arXiv:2601.08304v1 [math.MG] 13 Jan 2026

路径四面体和4-球四面体二面角和的双侧界

*Sergey Korotov*数学与物理部，UKK，M¨alardalen University，邮政信箱 883，721 23 V¨aster˚as，瑞典 电子邮箱：sergey.korotov@mdu.se

Michal K̆r´ı̆zek̆ 数学研究所，捷克科学院，Žitn´a 25，115 67 布拉格 1，捷克共和国 电子邮箱：krizek@math.cas.cz

2026年1月14日

摘要：如果一个四面体有三条两两正交且不交于同一点的棱，则称其为路径四面体。如果存在一个与其所有棱都相切的球面，则称其为4-球四面体。我们推导了这类四面体二面角和的双侧紧界。特别地，我们证明，对于路径四面体，该角和属于区间$(2\pi, 2.5\pi)$；对于4-球四面体，则属于 $[6 \arccos \frac{1}{3}, 3\pi)$。此外，还介绍了它们的一些有用性质。

关键词：路径四面体、4-球四面体、二面角和、双侧紧界、有限元、凯莱-门格尔行列式、索迪圆。

AMS 分类：51M04、51M20、52A20、65N30

1 引言

由 [3, 4, 9, 13, 14] 证明，任意四面体的面之间六个二面角的和并非常数。该和在 2π 和 3π 之间变化，而且这两个双侧界是紧的（最优的），也就是说无法进一步改进；见下文陈述于1941年的定理 1。自那以后，人们又得到了关于各种类型四面体及其他一些多面体的二面角和的若干结果，见 [11, 18, 19]。

本文主要研究一种特殊类型的四面体，即所谓的4-球四面体；这类四面体存在一个与其六条棱均相切的球面。在第2节中，我们推导出路径四面体二面角和的一个简单双侧界（见定理 2）。这些从直角三角形推广到三维空间的直接推广形式，是所有多面体的基本构件，见 [16]。请注意，具有非钝角二面角的四面体（参见（2）和（4））在数值数学和有限元分析中有许多实用应用（见 [4, 第 67]页）。在第3节中，我们介绍4-球四面体的若干基本性质。我们将说明，4-球四面体的形状可能非常不规则；尤其是，它们的所有面都可能是钝角三角形，同时其中三个二面角也可能为钝角。此外，我们还探讨如何将给定的4-球四面体面对面地剖分为路径四面体，使其不含钝角。在第4节中，我们证明，任意4-球四面体的二面角和不小于$6 \arccos \frac{1}{3} \approx 2.35\pi$ 且小于 3π，并且该区间内的每个值都可以达到（见定理 9）。

全文中，为简便起见，所有线段及其长度均用相同的符号 $a, b, l_1, ..$ 表示。

定义 1. 下文用符号 T 表示的四面体，是 $\mathbb{R}^3$ 中四个不共面的点的凸包。其各面之间的六个内部角称为二面角，即每个二面角都与 T 的六条棱之一相关联。

定义 2. 四面体 T 的二面角和记为 Σ_T，它是其全部六个二面角之和。

一般四面体的以下双侧界由 Jarden (Juzuk) [13] 于 1941年证明（另见 [9] 和 [14]）。

定理 1. 对于四面体 T 的二面角和 Σ_T，我们有以下估计

$$2\pi < \Sigma_T < 3\pi, \tag{1}$$

其中下界和上界都是紧的。

2 路径四面体二面角和的双侧估计

首先，我们给出一个众所周知的定义，它将直角三角形的概念推广到三维空间。

定义 3. 如果一个四面体 T 具有三条两两正交且不交于同一点的棱，则称其为路径四面体，见图1。

注意，路径四面体的所有二面角均为非钝角，且其所有面都是直角三角形，参见例如 [4, 第 61–62]页。

定理 2. 设 T 为一个路径四面体。则

$$2\pi < \Sigma_T < 2.5\pi \tag{2}$$

并且，这两个界限之间的每一个值都可由某个路径四面体取得。

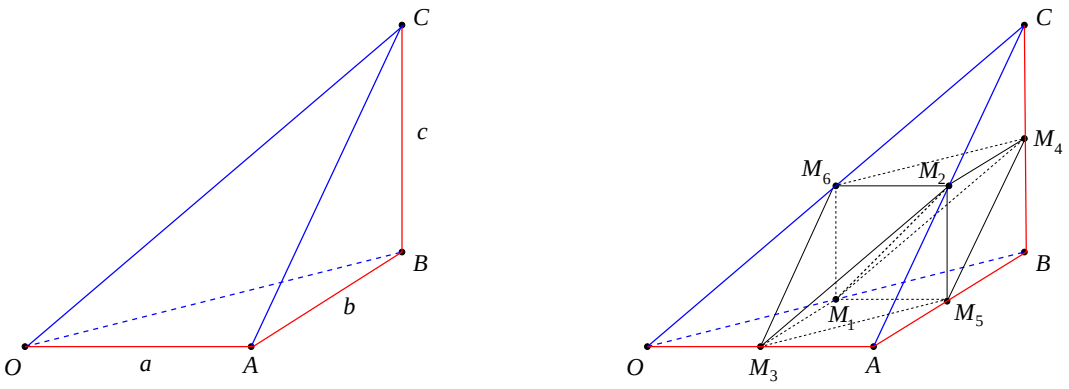


图1：左：路径四面体 $OABC$，其正交棱 a、b 和 c 构成一条路径（按图论意义）。它的四个面都是直角三角形，体积为 $abc/6$。右：利用其各面的中线以及连接棱 OB 和 AC的中点 M_1 与 M_2 的内部对角线，可以将其面对面划分为 8 个路径子四面体，见 [4, 第 90]页。

证 明：对于所有二面角均为非钝角的四面体，下界和上界都成立，见 [3, 第 400] 页。因此，我们只需证明区间 $(2\pi, 2.5\pi)$ 中的每个值都可以通过

