arXiv:2601.08250v1 [math.CO] 13 Jan 2026

球面上全等曲边三角形的边对边镶嵌

金可意，华东师范大学；陆林明，香港中文大学；王尔孝*，浙江师范大学；吴丽娟，金华市第四中学；闫敏†，香港科技大学

摘要

由全等多边形构成且所有边均为直线的球面边到边镶嵌已被完全分类。本文对类似三角形铺砌的曲边版本进行分类，其中边可以不是直线型，并发现这些铺砌是对直边三角形镶嵌的修改。

关键词：球面镶嵌、曲边多边形、柏拉图立体、细分、地球地图铺砌。

*2020*年数学评论主题分类：52C20, 05B45。

1 引言

在高斯曲率恒定的曲面上定义等距变换或全等，并且可以研究这类曲面上由全等多边形构成的铺砌。这里，多边形由角和边组成，其内部同胚于一个开圆盘。不过，我们不假设边是直线型的（即测地线）。我们称这样的多边形为曲边多边形。

*通讯作者（wang.eric@zjnu.edu.cn）。研究得到国家自然科学基金委员会 NSFC-RGC 12361161603 和浙江省自然科学基金重点项目 LZ22A010003 的资助。

†研究得到 NSFC-RGC 联合研究计划 N-HKUST607/23 和香港研究资助局一般研究基金 16310925 的资助。

本文对由全等曲边三角形构成的球面边对边铺砌进行分类。图1是这种铺砌的一个例子。在文献中，边对边铺砌通常称为边对边铺砌。然而，对于由全等曲边多边形构成的铺砌，我们需要区分边和边界段。由于边的概念体现了曲边性质，因此“边对边”比“边到边”更为准确。此外，为简化讨论，我们还假设铺砌中所有顶点的度数均为 ≥ 3。

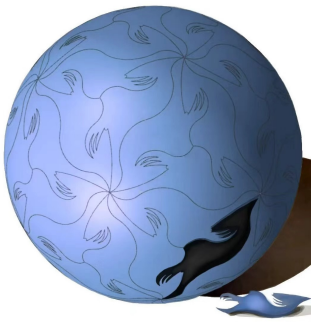

图1：用鸟形曲线三角形铺砌球面。

一个世纪前，Sommerville[17], 开始了对全等直线型（即非曲边）三角形在球面上的边对边铺砌的分类工作；Davies [7] 于1967年进一步推进了这一工作，Ueno 和 Agaoka [18] 则于2002年完成了分类。Cheung、Luk 和 Yan 在 [5]中对该分类作了现代阐述。事实上，全等直线多边形在球面上的边对边铺砌（即包括四边形和五边形镶嵌）已得到完整分类 [19, 20, 3, 14, 15, 16, 12, 5, 6, 13, 11]。我们也已在全等直线多边形的非边对边镶嵌分类方面取得初步进展 [4]。此外，我们还想提及最近完成的关于（直线型）正多边形在球面上的铺砌分类[10, 21, 2]。

尽管直线多边形铺砌的研究已取得巨大进展，曲线镶嵌也是一个令人振奋且值得探索的研究方向。广受欢迎的荷兰艺术家 Escher 的许多画作本质上都是曲线镶嵌（见 [8, 1]）。自然界和工程领域中也有许多曲线镶嵌。其中一个例子是 Heesch 和 Kienzle 为工程师编写的镶嵌一书 [9]。一个有趣的数学问题是，是否存在本质上不同于直线型铺砌的曲线镶嵌。本文对球面上最简单情形的曲线三角形镶嵌进行分类，

并未发现新的铺砌。

定理。 所有顶点的度均为 ≥ 3 的球面全等曲边三角形边对边铺砌，都是球面全等直线三角形边对边铺砌的修改。

定理的详细内容由第3节中的一系列命题给出。适合用于铺砌的曲边三角形共有十六种，按从最弯曲到几乎笔直的顺序列于图6。三角形越弯曲，铺砌就越刚性。第3节前面的命题对此作了说明，其中的铺砌始终属于柏拉图类型。三角形越不弯曲，铺砌就越灵活。后面的命题对此作了说明，其中的铺砌更接近由直线三角形构成的铺砌，包括地球地图镶嵌及其修改。

在 $[18,\ 5]$，中，球面全等直线三角形边对边铺砌的分类如下：具有三角形面的柏拉图立体 P_n （$n = 4$，8，20）、柏拉图立体的三角剖分 $T_{\triangle}P_n$和重心细分$B_{\triangle}P_n$（$n = 4$，6，8，12，20）、立方体的简单三角剖分$S_{\triangle}P_6$、三个地球地图铺砌族 $E_{\triangle}n$（$n = 1$，2，3，并包括特殊情形 $E^I_{\triangle}1$ 和 $E^J_{\triangle}1$），以及翻转修改 $FB_{\triangle}P_8$、 $FE_{\triangle}1$、$F'E_{\triangle}1$、 $FE_{\triangle}2$、 $FE_{\triangle}3$。有关这些构造的更多详细说明，请参见 $[5]$ 的第2节。结果表明，重心细分 $B_{\triangle}P_n$、第三种地球地图铺砌 $E_{\triangle}3$及其翻转修改，以及特殊翻转修改 $F'E_{\triangle}1$，都不存在曲边版本。

对于其余的铺砌，我们在表1中总结了图6中的三角形类型。我们注意到，表中的一些翻转修改 $FE_{\triangle}$ 变成了旋转修改 $RE_{\triangle}$ 。其原因是，直边三角形镶嵌的翻转修改也可以解释为旋转修改。由于曲边的刚性，对于曲线镶嵌，有时只能采用翻转或旋转的解释。

2 曲边三角形

考虑曲面上的一种边对边铺砌，其中所有铺片都与一个曲边多边形 P 全等，称为原型砖。原型砖有边和角。它们通常称为边和顶点，但实际上还包含额外含义。 P 的边 s 不仅是 P边界上的一条曲线，还包括

铺砌	三角形
P_4	$g^{gr},\ {}^{g\,g}a,\ {}^{rr^{-1}}r',\ rr^{-1^a},\ {}^{r^r}r'',\ rr'a,$
	$raa',\ h\bar{h}r,\ h\bar{h}a,\ rrr',\ rra,\ raa$
$P_n,\ n=4,8,20$	$rrr,\ rrr^{-1}$
$T_\triangle P_n,\ \ n=4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20$	$g\bar{g}^{-1}r,\ g\bar{g}^{-1}a,$
	$h\bar{h}r,\ h\bar{h}a,\ rrr',\ rra,\ raa$
$S_\triangle P_6$	$h\bar{h}r,\ h\bar{h}a,\ rrr',\ rra,\ raa$
$E_\triangle 1$	raa'
$FE_\triangle 1$	raa'
$E^I_\triangle 1,\ E^J_\triangle 1,\ E_\triangle 2,\ RE^J_\triangle 1,\ RE_\triangle 2$	$h\bar{h}r,\ h\bar{h}a,\ rrr',\ rra,\ raa$
$FE^I_\triangle 1$	$h\bar{h}r,\ h\bar{h}a$
$RE^I_\triangle 1$	$rrr',\ rra,\ raa$

表1：全等曲边三角形对球面的镶嵌。

曲线位于 P 内侧的那一边。曲线的这一侧由图2左侧的阴影区域示出。角是两条相容边的交会处。



图2：曲线边。

边的一段曲线 s 是一条边 e。我们将 e 的另一边记为$\bar{s}$。在边对边的铺砌中，s 属于一块铺片，而 $\bar{s}$ 属于一块相邻瓦片。由于这两块铺片都与 P全等，s 和 $\bar{s}$ 都是 P的边。见图2右侧。如果 s 和 $\bar{s}$ 不同，也就是说，不存在将边 e 的一侧映射到另一侧的自等距变换，那么 s和$\bar{s}$ 必定是 P 的不同边。如果 s 和 $\bar{s}$ 相同，也就是说，存在这样的等距变换，那么我们记作 $s=\bar{s}$。在这种情况下，铺砌中的边 s 可以与自身粘合。

对边 e 可以施加三种非平凡等距变换，同时保持两个端点构成的集合不变：水平翻转 e^h、

垂直翻转 e^v，以及旋转 e^r，如图3所示。由于水平翻转可以视为方向反转，我们也将 e^h 写作 e^{-1}。

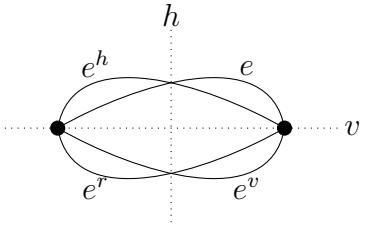

图3：一般型曲线边及其等距变换。

等距变换也可以应用于边 s 的边 e，而 $s \neq s^{-1}$表示 $s \neq s^h$。边有四种类型，相应地，边也有四种类型。

1. 一般型： e， e^v， e^h， e^r 各不相同。我们有 $s \neq \bar{s}$，以及 $s \neq s^{-1}$。
2. h-对称： $e = e^h \neq e^r$。我们有 $s \neq \bar{s}$，以及 $s = s^{-1}$。3. r-对称： $e = e^r \neq e^h$。我们有 $s = \bar{s}$，以及 $s \neq s^{-1}$。4. 直线型： $e = e^v$。这意味着 e， e^v， e^h， e^r 相同。我们有 $s = \bar{s}$

，

和 $s = s^{-1}$。

图4给出了四种边的示例，以及在图中绘制它们的示意方式。我们用 g（一般型）、 h （h对称）、 r （r对称）、 a （直线弧）表示四种边。我们使用g^{-1}， r^{-1} 表示反向方向，不使用 h^{-1}， a^{-1}。我们¯还使用 g， $\bar{g}$ 和 h， h 表示 g和 h的其他边，并且不使用_ _r， a。

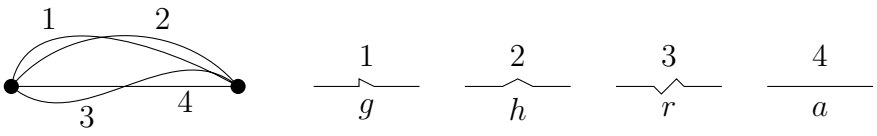

图4：四种边及其示意图。



图5：添加一个圆以突出显示 r^{-1}。

在示意图中，很难从视觉上看出r 和 r^{-1}之间的区别。我们在图中添加一个圆，如图5所示，以强调这一差别。

如果一条边 s 是一般型或具有 h对称性，那么 $s \neq \bar{s}$，且不能与自身粘合。这意味着 s 和 $\bar{s}$ 作为原型砖 P的边成对出现，由此我们得到以下结论。

