arXiv:2601.08353v1 [math.ST] 13 Jan 2026

噪声观测下时变协方差矩阵的秩检验

Markus Reiß[1] **和 Lars Winkelmann**[2]

[1] *Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, e-mail:* mreiss@math.hu-berlin.de

[2] *School of Business and Economics, Freie Universität Berlin, e-mail:* lars.winkelmann@fu-berlin.de

摘要：我们考虑一个 d维连续鞅 $X(t)$，其二次变差矩阵为 $\langle X\rangle_t = \int_0^t \Sigma(s)\,ds$，并为其瞬时协方差矩阵 $\Sigma(t)$的秩构造检验 $t \in [0,1]$。过程 X 是在观测噪声下观测到的，这也是高频金融中微观结构噪声模型的常见情形。我们检验原假设 $\mathcal{H}_0$ ： $\mathrm{rank}(\Sigma(t)) \leqslant r$，以对抗局部备择假设$\mathcal{H}_{1,\ n}$: $\lambda_{r+1}(\Sigma(t)) \geqslant v_n$，其中 λ_{r+1} 表示第（$r+1$）个特征值，且 $v_n \downarrow 0$ 为样本量 $n \to \infty$。我们基于经过精细校准的局部化谱协方差矩阵估计的特征值构造检验统计量。临界值既以非渐近方式给出，也通过高斯正交系综的最大特征值渐近给出。功效分析证明，对于分离率 $v_n \sim (\lambda_r^{-1/(\beta+1)} n^{-\beta/(\beta+1)}) \wedge n^{-\beta/(\beta+2)}$，检验具有渐近一致性；该分离率取决于 Σ 的H¨older正则性 β 以及 $\mathcal{H}_0$下可能存在的谱隙 $\lambda_r \geqslant 0$ 。下界证明了该速率的最优性。我们讨论了为何这一速率远快于传统估计率。文中通过模拟以及一个德国不同期限政府债券的真实数据例子展示了该理论。

MSC2020 学科分类：62G10, 62M07, 62P05, 60B20。
关键词和短语：秩检验、非参数检验、分离率、微观结构噪声、高频观测、特征值扰动、矩阵偏差不等式。

1. 引言

估计和检验协方差矩阵的秩是统计学中的一个重要问题。对于独立同分布观测，尖峰协方差模型（Johnstone，2001）提供了一个典型框架：当将尖峰数或因子数解释为因子模型中的因子数时，它就是受到背景噪声或特质噪声干扰的主导信号矩阵的秩。在高维框架下Onatski等人（2014）提出了检验尖峰是否存在的方法，而Cai等人（2015）确立了秩检测的最优速率。时变协方差在时间序列分析中自然出现，但推断其秩往往需要较强的建模假设。然而，在连续时间框架下，当协方差随时间连续演变时，这些假设可以放宽，从而为统计推断提供了一个更灵活的框架。

我们关注的是以高频观测的连续时间过程。

我们考虑的基础模型是一个连续的 d 维鞅

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s)\, dB(s), \quad t \in [0,1], \tag{1.1}$$

其中， $\sigma \in L^2([0,1]; \mathbb{R}^{d\times p})$ 是一个 p 维布朗运动， B 而 $X(0)$ 是某个初始值。 X 在时间 t 的瞬时协方差矩阵（或称瞬时协方差矩阵）定义为

$$\Sigma(t) := \sigma(t)\sigma(t)^\top \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

若对于所有 $\Sigma(t) \leqslant r$ 均成立，则过程 $t \in [0,1]$可表示为一个 X 维布朗运动 r 以及适当的 B (σ) t。参见 $\in \mathbb{R}^{d\times r}$Jacod 等人 (2008)，了解一般半鞅框架。金融计量经济学中，最大秩 r 对应于驱动资产价格动态的潜在风险因子数量 X。Jacod& Podolskij(2013) 、 A¨ït-Sahalia & Xiu (2017 以及其中的参考文献，进一步阐释了其经济含义。

当可直接获得高频观测值（$X(i/n)$）$_{i=0,\ \ldots,\ n}$ 时，可以利用局部经验协方差矩阵的特征值检验 $\Sigma(t)$ 的最大秩。Reiß & Winkelmann (2023针对局部备择假设实现了阶数为 $\mathcal{O}(n^{-1})$ 的最优秩检测速率。这种快速检测率，尤其是在非参数模型下，可由协方差矩阵估计量及其特征值的内在异方差性解释；检验围绕零值进行。然而，检验统计量的分布渐近退化，受偏差项主导。

关于波动率推断的模型通常假设，高频观测会受到独立噪声的干扰（A¨ıt-Sahalia & Jacod， 2014）。一个标准模型通过观测下式给出

$$Y_i = X(i/n) + \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \text{ with } \varepsilon_i \sim N(0, \eta^2) \text{ i.i.d.} \tag{1.2}$$

对于某个噪声水平 $\eta > 0$。与经典非参数统计一样，在等价的连续时间观测模型中进行统计分析会更加直观，因为这类模型不受离散化误差的影响。通过在观测值之间进行线性插值（Y_i），Bibinger 等人（2014）在 Le Cam 意义下建立了回归模型（1.2）与观测下式之间的渐近等价性

$$dY(t) = X(t)dt + \eta n^{-1/2} dW(t), \quad t \in [0,1], \tag{1.3}$$

与布朗运动 W 相互独立的 X。事实上，对于比（1.2）更一般的观测方案，这一结果仍然成立，其中观测可能既非等间隔，也非同步。为此， $\Sigma(t)$ 也可以是秩亏的，且无需对最小特征值设置下界，等价性证明（Bibinger 等人，2014，定理 3.4）对此作了说明。在分析中，我们将采用模型（1.3）。第 7 节将讨论向模型（1.2）的转换。模型（1.3）中，针对满足 $\Phi \in C^1([0,1])$ 且 $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ 的检验函数，其观测量定义为

$$S_\Phi := \int_0^1 \Phi'(t)\, dY(t) = -\int_0^1 \Phi(t)\, dX(t) + \eta n^{-1/2} \int_0^1 \Phi'(t)\, dW(t)$$

$$\sim N\Big(0, \int_0^1 \Sigma(t)\Phi(t)^2 dt + \eta^2 n^{-1}\|\Phi'\|_{L^2}^2 I_d\Big),$$

这里用到了分部积分和伊藤等距。由此可见，背后存在一种尖峰协方差结构，但其中涉及一个非参数矩阵函数$\Sigma(t)$。我们的检验统计量将结合不同频率下局部三角函数 Φ 的 S_Φ，以解析时间变化并利用高频信息。

这一模型中一个如今已成为经典的结果是，积分协方差$\int_0^1 \Sigma(t)dt$ 可以以速率 $\mathcal{O}(n^{-1/4})$ 进行估计；对于某个固定的 $t \in [0,1]$，当 $t \mapsto \Sigma(t)$ 是 β-正则时，瞬时协方差矩阵$\Sigma(t)$ 的估计速率为 $\mathcal{O}(n^{-\beta/(4\beta+2)})$。对于本文的设定，参见 Bibinger & Reiß (2014)；对于更一般的随机波动率设定（其中 $\beta = 1/2$），近期结果可参见 Figueroa-L´opez & Wu (2024)。另见下文注 2.2 和例 4.4。

我们的目标是检验原假设 $\mathcal{H}_0$： $\max^{t\in[0,1]}\mathrm{rank}(\Sigma(t)) \leqslant r$。Fissler & Podolskij (2017) 研究了这一问题，他们通过矩阵扰动构造了一种检验，并证明当 $n \to \infty$ 时，该检验在固定备择假设下具有一致性。对于取整数值的秩，目前尚无明确的局部备择概念来量化秩检验的检验功效。然而，写作 $\mathcal{H}_0$：$\max_{t\in[0,1]} \lambda_{r+1}(\Sigma(t)) = 0$自然会引出如下形式的局部备择：$\mathcal{H}_1(v_n)$：$\max_{t\in[0,1]} \lambda_{r+1}(\Sigma(t)) \geqslant v_n$，并且我们可以确定一个检测率 $v_n \downarrow 0$，使得在 $\mathcal{H}_0$ 下，水平为 α 的检验当 $n \to \infty$ 时，对任意序列 $R_n \to \infty$，在 $\mathcal{H}_1(R_n v_n)$ 上均渐近一致。因此，检测率 v_n 描述了瞬时协方差矩阵的一个（$r+1$）阶特征值的大小；当检验通过拒绝“秩至多为 r”这一原假设时，该特征值可以被检测到。

由于我们面对的是一个非参数检验问题，首先关注在子区间 $I_{t,h} = [t, t+h]$ 上进行局部检验 $\mathcal{H}_0$。作为一种自然的检验统计量，我们考虑协方差矩阵估计量$\widehat{\Sigma}^{t,h}$的（$r+1$）阶特征值 $\lambda_{r+1}(\widehat{\Sigma}^{t,h})$。我们按照 Bibinger & Reiß (2014) 的方法，通过对 $I_{t,h}$ 上的分块谱统计量构造 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$，但采用了经过调整的权重，这些权重取决于频率混合参数 M。我们推导出显式的非渐近临界值，以确保在 $\mathcal{H}_0$ 上水平为 α 的检验具有一致性；这里假设满足 β-Hölder 正则性，并且 $\Sigma(s)$ 的第 r 个特征值在 $I_{t,h}$ 上具有最小谱隙 $\lambda_r \geqslant 0$。与直接观测的情形（Reiß & Winkelmann, 2023）不同，我们必须处理相依且分布不相同的矩阵加项之和；为此，我们扩展了经典的矩阵集中结果（Tropp, 2012），以及通过矩阵随机分析处理这些结果的方法（Bacry 等人，2018）。定理 3.2 中得到的最大特征值偏差不等式或许本身也具有研究价值。临界值主要由两个部分决定：一是源于时变特征空间的偏差项，它随 h 增大（同时取决于 β 和 λ_r）；二是归因于观测噪声的类方差项，它随 n 和 h增大而减小。如果偏差项并非占主导地位，我们便可通过高斯正交系综（GOE）最大特征值的分位数，得到渐近精确的临界值。

备择假设 $\mathcal{H}_1$ on$I_{t,h}$ 下的功效分析表明，最优检测率由临界值的大小决定。在采用最优 $\mathcal{H}_1$

区块长度 h 时，局部检测率变为 $\mathcal{O}((\lambda_r^{-1/(\beta+1)}n^{-\beta/(\beta+1)})\triangle n^{-\beta/(\beta+2)})$。在典型的随机波动率情形 $\beta = 1/2$下，对于正谱隙 $\lambda_r > 0$，该结果变为$\mathcal{O}(n^{-1/3})$；而在没有谱隙时，则为 $\mathcal{O}(n^{-1/5})$。这比针对 $\beta = 1/2$所得的瞬时协方差估计速率 $\mathcal{O}(n^{-1/8})$快得多。通过对所有子区间进行多重检验$I_{kh,h}$，最终得到了针对 $\mathcal{H}_0$ 在 $[0,1]$ 上的全局检验，其检测率仅比局部检验差一个对数因子。极小极大下界表明，局部检测率 v_n 是最优的。

模拟结果证实了主要理论发现，也展现出有趣的有限样本行为。一个基于日内债券价格的实证示例很好地说明了区块长度 h 对秩检测的影响。具体而言，积分协方差矩阵的秩恰好显著大于瞬时协方差矩阵的最大秩。这为理解债券收益协方差矩阵的非平凡特征值结构提供了洞见；Crump & Gospodinov Crump &Gospodinov (2022) 最近强调了这一特征，以确定驱动利率期限结构的因子数量。

下一节 2 介绍基本的协方差估计量，并证明中心极限定理，以展示噪声下协方差估计中的渐近误差结构。第 3 节介绍局部检验，并分析其在原假设下的行为。第 4节进行功效分析并推导最优检测速率，第 5节讨论全局检验的扩展。第6 节建立下界，第 7节讨论实现、模拟示例和真实数据分析。篇幅较长或技术性较强的证明均放在附录中。

2. 基本结果

先介绍一些记号。若对于某个常数$C > 0$ 及所有 n （或渐近情形中的其他参数），$a_n \leqslant Cb_n$，则记作 $a_n \lesssim b_n$。 $a_n \sim b_n$ 表示$a_n \lesssim b_n$ 和 $b_n \lesssim a_n$。如果甚至 $a_n/b_n \to 1$ 也成立，则记作 $a_n \asymp b_n$。我们用$\mathcal{O}_P(b_n)$ 和 $o_P(b_n)$ 表示随机变量 X_n，它们分别依概率有界 $b_n^{-1}X_n$、依概率趋于零 $n \geqslant 1$。

我们将 $v^{\otimes 2} = vv^\top \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 写作向量 $v \in \mathbb{R}^d$。对于对称矩阵A和 $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$，偏序 $A \leqslant B$ 表示 $B - A$ 为半正定。有时我们也对矩阵写作 $A_n \lesssim B_n$，表示对于所有 $A_n \leqslant CB_n$ 和某个实常数 $C > 0$， n 。我们引入集合 $\mathbb{R}^{d\times d}_{spd} := \{S \in \mathbb{R}^{d\times d} \mid S$ 对称且 $S \geqslant 0\}$。对于对称矩阵 $S \in \mathbb{R}^{d\times d}$，我们考虑有序特征值 $\lambda_{max}(S) := \lambda_1(S) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_d(S)$（按其重数计），迹$(S)$ $= \sum_{j=1}^d \lambda_j(S)$，以及其余的迹 trace$_{\geqslant r}(S) = \sum_{j=r}^d \lambda_j(S)$，trace$_{>r}(S)$ $= \sum_{j=r+1}^d \lambda_j(S)$。对于矩阵 S和$T \in \mathbb{R}^{d\times d}$，希尔伯特–施密特内积或弗罗贝尼乌斯内积为 $\langle S, T\rangle_{HS} =$trace$(T^\top S)$，其希尔伯特–施密特范数为 $\|S\|_{HS} = \langle S, S\rangle_{HS}^{1/2}$。单位矩阵记作 $I_d \in \mathbb{R}^{d\times d}$，谱范数为 $\|S\| =$ max$_{v\in\mathbb{R}^d, \|v\|=1}\|Sv\|$。这些概念自然地扩展到希尔伯特空间上的线性算子。

我们采用标准的序列 ℓ^p-范数 $\|(a_n)\|_{\ell^p} = (\sum_n |a_n|^p)^{1/p}$ 和 $\|(a_n)\|_{\ell^\infty} = \sup_n |a_n|$。我们使用 $L^p(I)$表示关于勒贝格测度、定义在区间 I 上的实值函数的标准 L^p-空间。$L^2(I;\mathbb{R}^{d\times d})$是平方可积矩阵函数的希尔伯特空间 S：在区间I上满足 $I \to \mathbb{R}^{d\times d}$，其内积为 $\langle S_1,\ S_2\rangle_{L^2} = \int_I \langle S_1(t)\ S_2(t)\rangle_{HS}\, dt$。最后，对于 $\beta \in (0,1]$和 $L > 0$，我们将考虑关于谱范数的矩阵值 H¨older 球

$$C^\beta(I,L) := \{\Sigma : I \to \mathbb{R}^{d\times d}_{spd} \mid \|\Sigma(t) - \Sigma(s)\| \leqslant L|t-s|^\beta \text{ for all } t,s \in I\}.$$

我们定义基于对 $\Sigma(t)$的观测值 $dY(t)$，来自（1.3），的瞬时协方差矩阵局部估计量。我们引入区间或区块

$$I_{t,h} = [t, t+h] \text{ for } t \in [0,1),\ h \in (0, 1-t].$$

在$I_{t,\ h}$ 上，我们对 $j \geqslant 1$ 构造局部谱统计量

$$S_j := \int_{I_{t,h}} \Phi_j'(s) dY(s), \quad \Phi_j(s) = \sqrt{2/h}\sin\big(j\pi(s-t)/h\big). \tag{2.1}$$

为简洁起见，我们省略 Φ_j 对 t 和 h 的依赖。注意，$\{\Phi_j \mid j \geqslant 1\}$和$\{\Phi_j'/\|\Phi_j'\|_{L^2(I_{t,\ h})} \mid j \geqslant 1\}$在 $L^2(I_{t,\ h})$中构成标准正交系。由于 $\Phi_j(t) = \Phi_j(t+h) = 0$成立，通过分部积分可得

$$S_j = -\int_{I_{t,h}} \Phi_j(s)\Sigma^{1/2}(s)\, dB(s) + \int_{I_{t,h}} \Phi_j'(s)\eta n^{-1/2}\, dW(s). \tag{2.2}$$

利用 B、W的独立性、伊藤等距性以及$2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$，可得 $S_j \sim N(0,\ C_j)$，其中

$$C_j = \int_{I_{t,h}} \Sigma(s)\Phi_j(s)^2 ds + \|\Phi_j'\|^2_{L^2(I_{t,h})}\eta^2 n^{-1} I_d = \Sigma_j + j^2\varepsilon^2_{n,h} I_d, \text{ where} \tag{2.3}$$

$$\Sigma_j := \frac{1}{h}\int_{I_{t,h}} \Sigma(s)\Big(1 - \cos\big(2\pi j(s-t)/h\big)\Big)\, ds, \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{n,h} := \pi h^{-1}\eta n^{-1/2}. \tag{2.5}$$

我们将$\varepsilon_{n,\ h}$ 称为（2.3）中的局部噪声水平或信噪比的倒数。对于回归模型（1.2），我们可以将 nh 视为$I_{t,\ h}$ 中的观测值，其误差大小为 η；而信号 $\Sigma(s)^{1/2}$ 在$I_{t,\ h}$ 上乘以 $h^{1/2}$，即$I_{t,\ h}$上的布朗增量大小，因此$I_{t,\ h}$ 上的信噪比按 $h^{1/2}/(\eta^2/nh)^{1/2} \sim \varepsilon_{n\ h}^{-1}$的比例变化。尽管我们将受益于对不同频率 j进行平均，但仍需要最小块大小 $h \gtrsim n^{-1/2}$，即（2.5）中的$\varepsilon_{n,\ h} \lesssim 1$。

我们利用 Φ_j' 和 $\Phi_{j'}'$的正交性，得到 $j' \neq j$

$$\mathbb{E}[S_j S_{j'}^\top] = \int_{I_{t,h}} \Sigma(s)\Phi_j(s)\Phi_{j'}(s)\, ds. \tag{2.6}$$

这意味着，当 $\Sigma(s)$ 在 I_t 上为常数时， S_j 与 $S_{j'}$ 相互独立. $_h$。局部谱统计量的关键思想是，对于正则函数 $\Sigma(s)$ 和较小的分块大小 h，它们在不同频率 j 之间仅表现出较弱的相关性。

对于 $M \geqslant 1$，我们考虑权重，使其在临界情形下产生最优的分块估计结果 $\Sigma(t) = M^2\varepsilon^2_{n,\ h} I_d$；有关预言权重，请参见 Bibinger 等人 (2014) 以及下文的例 4.4：

$$w_j := c_w M^{-1}(1 + j^2/M^2)^{-2}, \quad j \geqslant 1, \tag{2.7}$$

其中（当 $M \to \infty$ 时的渐近情形）

$$c_w := \Big(\sum_{j\geqslant 1} M^{-1}(1 + j^2/M^2)^{-2}\Big)^{-1} \asymp \Big(\int_0^\infty (1 + x^2)^{-2} dx\Big)^{-1} = \frac{4}{\pi}$$

