7. 对于上述定义的线性算子 $d_{\mathfrak{X}}$，有

$$d_{\mathfrak{X}} = \theta^{-1} \overline{D} \theta. \tag{47}$$

证明。对于 $u \in \mathfrak{X}_\infty$，由公式 (33)，可写为 $= u_1 u_2 \ldots u_m$，其中 u_i 交替属于 $\mathfrak{X}_0$ 或 $P(\mathfrak{X}_\infty)$，且 $m \geq 1$。于是，公式 (47) 等价于

$$\overline{D}(\theta(u)) = \theta(d_{\mathfrak{X}}(u)), \quad u \in \mathfrak{X}_\infty. \tag{48}$$

接下来，我们通过对 $\mathrm{dep}_P(u) \geq 0$ 作归纳法来证明这一点。

步骤 1. 对于 $\mathrm{dep}_P(\mathrm{u}) = 0$ 的基础情形，我们有 $\mathrm{u} = \mathrm{u}_1 \cdots \mathrm{u}_m \in \mathrm{S}(\Delta(\mathrm{X}))$，其中 $\mathrm{u}_i \in \Delta(\mathrm{X})$ 且$1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m}$。接下来对 $\mathrm{m} \geq 1$ 进行第二次归纳。对于基础步骤 $\mathrm{m} = 1$，由对所有 $\mathrm{a} \in \mathrm{X}_\infty$ 都成立的等式 $\eta(\mathrm{D}(\mathrm{a})) = \mathrm{D}(\eta(\mathrm{a}))$ 以及式 (44)，我们有

$$\overline{D}(\theta(u)) = \overline{D}(\eta(u)) = \eta(D(u)) = \theta(d_{\mathfrak{X}}(u)),$$

证明等式（48）。假设式 (48) 对 $m \leq k$ （且 $\mathrm{dep}_P(u) = 0$）成立。考虑 $m = k + 1$。The n

$$\begin{aligned}
\overline{D}(\theta(u)) &= \overline{D}(\eta(u_1u_2\cdots u_m)\\
&= \overline{D}(\eta(u_1)\bar{*}\eta(u_2\cdots u_m))\\
&= \overline{D}(\eta(u_1))\bar{*}\eta(u_2\cdots u_{m-1}) + \eta(u_1)\bar{*}\overline{D}(\eta(u_2\cdots u_m) + \lambda\overline{D}(\eta(u_1))\bar{*}\overline{D}(\eta(u_2\cdots u_m))\\
&= \eta(d_{\mathfrak{x}}(u_1))\bar{*}\eta(u_2\cdots u_{m-1}) + \eta(u_1)\bar{*}\eta(d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m)) + \lambda\eta(d_{\mathfrak{x}}(u_1))\bar{*}\eta(d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m))\\
&\quad \text{(by the induction hypothesis on } m)\\
&= \eta(d_{\mathfrak{x}}(u_1)(u_2\cdots u_{m-1}) + u_1d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m) + \lambda d_{\mathfrak{x}}(u_1)d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m))\\
&= \eta(d_{\mathfrak{x}}(u)) \quad \text{(by Eq. (45))}\\
&= \theta(d_{\mathfrak{x}}(u)) \quad (\text{by } d_{\mathfrak{x}}(u) \in \mathbf{k}\mathfrak{x}_\infty).
\end{aligned}$$

步骤 2。 假设等式（48）对 $\mathrm{dep}_P(u) \leq n$成立。考虑 $\mathrm{dep}_P(u) = n + 1$。将 u 写成其标准分解:

$$u = u_1\cdots u_m,$$

其中，每个 u_i, $1 \leq i \leq m$ 都交替地属于 X_0 或 $P(X_n)$ 中。我们再次对 m 使用归纳法。若 $m = 1$ 且 $u \in S(\Delta(X))$，则根据 $n = 0$的初始步骤，等式（48）成立。若 $m = 1$ 且 $u = P(\bar{u})$（其中 $\bar{u} \in X_n$，且 $\mathrm{dep}_P(\bar{u}) \leq n$），则由方程 D P =P D,