引理1。 在由全等曲边多边形进行的边对边铺砌中， g 和$\bar{g}$ 在原型砖中出现的次数相同，并且 h 和 h在原型砖中出现的次数相同。

作为该引理的推论，共有十六种曲边三角形。它们列于图6中，按从最弯曲到近似直线型的顺序排列。

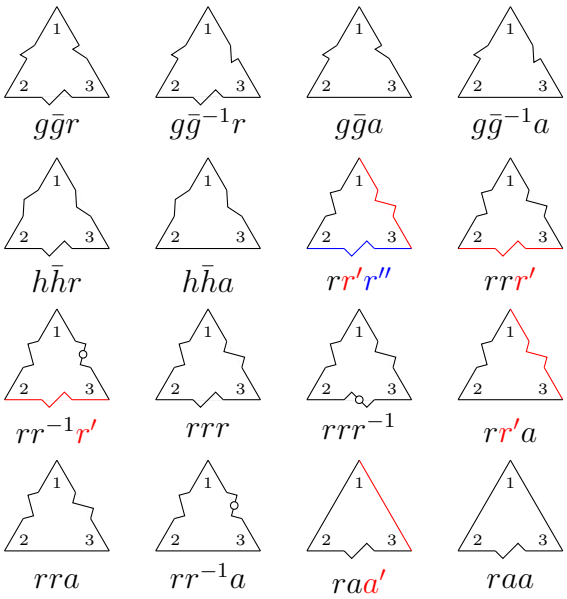

图6：适用于铺砌的曲边三角形。

我们注意到，除了 rrr 和 rrr^{-1}之外，图6中的边23（连接角2和角3）可以与其他

边区分开来。于是这些铺片构成伴随对，并共享边23。每对铺片的并集是一个四边形，因此三角形铺砌可以视为四边形铺砌。反过来，通过用对角线将各个四边形切分成伴随的三角形对，就可以由四边形铺砌得到三角形铺砌。

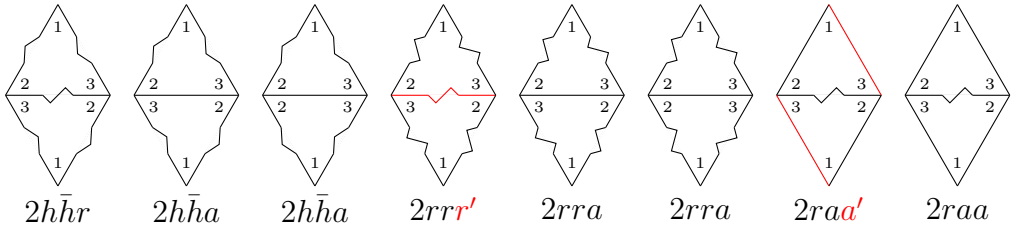

图7：一些伴随对。

我们指出，如果边23是 r，那么这对铺片只能以一种方式粘合在一起，且所有四边形都全等。如果边23是 a，那么这对铺片可以用两种方式粘合在一起，且四边形铺砌可能有两种原型砖。

图6中的角1、2、3的角度值记为 $[1],[2],[3]$。我们用诸如 12^23^2, 这样的组合来表示铺砌中的一个顶点，这表示该顶点由一个角1、两个角2和两个角3组成。顶点处所有角的角度值之和为 2π。例如，顶点 12^23^2 意味着 $[1]+2[2]+2[3]=2\pi$。我们称这个等式为该顶点的角度和。

以下是 [19] 中引理 4 的三角形类比。如果三角形的所有边都是直线型，那么该引理可由三角形的面积为 $[1]+[2]+[3]-\pi$ 这一事实推出；该面积也等于球面的总面积 4π 除以铺片数量 f。

引理 2。 如果用 f 三角形铺砌球面时，所有铺片的角都具有相同的三个角度值 $[1],[2],[3],$，那么

$$[1]+[2]+[3]=(1+\tfrac{4}{f})\pi.$$

证明。由于每个顶点处的角度和为 2π，铺砌中所有角的总和为 $2\pi v$，其中 v 是铺砌中的顶点数。此外，所有角的总和为 $f([1]+[2]+[3])$。因此我们得到 $2\pi v = f([1]+[2]+[3])$。由 $3f=2e$ 和 $v-e+f=2$，我们得到 $f=2v-4$。于是得到 $[1]+[2]+[3]=2\pi\frac{v}{f}=(1+\frac{4}{f})\pi$。 □

严格来说，边需要足够规整，角度值才有意义。尽管我们可以假设所有边都是正则且连续可微的，但条件可以相当宽松。例如，我们可以固定一个足够小的 ϵ，然后将一个角的角度值定义为$\frac{2\pi A}{A_{\epsilon}()}$。这里，$A(\epsilon)$是 ϵ-圆盘的面积，而 A 是该角与以顶点为中心的 ϵ-圆盘的交集面积。只要具备某种可测性，就足以作出此定义。在铺砌中，顶点处所有角的角度值之和仍为 2π。因此引理 2 仍然成立。

3 曲线镶嵌球面

命题3. 由全等的 rrr 或 rrr^{-1} 三角形构成的球面镶嵌是正四面体、八面体和二十面体。

证明。 rrr 或 rrr^{-1} 三角形的三个顶点之间的距离相等。这意味着由全等的 rrr 或 rrr^{-1} 三角形构成的镶嵌是三角形柏拉图立体，即正四面体、八面体和二十面体。接下来，我们需要为柏拉图立体的边指定 r 或 r^{-1}，使所有面都是 rrr 三角形，或者所有面都是 rrr^{-1} 三角形。

如果所有面都是 rrr 三角形，那么根据所有铺片之间定向的一致性，所有面都是 rrr （否则所有面都是 $r^{-1}r^{-1}r^{-1}$，这代表同一种镶嵌）。于是得到图8左侧的三个柏拉图铺砌。

对于 rrr^{-1}-铺砌，我们需要为柏拉图立体的边指定方向，使得每个面都是 rrr^{-1} 或 $rr^{-1}r^{-1}$。这意味着为边指定 $\circ$，使每个面恰有一个或两个 $\circ$。

恰有两个 rrr^{-1}-四面体，分别是图8第一行中的第二个和第三个。rrr^{-1}-八面体和rrr^{-1}-二十面体则多得多。图8展示了其中一些。

□

命题4。 由类型为 $g\bar{g}r$、$g\bar{g}a$、$rr^{-1}r'$、$rr^{-1}a$、$rr'r''$、$rr'a$的全等三角形铺砌球面，所得的四面体如图*10*所示。此外，图*10*中第三个 r'对应的两个红色 $rr^{-1}r'$-四面体可以分别改变方向。

证明。 图 9 左侧展示了 $g\bar{g}r$-三角形和 $g\bar{g}a$-三角形。粘合 g 与 $\bar{g}$ 意味着一块铺片的边 12 与另一块铺片的边 31 相匹配。这意味着其中一块铺片 1、2 、3 决定了另外两块。 ◯ ◯ ◯

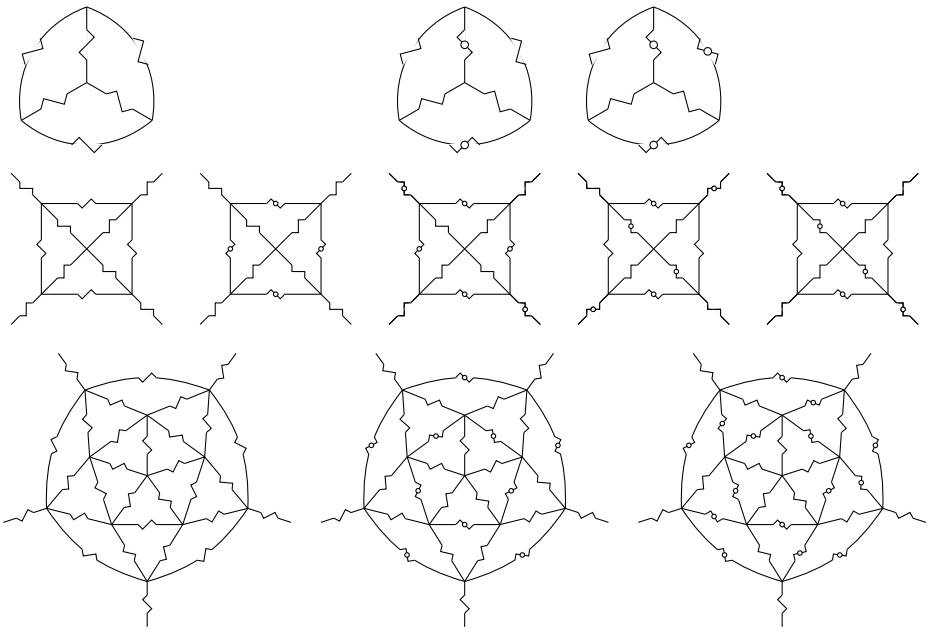

图8：类型为 rrr, rrr^{-1} 的柏拉图立体。

因此，对于 $g\bar{g}r$，一个顶点 $\bullet$ 是 $(213)^k = 213213\cdots213$；对于 $g\bar{g}a$，则是 213 和 312 的组合（而非仅有 213）。根据引理 2，我们有 $[1]+[2]+[3] > \pi$。由于一个顶点的角度和为 2π，这意味着 $k = 1$。因此，213 是唯一的顶点。这进一步意味着 $f = 4$，而该铺砌是一个四面体，如图 10 的第一幅和第二幅所示。

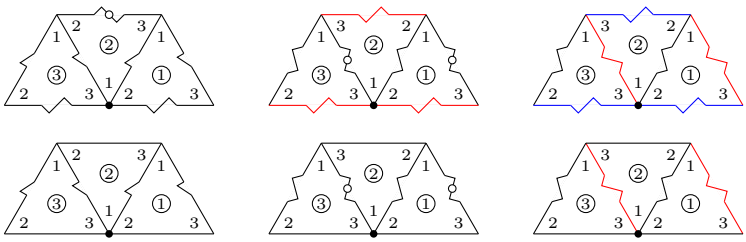

图 9：类型为 $g\bar{g}r$、 $g\bar{g}a$、 $rr^{-1}r'$、 $rr^{-1}a$、 $rr'r''$、 $rr'a$的铺砌中的顶点。

同样的论证适用于 $rr^{-1}r'$ 和 $rr^{-1}a$。在图 9 的中间，其中一块铺片1 、2、3 再次决定了另外两块铺片，只需独立改变红色 r' 在 $rr^{-1}r'$中的方向即可。方向发生变化的原因是 $rr^{-1}r'$三角形在其中发生了水平翻转

图6和图9给出了同一个三角形，区别仅在于红色 r'的方向反转。于是我们得出，顶点 • 是213，铺砌为一个四面体，如图10的第三个和第四个图所示。

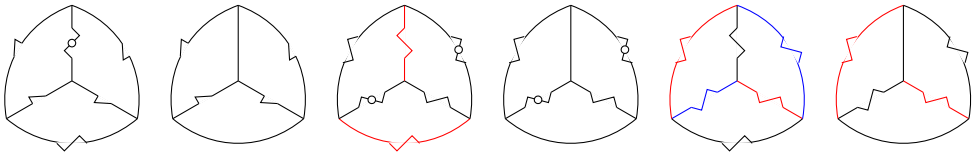

图10：以下类型的铺砌 $g\bar{g}r$、 $g\bar{g}a$、 $rr^{-1}r'$、 $rr^{-1}a$、 $rr'r''$、 $rr'a$。第三幅图中的两条红色r'曲线可以各自独立改变方向。

同样的论证也适用于 $rr'r''$ 和 $rr'a$。同样可得图10右侧的唯一组合。于是，顶点 •为213，该铺砌是一个四面体，如图10的第五幅和第六幅所示。 □

命题5。由全等三角形构成、类型为 $g\bar{g}^{-1}r$,$g\bar{g}^{-1}a$ 的球面铺砌，是柏拉图立体的三角剖分。此外， $g\bar{g}^{-1}a$三角剖分中的面可以各自独立改变定向。