且对于所有 M， $c_w \leqslant 4/\pi$ （使用积分界）。记号中省略了 w_j、 c_w 对 M 的依赖关系。我们在区间 $I_{t,h}$ 上得到 Σ 的一个估计量，其形式为

$$\widehat{\Sigma}^{t,h} := \widehat{C}^{t,h} - B_w \varepsilon^2_{n,h} I_d, \quad \text{where } \widehat{C}^{t,h} := \sum_{j\geqslant 1} w_j S_j^{\otimes 2},\ B_w := \sum_{j\geqslant 1} w_j j^2. \tag{2.8}$$

偏差校正项取为 B_w，使得就 C_j 而言， Σ_j 来自 (2.3)

$$C^{t,h} := \mathbb{E}[\widehat{C}^{t,h}] = \sum_{j\geqslant 1} w_j C_j, \tag{2.9}$$

$$\Sigma^{t,h} := \mathbb{E}[\widehat{\Sigma}^{t,h}] = \sum_{j\geqslant 1} w_j \Sigma_j = \int_0^1 \Sigma(t + hs) w(s)\, ds, \tag{2.10}$$

$$\text{for } w(s) := 1 - \sum_{j\geqslant 1} w_j \cos\big(2\pi j s\big).$$

注意，权重函数满足 $w(s) \geqslant 0$，且积分为一，因此 $_{\Sigma^{t,h}}$ 是 Σ 在区间 $I_{t,h}$ 上的加权时间平均。权重满足 $w_j \sim M^{-1}$ （当 $j \lesssim M$ 时），并且在 $j \gg M$ 时快速衰减，因此实际上 $\widehat{C}^{t,h}$ 是对 $\mathcal{O}$ 个（M）经验协方差矩阵 $S_j S_j^\top$ 进行凸组合得到的。M 越大，我们对频率进行平均的范围就越广；我们称 M 为混合参数。

我们首先证明当 $n \to \infty$ 时，$\widehat{\Sigma}^{t,h}$ 的渐近性态，并展示样本量、分块长度、混合参数 M以及协方差矩阵本身对收敛速率的影响。

作为准备，我们回顾一下：对称的 $d \times d$ 矩阵上的高斯正交系综 $GOE(d)$ 由 $Z = (Z_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ 的分布给出，其中 $Z_{i,j}$ 相互独立，且满足 $j \geqslant i$, $Z_{j,\ i} = Z_{i,j}$ 和 $Z_{i,i} \sim N(0, 2)$, $Z_{i,j} \sim N(0, 1)$ for $j > i$。我们使用 vec 运算将一个 $d \times d$ 矩阵按列堆叠成 $\mathbb{R}^{d^2}$ 中的向量，并使用矩阵之间的克罗内克积 $\otimes$；参见 Bibinger 等（2014）第2.2节。例如，根据 (2.6)，协方差矩阵估计量的协方差结构可用 $\mathcal{Z}_d = \mathrm{Cov}(\mathrm{vec}(Z^{\otimes 2})) \in \mathbb{R}^{d^2\times d^2}$ 表示为

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{vec}(\widehat{\Sigma}^{t,h})) = \mathrm{Cov}\Big(\sum_{j\geqslant 1} w_j\, \mathrm{vec}(S_j^{\otimes 2})\Big) = \mathcal{C}(\widehat{\Sigma}^{t,h})\mathcal{Z}_d$$

$$\text{with } \mathcal{C}(\widehat{\Sigma}^{t,h}) := \sum_{j\geqslant 1} w_j^2 C_j^{\otimes 2} + \sum_{j\neq j'} w_j w_{j'} \Big(\int_{I_{t,h}} \Sigma(s)\Phi_j(s)\Phi_{j'}(s)\,ds \Big)^{\otimes 2}.$$

2.1 定理。考虑渐近情形 $M \to \infty$，其中 t, h, n 可随 M 任意变化。对每个满足 $\|v\| = 1$ 的 $v \in \mathbb{R}^d$，假设

$$\exists C_v > 0 \,\forall M \geqslant 1 : \ \|\langle \Sigma(\bullet)v, v\rangle\|_{L^\infty(I_{t,h})} \leqslant C_v \Big(M^2 \varepsilon_{n,h}^2 + h^{-1} \int_{I_{t,h}} \langle \Sigma(s)v, v\rangle\, ds \Big). \tag{2.11}$$

因此，以下中心极限定理成立：

$$\mathcal{C}(\widehat{\Sigma}^{t,h})^{-1/2} \operatorname{vec}\left(\widehat{\Sigma}^{t,h} - \Sigma^{t,h}\right) \xrightarrow{d} N(0, \mathcal{Z}_d) = \operatorname{vec}(GOE(d)).$$

此外，我们有 $\mathcal{C}(\widehat{\Sigma}^{t,h}) \lesssim M^{-1}((\|\Sigma_{\ell,\ell'}\|_{L^\infty(I_{t,h})})_{\ell,\ell'=1,\dots,d} + \varepsilon_{n,h}^2 M^2 I_d)^{\otimes 2}$。

证明。见附录A.1。 □

若局部噪声水平占主导，或者 $\langle \Sigma(\bullet)v, v\rangle$ 在 $I_{t,h}$ 上的平均值与最大值相近，则（2.11）中的假设成立；这仅排除了非常尖峰的行为。由于 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$ 属于二阶维纳混沌，中心极限定理的证明大为简化。

该结果意味着，对于固定的 t 和 $h \downarrow 0$，能够一致地估计瞬时协方差矩阵 $\Sigma(t)$，前提是 $\varepsilon_{n,h}^4 M^3 \to 0$ 且 Σ 在 t 处连续。对于固定的 M，估计量 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$ 即使在没有加性噪声这一极端情形 $\varepsilon_{n,h} = 0$ 下，也无法一致估计 $\Sigma^{t,h}$，因为它是协方差估计量的固定凸组合，而这些估计量的误差与协方差本身同量级。

2.2 注。 在关于积分协方差估计的相关研究中（A¨ıt- Sahalia 等人，2010；Barndorff-Nielsen 等人，2011；Christensen 等人，2013；Bibinger 等人，2014），所用方法针对最小和最大特征值均为 1 阶的协方差矩阵进行了调优。在我们的设定中，这意味着选择 $M \sim \varepsilon_n^{-1}$，$h$ 从而得到区块收敛速率 $\varepsilon_n^{1/2}$，$h \sim h^{-1/2} n^{-1/4}$ 对于 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$ 而对积分协方差 $\int_0^1 \Sigma(s)ds$，通过对 $[0,1]$ 上 $\lfloor h^{-1} \rfloor$ 个互不相交的区块取平均，最多只能达到 $n^{-1/4}$ 阶的速率。然而，对于检验协方差矩阵的零特征值，我们将选择小得多的 M（甚至将其固定），以便使 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$ 中的小经验特征值几乎达到 ε_n^2 的收敛速率，$h \sim h^{-2} n^{-1}$。较大经验特征值精度的损失不会影响检验统计量，我们将证明，检测率远快于通常的 $n^{-1/4}$ 估计率所暗示的水平。

3. 零假设下的局部检验 sis

我们的目标是检验协方差函数 $\Sigma(s)$ 在给定区间 $I_{t,h}$ 上是否至多具有 r 的秩，其中 $r \in \{0, \dots, d-1\}$ 始终固定。自然的检验统计量是 $\widehat{C}^{t,h}$（或等价地，$\widehat{\Sigma}^{t,h}$）的第 $(r+1)$ 个特征值。我们的功效分析将揭示一种偏差-方差困境：当观测区间长度 h 较

小时，随机误差较大；而采用较大的 h进行平均，则可能导致较大的偏差（$\Sigma^{t,h}$），尽管 $\lambda_{r+1}(\Sigma(s)) = 0$ 在区块上逐点成立。随后，我们将确定一个渐近最优的 h，使局部备择下的检验功效最大化。通过下界论证，我们证明，这种偏差-方差权衡并非特定谱协方差矩阵估计量所独有，而是时变协方差矩阵秩检验中固有的挑战。

首先，我们精确定义想要检验的复合原假设。

3.1 定义。 设 $\beta \in (0, 1]$、$\lambda_r \geqslant \underline{0}$、$L > 0$。关于秩至多为 r 的 $I_{t,h}$ 原假设为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &:= \mathcal{H}_0(I_{t,h}, \beta, L, \underline{\lambda}_r)\\ &:= \left\{\Sigma \in C^{\beta}(I_{t,h}, L) \mid \operatorname{rank}(\Sigma(s)) \leqslant r,\ \lambda_r(\Sigma(s)) \geqslant \underline{\lambda}_r \ \textit{for all}\ s \in I_{t,h}\right\}.\end{aligned}$$

除了由 β 和 L表示的 H¨older 正则性约束外，我们还对 $\mathcal{H}_0$ 中的协方差矩阵的第 r个特征值施加关于 λ_r的谱隙条件。在 $\lambda_r = 0$ 的情况下没有约束，但正的谱隙将使我们能够提高检验功效。

为了构造我们将其期望 $C^{t,h}$ 的检验（2.9）v_1，……，v_d表示为由特征向量组成的标准正交基，其特征值为 $\lambda_1(C^{t,h}) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_d(C^{t,h}) \geqslant 0$。我们引入空间 $V_{>r}$：=span(v_{r+1}，……，v_d)，以及到 $V_{>r}$的正交投影 $P_{>r}$，还有（$d-r$）×（$d-r$）阶右下子式

$$S_{>r} := P_{>r} S|_{V_{>r}} \text{ for matrices } S \in \{\Sigma(s), \widehat{\Sigma}^{t,h}, \widehat{C}^{t,h}, \Sigma^{t,h}, C^{t,h}\}.$$

我们的分析反复利用柯西交错定律（例如，Johnstone（2001）或 Tao （2012）），估计量 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$, $\widehat{C}^{t,h}$ 满足

$$\lambda_{r+1}(\widehat{\Sigma}^{t,h}) \leqslant \lambda_{max}(\widehat{\Sigma}^{t,h}_{>r}), \quad \lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,h}) \leqslant \lambda_{max}(\widehat{C}^{t,h}_{>r}). \tag{3.1}$$

若 $\Sigma(s)$ 在 $I_{t,h}$ 上为常数，则有 $\Sigma^{t,h}_{>r} = 0$ 从而得到 $\widehat{C}^{t,h}$ 的尖峰协方差模型（Johnstone，2001）。不过，一般而言，$\lambda_{r+1}(\Sigma^{t,h})$ 在 $\mathcal{H}_0$下成立，但其大小有界于

$$\|\Sigma_{>r}(\bullet)\|_{L^\infty(I_{t,h})} \leqslant (2Lh^{\beta}) \wedge ((r+4)\tfrac{L^2 h^{2\beta}}{\underline{\lambda}_r}) =: \mathrm{BIAS}_0^{\Sigma}(h), \tag{3.2}$$

这由 Reiß & Winkelmann （2023）中的命题 S.4(c) 得出（在该界中考虑 $p = \infty$，令 $s \in I_{t,h}$，并令 $\delta \downarrow 0$）。

第二个关键要素是关于矩阵 $\sum_{j\geqslant 1} \Gamma_j^{\otimes 2}$ 最大特征值的上偏差不等式，其中包含 Γ_j 高斯随机向量，涉及不同的协方差矩阵和任意相关性。这对于界定 $\lambda_{max}(\widehat{C}^{t,h}_{>r})$ 至关重要，因为谱统计量（S_j）具有复杂的方差-协方差结构，而在 H¨older 假设下，局部常数近似无法克服这一问题。证明借助连续矩阵鞅的伯恩斯坦不等式以及高斯集中得以完成。

3.2 定理。对于 $G_j \in L^2([0,1];\ \mathbb{R}^{d\times d})$ 考虑 $\Gamma_j = \int_0^1 G_j(u)\ dB(u),\ \ j \geqslant 1$，其中 d 维布朗运动为 B，且 $\sum_{j\geqslant 1}\|G_j\|_{L^2}^2 < \infty$。那么，对于 $\alpha \in (0,\ 1)$，以至少 $1-\alpha$ 的概率有

$$\lambda_{max}\Big(\sum_{j\geqslant 1}\Gamma_j^{\otimes 2}\Big) \leqslant \inf_{\delta>0}\Big((1+\delta)\Big(\lambda_{max}\Big(\sum_{j\geqslant 1}\mathbb{E}[\Gamma_j^{\otimes 2}]\Big) + \log(\sqrt{7e/2}d)\max(v_1,v_2)\Big) + (1+\delta^{-1})2\log(\alpha^{-1})\sigma^2\Big),$$

其中

$$v_1^2 = \Big\|\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j\geqslant 1}\Gamma_j^{\otimes 2}\Big)^2\Big] - \Big(\mathbb{E}\Big[\sum_{j\geqslant 1}\Gamma_j^{\otimes 2}\Big]\Big)^2\Big\|,$$

$$v_2^2 = \sup_{\|F\|_{L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})}\leqslant 1}\Big\|\sum_{j\geqslant 1}\int_\bullet^1 \big(\langle G_j(s),F(s)\rangle_{HS} I_d + G_j(s)F(s)^\top\big)\,ds\,G_j\Big\|^2_{L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})},$$

$$\sigma^2 = \sup_{\|f\|_{L^2([0,1];\mathbb{R}^d)}\leqslant 1}\Big\|\sum_{j\geqslant 1}\Big(\int_0^1 G_j f\Big)^{\otimes 2}\Big\|.$$

证明。 这重新表述了下文的定理 A.6 。 □

3.3 例。 定理 3.2 旨在涵盖各向异性、相依的随机向量，但我们来看看这一结果在简单但之后很有用的相互独立 $\Gamma_j \sim N(0, s_j I_d),\ s_j \geqslant 0$，且 $\sum_j s_j < \infty$ 的情形下如何成立。那么

$$\lambda_{max}\Big(\sum_{j\geqslant 1}\mathbb{E}[\Gamma_j^{\otimes 2}]\Big) = \sum_{j\geqslant 1} s_j, \quad v_1^2 = \sum_{j\geqslant 1}(d+1)s_j^2$$

可直接得出。若我们选取$G_j(t) = s_j^{1/2} f_j(t) I_d$，其中 (f_j) 是 $L^2([0,1])$ 中具有不交支撑的某个标准正交系（例如，对于两两不相交的区间 $[a_j,b_j]$，取 $f_j = (b_j-a_j)^{-1/2}\mathbf{1}_{[a_j,b_j]}$），则 v_2 和 σ 的表达式会大为简化。由贝塞尔不等式可得 $\sum_j(\int_0^1 f_j f)^2 \leqslant \|f\|_{L^2}^2$，因此可得 $\sigma^2 \leqslant \max_{j\geqslant 1} s_j$。在坐标中，$G_j$ 的各向同性意味着最大化者具有如下形式：$F(t) = d^{-1/2} g(t) I_d$，其中 $\|g\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})} = 1$，这是通过柯西-施瓦茨不等式进行界定时得到的

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \sup_{\|F\|_{L^2}\leqslant 1}\sum_{j\geqslant 1} s_j^2 \int_0^1 \Big\|\int_t^1 \big(\langle I_d, F(s)\rangle_{HS} I_d + F(s)^\top\big) f_j(s)\,ds\Big\|_{HS}^2 f_j(t)^2 dt \\ &\leqslant \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\sum_{j\geqslant 1} s_j^2 \int_0^1 (d+1)^2 d\|d^{-1/2} g\|^2_{L^2(\mathrm{supp}(f_j))}\|f_j\|_{L^2}^2 f_j(t)^2 dt \\ &= (d+1)^2 \sup_{j\geqslant 1} s_j^2. \end{aligned}$$

因此，我们以至少 $1-\alpha$ 的概率得到

$$\lambda_{max}\Big(\sum_{j\geqslant 1}\Gamma_j^{\otimes 2}\Big) \leqslant \inf_{\delta>0}\Big((1+\delta)\|(s_j)\|_{\ell^1} + (1+\delta)\log(\sqrt{7e/2}d) \tag{3.3}$$

$$\times \max\left(\sqrt{d+1}\|(s_j)\|_{\ell^2}, (d+1)\|(s_j)\|_{\ell^\infty}\right) + 2(1+\delta^{-1})\log(\alpha^{-1})\|(s_j)\|_{\ell^\infty}\Big).$$

忽略对数因子后，该界的阶为 $\|(s_j)\|_{\ell^1} \vee d\|(s_j)\|_{\ell^\infty}$，很容易看出这是一个紧界。另请比较在独立性假设下由矩阵伯恩斯坦不等式推导出的类似界（Reiß & Winkelmann，2023，定理 A.2）。

现在我们可以定义并分析一个非渐近检验：当 $\mathcal{H}_0$ 若 $\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,\,h})$较大时，拒绝原假设。为此，回顾式（$\overset{\Sigma}{0}(h)$ 中的偏差 BIAS3.2。

3.4 定理。固定 $\alpha \in (0,1)$，$M \geqslant r$ 并定义检验 $\varphi_{\alpha,\,0} = \mathbf{1}(\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,\,h}) > \kappa_{\alpha,\,0})$，其临界值为

$$\kappa_{\alpha,0} := \left(4\,\mathrm{BIAS}_0^{\Sigma}(h) + \varepsilon_{n,h}^2 \tfrac{M^2}{2}\right)\left(1 + \log(4(d-r))\mathcal{W}\left(\tfrac{6d}{M}\right) + \tfrac{21\log(2\alpha^{-1})}{M}\right), \tag{3.4}$$

其中 $\mathcal{W}(x)$: $= x \vee \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$。那么，$\varphi_{\alpha,\,0}$ 是一个针对 $\mathcal{H}_0$ 的非渐近一致水平-α 检验：

$$\sup_{\Sigma \in \mathcal{H}_0(I_{t,h},\beta,L,\underline{\lambda}_r)} \mathbb{P}_\Sigma(\varphi_{\alpha,0} = 1) \leqslant \alpha.$$

证明。见下文推论 A.9 。 □

3.5 注。临界值$\kappa_{\alpha,\,0}$ 反映了协方差估计量随机误差通常具有的乘法结构。较大的 M 可以通过更好地对频率进行平均来降低随机误差。另一方面，由$\varepsilon_{n,\,h}$ 引起的噪声部分会随 M增大。式（3.4）中的数值常数是明确的，但并非最优。

在下一个结果中，我们给出偏差不占主导时的渐近紧临界值。

3.6 定理。考虑渐近情形 $M \to \infty$ 和 偏差$\overset{\Sigma}{0}(h) \lesssim \varepsilon_{n,h}^2$，其中 n、h、λ_r 可以任意变化。那么

$$\varphi_{\alpha,1} := \mathbf{1}(\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,h}) > \kappa_{\alpha,1}) \ \textit{with} \tag{3.5}$$

$$\kappa_{\alpha,1} := \left(B_w + (2\pi)^{-1/2} M^{3/2} q_{1-\alpha;\lambda_{max}(GOE(d-r))}\right)\varepsilon_{n,h}^2 \tag{3.6}$$