$$\begin{aligned}
\overline{D}(\theta(u)) &= \overline{D}(\overline{P}(\eta(\bar{u})))\\
&= \overline{P}(\overline{D}(\theta(\bar{u})))\\
&= \overline{P}(\theta(d_{\mathfrak{x}}(\bar{u})) \quad \text{(by the induction hypothesis on } \mathrm{dep}_P(u))\\
&= \theta(P_{\mathfrak{x}}(d_{\mathfrak{x}}(\bar{u}))) \quad \text{(by Eq. (40))}\\
&= \theta(d_{\mathfrak{x}}(P(\bar{u}))) \quad \text{(by Eq. (46))}\\
&= \theta(d_{\mathfrak{x}}(u)),
\end{aligned}$$

证明等式（48）。假设等式（48）对所有满足 $u \in \mathfrak{x}_\infty$ 且 $m \leq k$、$\mathrm{dep}_P(u) = n + 1$的元素成立。现在考虑满足 $u \in \mathfrak{x}_\infty$ 且 $m = k + 1$的元素。于是我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{D}(\theta(u_1u_2\ldots u_m)) &= \overline{D}(\eta(u_1)\bar{*}\eta(u_2\cdots u_m))\\
&= \overline{D}(\eta(u_1))\bar{*}\eta(u_2\cdots u_m) + \eta(u_1)\bar{*}\overline{D}(\eta(u_2\cdots u_m)) + \lambda\overline{D}(\eta(u_1))\bar{*}\overline{D}(\eta(u_2\cdots u_m))\\
&= \theta(d_{\mathfrak{x}}(u_1))\bar{*}\eta(u_2\cdots u_m) + \eta(u_1)\bar{*}\theta(d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m)) + \lambda\theta(d_{\mathfrak{x}}(u_1))\bar{*}\theta(d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m))\\
&\quad \text{(by } u_1,\ u_2\cdots u_m \in \mathfrak{x}_\infty \text{ and the induction hypotheses on } m \text{ and } \mathrm{dep}_P(u))\\
&= \eta(d_{\mathfrak{x}}(u_1))\bar{*}\eta(u_2\cdots u_m) + \eta(u_1)\bar{*}\eta(d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m)) + \lambda\eta(d_{\mathfrak{x}}(u_1))\bar{*}\eta(d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m))\\
&\quad \text{(by } d_{\mathfrak{x}}(u_1),\ d_{\mathfrak{x}}(u_2\cdots u_m) \in \mathfrak{x}_\infty)\\
&= \eta(d_{\mathfrak{x}}(u)) \quad \text{(by Eq. (45))}\\
&= \theta(d_{\mathfrak{x}}(u)) \quad (\text{by } d_{\mathfrak{x}}(u) \in \mathbf{k}\mathfrak{x}_\infty),
\end{aligned}$$

证明式（47）。 □

根据定理 5.1和引理 5.5– 5.7，我们得到以下关于 I 型和 II 型偏微分 分Rota-Baxter 代数的主要结果。

定理 5.8。 设 X 为一个集合。四元组 $(\mathrm{III}^{\mathrm{NC}_q}(X), \diamond, d_{\mathfrak{x}}, P_{\mathfrak{x}})$ 连同包含映射 $j_X : X \to \mathrm{III}^{\mathrm{NC}_q}(X)$是 X 上 *I* 型和 *II* 型自由的副微分 *Rota-Baxter* 代数。

注 5.9。 当我们在情形（i）中取 $\lambda = 0$ 时： $b = 0$，那么它就变成 $\lambda = 0$， $b = 0$时的情形，这正是第 4 节中讨论的情形（i）。也就是说， P 和 Q 满足以下条件：

(i) $P(x)P(y) = P(xP(y)) + P(P(x)y)$,
(ii) $D(xy) = D(x)y + xD(y)$, (iii) $DP(x) = PD(x)$.