某个路径单形 T 的 Σ_T 达到。任何路径四面体都可由构成一条路径的三条两两正交的棱的长度完全确定。设 a、 b、 c 为任意正数，并考虑一个路径四面体 T，其顶点为 $O=(0,0,0)$、 $A=(a,0,0)$、 $B=(a,b,0)$ 和 $C=(a,b,c)$，见图1。棱 OB、 BA 和 AC 处的三个二面角显然都是直角。注意，这些棱也构成一条路径。不失一般性，我们可以假设

$$b=1.$$

AO 处的角为 $\arctan c$， BC 处的角为 $\arctan a$。 CO 处最后一个二面角的余弦等于外向单位法向量的数量积取相反数（例如参见 [2] 的 (2.9)）。面 ACO 的外向单位法向量为 $(0,-c,1)/\sqrt{c^2+1}$，面 BCO 的外向单位法向量为 $(-1,a,0)/\sqrt{a^2+1}$。此外，令 $c=a$。那么

$$\Sigma_T=\Sigma_T(a)=3\frac{\pi}{2}+2\arctan a+\arccos\frac{a^2}{a^2+1}$$

and

$$\lim_{a\to 0}\Sigma_T(a)=\frac{3}{2}\pi+0+\frac{1}{2}\pi=2\pi,\qquad \lim_{a\to\infty}\Sigma_T(a)=\frac{3}{2}\pi+2\frac{1}{2}\pi+0=2.5\pi.$$

由于函数 $a\mapsto\Sigma_T(a)$ 连续（即具有达布性质），所提出的双侧估计 (2) 即得。

■

3 4-球四面体的基本性质

定义4. 如果存在一个与四面体 T 的所有棱相切的球面，则称四面体 T 为4-球四面体；下文将该球面称为中球（参见 [23]）。

注 1. 文献中还可以找到这种四面体的其他几种称谓——克雷尔四面体、框架四面体、中球四面体、可外切四面体、骨架四面体、拟外切四面体、气球四面体，参见 [6, 7, 10, 27]及其中的参考文献。

注 2. 考虑一个任意的 4-球四面体 T，其顶点为 A_i、 $i\in\{1,2,3,4\}$。根据下文的定理4，存在 4 个两两相切的闭球，其球心为 A_i，半径为 ℓ_i。于是，根据 [25, 第 136], 页，中球的半径 ρ 可按如下方式计算

$$\rho=\frac{2l_1l_2l_3l_4}{3\operatorname{vol}_3T},$$

其中，vol_3T 表示 T的体积。显然，对于每个 $i\in\{1,2,3,4\}$， l_i 是从 T 的顶点 A_i到其中球的切线段长度。此外，从图2可以看出，任意一个 4-球四面体的任意一对对边长度之和等于

$$l_1+l_2+l_3+l_4=\text{const}.$$

将此与下文定理4中的 1) 相比较。

下一个定理非常简单，但我们将在下文中多次用到它。

定理 3. 设 l_1、 l_2、 l_3 为任意正数。则存在一个三角形，其边长为

$$a=l_1+l_2,\qquad b=l_1+l_3,\qquad c=l_2+l_3. \tag{3}$$

反过来，对于边长为 a、 b、 c 的任意三角形，都存在唯一确定的正数 l_1、 l_2、 l_3，使得（3）成立，也就是说，三元组（a、 b、 c）与（l_1、 l_2、 l_3）之间存在一一映射。

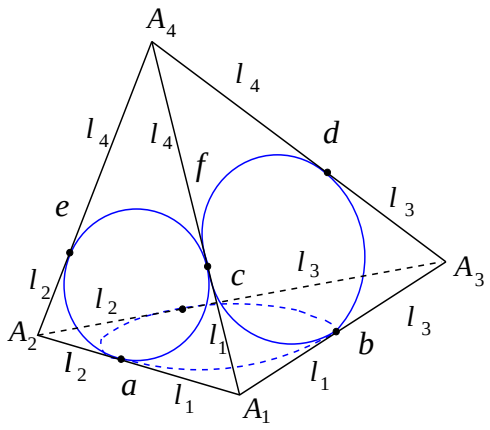


图2：4-球四面体 $A_1A_2A_3A_4$的示意图。这里， l_i 是从其顶点到相应中球的切线长度。六个切点用圆点标出。

证 明 是有效的，e ：容易验证，三角形存在所需的三个不等式 .g.,

$$a+b=l_1+l_2+l_1+l_3>l_2+l_3=c.$$

反过来，给定一个边长为 a、 b、 c的三角形，我们令

$$l_1=\tfrac{1}{2}(a+b-c),\qquad l_2=\tfrac{1}{2}(a+c-b),\qquad l_3=\tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

可知（3）成立。由于三角形不等式，数值 l_i 显然为正。公式（3）可表示为如下线性变换

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}$$

其逆变换为

$$\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

这就说明所需的唯一性成立。 ■

在注5中，我们证明了 4-球四面体的类似定理并不成立。具体而言，任意正数 l_i、 $i=1$、. . . 、 4 与 T 的棱长之间不存在唯一的对应关系。

下一个定理给出了 4-球四面体的几种等价定义；相应的证明见 [15] 和 [25,第 136] 页。

定理4. 一个四面体是 4-球的，当且仅当满足以下任一条件：

1) 对边长度之和相等。2) 与对边相邻的二面角之和相等。3) 四面体相邻面内切的圆彼此相切于一点（见图 2 和图 3（右））。4) 存在四个两两外切的球，其球心分别位于四个顶点。5) 从四面体各面内切圆的圆心引出的四条垂线交于一点（中球的中心）。