并且 $\lambda_{max}(GOE(d-r))$ 的$(1-\alpha)$分位数 $q_{1-\alpha;\lambda_{max}(GOE(d-r))}$ 是一个渐近均匀的水平-α 检验：

$$\limsup_{M\to\infty} \sup_{\Sigma \in \mathcal{H}_0(I_{t,h},\beta,L,\underline{\lambda}_r)} \mathbb{P}_\Sigma(\varphi_{\alpha,1} = 1) \leqslant \alpha.$$

对于 $\varphi_{\alpha,\,2}$: $= \mathbf{1}$ $(\lambda_{r+1}$ $(\widehat{C}^{t,\,h})$ $> \kappa_{\alpha,\,2})$ ，使用基于模拟的临界值 $\kappa_{\alpha,\,2}$: $= q_{1-\alpha,\,\Lambda_M}\varepsilon_{n,\,h}^2$ ，其中 $q_{1-\alpha,\,\Lambda_M}$ 是 $(1-\alpha)$ 分位数

$$\Lambda_M := \lambda_{max}\Big(\sum_{j\geqslant 1} w_j j^2 \zeta_j^{\otimes 2}\Big) \ \textit{with independent}\ \zeta_j \sim N(0, I_{d-r}). \tag{3.7}$$

证明。将 $S_j = \Sigma_j^{1/2} Z_j + \varepsilon_{n,h}^2 j^2 Z_j'$ 表示为 Z_j, $Z_j' \sim N(0, I_d)$，我们可以将 $\widehat{C}^{t,h} = \widehat{C}^{t,h}_1 + \widehat{C}^{t,h}_2 + \widehat{C}^{t,h}_3$ 拆分为

$$\widehat{C}_1^{t,h} = \sum_{j\geqslant 1} w_j (\Sigma_j^{1/2} Z_j)^{\otimes 2}, \qquad \widehat{C}_2^{t,h} = \varepsilon_{n,h}^2 \sum_{j\geqslant 1} w_j j^2 (Z_j')^{\otimes 2}, \tag{3.8}$$
$$\widehat{C}_3^{t,h} = \varepsilon_{n,h} \sum_{j\geqslant 1} w_j j \Big(\Sigma_j^{1/2} Z_j (Z_j')^\top + Z_j' Z_j^\top \Sigma_j^{1/2} \Big).$$

由（3.1）我们推知

$$\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,h}) \leqslant \lambda_{max}(\widehat{C}^{t,h}_{1,>r}) + \lambda_{max}(\widehat{C}^{t,h}_{2,>r}) + \lambda_{max}(\widehat{C}^{t,h}_{3,>r}).$$

根据下方的推论 A.9，代入 $\eta = 0$（无噪声）并取任意满足 $\log(\alpha_M^{-1})$ $M^{-1} \to 0$ 的序列 $\alpha_M \to 0$，第一项 $\widehat{C}^{t,h}_{1,>r}$ 满足

$$\lambda_{max}\big(\widehat{C}^{t,h}_{1,>r}\big) = \mathcal{O}_P(\mathrm{BIAS}_0^\Sigma(h)) = \mathcal{O}_P(\varepsilon_{n,h}^2),$$

关于 $\Sigma \in \mathcal{H}_0$，鉴于偏差 $\Sigma_0(h) \lesssim \varepsilon_{n,h}^2$。将定理 2.1中的中心极限定理应用于纯噪声情形（$\Sigma \equiv 0$）和维数 $d-r$，可得

$$\rho_2^{-1/2}\big(\widehat{C}^{t,h}_{2,>r} - \mathbb{E}[\widehat{C}^{t,h}_{2,>r}]\big) \xrightarrow{d} GOE(d-r) \text{ as } M \to \infty$$

其中 $\rho_2 = \|j^2 w_j\|_{\ell^2}^2 \varepsilon_{n,h}^4 \asymp \frac{1}{2\pi} M^3 \varepsilon_{n,h}^4$ 以及 $\mathbb{E}[\widehat{C}^{t,h}_{2,>r}] = B_w \varepsilon_{n,h}^2 I_{d-r}$，其他所有量 t, h, n, λ_r 均可任意变化。由于特征值映射 $S \mapsto \lambda_{max}(S)$ 在对称矩阵 S 的集合上连续，连续映射定理意味着

$$\sqrt{2\pi} M^{-3/2}\big(\varepsilon_{n,h}^{-2} \lambda_{max}\big(\widehat{C}^{t,h}_{2,>r}\big) - B_w\big) \xrightarrow{d} \lambda_{max}\big(GOE(d-r)\big).$$

对于交叉项，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\|\widehat{C}_3^{kh}\| \leqslant 2\varepsilon_{n,h} \sum_{j\geqslant 1} w_j j \|\Sigma_{jk}^{1/2} Z_j\| \|Z_j'\| \leqslant 2\,\mathrm{trace}(\widehat{C}_1^{kh})^{1/2}\,\mathrm{trace}(\widehat{C}_2^{kh})^{1/2},$$

根据上述结果，其为 $\mathcal{O}_P(\varepsilon_{n,h})\mathcal{O}_P(\varepsilon_{n,h} M) = o_P(M^{3/2}\varepsilon_{n,h}^2)$。

因此，斯卢茨基引理适用，并对所有 $q \in \mathbb{R}$ 得出

$$\limsup_{M\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{2\pi} M^{-3/2}\big(\varepsilon_{n,h}^{-2}\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,h}) - B_w\big) \geqslant q\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\lambda_{max}(GOE(d-r)) \geqslant q\right)$$

在 $\Sigma \in \mathcal{H}_0$ 上一致成立；利用分位数 $q = q_{1-\alpha;\lambda_{max}(GOE(d-r))}$ 即可得到结论。

关于 $\varphi_{\alpha,2}$，我们只需指出，$\widehat{C}^{kh}_{1,>r}$ 的分布，并且我们已看到，随着 $M \to \infty$，$\widehat{C}^{kh}_{1,>r}$ 和 $\widehat{C}^{kh}_{3,>r}$ 的范数都趋于可忽略。 □

注意到 $\varphi_{\alpha,1}$ 也可以等价地通过瞬时协方差估计量 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$ 表示：

$$\varphi_{\alpha,1} := \mathbf{1}\Big(\lambda_{r+1}(\widehat{\Sigma}^{t,h}) > (2\pi)^{-1/2} M^{3/2} q_{1-\alpha;\lambda_{max}(GOE(d-r))} \varepsilon_{n,h}^2\Big).$$

φ_α，2 也同样适用。不等式 $\lambda_{r+1}(\widehat{\Sigma}^{t,h}) \leqslant \lambda_{max}(\widehat{\Sigma}^{t,h}_{>r})$ 导致一个保守的检验，但当 $\lambda_r(\Sigma^{t,h})$ 趋于无穷时，由于特征值排斥变得可以忽略不计，该不等式在渐近意义下变得紧。在复合原假设下，这一观察表明检验φ_α，1用尽了水平 α，即在 $\mathcal{H}_0$ 上的最大第一类错误概率甚至恰好趋于 α。继 Johnstone（2001）的命题 1.2 之后，有实证证据表明，对于较大但有限的 $\lambda_r(\Sigma^{t,h})$，$\lambda_{r+1}(\widehat{\Sigma}^{t,h})$ 的分布与 $\lambda_{max}(\widehat{\Sigma}^{t,h}_{>r})$ 的分布近似相差一个常数。相应地，根据数据调整临界值可能会有一定意义，但迄今仍缺乏理论依据。

检验中的临界值取决于剩余维数 $d-r$。当 d 增大时，我们知道 $(d-r)^{1/6}(\lambda_{max}(GOE(d-r)) - \sqrt{2}(d-r))$ 趋近于 Tracy-Widom 定律（Johnstone &Ma，2012）。因此，临界值$\kappa_{\alpha,1}$将随维数 $\sqrt{d-r}$ 按相同阶增长。对于真正的高维情形，可以施加进一步的假设，从而进行约束特征值估计。参见A¨ıt-Sahalia &Xiu （2017），他们提出了一种基于积分协方差矩阵的稀疏主成分分析方法；不过，由于局部平滑会引入偏差，该方法不易推广到瞬时协方差矩阵。

4. 针对局部备择的检验功效与检测率

我们精确定义局部备择，以确保检验在这些备择下具有渐近检验功效。

4.1 定义。对于$\lambda_{r+1} >_ 0$ 关于$I_{t的h}$ 备择假设，定义如下：

$$\mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_1(I_{t,h}, \underline{\lambda}_{r+1}) := \left\{\Sigma \in L^1([0,1]; \mathbb{R}^{d\times d}_{spd}) \,|\, \lambda_{r+1}(\Sigma(s)) \geqslant \underline{\lambda}_{r+1},\ s \in I_{t,h}\right\}.$$

注意到，$\mathcal{H}_1$ 既不涉及 H¨older 正则性约束，也不涉及关于 Σ 的谱隙条件（假设 $\Sigma \in L^1$ 以定义随机积分）。我们的主要目标是建立检验 $\varphi_{\alpha,i}$ 在秩为 r 的备择假设 $\mathcal{H}_1(I_{t,h}, \lambda_{r+1})$ 下的渐近检验功效；这些备择假设围绕 $\mathcal{H}_0$ 局部化，其含义是将 $\lambda_{r+1}\downarrow 0$ 视为 $\varepsilon_{n,h} \to 0$。$\lambda_{r+1} \downarrow 0$ 越快，检验就越应能够区分零特征值与较小特征值。首先，我们给出一个一般性结果，然后优化区块长度 h。

4.2 定理。固定 $\alpha \in (0、1)$ 以及 $i \in \{0,1,2\}$。检验 $\varphi_{\alpha,i}$ 在局部备择 $\mathcal{H}_1(I_{t,h}、\lambda_{r+1})$ $M\kappa_{\alpha,i}/\lambda_{r+1} \to 0$ 下具有一致性。更准确地说，我们有一致的局部一致性

$$\lim_{R\to\infty} \inf_{\Sigma\in\mathcal{H}_1(I_{t,h}, RM\kappa_{\alpha,i})} \mathbb{P}_\Sigma(\varphi_{\alpha,i} = 1) = 1, \tag{4.1}$$

其中参数 n、h 和 $M \geqslant r+1$ 可随 $R\to\infty$任意变化。

证明。这是推论 A.12 如下。 □

该证明细化了 Reiß &Winkelmann (2023 在 S.3 节中的分析，并处理了谱统计量 S_j 的依赖性。正如下面的注释 A.13所解释的，在某些情况下，我们可以去掉因子 M，也就是说，考虑 $\mathcal{H}_1(I_{t,h}, R\kappa_{\alpha,i})$（见式（4.1））， 但一般情况下无法做到这一点。

我们可以看出，临界值$\kappa_{\alpha,\,i}$越小，检验功效就越高。对于下面的渐近结果，我们关注非渐近检验$\varphi_{\alpha,\,0}$，固定混合参数 M，并选择块大小 h，使$\kappa_{\alpha,\,0}$中的两项达到平衡，从而平衡随机误差与偏差型误差。对于渐近检验$\varphi_{\alpha,\,1}$、 $\varphi_{\alpha,\,2}$，当 $n\to\infty$下的收敛速度 $M=M_n\to\infty$较慢时，结果也只略差一些。

4.3 推论。 令 $M\geqslant r+1$和 $\alpha\in(0、1)$为固定值，并选择 $h\to 0$为$n\to\infty$，使得在 $\mathcal{H}_0(I_{t,h},\beta,L,\lambda_r)$下

$$\mathrm{BIAS}_0^{\Sigma}(h)\sim\varepsilon_{n,h}^2,\quad i.e.\quad h\sim\left(\underline{\lambda}_r^{-1}L^2n\right)^{-1/(2\beta+2)}\vee(Ln)^{-1/(\beta+2)}.$$

则原假设 $\mathcal{H}_0(I_{t,h},\beta,L,\lambda_r)$ 的 ***level***-α 检验$\varphi_{\alpha,0}$对任意序列 $R_n\to\infty$均满足

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{\Sigma\in\mathcal{H}_1(I_{t,h},R_nv_n)}\mathbb{P}_{\Sigma}(\varphi_{\alpha,0}=1)=1$$

其检测率为

$$v_n=\left((\underline{\lambda}_r^{-1}L^2)^{1/(\beta+1)}n^{-\beta/(\beta+1)}\right)\wedge\left(L^{2/(\beta+2)}n^{-\beta/(\beta+2)}\right).\tag{4.2}$$

由于 $n\to\infty$参数 λ_r和 $\underline{L}$可以随 n任意变化。

证明。 根据 h的选取以及 M的固定大小，我们有$\kappa_{\alpha,0}\sim$偏差$_0^{\Sigma}(h)$ $+\varepsilon_{n,\,h}^2\sim v_n$，并由定理 4.2 得到结论。 □

4.4 例。 作为一个检验案例，我们考虑 $\beta=1/2$ 和 $L\sim 1$，它们模拟随机波动率模型（Reiß &Winkelmann，2023，第4节）。取$h\sim(n/\lambda_r)^{-1/3}\vee n^{-2/5}$后，检测率变为 $v_n\sim(\lambda_r^{-2/3}n^{-1/3})\wedge n^{-1/5}$。值得注意的是，对于固定的谱隙$\lambda_r>0$，我们的分块大小为 $h\sim n^{-1/3}$，这恰好是Fissler & Podolskij （2017）在每个区块包含$k_n=nh\sim n^{2/3}$ 个观测值时得到的窗口大小。该文曾猜想，这是由所采用的方法决定的次优选择。对于我们的局部检验，可以看到它平衡了 $\beta=1/2$ 对应的 h 阶偏差与分块噪声水平$\varepsilon_{n,h}^2\sim h^{-2}n$。

噪声下现货波动率的经典估计率为 $n^{-\beta/(4\beta+2)}$ （Bibinger & Reiß，2014）。后者的速率为 $n^{-1/8}$，适用于 $\beta=1/2$，而我们的检测率（$\lambda_r^{-2/3}n^{-1/3}$）$\wedge n^{-1/5}$乍看之下似乎快得出奇。不过请注意，这些估计速率是针对固定协方差Σ给出的。对于 $\|\Sigma\|\to 0$，现货估计率可得为（$\|\Sigma\|^3n^{-1}$）$^{\beta/(4\beta+2)}$。当$\|\Sigma\|\leqslant n^{-\beta/(\beta+2)}$时，我们达到了最优现货波动率估计率 $n^{-\beta/(\beta+2)}$，与不存在谱隙时我们较慢的速率相符。相比之下，存在谱隙时观察到的更快速率，在经典估计理论中没有直接对应。临界规模$\|\Sigma\|\sim\varepsilon_{n,\,h}^2\sim n^{-\beta/(\beta+2)}$证明了我们对权重（$w_j$）的特定选择是合理的。

4.5 注。 我们的分析也适用于基于$\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,\,h})\ldots,\ \lambda_d(\widehat{C}^{t,\,h})$的凸组合的检验，而不仅仅是基于单个特征值 $\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,\,h})$的检验。这

种方法类似于 Onatski等人(2014) 研究的似然比检验，他们考察了不同的备择假设及其高维渐近性质。这类检验针对这样的备择假设优化检验功效：不仅 $\lambda_{r+1}(\Sigma(t))$，而且其他特征值 $\lambda_j(\Sigma(t))$、 $j=r+2$、.....、 d 也显著为正。对于固定的剩余维数 $d-r$，本文发展的渐近理论能够为这些检验带来相同的检测率。

5. 全局检验

现在，我们在整个区间 $t\in[0,1]$ 上统一检验秩$(\Sigma(t))\leqslant r$。为此，我们假设整数 $h^{-1}\in\mathbb{N}$，并将区间划分为 h^{-1} 个区块 $I_{0,\,h}$， $I_{h,\,h}\cdots$， $I_{1-h,\,h}$。通过对所有区块进行适当的 Bonferroni校正下的同时检验，即可在 $[0,1]$ 上进行全局检验 $\mathcal{H}_0$。针对局部备择假设，我们的检验将具有近乎最优的检验功效；在局部备择下， $\lambda_{r+1}(\Sigma(t))\geqslant\lambda_{r+1}$ 至少在一个小区间上成立。根据定理 3.4，结合水平 αh 以及对 h^{-1} 个区间 $I_{kh,\,h}$ 使用并集界，我们得到以下非渐近结果。

5.1 命题。 假设 $h^{-1}\in\mathbb{N}$。给定 $\alpha\in(0,\,1)$，检验

$$\varphi_\alpha^g:=\mathbf{1}\big(\exists k=0,\dots,h^{-1}-1:\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{kh,h})>\kappa_\alpha^g\big)\quad with$$
$$\kappa_\alpha^g=\big(4\,\mathrm{BIAS}_0^\Sigma(h)+\varepsilon_{n,h}^2\tfrac{M^2}{2}\big)\Big(1+\log(4(d-r))\Psi\big(\tfrac{6d}{M}\big)+\tfrac{21\log(2(\alpha h)^{-1})}{M}\Big),$$

在 $\mathcal{H}_0([0,1],\ \beta,\ L,\ \lambda_r)$ 上具有统一的非渐近水平 α。

检验 φ_α^g 在非渐近情形下保持显著性水平 α，但显然是保守的。作为数量不断增加的一系列非平凡区块检验的最大值， φ_α^g 似乎无法得到简单且渐近精确的临界值。还需注意，即使在独立同分布情形下，极值统计量的收敛速度也非常慢。因此，如果偏差并不占主导，我们建议使用基于模拟的临界值，即 $\max(1-\alpha,\Lambda_{M,1},\dots,\Lambda_{M,h^{-1}})$ 的$\Lambda_{M,1},\dots,\Lambda_{M,h^{-1}}$的（ Λ_M）分位数，其中这些量是来自（3.7）的独立副本。细节从略。

根据构造， φ_α^g 仅当每个区块检验 $\varphi_\alpha^{(k)}$在$I_{kh,h}$均接受时才接受 $\mathcal{H}_0$。这表明，在全局备择假设下

$$\mathcal{H}_1^g(h,\underline{\lambda}_{r+1}):=\bigcup_{k=0}^{h^{-1}-1}\mathcal{H}_1(I_{kh,h},\underline{\lambda}_{r+1})$$

的检验功效 φ_α^g 至少与区块检验 $\varphi_\alpha^{(k)}$一样大，参见定理4.2。因此，代入临界值 κ_α^g 的渐近表达式并优化块大小 h，即可得到以下结果，其推导与推论4.3完全相同。

5.2 命题。 考虑固定 $\alpha\in(0、1)$和 $M\geqslant r+1$ 时的全局检验 φ_α^g。选择分块大小 $h\sim(\lambda_r^{-1}n)^{-1/(2\beta+2)}\vee n^{-1/(\beta+2)}$ $n\to\infty$。则检验φ_α^g 对于以下局部备择假设是一致相合的：

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{\Sigma\in\mathcal{H}_1^g(h,R_nv_n^g)}\mathbb{P}_\Sigma(\varphi_\alpha^g=1)=1$$

对于任意满足全局检测率的序列 $R_n \to \infty$

$$v_n^g = \Big(\big((\underline{\lambda}_r^{-1} L^2)^{1/(\beta+1)} n^{-\beta/(\beta+1)} \big) \wedge \big(L^{2/(\beta+2)} n^{-\beta/(\beta+2)} \big) \Big) \log(n).$$