正三角形、四边形和五边形的 $g\bar{g}^{-1}r$三角剖分分别如图11的第二、第三和第四幅所示。这一方法可应用于柏拉图立体的正多边形面，从而得到柏拉图立体的 $g\bar{g}^{-1}r$三角剖分。图11的第五幅展示了正四面体的 $g\bar{g}^{-1}r$三角剖分。

$g\bar{g}^{-1}a$铺砌也是柏拉图立体的三角剖分。a边使我们能够独立改变柏拉图立体各面的方向。图12的第四幅展示了立方体的 $g\bar{g}^{-1}a$三角剖分，其中一些面具有不同的方向。

证明。 图11的第一幅展示了 $g\bar{g}^{-1}r$-三角形。将 g和 $\bar{g}$ 粘合，意味着一个铺片的边12与另一个铺片的边13相匹配。于是 1 决定了 2，而 2 进一步决定了顶点 •周围的下一个铺片。因此，顶点 • 是 $1^k = 11\cdots1$，顶点周围的所有铺片组成一个正则 k-边形 $N\,(1^k)$ 。于是，该铺砌是由正则 k-边形 $N\,(1^k)$ 组成的边对边铺砌。这是一个正则柏拉图立体。特别地，我们得到$k = 3,\ 4$、5，以及 $g\bar{g}^{-1}r$-铺砌是柏拉图立体的三角剖分。

$g\bar{g}^{-1}a$ 的论证类似。该铺砌是由正则 k边形构成的边对边铺砌 $N(1^k)$，这些多边形是将

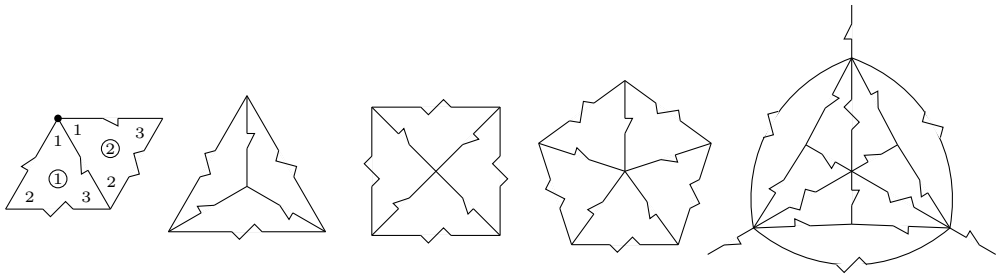

图11： $g\bar{g}^{-1}r$-铺砌。

图11中的正则 k边形的 a边改造而成的。参见图12中的第一、第二和第三幅图。该铺砌于是成为一个柏拉图立体，其每个面均由 $N(1^k)$给出。换言之，该铺砌是柏拉图立体的三角剖分。

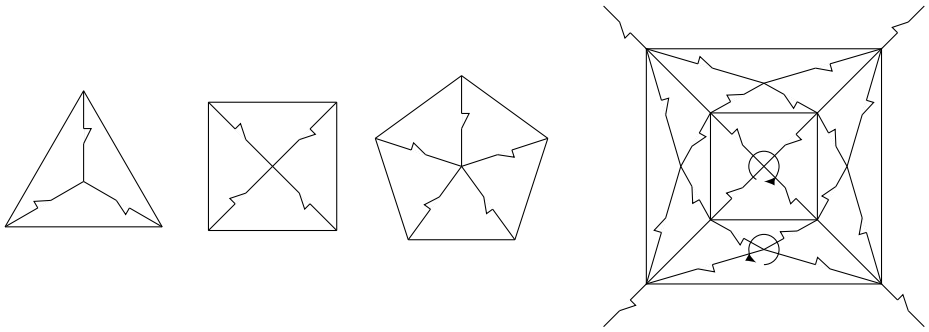

图12： $g\bar{g}^{-1}a$-铺砌。

我们注意到，对于 $g\bar{g}^{-1}a$，每个 $N(1^k)$ 都具有一个定向，并且我们可以独立改变任意 $N(1^k)$ 的定向（即翻转该面），仍然得到一个铺砌。图12中的第四幅展示了立方体的一个 $g\bar{g}^{-1}a$-三角剖分，其中两个面具有不同的定向。□

命题6。 由全等 raa'-三角形构成的球面的镶嵌包括四面体、地球地图铺砌 $E_{\triangle}1$ 及其翻转修改 $FE_{\triangle}1$。

证明。 图7中的第七幅图表明，两个铺片组成的伴随对形成一个四边形 $aa'aa'$。根据 [5], 的引理1，不存在以该四边形为原型砖且所有顶点度数均为 $\geq$ 3的铺砌。因此，该四边形铺砌中存在度为2的顶点。这意味着，在 raa'三角形铺砌中，123或 2^23^2 是一个顶点。

123的角度和以及引理 2表明 $f = 4$。于是，该铺砌就是图 37左侧的四面体。

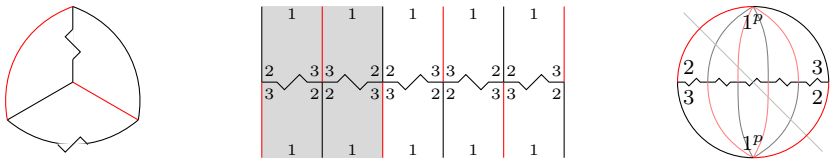

图 13： $ra\acute{a}$-铺砌。

假设 $2^2 3^2$ 是一个顶点。该顶点的角度和意味着 $[2]+[3] = \pi$。这意味着四边形 $a\acute{a}a\acute{a}$ 实际上是一个二边形 G，其中 1 是顶角。以下论证复制自[5],中引理 12 的证明，并按 G对所有铺砌（包括非边对边铺砌）进行分类。

顶点处的角组合为 1^k 或 $1^k\pi$，其中当 π 时会出现
• 位于另一个铺片的一条边的内部。如果 • 是 1^k，那么位于 • 的 k 个 G 副本构成了图 14 左侧的球面地球地图铺砌。

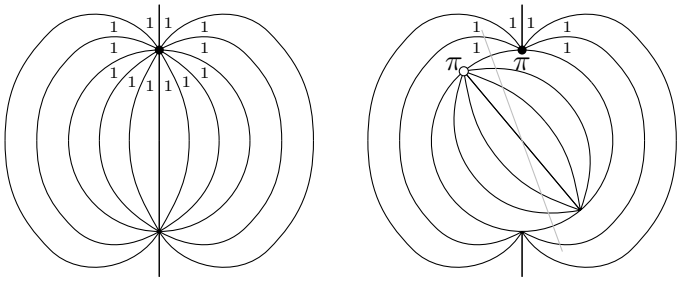

图 14：二边形铺砌。

接下来，我们可以假设所有顶点都是 $1^k\pi$。然后，位于 •- $1^k\pi$ 的1^k 部分的 k 个 G 副本构成了一个半球的半球地球地图镶嵌。这是图 14 右侧圆外部的铺砌部分。于是，对侧半球中的任意铺片（位于圆内）都有一个 ∘-顶点 $1^k\pi$，并且 k 份 G位于 ∘的 1^k 部分，构成对侧半球的半球地球地图镶嵌。图 14 右侧是将对侧半球的铺砌沿灰线翻转后，从左侧得到的。

我们在图 14 的铺砌中添加 r-边，并要求三角形铺砌为边对边铺砌。从图 14 左侧的地球地图铺砌中，

我们得到图 13 中间的地球地图铺砌 $E_{\triangle}1$（参见 [5]的图5）。该铺砌通过重复灰色区域中由四个raa'三角形构成的时区而得到。所有向上的边都汇聚于一个顶点（北极），所有向下的边都汇聚于另一个顶点（南极）。

假设 $E_{\triangle}1$ 中的时区数量是奇数 $p = 2q + 1$。这意味着 $f = 4p = 8q + 4$ 和 $[1] = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{2q+1}$。于是，$\bar{q}$和半个时区组成一个半球。图 13 的中间部分是一个半球，其中有 $q = 2$；图 13 的右侧将该半球表示为一个圆盘，并展示了沿半球边界的角组合。

如果按照通常的方式拼接两个半球，使南北两极相互匹配，并使 a边与 a'边相互匹配，那么我们就得到地球地图铺砌 $E_{\triangle}1$。如果相对于灰线翻转其中一个半球，然后将两个半球拼接在一起，那么我们就得到翻转变体镶嵌 $FE_{\triangle}1$ （见 [5] 的图20）。 □

命题7。 由类型为 hhr、$\bar{h}ha$、 rrr'、 rra 的全等三角形铺砌球面的方式如下：

- 四面体 P_4。
- 所有五种柏拉图立体的三角剖分 $T_{\triangle}P_n$ 。
- 立方体的简单三角剖分 $S_{\triangle}P_6$ 。
- 地球地图铺砌 $E^I_{\triangle}1$、 $E^J_{\triangle}1$、 $E_{\triangle}2$，以及翻转修改 $FE^I_{\triangle}1$ （适用于$h\bar{h}r$、$h\bar{h}a$）和旋转修改 $RE^I_{\triangle}1$ （适用于 rrr'、 rra）、 $RE^J_{\triangle}1$、$RE_{\triangle}2$。

证明。 我们采用在 [6]中首次提出的扇这一概念。边$\bar{2}\bar{3}$有别于 hhr、 hha、$\overline{rrr'}$、 rra中的另外两条边。在任一顶点处，该边将该顶点处的角分成若干组，我们称之为扇。图15展示了这些扇，其中边23以粗线标出。一个扇由一串角 $a1\cdots1b$组成，其中 a， b 为2或3，且 a 与 b之间的所有角均为1。

图15的右上方显示了 $h\bar{h}a$铺砌。我们发现，扇必须是 $21\cdots13$，不能是 $21\cdots12$ 或 $31\cdots13$。右下图显示，同样的情况也会发生在 rrr' 铺砌中。实际上，同样的情况也会发生在 hhr 和 rra中。由此观察可得，

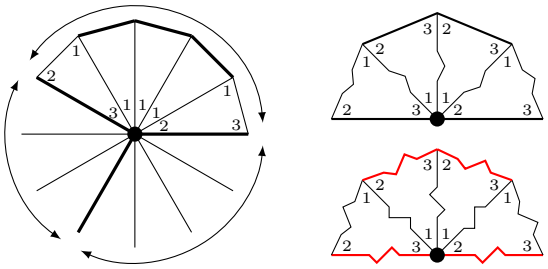

图15：顶点处的扇。

任意顶点处角 2 和角 3 的数量相同。换句话说，所有顶点 $1^k2^l3^l$。

根据 [5], 第 3.1 节中的 (3.2) 和 (3.3)，度为i 的顶点数量 v_i 满足

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 = 12 + v_7 + 2v_8 + 3v_9 + \cdots .$$