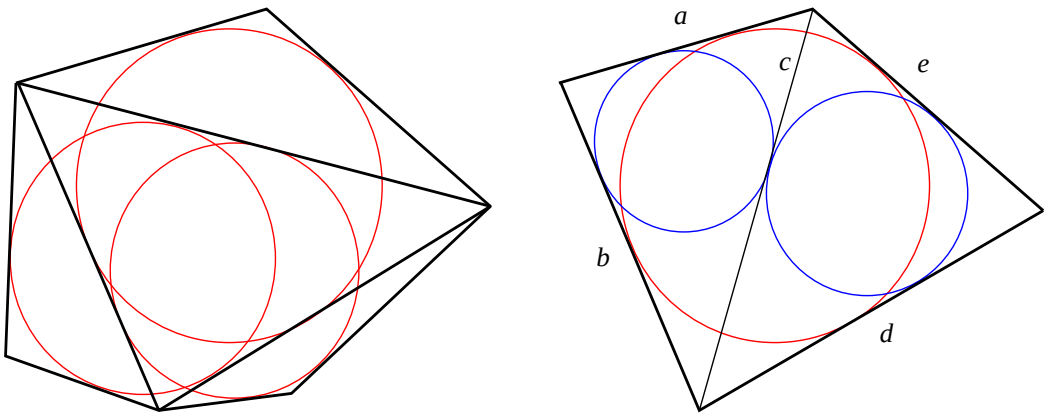


图3：左：由三角形面构造的展开四边形的内切圆。右：如果一个凸展开四边形存在内切圆，那么 $a+d=b+e$（参见注5）。两个较小的圆对应于中球。

考虑一个 4-球四面体及其中球。那么，连接对边切点的三条直线交于一点，证明见 [27, p. 187]。关于 4-球四面体还有若干其他有用性质，见 [27]。

注3。由 [14, p. 32], , 我们得到一个非常紧的双侧界（参见（2））

$$434.2^\circ \approx 2.41\pi \approx 1.5\pi + 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \le \Sigma_T < 2.5\pi = 450^\circ \tag{4}$$

对于一般的直角立方角（三直角）四面体 T，其顶点为 (0,0,0)、$(a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$，其中 a、b、c 为任意正数。由于三个二面角等于 90°，因此这种刚性得以成立。当且仅当 $a=b=c$ 时，下界取到；也就是说，对于一个最大对称立方角四面体而言，它显然是一个 4-球四面体。

例1。另一个简单的4-球四面体例子是正四面体 T。我们注意到，其内切球半径 r 与外接球半径 R 的几何平均数等于其中球的半径 ρ。事实上，如果 $a=1$，那么 $\operatorname{vol}_3 T=\sqrt{2}/12$，由注 2可得

$$rR=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{8}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\rho^2.$$

例2。还存在一种所有面都不是等边三角形的4-球四面体。例如，若将顶点规定如下

$$A=(-2,0,0), B=(2,0,0), C=(0,\sqrt{21},0), D=(0,5\sqrt{21}/21,4\sqrt{105}/21),$$

则棱 $|AC|=|BC|=5$ 处的二面角恰为 54.41°，$|AB|=|CD|=4$ 处的二面角分别为 60.79° 和 83.62°，而 $|AD|=|BD|=3$ 处的二面角恰为 90°。两个面 ACD 和 BCD是勾股直角三角形，另外两个面是等腰三角形。我们看到，对边之和始终为8，而对角之和均等于 144.41°，参见定理4的性质1）和2）。对于这个四面体，我们有 $rR>\rho^2=9/5$。另一方面，对于高为 h的正三角锥，可以推导出 $rR<\rho^2$，其中 $4h$ 是三角形底面任一棱的长度。

根据 [21], , 我们有

$$R\ge\sqrt{3}\rho\ge 3r,$$

其中，当且仅当该 4-球四面体是正则的时，这两个不等式均取等号。

在本节中，设 a、b、c 是给定四面体 T 的某个三角形面的棱长。设 d、e、f 分别是与 a、b、c 相对的棱。

例3。我们可以构造一个具有 $a = 2$、$d = 20$ 和 $b = c = e = f = 11$ 的4-球四面体。它只有两种等腰三角形面：边长为 (2, 11, 11) 的面，其最大角为 $\arccos \frac{1}{11} \approx 84.78°$；以及边长为 (20, 11, 11) 的面，其最大角为 $2 \arcsin \frac{10}{11} \approx 130.76°$。因此，由四面体壳展开得到的六个四边形中，有四个是非凸的，因为$84.78° + 130.76° > 180°$。所以一般而言，并不存在一个内切圆与四条边都相切，这与图3（左）所示的情况相反。

如果一条或两条棱很长而其余棱很短，就无法构造四面体。棱 a、b、c、d、e、f 必须满足 T 的四个面各自对应的所有三角形不等式。然而，正如下一例所示，这只是一个必要条件。

例4. 如果 $a = b = c = d = e = 1$ 和 $f = 7/4$，那么所有必要的三角形不等式都成立，但对应的四面体并不存在，因为相邻的等边三角形面 (a, b, c) 和 (a, d, e) 的高为 $\sqrt{3}/2$，且 $\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 < 7/4$。因此无法构造这样的四面体，参见图4（左图），其中有更多关于其不可构造的解释。

关于六个数能够成为某个四面体棱长的下一个充要条件见 [30, 第 163]页。

定理5. 棱 a, b, c, d, e, f 构成一个四面体，当且仅当

i) 四个面的所有棱都满足相应的三角形不等式，并且

ii) 对称矩阵的凯莱-门格尔行列式

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & a^2 & c^2 & e^2 \\ & & 0 & b^2 & f^2 \\ & \text{sym.} & & 0 & d^2 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

为正。

注4. 凯莱-门格尔行列式与 T 的体积密切相关，参见例如 [1,第 77], [4, 页、 10], [8, 页、 434], [22, 页。 239], [24, 页、 737]，其中介绍了各种应用。如果 $D_3 = 0$，则相应的四面体是退化的，所有顶点都位于同一平面内。条件 i) 和 ii) 相互独立。对于例4中给出的棱，我们得到 $D_3 = -0.3828$ 的值为负。由此可见，i) 成立，但 ii) 不成立。另一方面，如果 $a = c = f = 1$、$b = e = 3$和 $d = 5$，那么 $a + c < b$ 且 $D_3 = 468$。因此，i) 不成立，但 ii) 成立。