5.3 注。 经典结论表明，由于多重检验，采用上确界范数时的最优检测率会增加一个对数因子（Ingster &Suslina，2012，定理 3.9）。根据经典直觉，我们可能希望选择 $M \sim \log(h^{-1}) \to \infty$ ，以平衡多重性校正，进而使偏差与噪声水平 $\log(h^{-1})^2 \varepsilon_{n\text{相平衡},\, h}^2$。根据下文的注 A.13 ，只有在 $r = d-1$ ，或额外假设备择假设下满足 $\Sigma \in C^\beta(L)$ 时，这才可行；后一种情况下 $\kappa_\alpha^u \gtrsim h^\beta$ （即不存在谱隙）。后一种情况下，这一构造得到略优的检测率 $(n/\log(n)^2)^{-\beta/(\beta+2)}$。

6. 检测率的最优性

我们的分块检验问题的检测率 v_n 在 Ingster 意义下是极小极大最优的（Ingster & Suslina，2012），如下所示的渐近下界表明了这一点。

6.1 定理。固定 $t \in [0,1)$，假设 $r \geqslant 1$ 并考虑渐近情形$n \to \infty$, $h_n \to 0$。当局部备择 $\mathcal{H}_1(I_{t,h_n}, cv_n)$与原假设 $\mathcal{H}_0([0,1], \beta, L, \lambda_r)$之间的距离达到 *(4.2)* 中的检测率 v_n，且常数 $c > 0$足够小时,¯则不存在一致的水平为-α 检验。更确切地说，对于任意$\alpha' \in (0, 1)$，存在常数 $c_{\alpha'} > 0$ 使得

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\varphi_n} \Big(\sup_{\Sigma \in \mathcal{H}_0([0,1],\beta,L,\underline{\lambda}_r)} \mathbb{E}_\Sigma[\varphi_n] + \sup_{\Sigma \in \mathcal{H}_1(I_{t,h_n}, c_{\alpha'} v_n)} \mathbb{E}_\Sigma[1-\varphi_n] \Big) \geqslant \alpha',$$

其中，下确界取遍所有检验 φ_n 基于对 (1.3) 的观测，且区间长度满足 $h_n \leqslant c_{\alpha'}^{1/(2\beta)} \left((\lambda_r^{-1} L^2 n)^{-1/(2\beta+2)} \vee (Lu)^{-1/(\beta+2)} \right)$。

证明。 见附录A.5。 □

本质上，该定理给出了在点 t 附近局部检验瞬时协方差矩阵 $\Sigma(s)$ 秩的下界。这表明，我们的检验在此问题上具有最优渐近检验功效；尤其是，光滑度 β of Σ和谱隙 λ_r 确实对检测非零的（$r+1$）阶特征值起着关键作用。

6.2 注。一个细微之处在于，推论 4.3 在 $\mathcal{H}_0(I_{t,h}, \beta, L, \lambda_r)$ 下为水平为 α 的检验 $\varphi_{\alpha,0}$ 给出了检测率 v_n，但显然，在更强的假设 $\mathcal{H}_0([0,1], \beta, L, \lambda_r)$ 下，$\varphi_{\alpha,0}$ 仍保持其检验水平。定理 6.1 中关于 h_n 的上界表明，对于这样的备择假设：在更大的区块上， $\Sigma(t)$ 的第（$r+1$）个特征值一致地较大，分离率可以得到改善。为利用这种非局部偏离，应使用平均 $\sum_k \lambda_{r+1}(\widehat{C}^{kh,h})h$ 构造检验，其中 h 等于该上界。关于这种均值检验，参见 Reiß & Winkelmann (2023)。然而，在我们的带噪观测模型中对其进行分析

似乎会引入复杂的技术挑战。此外，对于第$r+1$个特征值仅在局部显著的备择假设，均值检验本质上会损失检验功效——正如我们第7节的数据示例所示。

关于全局检验问题，$\mathcal{H}_1(I_{kh_n,\ h_n},\ \lambda_r) \subseteq \mathcal{H}_1^g(h_n, \lambda_r)$直接由定理6.1的假设推出

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\varphi_n} \Big(\sup_{\Sigma\in\mathcal{H}_0([0,1],\beta,L,\underline{\lambda}_r)} \mathbb{E}_\Sigma[\varphi_n] + \sup_{\Sigma\in\mathcal{H}_1^g(h_n,c_{\alpha'}v_n)} \mathbb{E}_\Sigma[1-\varphi_n] \Big) \geqslant \alpha'. \quad (6.1)$$

因此，我们至多损失分离率 v_n^g forφ_α^g 的对数因子。

对于 $\lambda_{r+1}=0$ （没有谱隙），在 $\mathcal{H}_0$ 下我们可以考虑更为典型的一致备择

$$\mathcal{H}_1^{g_{can}}(\beta,L,\underline{\lambda}_{r+1}) := \Big\{ \Sigma\in C^\beta([0,1],L) \,|\, \exists t\in[0,1] : \lambda_{r+1}(\Sigma(t)) \geqslant \underline{\lambda}_{r+1} \Big\}$$

$\Sigma(t)$ 的第 $(r+1)$ 个特征值在 $[0,1]$, 中某个点 t 处大于 λ_{r+1}，并施加与 $\mathcal{H}_0$ 下相同的 H¨older 假设。那么，包含关系

$$\mathcal{H}_1^g(h_n,cv_n)\cap C_\beta([0,1],L) \subseteq \mathcal{H}_1^{g_{can}}(\beta,L,cv_n) \subseteq \mathcal{H}_1^g(h_n,(c/2)v_n) \quad (6.2)$$

根据 H¨older 连续性，对于任意 $c>0$ 和 $h_n=(cv_n/(2L))^{1/\beta}$，该关系均成立。由于对于 $\lambda_r=0$ 有 $v_n = L^{2/(\beta+2)}n^{-\beta/(\beta+2)}$，我们可以考虑 $h_n=(c/2)^{1/\beta}(Ln)^{-1/(\beta+2)} \leqslant c_{\alpha'}^{1/(2\beta)}(Ln)^{-1/(\beta+2)}$，其中 $c>0$ 足够小。因此，对于 $\lambda_r=0$，命题 5.2 给出了在检测率 v_n^g 下区分 $\mathcal{H}_0([0,1])$ 与 $\mathcal{H}_1^{g_{can}}$ 的检验。由 (A.9) 可知，定理 6.1 中的下界甚至适用于更小的备择假设 $\mathcal{H}_1\cap C^\beta([0,1],L)$。因此，这一点与 (6.1) 表明，对于 $\mathcal{H}_0([0,1],\beta,L,0)$ 与 $\mathcal{H}_1^{g_{can}}(\beta,L,v_n^g)$，速率 v_n^g 确实是最优的，至多相差一个对数因子。

6.3 注。对于 $r=0$，该检验问题也定义良好，对应的原假设为 H_0：$\Sigma\equiv 0$。然而，在这种情况下，下界证明不成立，而标准参数方法给出的检测下界阶为 n^{-1}。令人惊讶的是，这一 n^{-1}-检测率几乎可以轻而易举地达到。由凸性可知，$\int_0^1\lambda_1(\Sigma(t))dt \geqslant \lambda_1(\int_0^1\Sigma(t)dt)$，因此只需检验 H_0：$\Sigma\equiv 0$ 与H_1：$\lambda_1(\int_0^1\Sigma(t)dt)\geqslant\lambda_1$。也就是说，我们只需检验积分协方差。只要 $\lambda_1\gtrsim n^{-1}$，我们的检验在 $I_{t,h}=[0,1]$ 下即可做到这一点；将平凡界 $\mathrm{BIAS}_0^\Sigma(h)=0$ 代入分析，并注意到$\varepsilon_{n,h}^2\sim n^{-1}$ 对于 $h\sim 1$成立，即可得到这一结论。对于 $d=1$ 和标准模型，众所周知，参数检测率是自然的（Ingster & Suslina，2012）。相比之下，对于秩 $r\geqslant 1$，半正定矩阵锥 Σ 中满足 $\mathrm{rank}(\Sigma)\geqslant r+1$的矩阵足够丰富，因此会对 $r\geqslant 1$产生我们的非参数检测率。

7. 实现与示例

我们研究定理 $\varphi_{\alpha,1}$、$\varphi_{\alpha,2}$中渐近秩检验的有限样本性能3.6。在维数 $d=10$ 下，我们根据（Y_i）和回归模型（1.1）模拟观测值（1.2）。谱统计量 S_j 来自

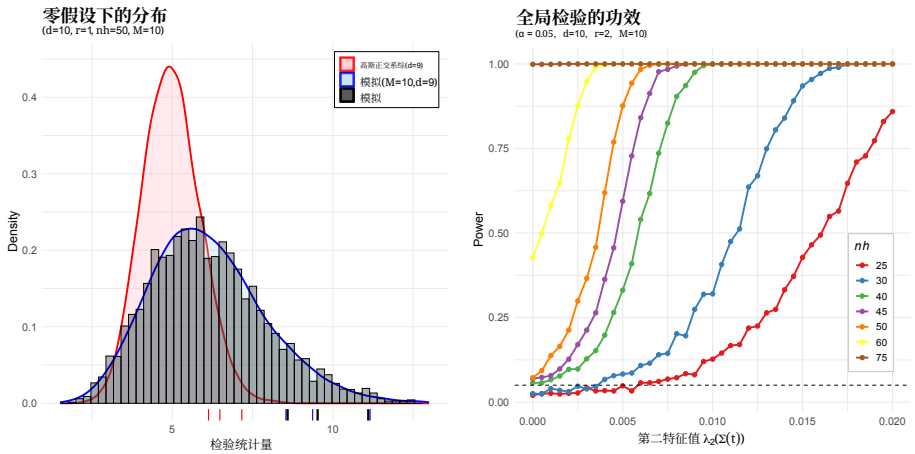

FIG 1. *Left: Simulations under $\mathcal{H}_0$. Distribution of the largest eigenvalue of GOE in dimension 9 (red) simulation-based (SIM) distribution (blue) and the simulated second normalized , , , , eigenvalue (histogram) based on 20 000 Monte Carlo rounds. Coloured bars on the x-axis „ , , mark 90% 95% and 99% quantiles. Right: rejection frequencies of the global simulation-based test under $\mathcal{H}_1$ (1,000 repetitions).*

（2.1）可自然地近似为

$$\tilde{S}_j := \sum_{i:(i-1/2)/n \in I_{t,h}} \Phi_j((i-1/2)/n)(Y_i - Y_{i-1}),$$

利用分部积分和黎曼和进行比较，参见Bibinger&Winkelmann (2015)。随后得到带权重 $\tilde{w}_j \propto M^{-1}(1+j^2/M^2)^{-2}$（权重之和为 1）的经验协方差矩阵 $\tilde{C}^{t,}_{h} = \sum_{j=1}^{J} \tilde{w}_j \tilde{S}_j^{\otimes 2}$。这里，我们选择 $J = 15$ 和 $M = 10$。改变 J 对检验结果影响很小，而 M 较大时，检验往往更保守。

样本量为 $n = 32, 400$，对应于金融市场一个交易日九小时内的一秒观测方案。因此，观测值数量 nh 提供了区块的长度$I_{t,\ h}$，单位为秒。噪声水平为 $\eta = 0.001$，对应于下方的实证发现。我们始终检验秩 $r \leqslant 1$，即 $\mathcal{H}_0$：秩$(\Sigma(t)) \leqslant 1$。

模拟得到的瞬时协方差矩阵 $\Sigma(t)$由一个秩亏 Wishart 过程生成。在 $\mathcal{H}_0$ 下，$\Sigma\ t\ =\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ +$ d $\tilde{B}$ $\mathcal{H}_1$ $\tilde{B}\ t\ \tilde{B}\ t\ ^{\top}$ ( ) diag( ) ( ) ( )，其中包含一个相互独立的 - 维布朗运动 。在 下，我们考虑 $r = 2$ 和 $\tilde{\Sigma}(t) =$ diag(1 0.5 0 $\cdots$ 0) $+ \tilde{B}(t)\ \tilde{B}(t)^{\top}$，其中包含一个相互独立的 ˜$(d\times 2)$ 维布朗矩阵 $B(t)$，其元素为 $2d$ 相互独立的布朗运动˜。针对不同的可检测性情形，对 $\Sigma(t)$ 的特征值进行调整。给定特征分解 $\tilde{\Sigma}(t) = V(t)$ diag$(\lambda_1(t)\ \ \lambda_2(t))V(t)^{\top}$，其中 $V(t) \in \mathbb{R}^{d\times 2}$ 为正交矩阵，我们定义 $\Sigma(t)$: $= V(t)$ diag$(\lambda_1(s)\ \ \lambda_2^*)V(t)^{\top}$，其第二特征值 $\lambda_2^* > 0$预先指定且不随时间变化。

图1 （左）中的灰色直方图展示了在 $\mathcal{H}_0$ 下，基于 50 秒区块的模拟结果，所用标准化分块检验统计量为（λ_2（$\widehat{C}^{t,\ h}$） $-B_w^{(M)}\varepsilon_{n,\ h}^2$） （$2\pi^{-1}M^3\varepsilon_{n,\ h}^4$） $^{-1/2}$ ，如定理3.6所述。作为对比，蓝色和红色曲线分别表示维数为 $d-r\ =\ 9$ 的高斯正交系综（GOE）最大特征值分布，以及采用（$\Lambda_M\ -$ $B_w^{(M)}$） （$2\pi^{-1}M^3$） $^{-1/2}$的基于模拟的检验分布。

图中显示，尽管基于模拟的检验统计量的分位数吻合得相当好，但高斯正交系综的临界值过小，导致拒绝频率偏高。在 $\mathcal{H}_0$ 下，基于模拟的检验在显著性水平 $\alpha\in\{0.1;\ 0。05;\ 0.01\}$ 时的拒绝频率分别为 10.4%、5.5% 和 0.9%。基于模拟的分布（蓝色）偏度更大，这是自然产生的，因为基于模拟的临界值明确利用了跨越 $J=15$ （$M=10$）个频率的谱协方差矩阵之和，而高斯正交系综给出的是 $J,\ M\to\infty$的极限分布。Wishart矩阵特征值的分位数收敛到其特雷西–威多姆对应值的速度较慢：对于 $d\ =\ 10$ ，甚至 $M=1000$ 检验在 10% 和 5% 显著性水平下仍会过度拒绝，另见 Ma(2012）中的表1。

我们的功效分析聚焦于以下全局的基于模拟的检验： $\alpha=0.05$。图1 （右）显示了在秩二备择假设下，七种不同区块长度（介于 25 秒和 75 秒之间）对应的拒绝频率。因此，整个区间上的区块数介于 $nh=25$ 对应的 1296 个与 $nh=75$对应的 432 个之间。图中表明，能够平衡偏差 h （$\sum_0^2 h$）与$\varepsilon^2_{n\text{的区块长度}h}$可能介于 30 秒和 60 秒之间。对于 $nh\ =\ 25$ （红色），由于平滑不足，观测噪声部分较大，因此检验功效较低。对于 $nh=60$ （黄色）以及更大的区块，偏差占主导地位，显著抬高了积分协方差矩阵的第二特征值，即使所有瞬时协方差矩阵的第二特征值均为零也是如此。这表明定理4.2 的偏差假设不成立。区块长度在 40 秒到 50 秒之间时，检验规模控制和灵敏度均较为适宜。

在一个真实数据示例中，我们研究了2023年5月4日（9个交易小时）观测到的德国收益率曲线数据，如图 2 （左）所示。报价根据路透金融工具代码合并：主要来源（PS）、法兰克福证券交易所（F）和综合报价（.）。当天，欧洲中央银行上调了关键政策利率，并表示还将进一步加息。该决定于格林尼治标准时间14:15公布。我们选取了10只期限为3年至30年的零息债券。当天这10只债券的平均报价数量为44,142。收益率变化的一阶自相关最高达−0.6，这表明存在微观结构噪声。估计的噪声标准差平均为0.001。关于实现细节，尤其是异步高频观测的情形，请参阅 Bibinger & Winkelmann (2015)。

我们研究了由不同长度区块划分的 10 种债券的协方差矩阵。图2 （右）展示了使用 2 分钟和 10 分钟区块检验秩 1 时的检验统计量。水平虚线表示全局模拟检验的临界值。图中显示，对较长区块进行平均会增大检验统计量，从而使更多区块上的检验结果频繁显著。

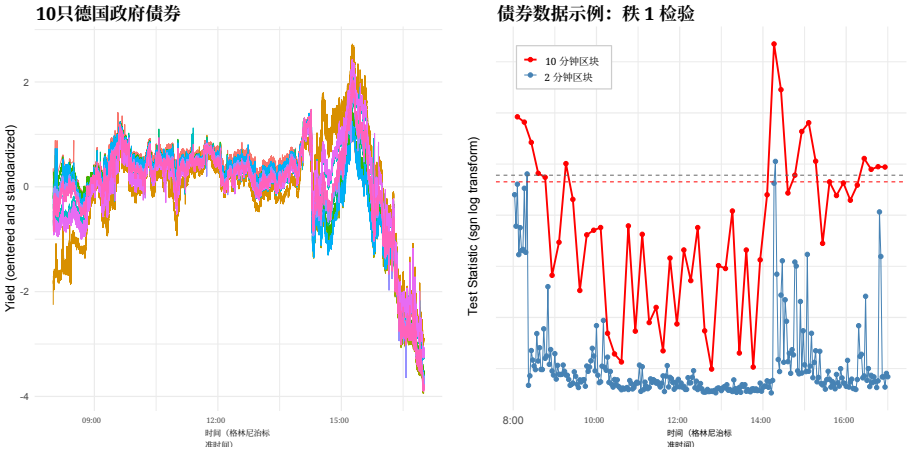

FIG 2. *Data example. Left: Mid-quotes of 10 German zero coupon bonds with maturities between 3 and 30 years on 4 May 2023. Right: corresponding test statistic and critical values (horizontal dashed lines) of the global test.*

TABLE 1
Covariance rank for 10 bonds on 4 May 2023.

h	K	秩 1	秩 2	秩 3	秩 4	秩 5	秩 6
1 分钟	540	0.998	0.002	0	0	0	0
2 分钟	270	0.993	0.007	0	0	0	0
5 分钟	108	0.954	0.046	0	0	0	0
10 分钟	54	0.703	0.278	0.019	0	0	0
1 小时	9	0	0.556	0.222	0.111	0.111	0
9 小时	1	0	0	0	0	0	1.00

显著性水平为 0.05 的全局秩检验，包含长度为 h 的 K 个区块。数字表示最大可接受秩为 r 的区块所占比例。

表1 证实了这一关系。表中展示了特定交易日检测到的秩。可以看出明显的规律：随着区块长度增加，检测到的秩也随之上升——使用 540 个一分钟区块时为 2，而区块长度覆盖整个九小时交易日时则升至 6。这为瞬时协方差矩阵的最大秩可能显著小于积分协方差矩阵的秩提供了有力的实证证据。