因此，球面的三角形铺砌中存在一个度为 3、4 或 5 的顶点。这些度数的顶点 $1^k2^l3^l$ $123, 1^3, 1^4, 1^5, 1^223, 12^23^2, 1^323, 2^23^2$。我们假设存在这样一个顶点，并结合引理 2 求出各角的角度值。

$$\begin{aligned}
123&: [1] + [2] + [3] = 2\pi,\ f = 4.\\
1^3&: [1] = \tfrac{2}{3}\pi,\ [2] + [3] = (\tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{f})\pi.\\
1^4&: [1] = \tfrac{1}{2}\pi,\ [2] + [3] = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{f})\pi.\\
1^5&: [1] = \tfrac{2}{5}\pi,\ [2] + [3] = (\tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{f})\pi.\\
1^223&: [1] = (1 - \tfrac{4}{f})\pi,\ [2] + [3] = \tfrac{8}{f}\pi.\\
12^23^2&: [1] = \tfrac{8}{f}\pi,\ [2] + [3] = (1 - \tfrac{4}{f})\pi.\\
1^323&: [1] = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{f})\pi,\ [2] + [3] = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{6}{f})\pi.\\
2^23^2&: [1] = \tfrac{4}{f}\pi,\ [2] + [3] = \pi.
\end{aligned}$$

我们指出，铺砖数量 f 为偶数。原因是，对于边对边三角形铺砌， $3f$ 是边数的两倍。

假设我们始终有 $l = k$ 在 $1^k2^l3^l$中。那么根据引理 2，我们知道$k = l = 1$（否则角度和 $> 2\pi$）。这意味着 $\alpha\beta\gamma$ 是唯一的顶点。这是表2中的第一种情形。

假设我们并非始终有 $k=l$。整个铺砌中每种角的总数是铺砖数量 f。因此，1，2，3 的总数相同。这意味着我们有一个顶点 $1^k2^l3^l$，满足 $k>l$，此外还有一个顶点满足 $k<l$。

如果 1^3 是一个顶点，那么顶点 $1^k2^l3^l$ 表示 $k\frac{2}{3}+l(\frac{1}{3}+\frac{4}{f})=2$。这与 $f=\frac{12l}{6-2k-l}$ 相同。我们知道存在满足 $k<l$ 的顶点。该顶点还满足 $k+2l\geq 3$。这两个不等式合起来等价于 $k<l\geq 2$。然后我们找出满足 $k<l\geq 2$ 的所有非负整数 k，l，使得 $f=\frac{12l}{6-2k-l}$ 是偶整数 ≥ 4。结果为 $f=6$，12，24，36，60。接着我们得到 $[1]$ 和 $[2]+[3]$ 的具体取值，据此可以确定所有可能的顶点 $1^k2^l3^l$。这些就是表2中包含 1^3 作为其中一个顶点的情形。

我们对 $1^4,1^5,1^323$进行相同的论证。对于$1^4,$，我们得到 $f=8$，16，24；对于 $1^5,$，我们得到 $f=10$，20，60；对于 1^323，我们得到 $f=12$，20，36。于是，我们得到表2中所有固定 f的情形。

如果 1^223 是一个顶点，那么根据角度值，一个顶点为1_223，12^l3^l，2^l3^l。然后我们在 12^l3^l中找到 $l=\frac{f+4}{8}$，并在 2^l3^l中找到 $l=\frac{f}{4}$。如果 12^23^2 或 2^23^2 是一个顶点，那么用类似的方法可以得到所有顶点。这些情形允许变量 f，并成为表2中的情形（1）、（2）、（3）。

一些固定 f 的情形标记为（2）或（3）。这些是对应的变量 f 情形的特殊情形。因此，我们不再单独讨论这些情形。

情形 $f=4$. 四面体 P_4。

唯一的顶点是123。该铺砌为四面体，由图16给出。

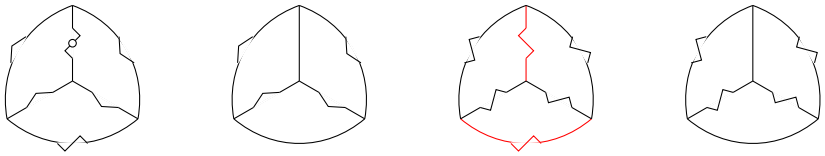

图16：类型为 hhr，hha，rrr'，rra 的四面体铺砌。

情形 $f=24$，60。 柏拉图立体 P_n 的三角剖分 $T_\triangle P_n$。

图 17 显示，顶点 $1^k(k=3$，4，5)处的铺砖构成唯一的邻域铺砌 $N(1^k)$。因此，由 $N(1^k)$ 形成的铺砌是一个柏拉图立体 P_n,$n=4$，6，8，12，20，整个铺砌则是柏拉图立体的三角剖分 $T_\triangle P_n$。

f	[1]	[2]+[3]	顶点
4			123
6	$\frac{1}{3}\pi$	π	$1^3, 2^2 3^2$ (3)
8	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1^4, 1^2 23, 2^2 3^2$ (3)
10	$\frac{2}{5}\pi$	π	$1^5, 2^2 3^2$ (3)
12	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$1^3, 1^2 23, 12^2 3^2, 2^3 3^3$
	$\frac{1}{3}\pi$	π	$1^3 23, 1^6, 2^2 3^2$ (3)
16	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$1^4, 12^2 3^2$ (2)
20	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{4}{5}\pi$	$1^5, 1^3 23, 12^2 3^2$ (2)
24	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$1^3, 2^4 3^4$
	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$1^4, 2^3 3^3$
36	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{9}\pi$	$1^3, 12^3 3^3$
	$\frac{4}{9}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$1^3 23, 2^3 3^3$
60	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{2}{5}\pi$	$1^3, 2^5 3^5$
	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$1^5, 2^3 3^3$
(1)	$\frac{4}{f}\pi$	π	$2_2 3_2, 1^{\frac{f}{2}}_{-}$
(2)	$(1-\frac{4}{f})\pi$	$\frac{8}{f}\pi$	$1_2 23, 12^{\frac{f+4}{8}} 3^{\frac{f+4}{8}}, 2^{\frac{f}{4}} 3^{\frac{f}{4}}$
(3)	$\frac{8}{f}\pi$	$(1-\frac{4}{f})\pi$	$12_2 3_2, 1^{\frac{f+4}{8}} 23, 1^{\frac{f}{4}}$

表2：类型 h 铺砌的所有顶点

$\hbar r$、 $h\bar{h}a$， rrr'， rra。

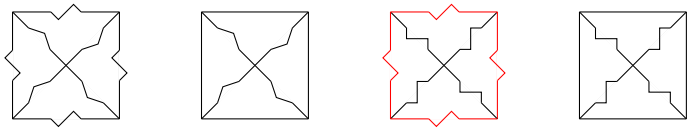

图 17：类型 $h\bar{h}r$、 $h\bar{h}a$、 rrr'、 rra 的 $N\left(1^4\right)$。

三角剖分铺砌 $T_{\triangle}P_n$ 在 hhr 和 rrr'的情况下是唯一的。图18左侧展示了立方体的 hhr-三角剖分 $T_{\triangle}P_6$。然而，对于 hha 和 rra，我们可以独立改变$N(1^k$的定向。图18右侧展示了立方体的一种 $h\bar{h}a$-三角剖分 $T_{\triangle}P_6$，其中两个面具有不同的定向。

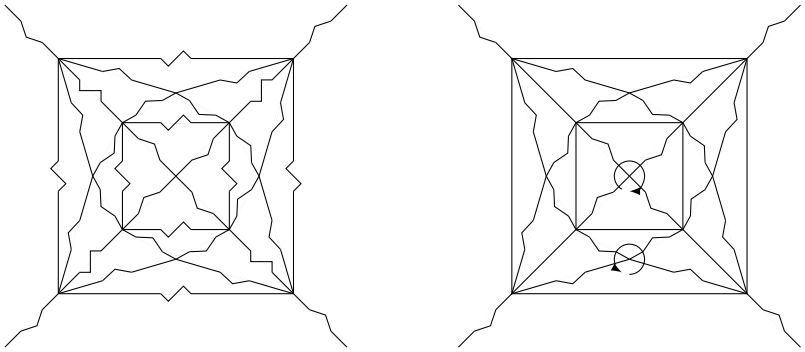

图18：三角剖分 $T_{\triangle}P_6$ 适用于 hhr 和 hha。

情形 $f = 36$。没有铺砌。

我们考虑由伴随对构成的四边形所形成的铺砌。尽管这些四边形可能并不全等，例如图7中的第二个和第三个，或第五个和第六个，但我们忽略2与3之间的差异，也忽略 h, h之间的差异，以及r, r^{-1} 之间的差异（r 翻转 rra后变为 r^{-1} ）。于是，四边形铺砌的角为 $\alpha, \beta, \alpha, \beta$，其中一个 α, β 为1，另一个则为22、23或33。于是，四边形铺砌的顶点为 $\alpha^3\beta, \beta^3$。因此，基于 [5]图34的论证仍然成立，并会导出矛盾。

情形 $f = 12$. 立方体 P_6的简单三角剖分 $S_{\triangle}P_6$ 。

在类型为 hhr, hha, rrr', rra 的铺砌中，铺片组成伴随对，共享 r-边或 a-边。对于 $f = 12$，根据表2中顶点处的角组合，伴随对构成一个所有顶点度数均为3的四边形铺砌。这就是立方体。因此，第2.3节的 [5], 中的三角形铺砌是立方体 $S_{\triangle}P_6$ 的简单三角剖分，其中用对角线将所有四边形分为三角形对。根据 [5], 的图10，将立方体的面划分为两半有七种非等价方式。

对于对称，图7中的第一个图示表明，立方体的面是 $h\bar{h}$ hha，图7中的第二幅和第三幅图显示，立方体的面是 $hhhh$

或 $hhhh$。在图19左侧，我们用连接两条 h边的点线来表示这两个四边形。这是更容易理解立方体的一种方式，而且我们可以很容易地发现，在图19右侧，恰好有四个立方体以 $hhhh$ 或 $hhhh$ 作为面。

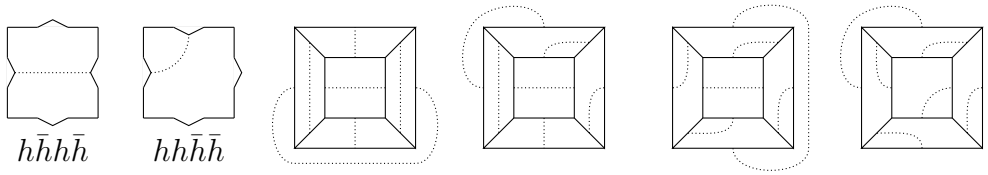

图19：具有 $hhhh$个和 $hhhh$个面的立方体。

由 hhr铺砌得到的立方体，其面只能是 $hhhh$ 。这意味着该立方体只能是四个立方体中的第一个。对于立方体的每个面，我们可以将 $hhhh$ 的两条对角线中的任意一条作为 r ，把四边形面分成两个 hhr三角形。根据 [5], 中的图10，共有七种不等价的hhr铺砌，其中四种如图20的第一行所示。我们注意到，第一种和第二种铺砌的区别仅在于中心面的对角线选择不同。如果一种选择是 r，那么另一种选择就是 r^{-1}。