这就转化为 I 型旁微分 Rota–Baxter 代数的情形。

5.3. **III 型自由拟微分 Rota-Baxter 代数的显式构造**。 最后，我们将 I 型和 II 型自由拟微分 Rota-Baxter 代数的显式构造修正为 III 型的情形，即当 $\lambda = 0, b \neq 0$ 时。与 I 型和 II 型的情形一样，我们仍从以下同构开始

$$\left(\mathbf{k}\mathfrak{S}_\Omega(X)/\mathrm{Id}(S_{\Phi_T}(X)), \bar{*}, \overline{D}, \overline{P}\right) \cong \left(\mathrm{III}^{\mathrm{NC}}(X), \theta^{-1}\bar{*}(\theta\otimes\theta), \theta^{-1}\overline{D}\theta, \theta^{-1}\overline{P}\theta\right) \tag{49}$$

自由拟微分 Rota-Baxter 代数（定义在 X 上），如公式（38）所示。接着，我们将 $\mathrm{III}_{\mathrm{NC}}(X)$ 上的运算与显式定义的运算 $P_{\mathfrak{X}}$、$d_{\mathfrak{X}}$ 和 $\diamond$ 对应起来。

“$P_{\mathfrak{X}}$”和“$\diamond$”的构造完全相同。因此，我们将重点讨论“$d_{\mathfrak{X}}$”的构造，并将其与$\theta^{-1}D\theta$等同。

要定义$d_{\mathfrak{X}}$，只需为每个基元素$u \in \mathrm{X}$指定$d_{\mathfrak{X}}(u)$；为此，我们对深度$\mathrm{dep}_P(u) = n \geq 0$使用归纳法。

对于基准深度$n = 0$，有$u \in \mathrm{X}_0 = S(\Delta(X))$。将$u = u_1 \cdots u_m$写成$u_i \in \Delta(X)$且$m \geq 1$，然后对$m$使用归纳法来定义$d_{\mathfrak{X}}(u)$：若$m = 1$，则$u \in \Delta(X)$，并令$d_{\mathfrak{X}}(u) = D(u)$。若$m \geq 2$，则递归地定义

$$d_{\mathfrak{X}}(u) = d_{\mathfrak{X}}(u_1u_2\ldots u_m) = d_{\mathfrak{X}}(u_1)u_2\cdots u_m + u_1d_{\mathfrak{X}}(u_2\cdots u_m). \tag{50}$$

对于深度的归纳步骤，假设对所有满足$\mathrm{dep}_P(u) \leq n$的u， $d_{\mathfrak{X}}(u)$ 已有定义。取$\mathfrak{X}_\infty$ 中满足$\mathrm{dep}_P(u) = n + 1$的$u \in$ 。由式（33）以及$\mathfrak{X}_{n+1} = \Lambda(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_n)$ 的描述，我们可以写成

$$u = u_1 \cdots u_m,$$

其中各因子在 X_0 和 $P(\mathrm{X}_n)$ 之间交替。接着，我们对$m \geq 1$进行归纳。若$m = 1$ 且$u \in \mathrm{X}_0$, ，则定义已由基准深度$n = 0$的情形涵盖。若$m = 1$ 且$u = P(\bar{u})$，其中 $\bar{u} \in \mathrm{X}_n$，则定义

$$d_{\mathfrak{X}}(u) = P_{\mathfrak{X}}(d_{\mathfrak{X}}(\bar{u})) + bP(\bar{u}), \tag{51}$$

这是良定义的，因为 $\mathrm{dep}_P(\bar{u}) \leq n$。若 $m \geq 2$，则递归地定义 $d_{\mathfrak{X}}(u)$，方法是结合式（50）和（51）。

作出这一修改并采用引理5.5 – 5.7的类似结果后，我们得到关于 III 型抛物微分 Rota-Baxter 代数的以下主要结果。ff

定理 5.10。 设 X 为一个集合。抛物微分 *Rota-Baxter* 代数 $(\mathrm{III}_{\mathrm{NC}\,q,0}(X), \diamond, d_{\mathfrak{X}}, P_{\mathfrak{X}})$连同集合嵌入 $j_X : X \to \mathrm{III}_{\mathrm{NC}\ q,0}(X)$ 是 X 上自由的 *III* 型抛物微分 *Rota-Baxter* 代数。