附录 A：进一步的结果与证明

A.1. 中心极限定理的证明

定理 2.1 的证明。为了建立（标准化的） $\widehat{\Sigma}^{t,h}$的渐近正态性，只需根据 Cramér-Wold 方法以及 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$的对称性，对所有确定性的对称 $S \in \mathbb{R}^{d\times d}$建立线性形式 $\langle \widehat{\Sigma}^{t,h}, S\rangle_{HS}$ 的渐近正态性。将 $S = O^\top D O$写成含有对角矩阵 D和正交矩阵 O的形式，可得 $\langle O\widehat{\Sigma}^{t,h}O^\top, D\rangle_{HS}$。现在注意到，估计量 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$具有等变性，即对于任意正交矩阵 $O \in \mathbb{R}^{d\times d}$，在 P_Σ下 $O\widehat{\Sigma}^{t,h}O^\top$的分布与在 $P_{O\Sigma O^\top}$下 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$的分布相同。这意味着，在 P_Σ下 $\langle O\widehat{\Sigma}^{t,h}O^\top, D\rangle_{HS}$的渐近正态性可由在 $P_{O\Sigma O^\top}$下 $\langle \widehat{\Sigma}^{t,h}, D\rangle_{HS}$ 的渐近正态性推出。因此，只需证明对于任意正交矩阵 O，在 $P_{O\Sigma O^\top}$ 下 $(\widehat{\Sigma}^{t,h}_{\ell\ell})_{\ell=1,\dots,d}$ 的渐近正态性。

考虑到 是 S_j 中的一个二次型，因此是由 B 和 W生成的二阶维纳混沌中的一个元素，根据Nourdin& Peccati （2012）中的定理 6.2.2，只需证明各个（分别标准化的）分量具有渐近正态性。由此，我们将问题归结为：证明在 P_Σ 下，定理断言中所考虑的任意协方差函数 Σ 对应的（标准化）对角项 $\widehat{\Sigma}^{t,h}_{\ell\ell}$ 具有渐近正态性；其条件具有正交不变性。

令 $X(t) = \Sigma(t)^{1/2}\,dB(t)$，得到 $\widehat{\Sigma}^{t,h}_{\ell\ell} - \mathbb{E}[\widehat{\Sigma}^{t,h}_{\ell\ell}]$ 作为迭代随机积分

$$\widehat{\Sigma}^{t,h}_{\ell\ell} - \Sigma^{t,h}_{\ell\ell} = \int_{I_{t,h}}\int_{I_{t,h}} \Big\langle \sum_{j\geqslant 1} w_j f_j(u) f_j(s)^\top, d\begin{pmatrix} B(u)\\ W(u)\end{pmatrix} d\begin{pmatrix} B(s)\\ W(s)\end{pmatrix}^\top \Big\rangle_{HS}$$

$$\text{with } f_j(u) := \begin{pmatrix} \Phi_j(u)\Sigma^{1/2}(u)e_\ell \\ \Phi_j'(u)\eta n^{-1/2} e_\ell\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d} \text{ and the } \ell\text{-th unit vector } e_\ell.$$

按照Nourdin & Peccati （2012）第 2.7.4 节的术语，相关的 Hilbert-Schmidt算子 $A_f\colon L^2(I_{t,h};\mathbb{R}^{2d}) \to L^2(I_{t,h};\mathbb{R}^{2d})$ 定义为

$$A_f g = \sum_{j\geqslant 1} w_j \langle f_j, g\rangle_{L^2(I_{t,h};\mathbb{R}^{2d})} f_j = \Big(\sum_{j\geqslant 1} w_j f_j^{\otimes 2}\Big) g.$$

下面，我们将证明 $\|A_f\|/\|A_f\|_{HS} \to 0$。这一林德伯格条件的类比形式意味着，标准化 $\mathrm{Var}(\widehat{\Sigma}^{t,h}_{\ell\ell})^{-1/2}(\widehat{\Sigma}^{t,h}_{\ell\ell} - \Sigma^{t,h}_{\ell\ell})$的三阶及更高阶累积量均趋于零（Nourdin & Peccati，2012，命题 2.7.13(2)）。因此，$\widehat{\Sigma}^{t,h}_{\ell\ell}$ 具有渐近正态性；根据上述约化，整个矩阵 $\widehat{\Sigma}^{t,h}$也具有渐近正态性。

接下来证明 $\|A_f\|/\|A_f\|_{HS} \to 0$。我们通过考察$g = (g_1, g_2)^\top$和 $g_i \in L^2(I_{t,h};\mathbb{R}^d)$，并分别利用 (Φ_j) 和 $(\Phi_j'/\|\Phi_j'\|)$ 的正交归一性进行计算，

$$\|A_f\| = \sup_{\|g\|\leqslant 1} \sum_{j\geqslant 1} w_j \langle f_j, g\rangle^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2\Big(\sup_{\|g_1\|\leqslant 1} \sum_{j\geqslant 1} w_j \Big(\int_{I_{t,h}} \Phi_j(u) \langle \Sigma^{1/2}(u) e_\ell, g_1(u)\rangle \, du \Big)^2 \\
&\qquad + \sup_{\|g_2\|\leqslant 1} \sum_{j\geqslant 1} w_j \Big(\eta n^{-1/2} \int_{I_{t,h}} \Phi_j'(u) \langle e_\ell, g_2(u)\rangle \, du \Big)^2 \Big) \\
&\leqslant 2\Big(\|(w_j)\|_{\ell^\infty} \sup_{\|g_1\|\leqslant 1} \int_{I_{t,h}} \langle \Sigma^{1/2}(u) e_\ell, g_1(u)\rangle^2 du + \eta^2 n^{-1} \Big\| \big(w_j \|\Phi_j'\|_{L^2}^2\big) \Big\|_{\ell^\infty} \Big) \\
&= 2\big(w_1 \|\Sigma^{1/2} e_\ell\|_{L^\infty(I_{t,h})}^2 + \varepsilon_{n,h}^2 \|(j^2 w_j)\|_{\ell^\infty} \big).
\end{aligned}
$$

现在我们使用 $\|\Sigma^{1/2}(u)e_\ell\|^2 = \Sigma_{\ell,\ell}(u)$，并代入 $w_1 \leqslant 4M^{-1}/\pi$, $\|(j^2 w_j)\|_{\ell^\infty} \leqslant 4M/\pi$，得到

$$
\|A_f\| \leqslant \tfrac{8}{\pi} \big(M^{-1} \|\Sigma_{\ell,\ell}\|_{L^\infty(I_{t,h})} + M\varepsilon_{n,h}^2 \big). \tag{A.1}
$$

积分算子的希尔伯特–施密特范数 A_f 由矩阵值核的$L^2(I_{t,\,h} \times I_{t,\,h};\ \mathbb{R}^{2d\times 2d})$-范数给出（Birman & Solomjak，2012，定理 11.3.6），且 $\|\Sigma^{1/2}(u)e_\ell\|^2 = \Sigma_{\ell,\,\ell}(u)$成立，因此

$$
\begin{aligned}
\|A_f\|_{HS}^2 &= \int_{I_{t,h}} \int_{I_{t,h}} \Big\| \sum_{j\geqslant 1} w_j f_j(u) f_j(s)^\top \Big\|_{HS(\mathbb{R}^{2d\times 2d})}^2 du ds \\
&= \sum_{j,j'\geqslant 1} w_j w_{j'} \int_{I_{t,h}} \int_{I_{t,h}} \operatorname{trace}\big(f_j(u) f_j(s)^\top f_{j'}(s) f_{j'}(u)^\top \big) \, du ds \\
&= \sum_{j,j'\geqslant 1} w_j w_{j'} \Big(\int_{I_{t,h}} \langle f_j(u), f_{j'}(u)\rangle \, du \Big)^2 \\
&\geqslant \sum_{j\geqslant 1} w_j^2 \Big(\int_{I_{t,h}} \Big(\Phi_j(u)^2 \|\Sigma^{1/2}(u) e_\ell\|^2 + \Phi_j'(u)^2 \eta^2 n^{-1} \Big) \, du \Big)^2 \\
&= \sum_{j\geqslant 1} \Big(w_j \int_0^1 \big(1 - \cos(2\pi j s)\big) \Sigma_{\ell,\ell}(t + hs) \, ds + \varepsilon_{n,h}^2 w_j j^2 \Big)^2,
\end{aligned}
$$

参见（2.10）。现在注意到，根据余弦函数的正交归一性

$$
\sum_{j\geqslant 1} \Big(\int_0^1 \cos(2\pi j s) \Sigma_{\ell,\ell}(t + hs) \, ds \Big)^2 \leqslant \|\Sigma_{\ell,\ell}(t + h\bullet)\|_{L^2([0,1])}^2
$$

成立。由 ℓ^2 中的逆三角不等式，我们因此可以给出下界

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{j\geqslant 1} \Big(w_j \int_0^1 \big(1 - \cos(2\pi j s)\big) \Sigma_{\ell,\ell}(t + hs) \, ds \Big)^2 \Big)^{1/2} \\
&\geqslant \|(w_j)\|_{\ell^2} \|\Sigma_{\ell,\ell}(t + h\bullet)\|_{L^1([0,1])} - \|(w_j)\|_{\ell^\infty} \|\Sigma_{\ell,\ell}(t + h\bullet)\|_{L^2([0,1])}.
\end{aligned}
$$

利用 $\|(w_j)\|_{\ell^2} \sim M^{-1/2}$、$\|(w_j)\|_{\ell^\infty} \sim M^{-1}$、$\|(j^2 w_j)\|_{\ell^2} \sim M^{3/2}$，我们得出结论

$$
\|A_f\|_{HS} \gtrsim \max\Big(M^{3/2}\varepsilon_{n,h}^2, \tag{A.2}
$$

$$M^{-1/2}\|\Sigma_{\ell,\ell}(t+h\bullet)\|_{L^1([0,1])} - CM^{-1}\|\Sigma_{\ell,\ell}(t+h\bullet)\|_{L^2([0,1])}\Big)$$

对于某个常数 $C>0$。

由条件 (2.11)，结合 $v=e_\ell$，我们有 $\|\Sigma_{\ell,\ell}\|_{L^\infty(I_{t,h})} \lesssim M^2\varepsilon_{n,h}^2$ 或者，利用 $\|\Sigma_{\ell,\ell}(t+h\bullet)\|_{L^p([0,1])} = h^{-1/p}\|\Sigma_{\ell,\ell}\|_{L^p(I_{t,h})}$ 对于 $p\in[1,\infty]$ 和 L^p 插值，

$$\|\Sigma_{\ell,\ell}(t+h\bullet)\|_{L^\infty([0,1])} \lesssim \|\Sigma_{\ell,\ell}(t+h\bullet)\|_{L^2([0,1])} \lesssim \|\Sigma_{\ell,\ell}(t+h\bullet)\|_{L^1([0,1])}.$$

因此，由 (A.1) 和 (A.2) 可以推出

$$\frac{\|A_f\|}{\|A_f\|_{HS}} \lesssim \frac{M^{-1}\|\Sigma_{\ell,\ell}\|_{L^\infty(I_{t,h})}+M\varepsilon_{n,h}^2}{M^{-1/2}\|\Sigma_{\ell,\ell}\|_{L^\infty(I_{t,h})}+M^{3/2}\varepsilon_{n,h}^2} \sim M^{-1/2}\to 0,$$

正如所需。

最后，我们来建立 $\mathrm{vec}(\widehat{\Sigma}^{t,h})$ 的协方差矩阵界。为此，同样根据正交变换下的等变性，只需证明对于任意对角矩阵 $H=\sum_{\ell=1}^d h_\ell e_\ell e_\ell^\top$，有

$$\mathrm{Var}(\langle\widehat{\Sigma}^{t,h},H\rangle_{HS}) \lesssim M^{-1}\Big\|\big((\|\Sigma_{\ell,\ell'}\|_{L^\infty(I_{t,h})})_{\ell,\ell'}+\varepsilon_{n,h}^2M^2I_d\big)H\Big\|_{HS}^2. \tag{A.3}$$

利用 $\mathrm{Var}(\langle\widehat{\Sigma}^{t,h},H\rangle_{HS}) \leqslant d\sum_{\ell=1}^d h_\ell^2\mathrm{Var}(\widehat{\Sigma}_{\ell\ell}^{hh})$，并且仅在右侧的对角线上计算 Hilbert–Schmidt 范数，由A.3) 可得

$$\mathrm{Var}(\widehat{\Sigma}_{\ell,\ell}^{t,h}) \lesssim M^{-1}\big(\|\Sigma_{\ell,\ell}\|_{L^\infty(I_{t,h})}+\varepsilon_{n,h}^2M^2\big)^2 \tag{A.4}$$

对于 $\ell=1,\ldots,d$。现在，根据前面的计算，我们可以直接得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\widehat{\Sigma}_{\ell\ell}^{t,h}) &= 2\|A_f\|_{HS}^2\\ &\leqslant 2\,\mathrm{trace}(A_f)\|A_f\|\\ &\lesssim \Big(\Sigma_{\ell\ell}^{t,h}+\varepsilon_{n,h}^2M^2\Big)M^{-1}\Big(\|\Sigma_{\ell\ell}\|_{L^\infty(I_{t,h})}+\varepsilon_{n,h}^2M^2\Big)\\ &\lesssim M^{-1}\Big(\|\Sigma_{\ell\ell}\|_{L^\infty(I_{t,h})}+\varepsilon_{n,h}^2M^2\Big)^2,\end{aligned}$$

因此（A.4）。 □

A.2. 特征值集中

下面我们将在一般的实可分希尔伯特空间 H 上进行讨论。首先，我们将严格界定 H 上高斯算子的期望谱范数。然后，通过涉及高斯算子的二次变差论证，界定二阶维纳混沌中某些矩阵值鞅的谱范数。最后，对二阶维纳混沌中矩阵的平方根谱范数应用高斯集中，得到一个偏差界。

原始的 Lieb 定理（Lieb，1973年）考虑的是指数为迹类的自伴算子。在下一个结果中，我们通过使用函数 e^x-1-x 而不是指数函数，绕开了这一限制性假设。

A.1 引理。设确定性希尔伯特-施密特算子 $F\colon\ H \to H$和随机希尔伯特-施密特算子 $X\colon\ H \to H$ 满足 $\mathbb{E}[X] = 0$，且核范数为 $\|\log(\mathbb{E}[e^X])\|_{nuc} < \infty$。那么

$$\mathbb{E}[\operatorname{trace}(\exp(F+X) - \mathrm{Id} - (F+X))] \leqslant \operatorname{trace}(\exp(F + \log(\mathbb{E}[e^X])) - \mathrm{Id} - F)$$

且右端是有限的。这里Id 表示恒等算子。

证明。在有限维希尔伯特空间上，该断言归结为 Lieb 定理中的詹森不等式的应用（Tropp，2012，推论 3.4.2）。因此，假设 $\dim(H) = \infty$并考虑 H的一组标准正交基 $(e_k)_{k\geqslant 1}$。定义 $\operatorname{trace}_n(T) := \sum_{k=1}^{n} \langle Te_k, e_k\rangle$，即算子 T在 $\operatorname{span}(e_1, \ldots, e_n)$ 上的限制的迹。对于任意自伴算子 T，由于对所有 x都有 $e^x - 1 - x \geqslant 0$，因此有 $e^T - \mathrm{Id} - T \geqslant 0$。这意味着 $\operatorname{trace}_n(e^T - \mathrm{Id} - T) \uparrow \operatorname{trace}(e^T - \mathrm{Id} - T)$，因为 $n \to \infty$。因此，利用单调收敛以及 $\operatorname{span}(e_1, \ldots, e_n)$ 上的有限维结果，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\operatorname{trace}\left(\exp(F+X) - \mathrm{Id} - (F+X)\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\operatorname{trace}_n\left(\exp(F+X) - \mathrm{Id} - (F+X)\right)\right] \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \operatorname{trace}_n\left(\exp(F + \log(\mathbb{E}[e^X])) - \mathrm{Id} - F\right) \\
&= \operatorname{trace}\left(\exp(F + \log(\mathbb{E}[e^X])) - \mathrm{Id} - (F + \log(\mathbb{E}[e^X]))\right) + \lim_{n\to\infty} \operatorname{trace}_n(\log(\mathbb{E}[e^X])) \\
&= \operatorname{trace}\left(\exp(F + \log(\mathbb{E}[e^X])) - \mathrm{Id} - F\right),
\end{aligned}$$

在最后一步中，我们对核 $T = \log(\mathbb{E}[e^X])$使用了迹$\operatorname{trace}_n(T) \to \operatorname{trace}(T)$。最后请注意，最后两行是有限的，因为$\log(\mathbb{E}[e^X])$是迹类算子，并且对于Hilbert-Schmidt算子$T = F + \log(\mathbb{E}[e^X])$，$\operatorname{trace}(e^T - \mathrm{Id} - T) \leqslant \operatorname{trace}(T^2)e^{\|T\|} < \infty$，这是 $e^x - 1 - x \leqslant x^2 e^{|x|}$的推论。

□

以下结果可由(Tropp,2012, 定理 7.3.1)中的内在矩阵伯恩斯坦界以类似方式得到。

A.2 命题。设 $S_k\colon\ H \to H,\ k = 1, \ldots, K$,为确定性自伴希尔伯特-施密特算子。考虑随机算子 $Z = \sum_{k=1}^{K} \gamma_k S_k$，其具有相互独立的 $\gamma_k \sim N(0,\ 1)$。对于定义在 H上的自伴迹类算子 V，其中$V \geqslant \mathbb{E}[Z^2] = \sum_{k=1}^{K} S_k^2$，令 $\rho = \operatorname{trace}(V)/\|V\|$ 表示其内在维数。那么，对所有 $\tau \geqslant 0$

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{max}(Z) \geqslant \tau\right) \leqslant \frac{7\rho}{4} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\|V\|}\right) \ and\ \mathbb{E}\left[\lambda_{max}(Z)^2\right] \leqslant 2\log\left(7e\rho/4\right)\|V\|.$$

证明。 与对称矩阵（Tropp，2012，引理 4.6.2）类似，对于有界自伴线性算子，我们得到 S_k

$$\mathbb{E}[\exp(\vartheta\gamma_k S_k)] = \exp(\vartheta^2 S_k^2/2), \quad \vartheta \in \mathbb{R}\,.$$

应用引理 A.1，取 $F = 0$ 和 $X = \sum_{k=1}^{K} \gamma_k S_k$，并利用 γ_k 相互独立这一事实，可得

$$\mathbb{E}\Big[\operatorname{trace}\Big(\exp\Big(\vartheta \sum_{k=1}^{K} \gamma_k S_k\Big) - \vartheta \sum_{k=1}^{K} \gamma_k S_k - \mathrm{Id}\Big)\Big]$$
$$\leqslant \operatorname{trace}\Big(\exp\Big(\sum_{k=1}^{K} \log\Big(\mathbb{E}\Big[e^{\vartheta \gamma_k S_k}\Big]\Big)\Big) - \mathrm{Id}\Big) = \operatorname{trace}\Big(\exp\Big(\frac{\vartheta^2}{2} \sum_{k=1}^{K} S_k^2\Big) - \mathrm{Id}\Big).$$