对于例1和例2中的四面体，我们可以推得：对于满足 $a = 1$ 的正四面体，有 $D_3 = 4$；对于满足 $a = b = 5$、$c = f = 4$和 $d = e = 3$的四面体，有 $D_3 = 10\,240$。在例3中，$D_3 = 256\,000$，由此得到满足 $a = 1$的最大对称立方体角四面体有 $D_3 = 8$，参见注3。

注5. 我们证明，定理 3 中的构造在四面体的情形下并不适用。设 l_1、l_2、l_3、l_4 是任意正数，并设

$$\begin{aligned} a &= l_1 + l_2, \qquad b = l_1 + l_3, \qquad c = l_2 + l_3, \\ d &= l_3 + l_4, \qquad e = l_2 + l_4, \qquad f = l_1 + l_4. \end{aligned}$$

Then

$$a + d = b + e = c + f, \tag{5}$$

参见定理4的条件1)。我们可以像定理 3 的证明中那样，证明所有三角形面的必要三角形不等式均成立。然而，相应的四面体不一定

普遍存在。例如，若 $l_1 = 0.1$ 和 $l_2 = l_3 = l_4 = 1$，则 $a = b = f = 1.1, c = d = e = 2$，且凯莱-门格尔行列式为负， $D_3 = -11.84 < 0$，也就是说，定理5中的条件 ii) 不成立。换言之，以上述棱定义的四面体无法构造，见图4（右）。这也意味着，对于半径分别为 l_1, l_2, l_3的三个相切球，半径为 l_4 的第四个球永远无法与第一个球相切，也就是说，定理4中的条件4) 不成立。

定理 3 表明，三个球总能彼此相切，而四个球则未必如此。定理4给出了这种情况成立的充要条件。

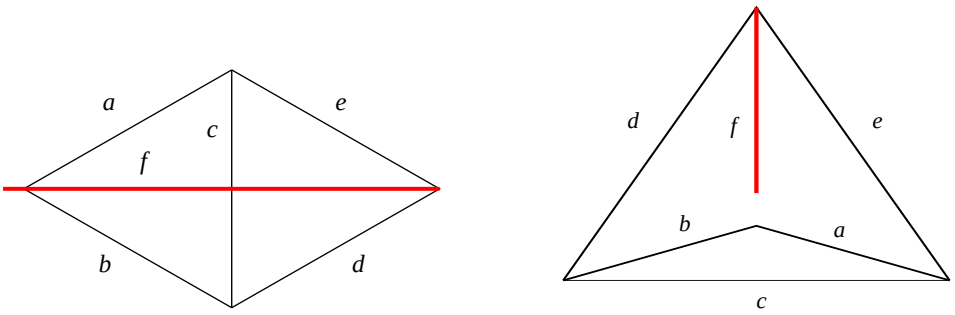


图4：当四个面都满足三角形不等式，但凯莱-门格尔行列式为负时的两种典型情况。左：对于 $a = b = c = d = e = 1$ ，剩下的粗红棱$f = 7/4$ 过长，无法构成四面体（见例4）。右：对于给定的棱 $a = b = 1.1$和 $c = d = e = 2$ ，剩下的粗红棱 $f = 1.1$ 过短，无法构成（4-球）四面体，见注5。

备注6. 根据 [2, 第 424], 页，凯莱-门格尔行列式（采用定理5中的记号）等于

$$\begin{aligned} D_3 =& \det \begin{pmatrix} 2a^2 & a^2+c^2-b^2 & a^2+e^2-f^2 \\ & 2c^2 & c^2+e^2-d^2 \\ \text{sym.} & & 2e^2 \end{pmatrix} \\ =& 2[4a^2c^2e^2 + (a^2+c^2-b^2)(c^2+e^2-d^2)(a^2+e^2-f^2) \\ & - a^2(c^2+e^2-d^2)^2 - c^2(a^2+e^2-f^2)^2 - e^2(a^2+c^2-b^2)^2]. \end{aligned} \tag{6}$$

下一个定理的证明是构造性的。

定理6. 对于任意三角形，都存在无穷多个以该三角形为其中一个面的4-球四面体。

证 明：令 $A_1A_2A_3$ 为平面 (x, y) 中任意一个三角形。根据定理 3， $A_1A_2A_3$ 的边与正数 l_1, l_2, l_3 之间存在唯一的对应关系。因此，我们可以考虑定理 3 中引入的三个圆，它们的顶点为 A_i ，半径为 l_i, $i = 1, 2, 3$。由笛卡尔定理 [20] ，存在唯一确定的点 A_0 ，位于 $A_1A_2A_3$ 内部，该点是第四个圆的中心（在 [28] 中称为索迪圆），此圆与另外三个圆外切（见图5）。因此，四个圆的内部两两不相交，且每个圆都与另外三个圆相切，见图5。记 l_0 为索迪圆的半径（其计算方法见 [12] ）。根据备注4和备注5，我们发现 $A_1A_2A_3A_0$ 是一个退化的 4-球四面体。

现在考虑三个球心分别为 A_1, A_2, A_3 、半径分别为 l_1, l_2, l_3 的相切球。对于每个充分小的 $\varepsilon > 0$ ，恰好存在两个半径为 $l_4 = l_0 + \varepsilon$ 、与上述三个球相切的球。它们的球心 A_4 和 $\overline{A}_4$ 关于平面 $(x, y, 0)$ 对称。因此，根据定理4的性质4)， $A_1A_2A_3A_4$ 是一个4-球四面体。 ■