致谢：本研究得到国家自然科学基金（12461002,12326324）和江西省自然科学基金（20224BAB201003）的资助。S. Zheng 感谢南开大学陈省身数学研究所的热情接待。

D利益声明。 作者声明不存在需要披露的利益冲突

◦ **数据 a 可用性**。 由于未创建或分析任何数据，因此不适用数据共享。 ed.

参考文献

[1] F. Baader 和 T. Nipkow，《项重写及相关内容》，剑桥大学出版社，1998。12[2] C. Bai，经典 Yang–Baxter 方程的统一代数方法，《物理学杂志 A：数学与理论》40（2007），11073-11082。2[3] C. Bai、L. Guo 和 Y. Sheng，李双代数、Manin 三元组、经典 r-矩阵与前李代数的相干范畴结构，《数学论坛》34（2022），989-1013。8[4] G. Baxter，一个解可由简单代数恒等式推出的分析问题，《太平洋数学杂志》10（1960），731-742。2[5] R.F. Blute、J.R.B. Cockett、J.S.P. Lemay 和 R.A. Seely，重新审视微分范畴，《应用范畴结构》28（2020），171-235。2[6] L. A. Bokut 和 Y. Chen，Gr¨obner-Shirshov 基及其计算，《数学科学通报》4（2014），325-395。16[7] L. A. Bokut、Y. Chen 和 Y. Chen，自由代数张量积的组合-菱形引理，《代数杂志》323（2010），2520-2537。16[8] L. A. Bokut、Y. Chen 和 X. Deng，Rota-Baxter 代数的 Gr¨obner-Shirshov 基，《西伯利亚数学杂志》51(6)（2010），978-988。16[9] L. A. Bokut、Y. Chen 和 Y. Li，范畴的 Gr¨obner-Shirshov 基，载于《算子与泛代数》，世界科学出版社，（2012），1-23。16[10] L. A. Bokut、Y. Chen 和 J. Qiu，带多个算子的结合代数及自由 Rota-Baxter 代数的 Gr¨obner-Shirshov 基，《纯粹与应用代数杂志》214（2010），89–110。12, 16, 17[11] P. Cartier，论自由巴克斯特代数的结构，《数学进展》9（1972），253-265。2[12] J. Cockett 和 J.-S. Lemay，积分范畴与微积分范畴，《计算机科学中的数学结构》29（2019），243-308。2[13] P. M. Cohn，《进阶代数及其应用》，第二版，Springer，2003。8, 11[14] A. Connes 和 D. Kreimer，量子场论中的重整化与黎曼–希尔伯特问题 I：图的霍普夫代数结构与主定理，《数学物理通讯》210（2000），249-273。2[15] R. Friedrich，自由概率论中的（余）单子，arXiv:1709.02973。2[16] X. Gao、L. Guo 和 M. Rosenkranz，自由积分–微分代数与 Gr¨obner-Shirshov 基，《代数杂志》442（2015），354-396。2[17] M. Goncharov 和 V. Gubarev，三阶矩阵代数上非零权的 Rota-Baxter 算子，《线性与多线性代数》70（2020），1055-1080。9[18] L. Guo，带算子半群、Motzkin 路与根树，《代数组合学杂志》29（2009），35-62。9, 10[19] L. Guo，《Rota-Baxter 代数导论》，国际出版社，2012。2, 20, 21, 22[20] L. Guo 和 W. Keigher，巴克斯特代数与洗牌积，《数学进展》150（2000），117-149。2, 3[21] L. Guo 和 W. Keigher，论微分 Rota-Baxter 代数，《纯粹与应用代数杂志》212（2008），522-540。2, 3, 4, 5, 8, 11, 20[22] L. Guo、G. Regensburger 和 M. Rosenkranz，论积分微分代数，《纯粹与应用代数杂志》218（2014），456-471。2[23] L. Guo 和 W. Sit，微分 Rota-Baxter 词的枚举与生成函数，《数学与计算机科学》4（2010），339-358。20, 21[24] L. Guo、W. Sit 和 R. Zhang，微分型算子与 Gr¨obner-Shirshov 基，《符号计算杂志》52（2013），97-123。17[25] L. Guo 和 B. Zhang，多重 ζ 值的重整化，《代数杂志》319（2008），3770-3809。2[26] E. Harzheim，《序集》，Springer 科学与商业媒体，纽约，2005。14[27] G. Janelidze，微分–差分伽罗瓦理论中的 Picard-Vessiot 扩张与范畴正则扩张，《比利时数学学会通报》23（2016），753-768。2[28] W. Keigher，论 Hurwitz 级数环，《通信代数》25（1997），1845-1859。3, 7[29] E. Kolchin，《微分代数与代数群》，学术出版社，纽约，1973。2[30] K. Kuratowski 和 A. Mostowski，《集合论：描述集合论导论》，第2版，纽约，北荷兰出版社，1976。13[31] A. G. Kurosh，多算子代数的自由和，《西伯利亚数学杂志》1（1960），62-70。9[32] Z. Liu、Z. Qi、Y. Qin 和 G. Zhou，代数上自由多算子代数的 Gr¨obner-Shirshov 基，《符号计算杂志》133（2026），102489。13, 17