由 $x \mapsto e^x - 1$ 和 $V \geqslant \sum_{k=1}^{K} S_k^2 \geqslant 0$ 的凸性，我们得到 $\vartheta \geqslant 0$

$$\operatorname{trace}\Big(\exp\Big(\frac{\vartheta^2}{2} \sum_{k=1}^{K} S_k^2\Big) - \mathrm{Id}\Big) \leqslant \operatorname{trace}\Big(\exp\Big(\frac{\vartheta^2}{2} V\Big) - \mathrm{Id}\Big)$$
$$\leqslant \operatorname{trace}(V)\Big(\frac{\exp(\frac{\vartheta^2}{2}\|V\|) - 1}{\|V\|}\Big) \leqslant \rho \exp\Big(\frac{\vartheta^2}{2}\|V\|\Big),$$

比较（Tropp，2012，公式 (7.7.3)）。对于偏差概率，Tropp （2012）中定理 7.3.1 的方法给出 $\tau > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\lambda_{max}(Z) \geqslant \tau\Big) &\leqslant \inf_{\vartheta > 0} (e^{\vartheta\tau} - \vartheta\tau - 1)^{-1}\, \mathbb{E}[\operatorname{trace}(\exp(\vartheta Z) - \vartheta Z - \mathrm{Id})] \\
&\leqslant \inf_{\vartheta > 0} (e^{\vartheta\tau} - \vartheta\tau - 1)^{-1} \rho \exp\Big(\frac{\vartheta^2}{2}\|V\|\Big) \\
&\leqslant \rho \inf_{\vartheta > 0} \Big(1 + \frac{3}{\vartheta^2\tau^2}\Big) \exp\Big(-\vartheta\tau + \frac{\vartheta^2}{2}\|V\|\Big) \\
&\leqslant \rho\Big(1 + \frac{3v^2}{\tau^4}\Big) \exp\Big(-\frac{\tau^2}{2\|V\|}\Big),
\end{aligned}$$

代入 $\vartheta = \tau/\|V\|$。对于 $\tau \geqslant (2\|V\|)^{1/2}$，前因子小于 $7\rho/4$。这意味着偏差界成立，因为对于 $\tau \leqslant (2\|V\|)^{1/2}$，界 $(7\rho/4)e^{-\tau^2/(2\|V\|)}$ 总是大于平凡界 1。

对于二阶矩，我们对任意 $A > 0$ 有如下界：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\lambda_{max}(Z)^2\Big] &\leqslant A^2 + \int_A^\infty 2\tau\, \mathbb{P}(\lambda_{max}(Z) \geqslant \tau)\, d\tau \\
&\leqslant A^2 + \frac{7\rho}{2} \int_A^\infty \tau \exp\Big(-\frac{\tau^2}{2v}\Big)\, d\tau = A^2 + \frac{7\rho v}{2} \exp\Big(-\frac{A^2}{2v}\Big).
\end{aligned}$$

对于 $A^2 = 2\log(7\rho/4)v$，最后一个表达式等于 $2\log(7e\rho/4)v$。 □

A.3 命题。设 Z 是取值于 $HS(H_1, H_2)$ 中的中心高斯随机元；该空间是实可分希尔伯特空间 H_1 与 H_2 之间的 *Hilbert-Schmidt*算子所构成的希尔伯特空间。令

$$v := \max(\|\mathbb{E}[Z^* Z]\|, \|\mathbb{E}[Z Z^*]\|), \quad \rho := \frac{2\,\mathbb{E}[\operatorname{trace}(Z^* Z)]}{v},$$

我们对所有 $\tau \geqslant 0$ 均可得

$$\mathbb{P}\left(\|Z\| \geqslant \tau\right) \leqslant \frac{7\rho}{4}\exp\Big(-\frac{\tau^2}{2v}\Big) \text{ and } \mathbb{E}\left[\|Z\|^2\right] \leqslant 2\log\big(7e\rho/4\big)v.$$

˜ ˜证明。定义膨胀算子 $Z \in HS(H_1 \times H_2)$，使得 $Z(v_1, v_2) := (Zv_2, Z^*v_1)$；该算子是自伴的，且满足 $\lambda_{max}(\tilde{Z}) = \|Z\|$ 以及 $\mathbb{E}[\tilde{Z}^2](v_1, v_2) = (\mathbb{E}[ZZ^*]v_1, \mathbb{E}[Z^*Z]v_2)$，参见 Tropp（2012，第 2.1.16 节）。

我们采用 Karhunen-Lo`eve 分解 $\tilde{Z} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2}\gamma_k E_k$，其中确定性且正交归一的 $E_k \in HS(H_1 \times H_2)$、相互独立的 $\gamma_k \sim N(0, 1)$，以及 Z 的迹类协方差算子的特征值 λ_k。近似 $\tilde{Z}_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{1/2}\gamma_k E_k$ 恰好具有命题 A.2 中 Z 的形式，其中$S_k = \lambda_k^{1/2}E_k$ 且 $\mathbb{E}[\tilde{Z}_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k^2 \leqslant \mathbb{E}[\tilde{Z}^2] =: V$。由于 $\text{trace}(Z) = 2\text{trace}(Z^*Z)$，$\tilde{}V$ 的内在维数为 ρ。因此，命题 A.2 对任意 $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{max}(\tilde{Z}_n) \geqslant \tau\right) \leqslant \frac{7\rho}{4}\exp\Big(-\frac{\tau^2}{2v}\Big), \quad \mathbb{E}\left[\lambda_{max}(\tilde{Z}_n)^2\right] \leqslant 2\log\big(7e\rho/4\big)v.$$

由 $\tilde{Z}_n \xrightarrow{L^2} \tilde{Z}$ 收敛以及 $S \mapsto \lambda_{max}(S)$在 $HS(H_1 \times H_2)$˜上的连续性可知，这些界对极限 $\lambda_{max}(Z)$仍然成立。最后一步，我们˜插入恒等算子 $\lambda_{max}(Z) = \|Z\|$。 □

接下来，矩阵值连续鞅的期望谱范数有界。

A.4 命题。对于 $G_j \in L^2([0,1];\ \mathbb{R}^{d\times d})$，$j \geqslant 1$，考虑

$$Q = \sum_{j\geqslant 1}\int_0^1 X_j(s)\,dX_j(s)^\top \in \mathbb{R}^{d\times d} \text{ with } X_j(s) = \int_0^s G_j(u)\,dB(u) \in \mathbb{R}^d,$$

若下方的 v_1 有限，则这是一个定义良好的随机矩阵。于是

$$\mathbb{E}\left[\lambda_{max}(Q + Q^\top)\right] \leqslant \log(\sqrt{7e/2}d)\max(v_1, v_2)$$

成立，其中

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \lambda_{max}\big(\mathbb{E}\left[(Q+Q^\top)^2\right]\big) \\ &= \Big\|\sum_{j,j'\geqslant 1}\Big(\langle G_j, G_{j'}\rangle_{L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})}\int_0^1 G_j G_{j'}^\top + \Big(\int_0^1 G_j G_{j'}^\top\Big)^2\Big)\Big\|, \\ v_2^2 &= \sup_{\|F\|_{L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})}\leqslant 1}\Big\|\sum_{j\geqslant 1}\int_\bullet^1 \big(\langle G_j(s), F(s)\rangle_{HS} I_d + G_j(s)F(s)^\top\big)\,ds\,G_j\Big\|^2_{L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})}. \end{aligned}$$

A.5 注。 证明的思路是将 $Q+Q^\top$ 视为矩阵值鞅，用相应的二次变差表达式来界定其最大特征值，并将该表达式解释为高斯线性算子 $T\colon\ \mathbb{R}^d \to L^2([0,1];\ \mathbb{R}^{d\times d})$。然后应用命题 A.3 来界定 $\mathbb{E}[\|T\|^2]$。

证明。 我们考虑对称矩阵值连续鞅

$$M(t) := \sum_{j\geqslant 1}\int_0^t \Big(X_j(s)dX_j(s)^\top + \big(X_j(s)dX_j(s)^\top\big)^\top\Big), \quad t\in[0,1].$$

i阶列 $M(t)$ 为 $M(t)_{\bullet,\,i} = \sum_{j\geqslant 1}\int_0^t (X_j(s)\,dX_{j,\,i}(s) + X_{j,\,i}(s)dX_j(s))$，因此其二次协变差矩阵之和为

$$\begin{aligned}A(t) &:= \sum_{i=1}^d \langle M_{\bullet,i}\rangle_t \\ &= \sum_{j,j'\geqslant 1}\int_0^t \Big(X_j(s)\,\mathrm{trace}\,\big(G_j(s)^\top G_{j'}(s)\big)X_{j'}(s)^\top + X_j(s)G_j(s)^\top X_{j'}(s)^\top G_{j'}(s) \\ &\quad + G_j(s)G_{j'}(s)^\top X_j(s)X_{j'}(s)^\top + G_j(s)X_j(s)^\top X_{j'}(s)G_{j'}(s)^\top\Big)\,ds.\end{aligned}$$

合并各项可得，对于 $w\in\mathbb{R}^d$，$w^\top A(1)w$ 等于

$$\int_0^1 \Big\|\sum_{j\geqslant 1}\Big(w^\top X_j(s)G_j(s) + X_j(s)w^\top G_j(s)\Big)\Big\|_{HS}^2\,ds = \|Tw\|^2_{L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})}$$

其中高斯线性算子 $T\colon \mathbb{R}^d \to L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})$ 定义为

$$(Tw)(s) := \sum_{j\geqslant 1}\Big(\langle w, X_j(s)\rangle G_j(s) + X_j(s)w^\top G_j(s)\Big).$$

迹指数的 Itˆo 公式（Bacry 等人，2018，引理 3）应用于连续 Itˆo 半鞅 $Z(t)\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 给出

$$d(\mathrm{trace}(\exp(Z(t)))) = \mathrm{trace}(\exp(Z(t))dZ(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \mathrm{trace}(\exp(Z(t))d\langle Z_{\bullet,i}\rangle_t).$$

因此，若考虑 $Z(t) = \alpha M(t) - \frac{\alpha^2}{2}A(t)$，其中 $\alpha\in\mathbb{R}$，则可得 $\mathrm{trace}(\exp(Z(t)))$ 构成一个上鞅，且

$$\mathbb{E}\Big[\mathrm{trace}\,\big(\exp(Z(1))\big)\Big] \leqslant \mathbb{E}\Big[\mathrm{trace}\,\big(\exp(Z(0))\big)\Big] = d.$$

由詹森不等式可得 $\mathbb{E}[\lambda_{max}(Z(1))] \leqslant \log(d)$，因此$\mathbb{E}[\lambda_{max}(\alpha M(1) - \frac{\alpha^2}{2}A(1))] \leqslant \log(d)$。利用 λ_{max} 的凸性，可得

$$\mathbb{E}[\lambda_{max}(M(1))] \leqslant \inf_{\alpha>0}\Big(\tfrac{\alpha}{2}\,\mathbb{E}[\lambda_{max}(A(1))] + \tfrac{1}{\alpha}\log d\Big) = \Big(\tfrac{\log(d)}{2}\,\mathbb{E}[\lambda_{max}(A(1))]\Big)^{1/2}. \tag{A.5}$$

通过 T 对 $A(1)$的表示，我们得到

$$\mathbb{E}[\lambda_{max}(M(1))] \leqslant \Big(\tfrac{\log(d)}{2}\,\mathbb{E}[\|T\|^2_{\mathbb{R}^d\to L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})}]\Big)^{1/2}.$$

由命题 A.3 我们推 deduce

$$\mathbb{E}\left[\|T\|^2_{\mathbb{R}^d\to L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})}\right] \leqslant 2\log\left(7e\rho/4\right)v \tag{A.6}$$

其中 $\rho = 2d$ 由于迹$(\mathbb{E}[T^*T]) \leqslant dv$，令

$$v = \max\left(\|\mathbb{E}[A(1)]\|, \sup_{\|F\|_{L^2}=1} \mathbb{E}\left[\langle T^*F, T^*F\rangle_{\mathbb{R}^d}\right]\right).$$

Itô 等距性给出

$$\mathbb{E}\left[A(1)\right] = \sum_{j,j'\geqslant 1}\Big(\operatorname{trace}\Big(\int_0^1 G_j(s)G_{j'}(s)^\top ds\Big)\int_0^1 G_j(s)G_{j'}(s)^\top ds + \Big(\int_0^1 G_j(s)G_{j'}(s)^\top ds\Big)^2\Big).$$

由此得到 $\|\mathbb{E}[A(1)]\| = v_1^2$，其中，将其表示为期望可直接由 $A(1)$ 的二次变差性质推出。此外，当 $v_1 < \infty$ 时，$M(1) = Q + Q^\top$ 有定义。我们将伴随算子 T^* 作用于$F \in L^2([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})$，得到

$$\begin{aligned} T^*F &= \sum_{j\geqslant 1}\int_0^1 \Big(\big(\langle G_j(s), F(s)\rangle_{HS} I_d + G_j(s)F(s)^\top\big)X_j(s)\Big)\,ds \\ &= \sum_{j\geqslant 1}\int_0^1\int_u^1 \Big(\big(\langle G_j(s), F(s)\rangle_{HS} I_d + G_j(s)F(s)^\top\big)\,ds\,dX_j(u). \end{aligned}$$

由 Itô 等距性可得

$$\mathbb{E}\left[\|T^*F\|^2_{\mathbb{R}^d}\right] = \int_0^1 \Big\|\sum_{j\geqslant 1}\int_u^1 \big(\langle G_j(s), F(s)\rangle_{HS} I_d + G_j(s)F(s)^\top\big)\,ds\,G_j(u)\Big\|^2_{HS} du.$$

我们得出 $v = \max(v_1^2, v_2^2)$，并将（A.6）代入（A.5），即可得到所需结果。□

A.6 定理。 采用命题 *A.4* 中的记号，我们有至少以 $1-\alpha$

$$\lambda_{max}\Big(\sum_{j\geqslant 1} X_j(1)^{\otimes 2}\Big) \leqslant \inf_{\delta>0}\Big((1+\delta)\Big(\lambda_{max}\Big(\sum_{j\geqslant 1}\mathbb{E}\left[X_j(1)^{\otimes 2}\right]\Big) + \log(\sqrt{7e/2}d)\max(v_1, v_2)\Big) + (1+\delta^{-1})2\log(\alpha^{-1})\sigma^2\Big)$$

with

$$\sigma^2 = \sup_{\|f\|_{L^2([0,1];\mathbb{R}^d)}\leqslant 1}\Big\|\sum_{j\geqslant 1}\Big(\int_0^1 G_j f\Big)^{\otimes 2}\Big\|.$$

证明。令 $Z := \sum_{j\geqslant 1} X_j(1)^{\otimes 2}$，并由 Itˆo 公式注意到

$$Z - \mathbb{E}[Z] = \sum_{j\geqslant 1} \int_0^1 \Big(X_j(s) dX_j(s)^\top + \big(X_j(s) dX_j(s)^\top\big)^\top \Big).$$

因此，根据命题 A.4 我们得到

$$\mathbb{E}[\lambda_{max}(Z)] \leqslant \lambda_{max}(\mathbb{E}[Z]) + \log(\sqrt{7e/2}d)\max(v_1, v_2).$$

注意到 $Z \geqslant 0$ 因此 $\lambda_{max}(Z) \geqslant 0$ 并且我们使用 Lipschitz 映射下的高斯集中（Ledoux 和 Talagrand，1991年，式（1.6））：

$$\mathbb{P}\Big(\lambda_{max}(Z)^{1/2} \geqslant \mathbb{E}[\lambda_{max}(Z)^{1/2}] + \sqrt{2\log(\alpha^{-1})}\sigma\Big) \leqslant \alpha$$

Lipschitz 常数为

$$\sigma = \sup_{\|f\|_{L^2([0,1];\mathbb{R}^d)}\leqslant 1} \lambda_{max}\Big(\sum_{j\geqslant 1}\Big(\int_0^1 G_j f\Big)^{\otimes 2}\Big)^{1/2}.$$

注意 $\mathbb{E}[\lambda_{max}(Z)^{1/2}] \leqslant \mathbb{E}[\lambda_{max}(Z)]^{1/2}$，以至少 $1-\alpha$ 的概率得到

$$\lambda_{max}(Z)^{1/2} \leqslant \Big(\lambda_{max}(\mathbb{E}[Z]) + \log(\sqrt{7e/2}d)\max(v_1, v_2)\Big)^{1/2} + \sqrt{2\log(\alpha^{-1})}\sigma.$$

接下来，只需将两边平方，利用 $(A+B)^2 \leqslant (1+\delta)A^2 + (1+\delta^{-1})B^2$。 □

A.3. H_0 下的经验特征值集中

现在应用上述结果来界定第 I 类错误。回顾 $\mathcal{W}(x) = x \vee \sqrt{x}$ 对于 $x \geqslant 0$。

A.7 命题。考虑

$$\tilde{V}^{t,h}_{>r} = \sum_{j\geqslant 1} w_j \Big(\int_{I_{t,h}} \Phi_j'(s) \tfrac{\eta}{n^{1/2}}\, dW_{>r}(s)\Big)^{\otimes 2}.$$

那么对于 $\alpha \in (0,\ 1)$，以至少 $1-\alpha$ 的概率有

$$\lambda_{max}(\tilde{V}^{t,h}_{>r}) \leqslant \varepsilon^2_{n,h} \tfrac{M^2}{4}\Big(1 + \log(4(d-r))\mathcal{W}\big(6(d-r+1)M^{-1}\big) + 21M^{-1}\log(\alpha^{-1})\Big).$$

证明。只需注意到 (Φ_j') 是 L^2-正交的，且 $\frac{\eta^2}{n}\|\Phi_j'\|^2_{L^2} = \varepsilon^2_{n,h} j^2$ 成立，因此 $\tilde{V}^t_{>r}$ 的分布与 (3.3) 中的 $\sum_{j\geqslant 1}\Gamma_j^{\otimes 2}$ 相同，其中 $s_j = \varepsilon^2_{n,h} w_j j^2$。利用 (3.3) 中的 $\|(j^2 w_j)\|_{\ell^1} \leqslant M^2/8$, $\|(j^2 w_j)\|_{\ell^2} \leqslant M^{3/2}/\sqrt{2\pi}$, $\|(j^2 w_j)\|_{\ell^\infty} \leqslant 4M/\pi$ 和 $\delta = 1$，化简数值常数后即可得到结论。 □

A.8 命题。在 $\mathcal{H}_0$ 考虑

$$\tilde{\Sigma}^{t,h}_{>r} = \sum_{j\geqslant 1} w_j \Big(\int_{I_{t,h}} \Phi_j(s)\Sigma^{1/2}_{>r}(s)\, dB_{>r}(s)\Big)^{\otimes 2}.$$

那么对于 $\alpha \in (0,1)$， $M \geqslant r$ 以至少 $1-\alpha$ 的概率成立

$$\lambda_{max}(\tilde{\Sigma}^{t,h}_{>r}) \leqslant 2\,\mathrm{BIAS}^{\Sigma}_0(h)\Big(1 + 2r^{1/2}\log(4(d-r))M^{-1/2} + 3\log(\alpha^{-1})M^{-1}\Big).$$

证明。 为简化记号，假设 $t=0$，即 $I_{t,\ h} = [0,h]$。我们应用定理 A.6，取

$$G_j(s) = w_j^{1/2}\Sigma(s)^{1/2}_{>r}\Phi_j(s) \in \mathbb{R}^{(d-r)\times(d-r)},\ \Phi_j(s) = \sqrt{2/h}\sin(\pi jt/h)\mathbf{1}_{[0,h]}(s).$$