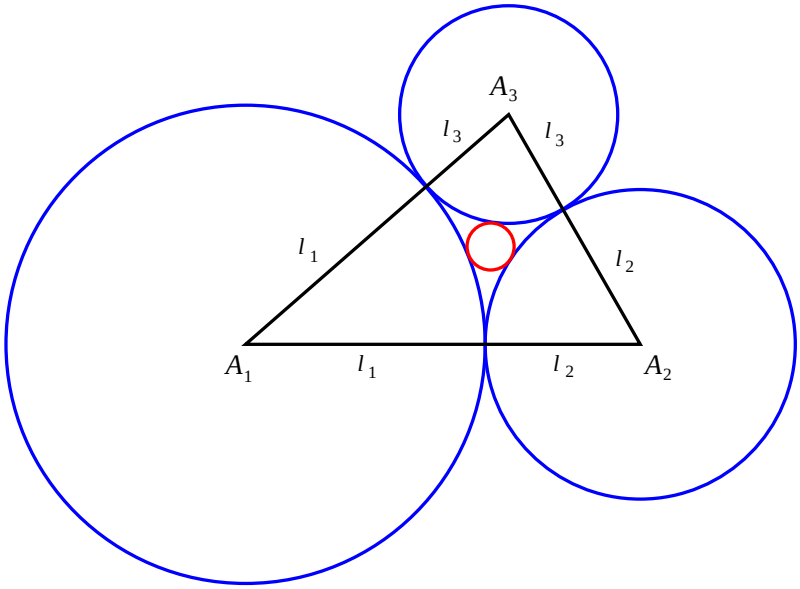


图5：对于给定的三个（蓝色）两两外切的圆，存在唯一的第四个（红色）圆与这三个圆都外切（第十个阿波罗尼奥斯问题）。

注7. 设 a,b,c 是一个固定三角形的边，并令

$$d = k - a, \qquad e = k - b, \qquad f = k - c \tag{7}$$

对于某个常数 $k > \max(a,b,c,$ 并将这些值代入（6）。我们再次得到关系式（5），且其余三个面的所有三角形不等式均成立，例如，

$$a + f > c - b + k - c = k - b = e.$$

此外，由（6）可知， $D_3 = D_3(k)$ 是关于 k 的二次函数，易于研究。令

$$c = 1, \qquad X = a^2 + b^2 - 1, \qquad Y = a^2 + 1 - b^2, \qquad Z = b^2 + 1 - a^2,$$

由式（6）可得

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}D_3 =& 4a^2c^2e^2 + (a^2 + c^2 - b^2)(c^2 + e^2 - d^2)(a^2 + e^2 - f^2) \\
&- a^2(c^2 + e^2 - d^2)^2 - c^2(a^2 + e^2 - f^2)^2 - e^2(a^2 + c^2 - b^2)^2 \\
=& 4a^2(k-b)^2 + Y(1 + (k-b)^2 - (k-a)^2)(a^2 + (k-b)^2 - (k-1)^2) \\
&- a^2(1 + (k-b)^2 - (k-a)^2)^2 - (a^2 + (k-b)^2 - (k-1)^2)^2 - (k-b)^2Y^2 \\
=& 4a^2(k-b)^2 + Y(b^2 + 1 - a^2 + 2k(a-b))(a^2 + b^2 - 1 + 2k(1-b)) \\
&- a^2(b^2 + 1 - a^2 + 2k(a-b))^2 - (a^2 + b^2 - 1 + 2k(1-b))^2 - (k-b)^2Y^2 \\
=& 4a^2(k^2 - 2bk + b^2) + Y(Z + 2k(a-b))(X + 2k(1-b)) \\
&- a^2(Z + 2k(a-b))^2 - (X + 2k(1-b))^2 - (k^2 - 2bk + b^2)Y^2 \\
=& k^2[4a^2 + 4Y(a-b)(1-b) - 4a^2(a-b)^2 - 4(1-b)^2 - Y^2] \\
&+ k[-8a^2b + 2XY(a-b) + 2YZ(1-b) - 4a^2Z(a-b) - 4X(1-b) + 2bY^2] \\
&+ 4a^2b^2 + XYZ - a^2Z^2 - X^2 - b^2Y^2,
\end{aligned}$$

这是关于 k 的二次函数。根据定理6，对于给定的 a 和 b，存在无穷多个 k，使得行列式 $D_3 = D_3(k)$ 为正。这意味着相应的判别式必定非负。然而，正如注5所示， D_3 可能为负。

二次函数 $D_3 = D_3(k)$ 不必对所有 $k > \max(a, b, c)$ 都为正。为此，考虑一个任意固定的三角形 $A_1A_2A_3$ 以及以 A_i 为中心、半径为l_i的闭球 B_i。根据定理 3， $l_1 \le l_2 \le l_3$ 当且仅当 $a \le b \le c$。不失一般性，我们可以假设这些不等式成立，并且 $c = 1$。如果

$$B_1 \subset \operatorname{intconv}(B_2, B_3),$$

那么，当半径 l_4足够大时，不存在球 B_4。因此，关系式 (7) 无法成立。

在下一个例子中，我们说明 4-球四面体的形状可能非常不规则。

例5. 我们证明，存在一个镜面对称的4-球四面体，其四个面全都是钝角三角形。为满足定理4的条件1)，我们令 $a = b = 12$、 $c = 20$、$d = e = 11$ 和 $f = 3$。现在，根据余弦定理，我们发现四个面都是钝角，因为$12^2 + 12^2 < 20^2$、 $11^2 + 11^2 < 20^2$，且 $3^2 + 11^2 < 12^2$（两次）。四个面所需的所有三角形不等式均成立，并且由 (6) 可得 $D_3 = 448\,000 > 0$。因此，定理5的假设成立。此外，这个4-球四面体有三个钝二面角 $118.23°$、 $118.23°$、 $136.95°$，分别位于棱 d、 e、 f处。

由定理4的性质2)可知，路径四面体都不是4-球四面体，因为图1中对边 AC 和 BO 处的两个二面角均为直角，而由(1)可知，六个二面角的和 Σ_T 小于 3π。无论如何，我们有以下定理。

定理 7. 设 T 为一个4-球四面体。设中球的中心位于T的内部。则 T 可面对面划分为24个路径四面体。

证 明：设 S 为给定4-球四面体 $ABCD$的中球。这样，每条棱都可由相应的切点分成两条直线段 l_i 和 l_j, $i \ne j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$（见注 2）。因此，面 ABC 可分解为六个直角三角形，它们的公共顶点 F 是 ABC内切圆的中心，见图 6（左）。事实上，内切圆是交集 $S \cap ABC$。记 G 为中球S的中心，显然 FG 垂直于 ABC，见定理4的性质5)。