[33] A. Levin，《差分代数》，Springer，2008。8[34] Z. Qi、Y. Qin 和 G. Zhou，代数上的自由微分型代数的 Gr¨obner-Shirshov 基与线性基，arXiv:2112.11631。13，14[35] Z. Qi、Y. Qin、K. Wang 和 G. Zhou，算子语境中的自由对象与 Gr¨obner-Shirshov 基，《代数杂志》584 (2021)，89-124。11，12，13[36] J. F. Ritt，《代数观点下的微分方程》，AMS，1932。2[37] M. Rosenkranz 和 G. Regensburger，在微分代数中求解和分解线性常微分方程的边值问题，《符号计算杂志》43 (2008)，515-544。2[38] G. Rota，巴克斯特代数与组合恒等式 I，《AMS 通报》5 (1969)，325-329。2[39] M. Singer 和 M. van der Put，《线性微分方程的伽罗瓦理论》，Springer，2003。2[40] R. Street，Joyal 物种、图和字谜的加权张量积，SIGMA 12 (2016)，005。2[41] W.-T. Wu，基于 J. F. Ritt 的研究成果建立微分代数几何的构造理论，特别应用于微分几何的机械定理证明，《数学讲义》1255，Springer，1987，173-189。2[42] S. Zhang、L. Guo 和W. Keigher，Rota-Baxter 代数与微分代数的单子和分配律，《应用数学进展》72 (2016)，139-165。2，3[43] S. Zhang、L. Guo 和 W. Keigher，算子扩张、单子提升与混合分配律，《应用范畴结构》26 (2018)，747-765。2，3[44] S. Zhang、L. Guo 和 W. Keigher，微分代数与 Rota-Baxter 代数的算子扩张、单子提升和分配律的分类，《代数及其应用杂志》19 (2020)，2050172。2，3，4[45] S. Zheng、X. Gao、L. Guo 和 W. Sit，Rota-Baxter型算子、重写系统与 Gr¨obner Shirshov 基，arXiv:1412.8055v1。12，13，14，15，16，17

罗格斯大学数学与计算机科学系，美国新泽西州纽瓦克07102电子邮箱：liguo@rutgers.edu 罗格斯大学数学与计算机科学系，美国新泽西州纽瓦克07102电子邮箱：aniruddha.talele8@gmail.com 西北农林科技大学理学院，中国陕西杨凌712100电子邮箱：shlz@nwafu.edu.cn 江西师范大学数学与统计学院，中国江西南昌330022电子邮箱：zhengsh@jxnu.edu.cn