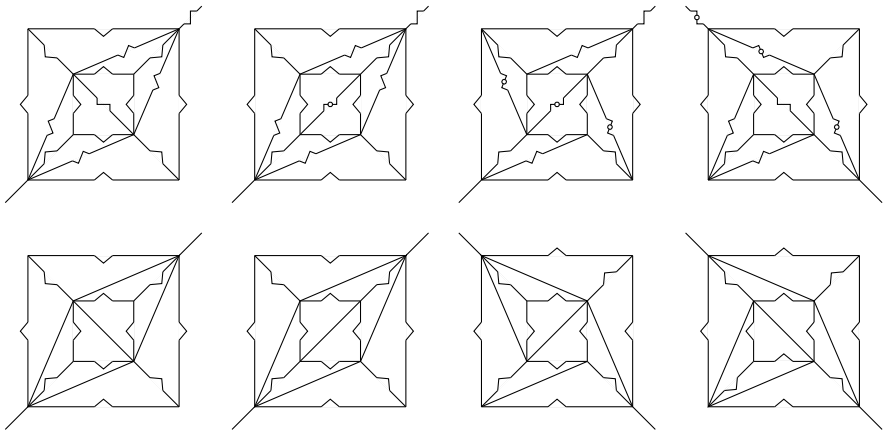

图20：类型为 hhr 和 hha的简单三角剖分 $S_{\triangle}P_6$ 。

来自 hha铺砌的立方体，其面可以同时为 $hhhh$和 $hhhh$。这意味着该立方体可以是四者中的任意一种。对于面 $hhhh$，我们可以将两条对角线中的任意一条作为 a，把四边形面分成两个 hha-

三角形。对于面 $hhhh$，我们只能将一条与虚线相交的对角线作为 a，把四边形面分成两个 hha-三角形。

图20的第二行是四种 hha铺砌。第一种和第二种分别由第一行的第一种和第二种 hhr铺砌得到，只需将 r 改为 a即可。第三种 hha铺砌中的立方体是图19中的第二个立方体。该立方体有三个 $hhhh$ 面，而这三个面的边对角线的选取是唯一的。第四种 hha铺砌中的立方体是图19中的第四个立方体。这个立方体的所有面都是 $hhhh$。所有面的 a边对角线选取都是唯一的。

简单三角剖分 $S_{\triangle}P_6$ 适用于 rrr' 和 rra完全平行于 hhr 和 hha。图7的第四幅图显示，rrr' 的立方体面是 $rrrr$，而 rra 的立方体面是 $rrrr$ 和$rrr^{-1}r^{-1}$。在图21左侧，我们用实线和虚线表示 r 和 r^{-1}，画出这两个四边形。这是更容易观察立方体的一种方式。在图21右侧，恰有四个以 $rrrr$ 或 $rrr^{-1}r^{-1}$ 为面的立方体。

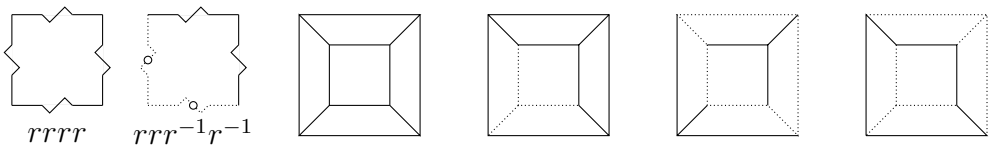

图21：具有 $rrrr$ 和 $rrr^{-1}r^{-1}$ 个面的立方体。

rrr'铺砌与 hhr铺砌相似，是图21中四个四边形中第一个的简单三角剖分。共有七种非等价剖分铺砌，其中四种如图22第一行所示。

rra铺砌与 hha铺砌相似，是图21中任意一个四边形的简单三角剖分。面 $rrrr$可以沿两条对角线中的任意一条分割，而面 $rrr^{-1}r^{-1}$ 只能沿其中一条对角线分割。图22第二行展示了四种rra铺砌。在第一种和第二种铺砌中，立方体的所有面都是 $rrrr$，这样的简单三角剖分恰有七种。第四种铺砌中，所有面都是 $rrr^{-1}r^{-1}$，且只有一种简单三角剖分。

情况（1）。地球地图铺砌 $E^I_{\triangle}1$以及修改。

我们知道所有的顶点 AVC $=\{2^23^2, 1^{f}_{4}23, 1^{f}_{2}\}$。我们讨论 $h\bar{h}a$-铺砌。其他类型的证明类似。

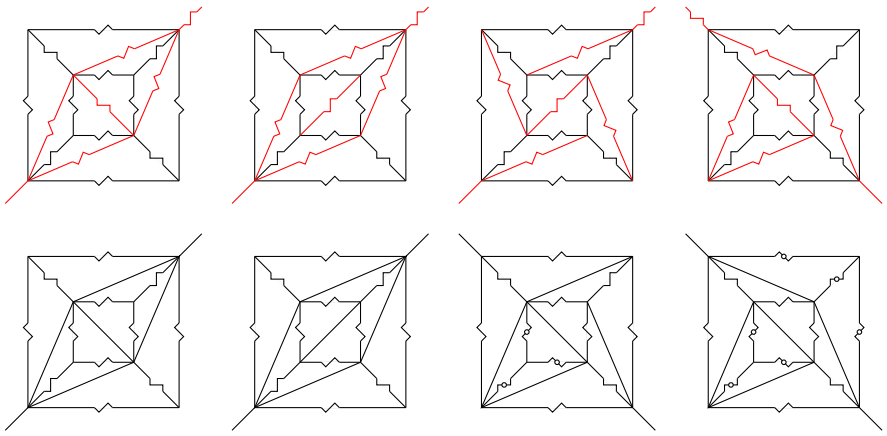

图22：类型为 $S_{\triangle}P_6$ 和 rrr' 的 rra简单三角剖分。

顶点处连续的 1 排列如下：$\langle 1\langle 1\langle\cdots\langle 1\langle$。它们决定了图23左侧铺砖的上排（图中展示了四块铺砖）。此外，上排中的每块铺砖（例如 1）都有一块与之配对的铺砖（例如 2），二者共享 a-边。排列2有两种可能的方式。配对铺砖的 h-边表明，所有配对铺砖的排列方式都相同。因此，这些配对铺砖构成了图23左侧或中间的下排。

如果 $1^{\frac{f}{2}}$ 是一个顶点，那么我们会得到两种可能的地球地图铺砌$E^I_{\triangle}1$（参见 [5]的图5）。我们注意到1 和2 构成一个时区，而地球地图铺砌由 $\frac{f}{2}$ 个时区组成，并以 $1^{\frac{f}{2}}$ 为极点。

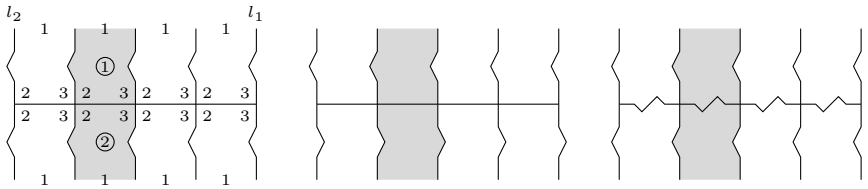

图23： $h\bar{h}a$和 $h\bar{h}r$的地球地图铺砌 $E^I_{\triangle}1$ 。

同样的论证也适用于 hhr-铺砌。 hhr中的 r-边意味着，伴随图形（见图7中的第一幅）只能按图23右侧所示的方式排列。因此，对于 $h\bar{h}r$，地球地图铺砌只有一种形式$E^I_{\triangle}1$。

和的地球地图镶嵌与 hha和 rrr' 平行 hha和 hhr。若$1^{\frac{f}{2}}$是一个顶点，则对于 $E^I_{\triangle}1$，我们会得到两种地球地图铺砌形式；而对于 rra，只有一种形式 rrr'。见图23。

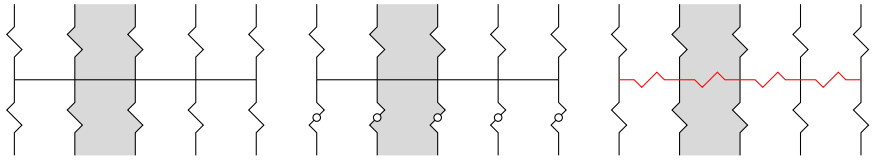

图24： $E^I_{\triangle}1$的地球地图铺砌，适用于 rra和 rrr'。

假设 $1^{\frac{f}{2}}$不是顶点。那么，AVC $=\{2^23^2, 1^q23\}$、 $q=\frac{f}{4}$都是顶点。由于铺砌中角1和角2的总数相同，二者都必须出现为顶点。我们对 hha继续这一论证。

顶点 1^q23 是一个扇 $|3\langle 1\langle\cdots\langle 1\langle 2|$。这个扇的 1^q部分导出一个由 q 个时区组成的半球铺砌 $\mathcal{H}$，如图23左侧或中间所示，两端均为 1^q。我们需要填满铺砌的其余部分。

在图25左侧，我们画出半球 $\mathcal{H}$，它对应 l_1 的左侧和 l_2的右侧。我们需要填充 l_1 右侧与l_2左侧的区域。 1^q23的23部分已确定该区域中的铺片1和2。接着，顶点 $1_2\cdots=123\cdots=1^q23$。 1^q部分导出该顶点对应的另一个半球铺砌 $\mathcal{H}$，恰好填满该区域（图中展示的是 $q=4$的情形）。因此，该铺砌是两个 $\mathcal{H}$的副本之并。

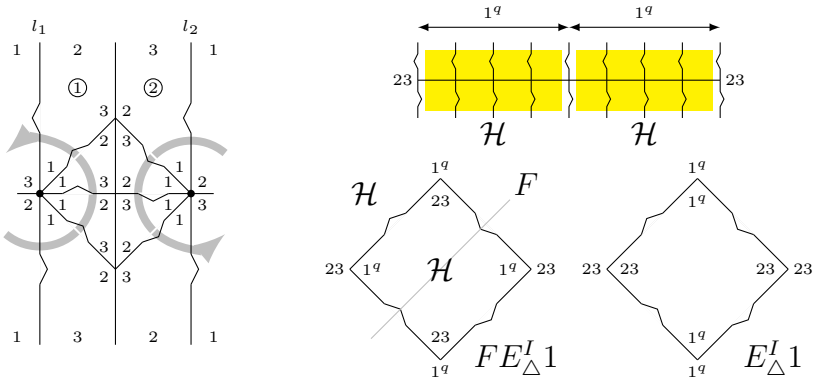

图25： $FE^I_{\triangle}1$ 对 $h\bar{h}a$进行翻转修改。

我们指出，在图25左侧，我们实际上选择了半

球面铺砌 $\mathcal{H}$ 左侧的 l_1 和右侧的 l_2 作为图23的中间部分。事实上， h边 12_1 的2 （如粗灰色箭头所示）确定了所有对应于 h铺片边的 1^q 部分 $1_2\cdots = 1^q23$。这意味着半球铺砌 $\mathcal{H}$ 只能是图23的中间部分，而不可能是左侧部分。

在图25右侧，我们对刚刚得到的铺砌作出解读。在图25右上方，我们展示地球地图铺砌 $E^I_\triangle 1$ 也由两个 $\mathcal{H}$组成。在图25右下方，我们比较两个 $\mathcal{H}$ 的公共边界，以及沿公共边界的角组合：前者对应图25左侧的铺砌，后者对应地球地图铺砌 $E^I_\triangle 1$。我们发现二者通过相对于灰线翻转内部$\mathcal{H}$而相关。因此，图25左侧的铺砌是翻转修改 $FE^I_\triangle 1$ （见 [5]的图20）。