对于 v_1^2，在定理 A.6 中，我们注意到 $\iint(\sum_{j\geqslant 1} w_j\Phi_j(s)\Phi_j(u))^2 dsdu = \sum_{j\geqslant 1} w_j^2$，因为 (Φ_j) 构成一个 L^2-标准正交系，并且有界

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \Big\| \sum_{j,j'\geqslant 1} w_j w_{j'} \Big(\int \big(\mathrm{trace}_{>r}(\Sigma)\Phi_j\Phi_{j'}\big) \int \Sigma_{>r}\Phi_j\Phi_{j'} + \Big(\int \Sigma_{>r}\Phi_j\Phi_{j'}\Big)^2\Big)\Big\| \\ &= \Big\| \iint \Big(\sum_{j\geqslant 1} w_j\Phi_j(s)\Phi_j(u)\Big)^2 \Big(\mathrm{trace}_{>r}(\Sigma(s))\Sigma_{>r}(u) + \Sigma_{>r}(s)\Sigma_{>r}(u)\Big)\, dsdu\Big\| \\ &\leqslant (r+1)\|\Sigma_{>r}\|^2_{L^\infty([0,h])}\|(w_j)\|^2_{\ell^2}, \end{aligned}$$

这里用到了 $\Sigma(s)$，因此 $\Sigma_{>r}(s)$ 的秩至多为 r，在 $\mathcal{H}_0$ 下成立。

此外，我们扩展 (2.7)，并对所有$j \in \mathbb{Z}$定义 $w_j = c_w M^{-1}(1+j^2/M^2)^{-2}$。那么，序列 $(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ 是正定的，因为 $f(x) = (1+x^2)^{-2}$ 是正定函数，它是对称双边 Γ分布的特征函数；参见 K¨uchler 和 Tappe (2008)。因此，根据 Herglotz 定理（Katznelson, 2004），$\frac{w_0}{2} + \sum_{j\geqslant 1} w_j\cos(x) \geqslant 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立。利用标准正交系 $\Psi_j(s) = \sqrt{2/h}\cos(\pi js/h)\mathbf{1}_{[0,h]}(s)$，对于 $j \geqslant 1, \Psi_0(s) = \sqrt{1/h}\mathbf{1}_{[0,h]}(s)$，我们得到 $s,u \in [0,h]$

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{j\geqslant 1} w_j\Phi_j(s)\Phi_j(u)\Big| &= \Big|\frac{2}{h}\sum_{j\geqslant 1} w_j \tfrac{1}{2}\big(\cos(\pi j(s-u)) - \cos(\pi j(s+u))\big)\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\Big(w_0 + \sum_{j\geqslant 1} w_j\big(\cos(\pi j(s-u)) + \cos(\pi j(s+u))\big)\Big) \\ &= \sum_{j\geqslant 0} w_j\Psi_j(s)\Psi_j(u). \end{aligned}$$

根据定义以及 (Ψ_j) 的正交归一性，我们有

$$v_2^2 = \sup_{\|F\|\leqslant 1} \int_0^1 \Big\| \Big(\int_u^1 \sum_{j\geqslant 1} w_j\Phi_j(s)\Phi_j(u)\big(\langle\Sigma^{1/2}_{>r}(s), F(s)\rangle_{HS} I_{d-r} + \Sigma^{1/2}_{>r}(s)F(s)^\top\big)\, ds\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{>r}^{1/2}(u)\Big\|_{HS}^2 du \\
&\leqslant \sup_{\|F\|\leqslant 1}\int_0^h \Big(\int_0^h \Big(\sum_{j\geqslant 0} w_j \Psi_j(s)\Psi_j(u)\Big)\big(\|\Sigma_{>r}^{1/2}(s)\|_{HS}+\|\Sigma_{>r}^{1/2}(s)\|\big)\|F(s)\|_{HS}\,ds\Big)^2 \\
&\quad\times \|\Sigma_{>r}^{1/2}(u)\|_{HS}^2\,du \\
&\leqslant w_0^2\Big(\|\|\Sigma_{>r}^{1/2}(\bullet)\|_{HS}\|_{L^\infty([0,h])}+\|\Sigma_{>r}\|_{L^\infty([0,h])}^{1/2}\Big)^2\|\|\Sigma_{>r}^{1/2}(\bullet)\|_{HS}^2\|_{L^\infty([0,h])} \\
&\leqslant w_0^2(r^{1/2}+1)^2 r\|\Sigma_{>r}\|_{L^\infty([0,h])}^2
\end{aligned}
$$

因为在 $\mathcal{H}_0$ 下，$\mathrm{rank}(\Sigma_{>r}(s)) \leqslant r$。因此我们得到

$$
\max(v_1,v_2)\leqslant \Big(\|(w_j)\|_{\ell^2}\vee (r^{1/2}+1)w_0\Big)\sqrt{r+1}\|\Sigma_{>r}\|_{L^\infty([0,h])}.
$$

对于 σ^2，(Φ_j) 的正交归一性结合 $v\in\mathbb{R}^{d-r}$ 得到

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sup_{\|f\|=1}\Big\|\sum_{j\geqslant 1} w_j\Big(\int_0^1 \Sigma(t)_{>r}^{1/2}\Phi_j(t)f(t)\,dt\Big)^{\otimes 2}\Big\| \\
&= \sup_{\|f\|=\|v\|=1}\sum_{j\geqslant 1} w_j\Big(\int_0^h \langle\Sigma(t)_{>r}^{1/2}f(t),v\rangle\Phi_j(t)\,dt\Big)^2 \\
&\leqslant \sup_{j\geqslant 1} w_j \sup_{\|f\|=\|v\|=1}\|\langle\Sigma_{>r}^{1/2}f,v\rangle\|_{L^2([0,h])}^2 \\
&\leqslant w_1\|\Sigma_{>r}\|_{L^\infty([0,h])}.
\end{aligned}
$$

定理 A.6 结合 $\delta=1$ 和 $\lambda_{max}(\Sigma^{t,h}_{>r})\leqslant \|\Sigma_{>r}\|_{L^\infty([0,h])}$，由此可得：以至少 $1-\alpha$ 的概率

$$
\begin{aligned}
\lambda_{max}(\tilde{\Sigma}^{t,h}_{>r}) \leqslant \Big(&1+\log(\sqrt{7e/2}(d-r))\big(\|(w_j)\|_{\ell^2}\vee(r^{1/2}+1)w_0\big)\sqrt{r+1} \\
&+2w_1\log(\alpha^{-1})\Big)2\|\Sigma_{>r}\|_{L^\infty([0,h])}.
\end{aligned}
$$

在 $\mathcal{H}_0$ 下，我们现在代入 $\|\Sigma_{>r}\|_{L^\infty(I_{t,h})}\leqslant$ 偏差$_0^\Sigma(h)$，依据（3.2），以及权重界 $\|(w_j)\|_{\ell^2}\leqslant M^{-1/2}$，$w_0\vee w_1\leqslant(4/\pi)M^{-1}$，并利用 $r\leqslant M$，化简数值常数后即可得到结果。 □

A.9 推论。 在 $\mathcal{H}_0$ 条件下，以至少 $1-\alpha$ 的概率有

$$
\begin{aligned}
\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,h}) \leqslant \lambda_{max}(\widehat{C}^{t,h}_{>r}) \leqslant \big(4\,\mathrm{BIAS}_0^\Sigma(h)+\varepsilon_{n,h}^2\tfrac{M^2}{2}\big)\times \\
\Big(1+\log(4(d-r))\Psi(6dM^{-1})+21M^{-1}\log(2\alpha^{-1})\Big).
\end{aligned}
$$

证明。 对于任意 $v\in\mathbb{R}^d$，我们有界

$$
\langle\widehat{C}^{t,h}_{>r}v,v\rangle=\sum_{j\geqslant 1} w_j\Big\langle\int_{I_{t,h}}\Phi_j(s)\Sigma_{>r}^{1/2}(s)\,dB(s)+\int_{I_{t,h}}\varphi_j(s)dW_{>r}(s),v\Big\rangle^2
$$

$$\leqslant 2\langle\tilde{\Sigma}^{t,h}_{>r}v,v\rangle + 2\langle\tilde{V}^{t,h}_{>r}v,v\rangle,$$

利用 $(A+B)^2 \leqslant 2A^2+2B^2$ 并代入 $\tilde{\Sigma}^{t,h}_{>r}$、$\tilde{V}^{t,h}_{>r}$ 的定义。由（3.1）可得

$$\lambda_{r+1}(\widehat{C}^{t,h}) \leqslant \lambda_{max}(\widehat{C}^{t,h}_{>r}) \leqslant 2\lambda_{max}(\tilde{\Sigma}^{t,h}_{>r}) + 2\lambda_{max}(\tilde{V}^{t,h}_{>r}).$$

因此，应用命题A.7 和A.8 以及 $\alpha/2$，由并集界并结合式（$d-r+1$）进行化简 $\vee\, r \leqslant d$即可得到结果。 □

A.4. 特征值偏差下界

在备择假设下分析检验功效，需要用到高斯矩阵最小奇异值的下界，以及相对抽象的熵和紧性论证。

A.10 定理。设 $Y \in \mathbb{R}^{d\times J}$ 是一个中心化高斯矩阵，其 $\mathrm{vec}(Y)$ $N\ 0\ A$ $J \geqslant d$ $\sim$ $(,\ )$ 满足 $A \in \mathbb{R}^{dJ\times dJ}_{spd}$。则下尾界为

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{min}\big(YY^\top\big) \leqslant \tau(J-d+2)\lambda_{min}(A)\right) \leqslant (2^{d+1}e)^{1/2}\big(2ed\tau\big)^{(J-d+1)/2}, \quad \tau \geqslant 0.$$

特别地，对于 $\delta \in (0,\ 1)$，以至少 $1-\delta$ 的概率有：

$$\lambda_{min}\big(YY^\top\big) \geqslant e^{-2}2^{-d-2}\delta^{2/(J-d+1)}(J-d+2)\lambda_{min}(A).$$

证明。引入初等矩阵 $E_{i,\ j} := e_i e_j^\top$ 和 $F_{\pm 1} := (I_J - E_{d,\ d}) \pm E_d$，使得 F_1 是恒等算子，而 F_{-1} 翻转第 d 个坐标的符号。于是，根据 $O \overset{d}{=} F_{\pm 1}O$ 对于 $O \sim \mathbb{H}_J$ 在正交群 $O(J) \subseteq \mathbb{R}^{J\times J}$ 上相对于 Haar 测度$\mathbb{H}_J$ 的不变性，我们可以在 Reiß & Winkelmann (2023) 的引理 S.5 的密度公式中引入一个由拉德马赫随机变量 ε 生成的随机符号翻转F_ε，从而得到

$$f^{\Lambda}_A(\lambda_1,\dots,\lambda_d) = c\det(A)^{-1/2}\prod_{j=1}^{d}\lambda_j^{(J-d-1)/2}\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)\times$$
$$\iint \mathbb{E}_\varepsilon\left[\exp\Big(-\frac{1}{2}\langle A^{-1}\,\mathrm{vec}(O'LF_\varepsilon O), \mathrm{vec}(O'LF_\varepsilon O)\rangle_{\mathbb{R}^{dJ}}\Big)\right]\mathbb{H}_J(dO)\,\mathbb{H}_d(dO'),$$

其中 $L = (\mathrm{diag}(\lambda_1^{1/2},\dots,\lambda_d^{1/2})\ \mathbf{0}_{d\times(J-d)})$。对于 $A = A^{(0)} := \lambda_{min}(A)I_{dJ}$，我们使用$OO^\top = I_J = F_\varepsilon^2$得到

$$\langle (A^{(0)})^{-1}\,\mathrm{vec}(O'LF_\varepsilon O), \mathrm{vec}(O'LF_\varepsilon O)\rangle_{\mathbb{R}^{dJ}}$$
$$= \lambda_{min}(A)^{-1}\,\mathrm{trace}\left(O'LF_\varepsilon OO^\top F_\varepsilon L^\top (O')^\top\right) = \lambda_{min}(A)^{-1}\,\mathrm{trace}\left(LL^\top\right),$$

与 ε，O，O' 相互独立。于是，在 A 和 $A^{(0)}$ 下的分布之间的似然比 $f^{\Lambda}_A(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\,f^{\Lambda}_{A^{(0)}}(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ 可写为

$$\tilde{c}\iint \mathbb{E}_\varepsilon\left[\exp\Big(\tfrac{1}{2}\langle((A^{(0)})^{-1}-A^{-1})\,\mathrm{vec}(O'LF_\varepsilon O), \mathrm{vec}(O'LF_\varepsilon O)\rangle_{\mathbb{R}^{dJ}}\Big)\right]\mathbb{H}_J(dO)\,\mathbb{H}_d(dO')$$

其中某个常数为 $\tilde{c}>0$。注意到 $LF_\varepsilon=(\sum_{i\leqslant d-1}\lambda_i^{1/2}E_{i,\,i})+\varepsilon\lambda_d^{1/2}E_{d,\,d}$，指数项是关于 $\varepsilon\lambda_d^{1/2}$ 的二次型 $Q(\varepsilon\lambda_d^{1/2})$。由于 $(A^{(0)})^{-1}-A^{-1}$ 根据定义是半正定的，我们可以将其写为 $Q(x)=a+bx+cx^2$，其中存在某些 a，$c\geqslant 0$ 和 $b\in\mathbb{R}$。这表明

$$\mathbb{E}_\varepsilon[\exp(Q(\varepsilon\lambda_d^{1/2}))]=\exp(a+c\lambda_d)\cosh(b\lambda_d^{1/2})$$

始终随 $\lambda_d\geqslant 0$递增。因此，似然比 $f_A^\Lambda/f_{A^{(0)}}^\Lambda$随 λ_d递增。对 $i\leqslant d-1$ 积分消去 λ_i 后，我们得到随机序

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{min}(YY^\top)\leqslant\tau\right)\leqslant\mathbb{P}^{(0)}\left(\lambda_{min}(YY^\top)\leqslant\tau\right),\quad\tau\geqslant 0,$$

其中，$\mathbb{P}^{(0)}$ 表示在 $A^{(0)}$下的分布。写作 $Y=\lambda_{min}(A)^{1/2}(\zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_J)\in\mathbb{R}^{d\times J}$，其中 $\zeta_j\sim N(0,\ I_d)$ 在 $\mathbb{P}^{(0)}$下独立同分布，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{min}(YY^\top)\leqslant\lambda_{min}(A)\tau\right)\leqslant\mathbb{P}\left(\lambda_{min}\Big(\sum_{j=1}^J\zeta_j^{\otimes 2}\Big)\leqslant\tau\right),\quad\tau\geqslant 0.$$

利用 λ_{min} 的密度界，以及Edelman（1988）中命题 5.1 的证明，我们得到 $\tau\geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\lambda_{min}\Big(\sum_{j=1}^J\zeta_j^{\otimes 2}\Big)\leqslant\tau\right)\\
&\leqslant\frac{2^{-(J-d+1)/2}\Gamma(1/2)\Gamma((J+1)/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma((J-d+1)/2)\Gamma((J-d+2)/2)}\int_0^\tau\lambda^{(J-d-1)/2}e^{-\lambda/2}d\lambda\\
&\leqslant\frac{2^{-(J-d+1)/2}\Gamma(1/2)\Gamma((J+1)/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma((J-d+3)/2)\Gamma((J-d+2)/2)}\tau^{(J-d+1)/2}.
\end{aligned}$$

根据欧拉乘积公式 $\Gamma(z)=z^{-1}\prod_{n\geqslant 1}(1+1/n)^z(1+z/n)^{-1}$，我们可以对所有 $0<y<x$ 推导出以下界

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)\Gamma(x-y)}\leqslant\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x/2)^2}=\frac{x}{4}\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\left(4(n/x)^2+4n/x\right)^{-1}\right)\leqslant\frac{x}{4}2^x,$$

其中，最后一个不等式由取对数并与$\int_0^\infty\log(1+(4x^2+4x)^{-1})\,dx=\log 2$比较得到。由 $x=(J+1)/2$和 $y=d/2$可得

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{min}\Big(\sum_{j=1}^J\zeta_j^{\otimes 2}\Big)\leqslant\tau\right)\leqslant\frac{2^{d/2}\Gamma(1/2)}{((J-d+1)/2)\Gamma((J-d+2)/2)}\tau^{(J-d+1)/2}.$$

现在利用斯特林公式上界 $\Gamma(z)\geqslant\sqrt{2\pi}z^{z-1/2}e^{-z}$对于 $z>0$ (Artin,2015) 可得

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{min}\Big(\sum_{j=1}^J\zeta_j^{\otimes 2}\Big)\leqslant\tau\right)\leqslant\frac{(2^{d+1}e)^{1/2}}{J-d+1}\Big(\frac{2e\tau}{J-d+2}\Big)^{(J-d+1)/2},\quad\tau\geqslant 0.$$

将 τ 替换为（$J-d+2$）τ，并进行一些直接化简，即可得到该断言。

□

A.11 命题。对于 $J\in\mathbb{N}$，存在一个普适常数 $C_J>0$（除此之外仅取决于 d、r），使得对于任意区间 $I_{t,\,h}$ 以及满足 $\lambda_{r+1}(\Sigma(s))\geqslant\lambda_{r+1}$, $s\in I_{t,\,h}$ 的情形，都存在一个 $(r+1)$ 维子空间 $V_{r+1}\subseteq\mathbb{R}^d$，使得对所有 $v_j\in\mathbb{R}^{r+1}$, $j=1,\dots,J$:

$$\int_{I_{t,h}}\lambda_{min}\big(P_{V_{r+1}}\Sigma(s)|_{V_{r+1}}\big)\Big\|\sum_{j=1}^{J}w_j^{1/2}\Phi_j(s)v_j\Big\|^2ds\geqslant\underline{C}_J\tfrac{1}{4}\underline{\lambda}_{r+1}\Big(\min_{j=1,\dots,J}w_j\Big)\sum_{j=1}^{J}\|v_j\|^2.$$

证明。在不失一般性的前提下，考虑满足 $\Phi_j(s)=\sqrt{2/h}\sin(j\pi s/h)$ 的 $I_{t,\,h}=[0,h]$。由 $\lambda_{r+1}(\Sigma(s))\geqslant\lambda_{r+1}$，根据特征值的变分刻画可知，存在一个 $(r+1)$ 维子空间 $V_{r+1}(s)$，使得 $\lambda_{min}(P_{V_{r+1}(s)}\Sigma(s)|_{V_{r+1}(s)})\geqslant\lambda_{r+1}$。根据 Pajor (1998)，存在一个由有限多个 $\mathbb{R}^d$ 的 $(r+1)$ 维子空间组成的集合 $\mathscr{V}$，对于所有 $(r+1)$ 维子空间 $\mathbb{R}^d$，都有 $\min_{V\in\mathscr{V}}\|P_{V_{r+1}}-P_V\|\leqslant1/2$。通过简单的计数论证（参见 Reiß & Winkelmann (2023) 中推论 S.9 的证明），存在 $V_{r+1}\in\mathscr{V}$ 和一个博雷尔集 $B_{r+1}\subseteq[0,h]$，使得 $\lambda(B_{r+1})\geqslant h/|\mathscr{V}|=:ch$（$c\in(0,1)$ 仅取决于 r 和 d），并且

$$\forall s\in B_{r+1}:\ \lambda_{min}(P_{V_{r+1}(s)}\Sigma(s)|_{V_{r+1}})\geqslant\tfrac{1}{4}\underline{\lambda}_{r+1}.$$