取以中心 G 为顶点的六个直角三角形的凸包，我们定义六个路径四面体。由于相邻面的棱以相同的方式划分，见图 2 和图 3（右），我们也可以将上述构造重复应用于其余三个面 ABD、ACD 和 BCD。这样，我们就将 4-球四面体 $ABCD$ 面到面剖分为 24 个路径子四面体，见图 6（右）■

注 8. 如果上述证明中的 G 位于边界 ∂T 上，那么 4-球四面体 T 可以面对面地剖分为 18 个路径四面体，因为剩余的六个路径四面体（24 个中的）是退化的。显然， S 的中心 G 不可能位于 T 的棱上，因此这种构造中四面体的数量不可能少于 18 个。如果 $G \in T$，那么在细化为路径四面体的过程中，所有可能的钝二面角都会消失，因为路径四面体总是非钝角的。这些特殊四面体在数值分析中发挥着重要作用，因为它们会产生单调刚度矩阵（关于离散最大值原理，见 [4, p. 118]）。

注 9. 在 [4, p. 99] 中，我们给出了一个与定理 7 的证明中类似的算法，该算法可生成所谓的面对面黄色细化，其中所有路径子四面体都包含外接球的中心（参见下文例 6）。这样便不会出现钝角，从而能够满足有限元方法所求解的若干数学物理问题的离散最大值原理，参见例如 [4, p. 115] 和 [29]。

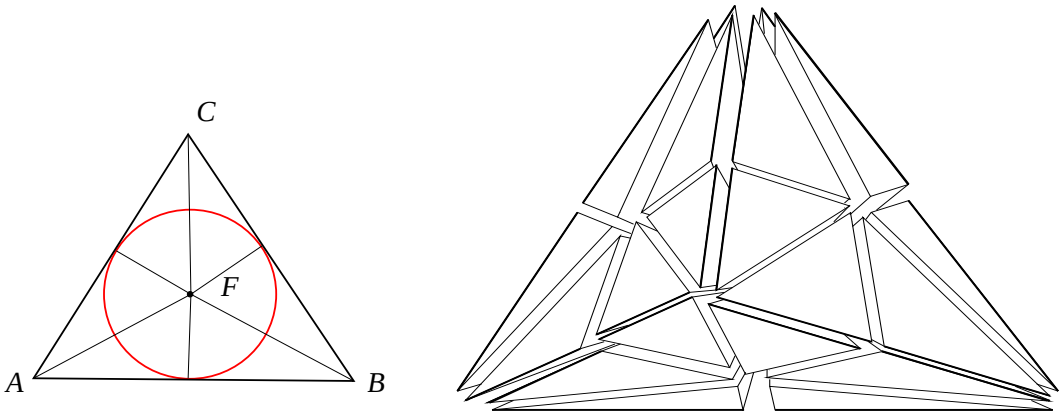


图 6：左：利用内心 F 将面 ABC 划分为 6 个直角三角形。右：将定理 7 中的 4-球四面体面对面地划分为 24 个路径四面体。通过这种剖分，所有钝二面角都消失了。此外，每个路径四面体还可以通过红色细分算法进一步面对面地划分为 8 个更小的路径子四面体，见图1（右）和 [4, p. 90]。

4 4-球四面体二面角和的双侧估计

首先，我们证明，仅与一个顶点相关联的三个二面角唯一确定整个 4-球四面体（在缩放意义下）。考虑从同一点出发且不共面的三条半直线。它们的凸包称为三角锥。下一个定理的证明同样是构造性的。

定理8. 对于任意三角锥，存在唯一一个4-球四面体（差一个缩放），使其三条相邻棱包含在该锥的棱中。

证：设 $A_1 = (0, 0, 0)$ 为给定三角锥的顶点。其三个面分别包含在以下平面中

$$u_j x + v_j y + w_j z = 0, \qquad j = 2, 3, 4, \tag{8}$$

其中 $n_j = (u_j, v_j, w_j)$ 是相应的外向单位法向量。任取这三个方程中的两个，便可确定一个二面角 $\arccos(-n_i \cdot n_j)$，$i \neq j$，它位于锥的三条棱之一上，即三条以 A_1 为起点的半直线之一上。令

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 1$$

设该单位球面与三条不共面的棱相切，其中 $G = (x_0, y_0, z_0)$ 是其中心。该球面与平面 (8) 的交集唯一确定了这些圆，如图2所示。三个切点由从 A_1 出发的棱上的三个圆点标出。

恰好存在一个平面，在另外三个点处与所有三个圆相切（见图2中其余三个圆点），使得这些圆位于包含 A_1 的半空间内。该平面唯一确定了相应半直线上的点 A_2、A_3 和 A_4。由此，我们得到 4-球四面体 $A_1A_2A_3A_4$，因为对边长度之和都等于 $l_1 + l_2 + l_3 + l_4$。显然，上述单位球面就是相应的中球。对于非单位球面，可以采用适当的缩放论证。

■

反向命题显然成立，因为任意给定的 4-球四面体都可以嵌入一个无限三角锥中，使该锥的三条棱包含该四面体的三条相邻棱。

例 6。例 1、2、3 和 5 中的所有 4-球四面体都具有镜面对称性。现在考虑一个非对称的 4-球四面体 T，其所有棱的长度都不相同：

$$a = |BC| = 5, \qquad b = |AC| = 12, \qquad c = |AB| = 13,$$
$$d = |AD| = 11, \qquad e = |BD| = 4, \qquad f = |CD| = 3,$$