关于 AVC $= \{2^23^2, 1^q23\}$ 和 $h\bar{h}a$ 的论证 $h\bar{h}r$也适用于 rra和 rrr'。我们得到图26中与图25左侧类似的铺砌。随后，我们可以解读与图25右侧类似的铺砌结构。我们发现，图26中的第一个铺砌（对应 hhr）仍是图25所述的翻转修改$FE^I_\triangle 1$。然而，图26中的第二个和第三个铺砌（对应 rra 和 rrr'）则是旋转修改 $RE^I_\triangle 1$ ，而非翻转修改。旋转修改如图26右侧所示，其中给出了地球地图铺砌 $E^I_\triangle 1$ 的结构。我们需要在内部交换 1^q 和 23。 $\mathcal{H}$边的方向 r意味着无法应用翻转，因为那会将边界上的 r 改为 r^{-1}。因此，交换 1^q 和 23 只能描述为旋转修改 $RE^I_\triangle 1$。

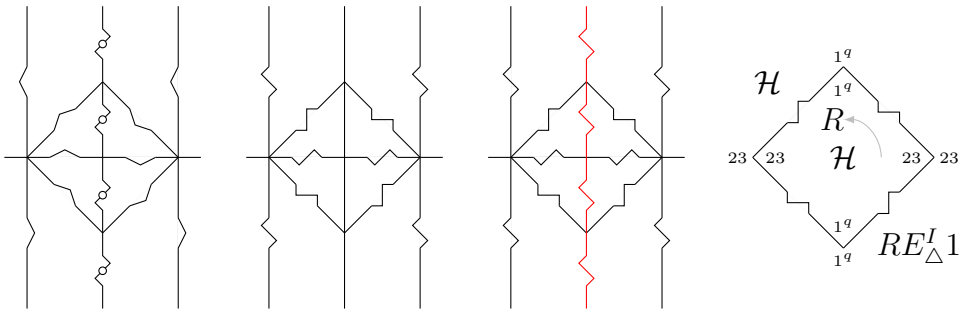

图26：对 $E^I_\triangle 1$进行修改，适用于 $h\bar{h}r$、 rra、 rrr'。

情形（2）。地球地图铺砌 $E^J_\triangle 1$和修改。

我们知道所有的顶点 AVC $= \{1^2 23, 12^{\frac{f+4}{8}} 3^{\frac{f+4}{8}}, 2^{\frac{f}{4}} 3^{\frac{f}{4}}\}$。我们讨论 hha-铺砌。其他类型的证明类似。

一个扇 $|2\rangle 3|$ 确定了图27左侧的铺片1 和2 。那么顶点 $1_1 1_2 \cdots = 1^2 23$ 就是一个扇 $|2\rangle 1\rangle 1\rangle 3|$。因此，一个扇 $|2\rangle 3|$ 确定了一个由以下时区组成的时区：1、2 、3、4。

顶点 $2^{\frac{f}{4}} 3^{\frac{f}{4}}$ 由 $\frac{f}{4}$ 个扇 $|2\rangle 3|$ 组成。这些扇生成 $\frac{f}{4}$ 个时区。这些时区只能按照图27所示的方式拼合在一起。于是我们得到由 $\frac{f}{4}$ 个时区组成的地球地图镶嵌 $E^J_\triangle 1$ （见 [5]的图5）。

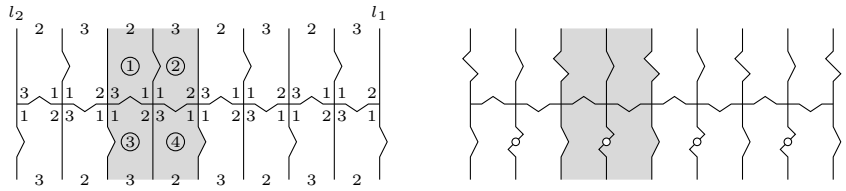

图27： $h\bar{h}a$和 $h\bar{h}r$对应的地球地图铺砌 $E^J_\triangle 1$ 。

同样的论证也适用于 hhr， rra， rrr'。我们得到图27右侧的地球地图镶嵌 $E^J_\triangle 1$，对应于 $h\bar{h}r$ 。我们还得到 $E^J_\triangle 1$，对应于 rra和 rrr' ，如图28所示。

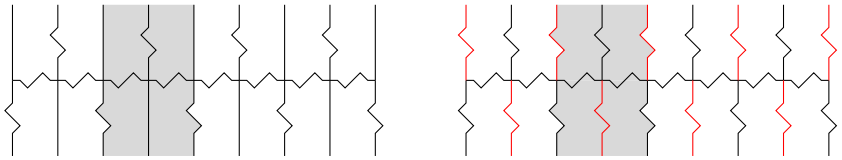

图28： $E^J_\triangle 1$ rra和 rrr'的地球地图铺砌。

假设 $1^{\frac{f}{2}}$ 不是一个顶点。那么 AVC $= \{1^2 23, 12^{q+1} 3^{q+1}\}$、 $q = \frac{f-4}{8}$ 都是顶点。由于铺砌中角1和角2的总数相同，因此二者都必须作为顶点出现。我们继续对 hha进行论证。

顶点 $12^{q+1} 3^{q+1}$ 由一个扇 $|2\rangle 1\rangle 3|$ 和 q 个扇 $|2\rangle 3|$ 组成。 q个扇 $|2\rangle 3|$ 确定了一个部分铺砌 $\mathcal{K}$ ，其由图27左侧的 q 个时区组成。 $\mathcal{K}$ 的边界是 l_1, l_2。我们需要填充铺砌的其余部分。

在图29左侧，我们绘制了部分铺砌 $\mathcal{K}$ ，位于 l_1 的左侧和 l_2 的右侧。我们需要填充 l_1 右侧和 l_2 左侧的区域。

扇 $|2\rangle 1\rangle 3|$ 在 $12^{q+1}3^{q+1}$ 以两种可能的方式确定铺片①、②、③。稍后我们将讨论另一种方式。

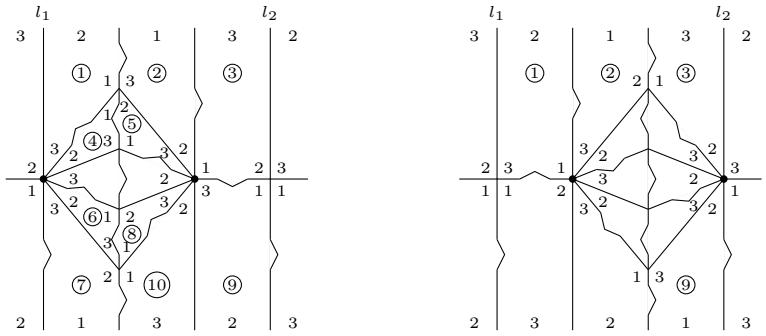

图29： $E^J_\triangle 1$针对 $h\bar{h}a$的修改。

顶点 $1_1 3_2 \cdots = 1^2 23$ 或 $12^{q+1}3^{q+1}$。在左图中，我们假设$1_1 3_2 \cdots = 1^2 23$。该顶点是一个扇 $|2\rangle 1\rangle 1\rangle 3|$，并确定4 和5。然后 $3_1 2_4 \cdots = 12^2 3 \cdots = 12^{q+1}3^{q+1}$。该顶点由一个扇 $|2\rangle 1\rangle 3|$和 q 个扇 $|2\rangle 3|$组成，它们确定7 以及 $\mathcal{K}$ 的一个副本，该副本由1、2 、4 、5、6、8 及它们之间的铺砖组成（图中展示的是情形 $q = 2$）。随后，顶点处的扇 $1_3 2_2 3_5 3_8 \cdots = 12^{q+1}3^{q+1}$ 确定9 和10。这填满了 l_1 右侧和 l_2 左侧的区域。

在图29右侧，我们假设 $1_1 3_2 \cdots = 12^{q+1}3^{q+1}$。那么，顶点处的一个扇 $|2\rangle 1\rangle 3|$ 和 q 个扇 $|2\rangle 3|$，连同铺片 h边3，确定了 l_1 右侧和 l_2左侧的所有铺片。

现在考虑在 $12^{q+1}3^{q+1}$处以另一种方式排列扇 $|2\rangle 1\rangle 3|$ ，其中扇1中的角3与3中的角2相邻。然后，我们对 $1_1 2_2 \cdots = 1^2 23$或 $12^{q+1}3^{q+1}$两种情况进行类似的论证。如果$1_1 2_2 \cdots = 1^2 23$，那么我们得到相同的4、5、6、8以及它们之间的铺片，其中所有这些铺片中的角2和角3互换。这意味着同样的9、10、角2和角3也互换。接着我们发现7有两条 h边，而9有两条 $\bar{h}$边。两者都导致矛盾。假设 $1_1 2_2 \cdots = 12^{q+1}3^{q+1}$ 也会导致类似的矛盾。因此，图29中的铺砌是AVC $= \{1^2 23, 12^{q+1}3^{q+1}\}$ 和hha仅有的铺砌。

接下来，我们解读图29中的铺砌。在图30的顶部，我们发现地球地图铺砌 $E^J_\triangle 1$ 可以分解为两个半球铺砌 $\mathcal{H}$的副本。虽然$E^J_\triangle 1$ 也是两个 $\mathcal{K}$的并集，但我们选择不使用这一点

观点。

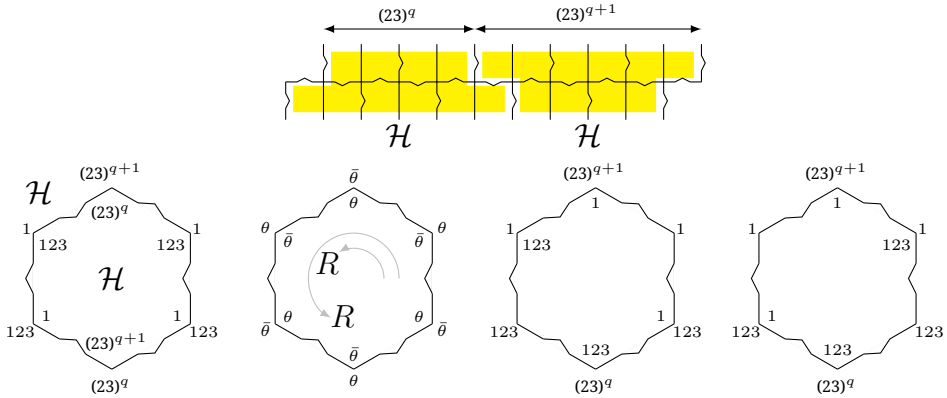

图30：旋转修改 $RE^J_\triangle 1$ 对于 $h\bar{h}a$和 $h\bar{h}r$。

底行由四幅图组成。第一幅图是相同的地球地图铺砌 $E^J_\triangle 1$，其中两个 $\mathcal{H}$ 分别是一个圆的内部和外部。我们标出了两个半球之间沿圆的边和角组合。在第二幅图中，我们标出了角组合的角度值，其中 $\theta = (1 - \frac{4}{f})\pi$ 以及 $\bar{\theta} = 2\pi - \theta = (1 + \frac{4}{f})\pi$。这样显然，_我们可以将内部的 $\mathcal{H}$旋转 $\frac{2}{3}\pi$或 $\frac{4}{3}\pi$，仍然得到一个铺砌。这些是地球地图铺砌 $E^J_\triangle 1$的旋转修改 $RE^J_\triangle 1$。第三幅和第四幅图标出了旋转修改 $RE^J_\triangle 1$ 中沿圆的角组合。

在图29左侧， l_1的左侧、 l_2的右侧、1 和3 构成一个半球铺砌 $\mathcal{H}$。其余铺砌由2 、4、6、7 、8 、9、10 以及它们之间的铺片组成，构成另一个半球铺砌 $\mathcal{H}$。如果我们把第一个 $\mathcal{H}$ 看作位于圆外，把第二个 $\mathcal{H}$ 看作位于圆内，那么该铺砌就是通过$\frac{2}{3}\pi$进行的旋转修改。类似地，图29右侧是通过 $\frac{4}{3}\pi$ 进行的旋转修改。交换内部$\mathcal{H}$ 和外部 $\mathcal{H}$后，我们发现这两种旋转修改实际上是同一种铺砌。

¯我们刚刚完成了论证，证明 hha对于 (1) 的铺砌是地球地图铺砌 $E^J_\triangle 1$ 和旋转修改 $RE^J_\triangle 1$。同样的论证¯也可应用于 hhr， rra， rrr'，并得到类似的结论。它们都有图27和图28所示的常规地球地图铺砌 $E^J_\triangle 1$ 。对于¯的两种旋转修改 hhr 如图30所示，且仍然相同。

对于 rra 和 rrr' 的两种旋转修改如图31所示。由于交换内部 $\mathcal{H}$ 和外部 $\mathcal{H}$ 会将边界圆中的 r 变为 r^{-1}，我们无法进行交换，因此这两种旋转修改实际上是 rra 和 rrr'的不同铺砌。

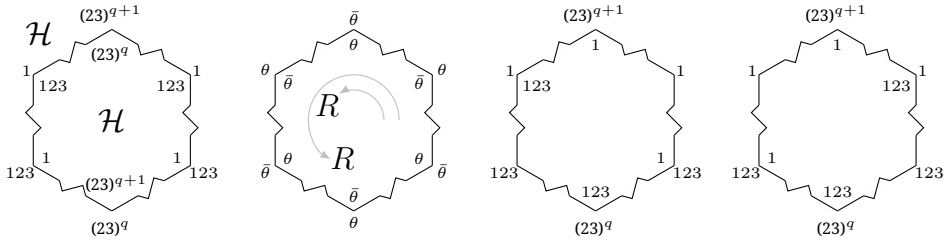

图31： rra和 rrr'的旋转修改 $RE^J_{\triangle}1$。

情形（3）。地球地图铺砌 $E_{\triangle}2$及修改。

我们知道所有顶点 AVC $= \{12^23^2, 1^{\frac{f+4}{8}}23, 1^{\frac{f}{4}}\}$。我们讨论 $h\bar{h}a$-铺砌。其他类型的证明类似。

顶点处两个相邻角 1 构成 $\langle 1\langle 1\langle$。这确定了图32中的 1 和 2。顶点 ② $2_23_1\cdots = 12^23^2$或 $1^{\frac{f+4}{8}}23$。由于 $1^{\frac{f+4}{8}}23$是一个扇 $|3\langle 1\langle\cdots\langle 1\langle 2|$，这与角$2_2$和 3_1, 之间的 h-边不相容，因此我们知道 $2_23_1\cdots = 12^23^2$。这是扇 $|3_1\langle 2_2|$与扇 $|3\langle 1\langle 2|$的组合。扇 $|3\langle 1\langle 2|$ 以两种方式确定 3、4、5，分别如图所示。然后有一个铺片 6 与 4 共用 a-边。同样，6 也有两种放置方式，分别如图所示。

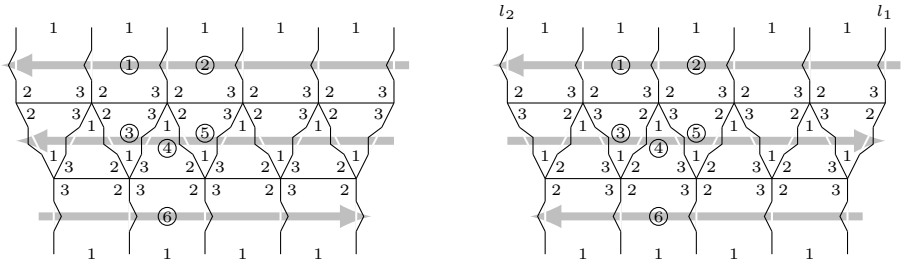

图32：地球地图铺砌 $E_{\triangle}2$对于 hha。

更一般地， $q+1$顶点处连续的角1组成 $\langle 1\langle 1\langle\cdots\langle 1\langle 1\langle$。该序列包含 q 对 $\langle 1\langle 1\langle$，每一对确定六个铺砖1，

◯ ②、③、④、⑤、6，如图32所示。为了使所有六元组彼此兼容，我们得到图32中的部分铺砌，其中 1^{q+1} 位于一端， 1^q 位于另一端（图中$q=4$）。该部分铺砌有三层，每一层都有一个方向（由灰色箭头表示），这些方向可以独立选择。由于三层方向可以独立选择，因此实际上有三个不同版本的 $E_{\triangle}2$，对应于 hha。

上述论证也适用于 hhr, rra, rrr'。不同之处在于，与 hha相比， hhr 中的 r边和 rrr' 中的 r'边对铺砌施加了额外的约束。因此，对于 hhr和 rrr'， $E_{\triangle}2$ 只有一种形式，如图33左侧和右侧所示。另一方面， rra 的情形与 hha类似。每一层要么全部为 r，要么全部为r^{-1}，且各层的选择可以彼此独立。对于 rra， $E_{\triangle}2$有三种不同形式。见图33中间的两幅图。

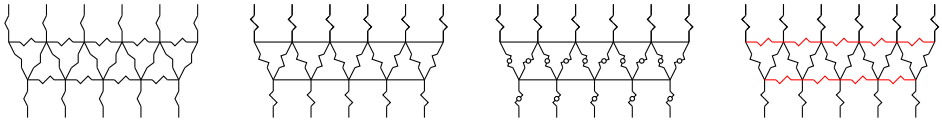

图33： hhr, rra, rrr'的地球地图铺砌 $E_{\triangle}2$。

假设 $1^{\frac{f}{4}}$不是顶点。那么 AVC $=\{12^23^2, 1^{q+1}23\}$, $q=\frac{f-4}{8}$都是顶点。由于铺砌中角1和角2的总数相同，因此二者都必须作为顶点出现。我们对 hha继续进行论证。

顶点 $1^{q+1}23$ 是一个扇 $|3\langle 1\langle \ldots \langle 1\langle 2|$。顶点的 1^{q+1} 部分形成了一个部分铺砌 $\mathcal{H}$，另一端有 1^q。 $\mathcal{H}$ 有三个版本，我们首先讨论图32右侧的版本。在图34中，这个 $\mathcal{H}$ 位于 l_1 的左侧和 l_2 的右侧。我们还用粗线标出了 a-边。我们需要填充 l_1 右侧和 l_2 左侧的区域。

顶点 $1^{q+1}23$的23部分确定了该区域中的1和2。接着是 $1_1\cdots=12^23^2$, $1^{q+1}23$。图34左侧是情形 $1_1\cdots=12^23^2$。顶点 12^23^2 由一个扇 $|3\langle 2|$ 和一个扇 $|3\langle 1\langle 2|$组成。根据1以及 l_1左侧的铺砌 $\mathcal{H}$，关于扇的信息确定了3和4。接着是 $1_4\cdots=1^223\cdots=1^{q+1}23$。该顶点的 1^{q+1} 部分确定了另一个部分铺砌 $\mathcal{H}$，它由1、2、3、4、5、6、7及其间的铺砖，以及 l_1 左侧的两块铺砖组成（图中展示的是情形$q=3$）。两端 1^{q+1} 和 1^q 由 •标示。接着是 $1_21_7\cdots=1^{q+1}23$，该顶点的 1^{q+1} 部分确定了8和9。

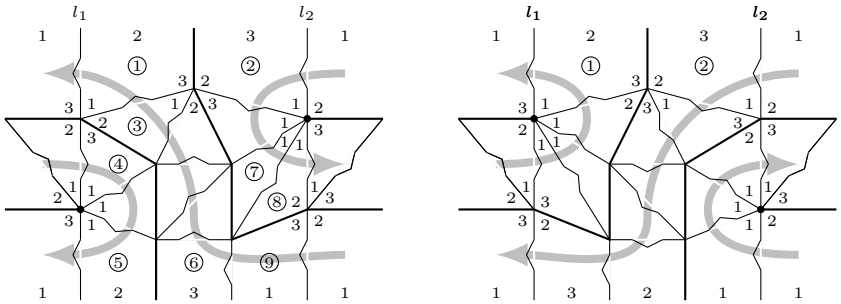

图34： $E_{\triangle}2$的修改，适用于 hha。

左图中两个 $\mathcal{H}$ 的层之间的边界是a-边。事实上，这些层合在一起构成一条条带，而这条条带中的所有 h都应具有相同的方向。兼容的方向由粗灰色箭头标示，这意味着两个 $\mathcal{H}$ 的三层都必须交替排列。这是图32右侧的版本，也是我们在论证中采用此版本的原因。任何其他版本都会导致方向上的矛盾。

我们仍需考虑顶点 $1_1\cdots=1^{q+1}23$的情形。这对应于图34的右侧。顶点的 1^{q+1} 部分诱导出部分地球铺砌 $\mathcal{H}$ ，它填充了 l_1 右侧与 l_2左侧之间的区域。我们还需检查各层方向的兼容性。我们发现它们必须交替排列，如粗灰色箭头所示。

我们可以将相同的论证应用于 h，rra，rrr'，对于更新后的 AVC $=\{12^23^2,1^{q+1}23\}$，我们得到类似的铺砌。具体而言， $h\bar{h}r$的铺砌可通过将图34中的所有 a-边替换为 r-边（而不是 r^{-1}-边）得到。对于 rra，我们得到图35中的铺砌，它们与图34完全类似。我们用粗线标出 a-边，这些边同时也作为两个 $\mathcal{H}$层之间的边界。这些层合在一起再次形成一条条带。因此只有 r-边，而没有 r^{-1}-边。对于 rrr'，铺砌可通过将图35中的 a-边替换为 r'-边得到。

最后，我们来解读图34和图35中的铺砌。这些铺砌是两个部分铺砌 $\mathcal{H}$ 的并集，一个位于 l_1 的左侧和 l_2 的右侧，另一个位于 l_1 的右侧和 l_2 的左侧。因此， $\mathcal{H}$ 实际上是一个半球铺砌。在图36中，我们绘制了两个类似于图31右侧的铺砌的并集。左边的两个对应于图34中的两个铺砌 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$，适用于 hha （以及 hhr）；右边的两个对应于图35中的铺砌