其中 $A = (12, 0, 0)$、$B = (0, 5, 0)$、$C = (0, 0, 0)$、$D = (\frac{413}{65}, \frac{945}{65}, z)$ 是 T 和 $z = 8\sqrt{14}/15$ 的顶点。注意，其面 ABC 和 BCD 是勾股直角三角形，且 $\mathrm{vol}_3(T) = 10z$。我们进一步注意到，T 不包含其外心 $(6, 5/2, -15/\sqrt{14})$，因为其最后一个坐标为负数。这意味着我们无法应用 [4, p. 98] 中的定理 8.8，将 T 划分为 24 个路径四面体。注意，T 在与顶点 D 相连的棱上有 3 个钝二面角。由定理 3 可得 $l_1 = 2$、$l_2 = 10$、$l_3 = 3$，因此 $l_4 = 1$。此外，根据注 2，中球的半径为 $\rho = 4/z$。其中心 $G = (2, 2, 1/\sqrt{56})$ 位于 T 内，因此我们可以应用上述定理 7，将 T 面对面地分解为 24 个路径四面体。

在定理 8 的证明中取 $A_1 = C$，我们发现，面 ABC、ACD 和 BCD 的内切圆半径分别为 2、$\sqrt{260}/13$ 和 1。第四个面 ABD 也与这三个圆相切。

4-球四面体的二面角和上界大于路径四面体的上界（见定理 2）。例如，例3中的 4-球四面体的 $\Sigma_T \approx 479.58^\circ \approx 2.66\pi > 2.5\pi$，以及例6中的非对称 4-球四面体的 $\Sigma_T = 453.33^\circ$。实际上，我们有如下双侧界，其中下界约为 $423.17^\circ \approx 2.35\pi$。

定理 9. 设 T 为一个 4-球四面体。则

$$6 \arccos \frac{1}{3} \le \Sigma_T < 3\pi \tag{9}$$

并且区间中的每个值都可以由某个 4-球四面体取得。

证 明：首先证明上界 3π 是紧的。考虑一个单参数族，其中四面体的底面是等边三角形，高 $h > 0$ 作为参数。剩余顶点（顶点）在底面重心 F 处的正交投影如图 6（左）所示。将顶点移至 F 时，底面各棱处的三个二面角趋于零，其余三个二面角在 $h \to 0$ 时趋于 π。在这种情况下，中球的球心位于四面体之外。

容易验证，对于所有二面角均为 $\arccos\frac{1}{3} \approx 70.5^\circ$的正四面体，下界 (9) 可以达到。函数 $h \mapsto \Sigma_T(h)$ 在区间 $(0, h_0]$ 上递减，并在 $[h_0, \infty)$ 上递增，其中 h_0 是正四面体的高。此外，由于在上述单参数族中，Σ_T 随 h 连续变化，因此区间 (9) 中的每个值都可以达到。

最后，我们证明不存在 T小于 $6 \arccos \frac{1}{3}$的 4-球四面体。根据[9], ，二面角与两个面的外法向量之间的角之和为 π。因此，两个面的外向单位法向量之间的角，与单位球面上沿大圆的测地距离唯一对应。根据定理4的性质2），对边所对应的二面角之和相等。因此，对边所对应的测地距离之和也相等。于是，我们考虑一个球面三角形，其边长为 a、b、$c \in (0, 2\pi)$，并设其与 a相对的未知角为 α。那么，单位球面的余弦定理（即球面余弦定理）为，参见例如 [26, 第 85],页

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \tag{10}$$

请注意，符号 a、b、c现在与第3节中的含义不同。

给定三个二面角及其对应的三个测地距离 $a, b, c \in (0, 2\pi)$，根据定理8，存在唯一确定的 4-球四面体 T（除缩放外）

使得 $k-a,\, k-b,\, k-c$ 分别与 a,b,c 为对边。这里 $k>\max(a,b,c)$ 是一个未知常数，对于固定的 a,b,c，该常数也是唯一的。根据 [9],

$$\Sigma_T+\Gamma_T=6\pi, \tag{11}$$

其中 Γ_T 是图7中以四个圆点标记的四个外法向量之间六个测地距离之和。根据定理4的性质2)，显然，对于一个4-球四面体，我们有

$$\Gamma_T=a+b+c+(k-a)+(k-b)+(k-c)=3k. \tag{12}$$

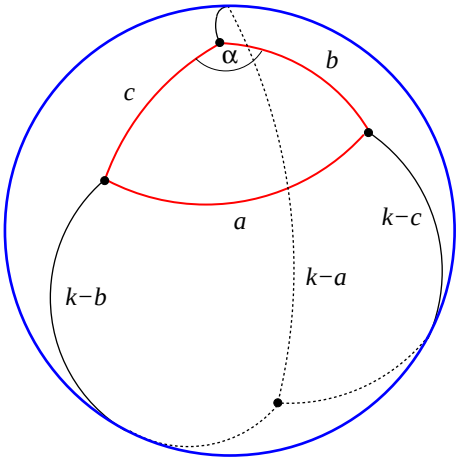


图7：单位球面上，4-球四面体各面外法向量（以圆点标记）之间的测地距离 $a,b,c,k-a,k-b,k-c$ 示意图。

为介绍证明的主要思路，我们先为简便起见假设 $b=c$，即考察一个等腰球面三角形。于是，(10)化为

$$\cos a=\cos^2 b+\sin^2 b\cos\alpha$$

并且我们有

$$\alpha=\arccos\frac{\cos a-\cos^2 b}{\sin^2 b}. \tag{13}$$

现在考虑两个相邻的球面三角形，其边为 $b,\, k-a$ 和 $k-b$。由于对称性，曲边 b和 $k-a$之间的角等于 $\pi-\frac{1}{2}\alpha$，因为 $\alpha+(\pi-\frac{1}{2}\pi)+(\pi-\frac{1}{2}\pi)=2\pi$。然后，类似于(10)，根据边的余弦定理可得

$$\begin{aligned}\cos(k-b)&=\cos b\cos(k-a)+\sin b\sin(k-a)\cos(\pi-\tfrac{1}{2}\alpha)\\&=\cos b\cos(k-a)-\sin b\sin(k-a)\cos\tfrac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

应用（13）并通过设定

$$C=\cos a,\quad S=\sin a,\quad B=\cos b,\quad D=\sin b,\quad A=\cos\Big(\frac{1}{2}\arccos\frac{C-B^2}{D^2}\Big),$$

可得

$$B\cos k+D\sin k=B(C\cos k+S\sin k)-AD(C\sin k-S\cos k).$$

因此，

$$(B-BC-ADS)\cos k=(BS-D-ACD)\sin k$$

因此，我们可以利用已知值 a 和 $b=c$ 显式表示未知值 k，即，

$$k=\arctan\frac{B-BC-ADS}{BS-D-ACD}.$$

分别对 a 和 b求导，可知当 $a=b=\pi-\arccos\frac{1}{3}$ 时，$k=k(a,b)$ 在 $(0,2\pi)\times(0,2\pi)$ 上取得全局最大值。此时，$\alpha=\frac{2}{3}\pi=120°$，

$$k_{\max}=2\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)=2a=3.821266\ldots(\approx 218.942441°) \tag{14}$$

and

$$A=\frac{1}{2},\quad B=C=-\frac{1}{3},\quad D=S=-\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad \cos k=-\frac{7}{9},\quad \sin k=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

根据 (11)，最大化 Γ_T 显然等价于最小化 Σ_T。

类似地，对情形 $b\neq c$ 进行繁琐的计算，可得 $k=k(a,b,c)$ 在立方体 $(0,2\pi)\times(0,2\pi)\times(0,2\pi)$ 上取得相同的最大值 (14)。(9) 中的下界现可由 (11) 和 (12) 得出。∎

注 10. 对于所有面都是全等三角形的等面四面体，其二面角和也有类似的双侧界（见 [14, 第 33] 页）：

$$2\pi<\Sigma_T\leq 6\arccos\frac{1}{3}. \tag{15}$$

因此，这一估计与估计（9）互为补充。估计（9）和（15）的交集仅对应于正四面体。

致谢。作者谨向 Jan Chleboun、Leandro Farina、Ivan Gu- doshnikov、Lawrence Somer 和 Tom´aˇs Vejchodsk´y 致以谢意，感谢他们参与富有成效的讨论。本研究得到捷克科学基金会（项目编号 24-10586S）和捷克科学院（RVO 67985840）的支持。

参考文献

[1] N. C. Admal, E. B. Tadmor，原子应力张量的不唯一性及其与广义贝尔特拉米表示的关系，《力学与物理学固体杂志》93（2016），72–92。[2] L. M. Blumenthal，关于四点性质的注记，《美国数学学会通报》39（1933），423–426。[3] J. Brandts, A. Cihangir, M. Křížek，非钝角单形角和的紧界，《应用数学与计算》267（2015），397–408。[4] J. Brandts, S. Korotov, M. Křížek，《单形剖分及其在有限元方法中的应用》。Springer International Publishing，查姆，2020。[5] J. Brandts, S. Korotov, M. Křížek, J. Šolc，关于非钝角单形剖分，《SIAM评论》51（2009），317–335。[6] N. A. Court，《现代纯立体几何》。Chelsea Publishing Company，纽约，1964。..[7] A. L. Crelle，关于三棱锥的几点注记。《数学论文与注记集》1：105–132，1821。archive.org/details/sammlungmathemat01crel[8] P. A. Fuhrmann, U. Hemke，《线性系统网络的数学》，Springer，查姆，2015。

[9] J. W. Gaddum, ...的和 f 四面体中的二面角和三面角 g四面体中的角度彩在线 , 《美国数学月刊》第59卷第6期（1952年），370–371页。[10] M. Hajja，边切（或气球）单形的球心重合，《结果数学》49（2006年），237–263页。[11] M. Hajja, M. Hayajneh，某些特殊单形族中角隅角的非纯性，《几何学杂志》105（2014年），539–560页。[12] K. E. Hirst，吻合精确，《数学公报》53（1969年），305–308页。[13] D. Jarden (D. Juzuk)，四面体中的二面角和三面角之和（希伯来语），Technika Umada（技术与科学），第4卷（1941年），第5期（总第26期），8–9页。[14] H. Katsuura，四面体的立体角和，《几何与图形学杂志》24（2020年），29–34页。[15] H. Katsuura，4-球四面体的二面角，《几何与图形学杂志》25（2021年），197–204页。[16] S. Korotov, M. Křížek，将任意多面体剖分为非钝角四面体，载于：ECCOMAS 2004会议论文集，第2卷（编者：P. Neittaanm¨aki 等），芬兰于韦斯屈莱大学。[17] S. Korotov, M. Křížek，生成非钝角四面体划分的整体与局部细化技术，《计算数学与应用》50（2005年），1105–1113页。[18] S. Korotov, L. F. Lund, J. E. Vatne，棱锥二面角和的紧界，《应用数学》68（2023年），259–268页。[19] S. Korotov, J. E. Vatne，棱柱和六面体的二面角和，《国际计算几何与应用杂志》33（2023年），85–95页。[20] J. C. Lagarias, C. L. Mallows, A. R. Wilks，超越笛卡尔圆定理，《美国数学月刊》109（2002年），338–361页。[21] L. László，四面体中半径中值的一条不等式及若干等式，《布达佩斯大学科学学报·计算机分册》46（2017年），165–176页。[22] H. Maehara, H. Martini，《圆、球与球面几何》，Birkh¨auser/Springer，查姆，2024年。[23] V. E. Matizen，等面四面体与骨架四面体（俄语），Kvant 7（1983年），34–38页。https://kvant.mccme.ru/[24] K. Menger，欧几里得几何新基础，《美国数学杂志》53（1931年），721–745页。[25] Ya. P. Ponarin，《初等几何》第3卷：三角形与四面体（俄语），莫斯科，MCNMO，2009年。[26] K. Rektorys，《应用数学综述 I》，Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1994年。[27] Z. A. Skopets, Ya. P. Ponarin，《四面体及其元素的几何》（俄语），雅罗斯拉夫尔，1974年。[28] A. Vandeghen，三角形的索迪圆与德隆尚点，《美国数学月刊》71（1964年），176–179页。[29] T. Vejchodský，椭圆问题伽辽金解的离散最大值原理，《Open Math.》10（2012年），25–43页。[30] K. Wirth, A. S. Dreiding，确定四面体的棱长，《初等数学》64（2009年），160–170页。