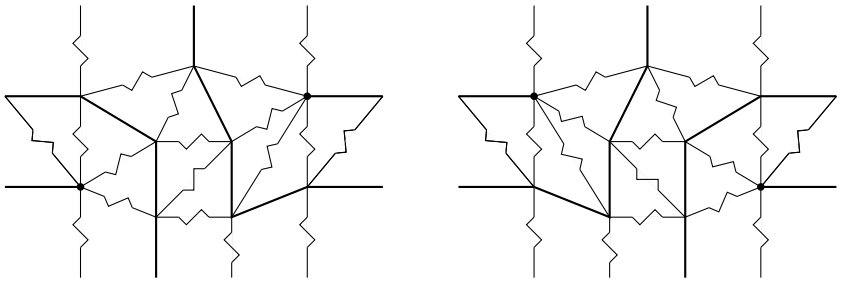

图35：对 $E_{\triangle}2$进行修改，以用于 rra。

适用于 rra （以及 rrr'）。

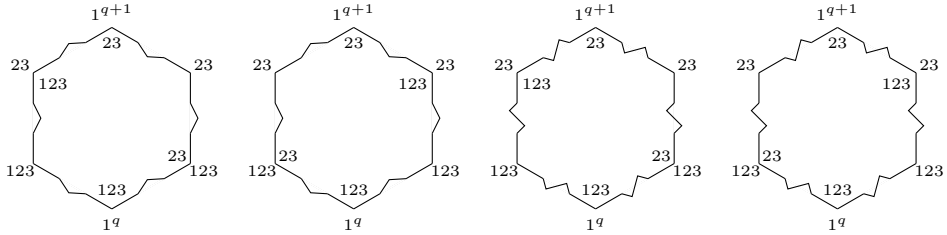

图36：旋转修改 $RE_{\triangle}2$。

标准地球地图铺砌 $E_{\triangle}2$ 由相似的图示描述，其中 1^q 与 1^{q+1} 匹配，23与123匹配。图36中的第一幅和第三幅是将 $E_{\triangle}2$的内部 $\mathcal{H}$旋转 $\frac{2}{3}\pi$得到的。图36中的第二幅和第四幅是旋转 $\frac{4}{3}\pi$得到的。因此，AVC$^-$ $= \{12^23^2, 1^{q+1}23\}$ 的铺砌就是这两种旋转修改。

通过交换内外半球 $\mathcal{H}$，我们发现这两种$^-$ $^-$旋转对于 hha和 hhr而言是等价的铺砌。然而，我们无法对 rra 和 rrr' 进行这种交换，因为这会将边界圆上的 r 变为r^{-1}。因此，这两种旋转对于 rra 和 rrr'而言是不同的铺砌。□

命题8。 由全等 raa三角形组成的球面镶嵌如下：

- 四面体 P_4。
- 五种柏拉图立体的三角剖分 $T_{\triangle}P_n$ 。
- 立方体的简单三角剖分 $S_{\triangle}P_6$ 。

- 地球地图镶嵌 $E^I_{\triangle}1$、 $E^J_{\triangle}1$、 $E_{\triangle}2$及其旋转修改$RE^I_{\triangle}1$、 $RE^J_{\triangle}1$、 $RE_{\triangle}2$。

证明。 图7中的第八个图展示了一对配对图形构成四边形$aaaa$。这是一个边为直线型的菱形。因此，我们可以采用 [5]第4节中的论证。

论证分为两部分。第一部分是在所有顶点的度均为 ≥ 3 的假设下，对所有菱形铺砌进行分类。根据 [5], 的命题23，菱形铺砌是柏拉图立体的四中心细分$C_{\square}P_n$ 、地球地图铺砌 $E^R_{\square}1$ 以及翻转修改 $FE^R_{\square}1$。然后，raa-铺砌是这些菱形铺砌的简单三角剖分，也就是说，使用 r 或 r^{-1} 将每个菱形分成两个raa-三角形。由于这两种划分不同，我们可以从同一个菱形铺砌得到许多不同版本的 raa-铺砌。

$C_{\square}P_n$ 的简单三角剖分包括正方形的简单三角剖分 $S_{\square}P_6$ 以及柏拉图立体的三角剖分 $T_{\triangle}P_n$ ， $n = 6$， 8，12， 20。图 37 的中间和右侧展示了 $S_{\square}P_6$ 和 $T_{\triangle}P_n$的示例。我们可以独立地交换任意 r-边和 r^{-1}-边。

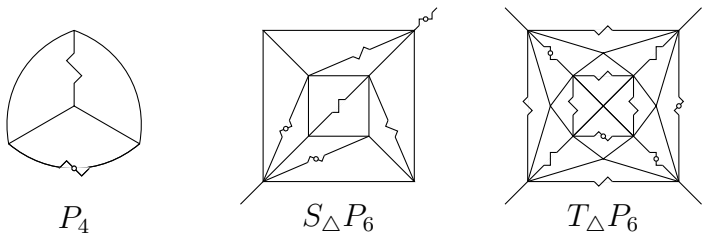

图 37： P_4、 $S_{\triangle}P_6$、 $T_{\triangle}P_n$ 的柏拉图类型铺砌，适用于 raa。

$E^R_{\square}1$ 的简单三角剖分是图38中间和右侧的地球地图镶嵌 $E^J_{\triangle}1$和 $E_{\triangle}2$ 。同样，任何 r 和 r^{-1} 都可以分别交换。

[5] 第4节论证的第二部分讨论的是：三角形铺砌中的某些顶点在相应的菱形铺砌中变为度为2的顶点。根据 [5], 中的同一论证，我们知道该铺砌要么是图37左侧的四面体 P_4 ，要么是图38左侧的地球地图铺砌 $E^I_{\triangle}1$ ，要么是翻转修改 $FE^I_{\triangle}1$。实际上，这种翻转修改与图25中的翻转修改 $FE^I_{\triangle}1$ 相同，

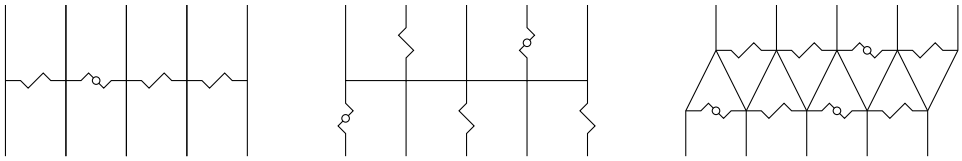

图38：地球地图镶嵌 $E^I_\triangle 1$、 $E^J_\triangle 1$、 $E_\triangle 2$ ，对应于 raa。

以及图26中的旋转修改 $RE^I_\triangle 1$。由于 h 和 r的对称性不同，我们需要区分早先铺砌中的翻转 F 和旋转 R 。对于 raa，边界圆由直线组成，而翻转实际上与旋转相同（半球铺砌内部的 r 和 r^{-1} 可以自由交换）。见图39左侧，其中我们选择使用 R 而非 F。

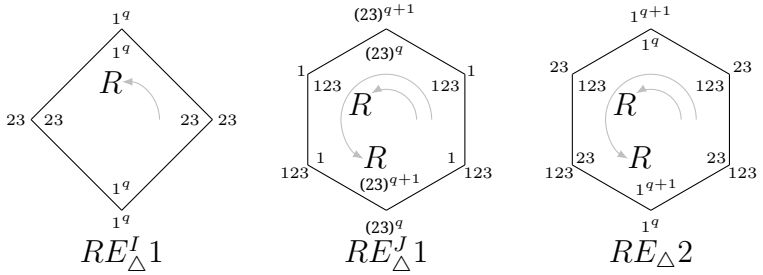

图39：旋转修改 $RE^I_\triangle 1$、 $RE^J_\triangle 1$、 $RE_\triangle 2$，对应于 raa。

翻转修改 $FE^R_\square 1$的简单三角剖分是翻转修改 $FE^J_\triangle 1$和 $FE_\triangle 2$。图39中间和右侧展示了这两种剖分，它们与图30、31和36中的旋转相同。同样，翻转实际上与旋转相同（只需自由交换 r 和 r^{-1}），因此我们在图39中选择使用 R 而非 F。 □

致谢

这项工作于2023年作为浙江师范大学铺砌工作室的一项本科生研究项目启动，由第三位作者和

最后一位作者指导。其他作者于2024年毕业后，继续推进该项目，直至获得完整的分类。图1中的鸟形原型砖由 Luoning Zhu 设计；她是后来加入团队的一名低年级学生，专门负责绘制有趣的图案。作者感谢她在项目期间创作的几幅精美图画。

参考文献

[1] C. Adams。《铺砌之书：铺砌数学理论导论》。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2022年。[2]C. Adams、C. Edgar、P. Hollander、L. Jacoby。正多边形在球面上的非边对边铺砌。《离散计算几何》72（2024年），1029–1085。[3] Y. Akama、E. Wang、M. Yan。全等五边形在球面上的铺砌 III：边组合 a^5。《数学进展》394：107881，2022年。[4] W. Chen、J. Liang、E. Wang。含任意无理角的全等三角形在球面上的非边对边镶嵌。预印本，arXiv:2505.16629。[5] H. M. Cheung、H. P. Luk、M. Yan。全等四边形或三角形在球面上的铺砌。预印本，arXiv:2204.02736，2022年。[6] H. M. Cheung、H. P. Luk、M. Yan。全等五边形在球面上的铺砌 IV：边组合 a^4b。预印本，arXiv:2307.11453，2023。[7] H. L. Davies。球面三角形与四面体的装填。《哥本哈根凸性研讨会论文集》（1967年），42–51。[8] B. Gr¨unbaum、G. C. Shephard。《铺砌与图案》。W. H. Freeman 与 Dover，1987年和2016年。[9] H. Heesch、O. Kienzle。《面拼合：无缝拼接平面图形的形状体系》。Springer-Verlag，1963年。[10]N. Johnson。具有正多边形面的凸多面体。《加拿大数学杂志》18：169–200，1966年。

[11] J. Liang、Y. Liao、W. Hu、E. Wang。全等五边形在球面上的铺砌 V：具有有理角的边组合 a^4b。预印本，arXiv:2507.07038，2025年。[12] J. Liang、E. Wang、M. Yan。《五边形细分镶嵌模空间》。预印本，arXiv:1907.08776，2024年。[13]Y. Liao、J. Shu、E. Wang。全等五边形在球面上的铺砌 IV：一般角度下的边组合 a^4b。预印本，arXiv:2412.08492，2024年。[14] Y. Liao、E. Wang、P. Qian、Y. Xu。全等四边形在球面上的铺砌 I：边组合 a^2bc。《中国数学年刊》B辑，45（5），2024年，733–766。[15] Y. Liao、E. Wang。全等四边形在球面上的铺砌 II：有理角下的边组合 a^3b。《名古屋数学杂志》253（2024年），128–163。[16] Y. Liao、E. Wang、P. Qian、Y. Xu。全等四边形在球面上的铺砌 III：一般角度下的边组合 a^3b。《数学论坛》2024年；36（5）：1159–1186。[17] D. M. Y. Sommerville。用全等三角形和四面体划分空间。《爱丁堡皇家学会会刊》43：85–116，1923年。[18] Y. Ueno、Y. Agaoka。全等三角形二维球面镶嵌的分类。《广岛数学杂志》32（3）：463–540，2002年。[19] E. Wang、M. Yan。全等五边形在球面上的铺砌 I：边组合 a^2b^2c和 a^3bc。《数学进展》394：107866，2022年。[20] E. Wang、M. Yan。全等五边形在球面上的铺砌 II：边组合 a^3b^2。《数学进展》394：107867，2022年。[21] V. Zalgaller。具有正则面的凸多面体。《斯捷克洛夫数学研究所列宁格勒分所科学研讨会纪要》（俄文）2：1–221，1967年。