接下来，注意到

$$T_{v,J}(s):=\Big\|\sum_{j=1}^{J}w_j^{1/2}\Phi_j(s)v_j\Big\|^2=\frac{2}{h}\sum_{j,j'=1}^{J}w_j^{1/2}w_{j'}^{1/2}\langle v_j,v_{j'}\rangle\sin(j\pi s/h)\sin(j'\pi s/h)$$

是一个次数为 $2J$ 的非负三角多项式。

对于由次数至多为 $2J$ 的三角多项式 $\sum_{j=-2J}^{2J}\alpha_je^{ijs}$ 构成的空间 $\mathbb{T}_{2J}$，考虑线性泛函

$$\Xi:\mathbb{T}_{2J}\times L^1([0,1])\to\mathbb{R};\quad\Xi(T,f)=\int_0^1T(s)f(s)\,ds.$$

引入（其中 $c\in$ 取自上文的 (0,1)）：子集

$$A=\Big\{T\in\mathbb{T}_{2J}\,\Big|\,T\geqslant0,\ \int_0^1T=1\Big\},\ F=\Big\{f\in L^1([0,1])\,\Big|\,0\leqslant f\leqslant1,\ \int_0^1f\geqslant c\Big\}.$$

众所周知，任意非零的次数为N 的三角多项式 $t\in\mathbb{T}_N$ 至多有 $2N$ 个零点。一个巧妙的论证是，$t(s)=0$ 意味着，对于相应的复多项式 $p(z)=z^N\sum_{j=-N}^{N}\alpha_jz^j$，有 $p(e^{is})=0$；根据代数基本定理，该多项式在 $\mathbb{C}$中至多有 $2N$ 个零点。因此，对于 $T\in\mathbb{T}_{2J}$，$T>0$几乎处处成立，这意味着对任意 $T\in\mathbb{T}_{2J}$、$f\in F$，都有 $\Xi(T,f)>0$。我们将采用紧性论证来证明

$$\underline{C}_J:=\inf_{f\in F,T\in A}\int_0^1T(s)f(s)\,ds>0.\tag{A.7}$$

我们赋予有限维空间 $\mathbb{T}_{2J}$ 以 L^∞-范数。于是 Ξ 显然是范数连续的，因此根据弱收敛的定义，它相对于 $\mathbb{T}_{2J}\times L^1([0,1]$上的弱拓扑也是连续的。子集$A\subseteq\mathbb{T}_{2J}$ 显然在 $L^\infty([0,1]$-范数下是闭的，在 L^1-范数下是有界的。由有限维空间上范数的等价性可知， A 是紧的。函数族F 中的函数属于 $L^1([0,1]$，且一致可积（甚至一致有界），因此根据邓福德-佩蒂斯判别准则（Werner，2007，定理 VIII.6.9），弱相对紧。此外， F 是弱闭半空间的交，因此是弱闭的：

$$F=\bigcap_{\substack{g\in L^\infty([0,1])\\ 0\leqslant g\leqslant 1}}\Big\{f\in L^1([0,1])\,\Big|\,\int_0^1 fg\in[0,1]\Big\}\bigcap\Big\{f\in L^1([0,1])\,\Big|\,\int_0^1 f\geqslant c\Big\}.$$

因此， $A\times F\subseteq\mathbb{T}_{2J}\times L^1([0,1])$ 是紧空间的乘积，因此是紧的，且 (A.7) 中的下确界可以取到，故为正。

将示性函数 A.7) 应用于 $f=\mathbf{1}_{B'}$，我们得到

$$\inf_{B\subseteq[0,h],\lambda(B)\geqslant ch}\int_B\Big\|\sum_{j=1}^J w_j^{1/2}\Phi_j(s)v_j\Big\|^2\,ds=\inf_{B'\subseteq[0,1],\lambda(B')\geqslant c}\int_{B'}T_{v,J}(hu)h\,du$$

$$\geqslant\underline{C}_J\int_0^1 T_{v,J}(hu)h\,du=\underline{C}_J\sum_{j=1}^J w_j\|v_j\|^2.$$

利用上文中的 $\lambda_{r+1}(\underline{\Sigma}(s))\geqslant\lambda_{r+1}$, $s\in[0,h]$ 和 V_{r+1}, B_{r+1} ，我们可得界

$$\int_0^h\lambda_{min}(P_{V_{r+1}}\Sigma(s)|_{V_{r+1}})\Big\|\sum_{j=1}^J w_j^{1/2}\Phi_j(s)v_j\Big\|^2\,ds$$

$$\geqslant\int_{B_{r+1}}\frac{\underline{\lambda}_{r+1}}{4}\Big\|\sum_{j=1}^J w_j^{1/2}\Phi_j(s)v_j\Big\|^2\,ds\geqslant\tfrac{1}{4}\underline{C}_J\underline{\lambda}_{r+1}\Big(\min_{j=1,\dots,J}w_j\Big)\sum_{j=1}^J\|v_j\|^2,$$

结论由此得出。 □

A.12 推论。假设 $\lambda_{r+1}(\Sigma(s))\geqslant\lambda_{r+1}>0$ 对于 $s\in I_{t,\,h}$。那么

$$\mathbb{P}\Big(\lambda_{r+1}\big(\widehat{C}^{t,h}\big)\leqslant\tau M^{-1}(\underline{\lambda}_{r+1}+\varepsilon_{n,h}^2)\Big)\leqslant C_J\tau^{(J-r)/2},\quad\tau\geqslant 0,\tag{A.8}$$

对于 $r+1\leqslant J\leqslant M$，该结论成立，其中 $C_J>0$ 仅依赖于 J, d 和 r。

特别地，对于 $R\to\infty$，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\inf_{\Sigma\in\mathcal{H}_1(I_{t,h},RM\kappa_{\alpha,i})}\mathbb{P}_\Sigma(\varphi_{\alpha,i}=1)=1.$$

A.13 注。理想情况下，我们希望得到 (A.8)，且不带因子 M^{-1}，并且对于 $J=M$，其中 C_M 满足 $\inf_M C_M>0$。其固有问题确实在于，找到一个公共的 $(r+1)$-维子空间，使得 $\Sigma(s)$ 对所有

$s \in I_{t,h}$ 在该子空间上的最小特征值阶大于 λ_{r+1}，证明中我们使用命题 A.11。对于秩为 $r = d-1$ 的情形，这显然就是整个空间 $\mathbb{R}^d$，因此我们可以去掉因子 M^{-1}。此外，在附加正则性假设 $\Sigma \in C^\beta(L)$ 下，利用 $\|\Sigma(s)-\Sigma(u)\| \leqslant Lh^\beta$，对于 $s,u \in I_{t,h}$，这对 $\lambda_{r+1} \geqslant 2Lh^\beta$ 是可行的。这涵盖了没有谱隙的临界值，但不包括有谱隙的临界值；后一种情形通常有 $\lambda_{r+1} \sim h^{2\beta}$。在后一种情形下，由于可能存在多个指标 $k \geqslant r+1$，其特征值为 $\lambda_k(\Sigma(s)) \approx \lambda_{r+1}(\Sigma(s))$，我们无法期望找到合适的公共子空间；参见 Reiß & Wahl（2020）关于尖峰协方差模型的讨论。

证明。我们考虑 $Y = (w_1^{1/2} P_{V_{r+1}} S_1, \dots, w_J^{1/2} P_{V_{r+1}} S_J) \in \mathbb{R}^{(r+1)\times J}$ 定理 A.10 中的 S_j，其中取自（2.1），以及投影 $P_{V_{r+1}}$ 到由命题 $r+1$ 所给出的公共（V_{r+1}）维子空间上，见命题 A.11。然后，关于希尔伯特–施密特内积取对偶后，$\mathrm{vec}(A \in \mathbb{R}^{(r+1)J\times(r+1)J})$ 的协方差矩阵满足：对于 Y，$H = (H_1, \dots, H_J) \in \mathbb{R}^{(r+1)\times J}$

$$\lambda_{min}(A) = \inf_{\|H\|_{HS}=1} \mathbb{E}[\langle Y, H\rangle_{HS}^2] = \inf_{\sum_{j=1}^J \|H_j\|^2=1} \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{j=1}^J w_j^{1/2} \langle P_{V_{r+1}} S_j, H_j\rangle\Big)^2\right].$$

令 $\Sigma(s)_{V_{r+1}} = P_{V_{r+1}} \Sigma(s)|_{V_{r+1}}$，我们可以给出下界

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Big(\sum_{j=1}^J w_j^{1/2} \langle P_{V_{r+1}} S_j, H_j\rangle\Big)^2\right] \\
&= \sum_{j,j'=1}^J w_j^{1/2} w_{j'}^{1/2} H_j^\top P_{V_{r+1}} \mathbb{E}\left[S_j S_{j'}^\top\right] P_{V_{r+1}}^\top H_{j'}^\top \\
&= \sum_{j,j'=1}^J \int_{I_{t,h}} \langle w_j^{1/2} \Phi_j(s) \Sigma(s)_{V_{r+1}} H_j, w_{j'}^{1/2} \Phi_{j'}(s) H_{j'}\rangle \, ds + \sum_{j=1}^J w_j j^2 \varepsilon_{n,h}^2 \|H_j\|^2 \\
&\geqslant \int_{I_{t,h}} \lambda_{min}(\Sigma(s)_{V_{r+1}}) \Big\| \sum_{j=1}^J w_j^{1/2} \Phi_j(s) H_j \Big\|^2 ds + \varepsilon_{n,h}^2 \sum_{j=1}^J w_j j^2 \|H_j\|^2.
\end{aligned}$$

因此，由命题A.11 可得

$$\lambda_{min}(A) \geqslant \frac{\underline{C}_J}{4} \Big(\min_{j=1,\dots,J} w_j \Big) \underline{\lambda}_{r+1} + \varepsilon_{n,h}^2 \min_{j=1,\dots,J} (w_j j^2).$$

对于 $J \leqslant M$，我们有 $w_j \sim M^{-1}$，因此

$$\lambda_{min}(A) = \inf_{\|H\|_{HS}=1} \mathbb{E}[\langle Y, H\rangle_{HS}^2] \gtrsim \underline{C}_J M^{-1} (\underline{\lambda}_{r+1} + \varepsilon_{n,h}^2).$$

因此，定理 A.10 给出 $M \geqslant J \geqslant r+1$，其中常数 $C_J > 0$ (仅取决于 J，d和 r)

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{min}\big(YY^\top\big) \leqslant \tau M^{-1} (\underline{\lambda}_{r+1} + \varepsilon_{n,h}^2)\right) \leqslant C_J \tau^{(J-r)/2}.$$

由特征子空间的变分刻画可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\lambda_{r+1}\big(\widehat{C}^{t,h}\big)\leqslant\tau M^{-1}(\underline{\lambda}_{r+1}+\varepsilon_{n,h}^2)\right)\\&\leqslant\mathbb{P}\left(\lambda_{r+1}\Big(\sum_{j=1}^{J}w_jS_j^{\otimes2}\Big)\leqslant\tau M^{-1}(\underline{\lambda}_{r+1}+\varepsilon_{n,h}^2)\right)\leqslant C_J\tau^{(J-r)/2}\end{aligned}$$

对于任意 $r+1\leqslant J\leqslant M$，这就证明了第一个结论。

现在取 $\lambda_{r+1}=RM\kappa_{\alpha,\,i}$，特别可得对于 $\tau=R^{-1}$ 和 $J=r+1$

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{r+1}\big(\widehat{C}^{t,h}\big)\leqslant\kappa_{\alpha,i}\right)\leqslant C_{r+1}R^{-1/2}\to0$$

由于 $R\to\infty$，该结果对 $\Sigma\in\mathcal{H}_1(I_{t,\,h},\ RM\kappa_{\alpha,\,i})$ 一致成立。 □

A.5. 下界的证明

定理 *6.1* 的证明。 不失一般性，我们考虑 $\eta=1$的情形，一般情形可通过将 n 替换为 $\eta^{-2}n$得到。此外，我们只考虑$\lambda_r\geqslant(L^2n^{-\beta})^{1/(\beta+2)}$，因为对于 $\lambda_r\leqslant(L^2n^{-\beta})^{1/(\beta+2)}$，检测率始终为 $v_n=L^{2/(\beta+2)}n^{-\beta/(\beta+2)}$，且零假设关于谱隙条件 $\mathcal{H}_0$ 是嵌套的。

首先，令 $d=2$，$r=1$ 并在所有量中省略指标 n。对于 $h\in(0,\ (2t)\wedge\frac{2}{7}(1-t)\wedge(\lambda_r/L)^{-1/\beta}]$，其将在下文确定，我们考虑以下两个备择假设（灵感来自 Reiß & Winkelmann （2023）

$$\begin{aligned}\Sigma_0(s)&=\begin{pmatrix}\underline{\lambda}_r & Lh^\beta f((s-t)/4h)\\ Lh^\beta f((s-t)/4h) & \underline{\lambda}_r^{-1}L^2h^{2\beta}f^2((s-t)/4h)\end{pmatrix},\\\Sigma_1(s)&=\begin{pmatrix}\underline{\lambda}_r & 0\\ 0 & \underline{\lambda}_r^{-1}L^2h^{2\beta}f^2((s-t)/4h)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

满足 $\Sigma_0=\Sigma_1^{1/2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\Sigma_1^{1/2}$，其中

$$f(u)=(4\pi)^{-1}\cos\big(2\pi(u-1/8)\big)\mathbf{1}(u\in[-\tfrac{1}{8},\tfrac{7}{8}]).$$

那么 f 和 f^2 是 β-H¨older 连续的，常数为 $1/2$，并且由 $Lh^\beta\leqslant\lambda_r$ 可得 $\Sigma_0,\ \Sigma_1\in C^\beta([0,1],\ L)$。此外，有序特征值为

$$\begin{aligned}&\lambda_1(\Sigma_0(s))=\underline{\lambda}_r+\underline{\lambda}_r^{-1}L^2h^{2\beta}f^2((s-t)/4h)\geqslant\underline{\lambda}_r,\qquad\lambda_2(\Sigma_0(s))=0,\\&\lambda_1(\Sigma_1(s))=\underline{\lambda}_r,\qquad\lambda_2(\Sigma_1(s))=\underline{\lambda}_r^{-1}L^2h^{2\beta}f^2((s-t)/4h).\end{aligned}$$

我们得出结论

$$\Sigma_0\in\mathcal{H}_0([0,1],\beta,L,\underline{\lambda}_r),\quad\Sigma_1\in\mathcal{H}_1(I_{t,h},(32\pi^2)^{-1}\underline{\lambda}_r^{-1}L^2h^{2\beta})\cap C^\beta([0,1],L)\tag{A.9}$$

由于 $f^2(u) \geqslant \frac{1}{32\pi^2}$ 对 $u \in [0, 1/4]$ 成立。下文中，$\int_0^s \Sigma_0(u)du = \int_0^s \Sigma_1(u)du$ 对 $s \leqslant t_h := t - h/2$ 和 $s \geqslant \bar{t}_h := t + 7h/2$ 成立这一点将很重要，因为 $\int f(u)du = 0$。

我们针对 $\Sigma \in \{\Sigma_0, \Sigma_1\}$ 观测 (1.3)。由于在 u outside $[t_h, \bar{t}_h]$ 上 $\Sigma_0(u) = \Sigma_1(u)$ 成立，且 $X(t)$ 是马尔可夫的，因此在给定边界值 $X(t_h)$、$X(\bar{t}_h)$ 的条件下，$\Sigma \in \{\Sigma_0, \Sigma_1\}$ coincide on $[0, t_h] \cup [\bar{t}_h, 1]$ 的观测律相同。通过增加对值 $X(t_h)$、$X(\bar{t}_h)$ 的观测，该模型包含的信息更多，而下界只会变小。注意，$(X(t_h)\ X(\bar{t}_h))$ 是一个中心化高斯随机向量，其协方差在 $\Sigma = \Sigma_i$ 中独立于 i。因此，只需证明观测 $s \in [t_h, \bar{t}_h]$ 这些模型的下界

$$\begin{aligned} d\tilde{Y}(s) =& dY(s) - \left(\tfrac{\bar{t}_h - s}{\bar{t}_h - \underline{t}_h} X(\underline{t}_h) + \tfrac{s - \underline{t}_h}{\bar{t}_h - \underline{t}_h} X(\bar{t}_h)\right) ds = \tilde{X}(s)ds + n^{-1/2} dW(s) \\ & \text{with } \tilde{X}(s) = X(s) - \tfrac{\bar{t}_h - s}{\bar{t}_h - \underline{t}_h} X(\underline{t}_h) - \tfrac{s - \underline{t}_h}{\bar{t}_h - \underline{t}_h} X(\bar{t}_h). \end{aligned}$$

桥过程 X 是中心化高斯过程，其协方差函数为 c_i，当 $u, v \in [t_h, \bar{t}_h]$ 在 $\Sigma = \Sigma_i$、$i = 0, 1$ 时：

$$\begin{aligned} & c_i(u, v) = A_i(u \wedge v) - \tfrac{u - \underline{t}_h}{\bar{t}_h - \underline{t}_h} A_i(v) - \tfrac{v - \underline{t}_h}{\bar{t}_h - \underline{t}_h} A_i(u) + \tfrac{u - \underline{t}_h}{\bar{t}_h - \underline{t}_h} \tfrac{v - \underline{t}_h}{\bar{t}_h - \underline{t}_h} A_i(\bar{t}_h) \\ & \text{where } A_i(s) = \mathbb{E}_{\Sigma_i}[(X(s) - X(\underline{t}_h))^{\otimes 2}] = \int_{\underline{t}_h}^{s} \Sigma_i(u)\, du. \end{aligned}$$

令 $Q_i\colon L^2([t_h, \bar{t}_h]; \mathbb{R}^2) \to L^2([t_h, \bar{t}_h]; \mathbb{R}^2)$ 表示通过观测 $d\tilde{Y}$ 并使用 $\Sigma = \Sigma_i$ 生成的、定义在 $L^2([t_h, \bar{t}_h]; \mathbb{R}^2)$ 上的柱状高斯测度的协方差算子。由 B 与 W 相互独立可知，$Q_i = C_i + \frac{1}{n}\,\mathrm{Id}$，其中 $\tilde{}$ 为恒等算子 Id，C_i 为由协方差函数 c_i 描述的 X 的协方差算子。

我们用分块矩阵记法表示定义在 $L^2([t_h, \bar{t}_h]; \mathbb{R}^2)$ 上的任意线性算子 T

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \text{ with } T \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} f_1 + T_{12} f_2 \\ T_{21} f_1 + T_{22} f_2 \end{pmatrix}$$

对于 $T_{ij}\colon L^2([t_h, \bar{t}_h]) \to L^2([\underline{t}_h, \bar{t}_h])$。通过分部积分，我们得到众所周知的表示

$$C_i = \begin{pmatrix} J^* & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix} M_{\Sigma_i} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \text{ with } Jf(s) := \int_{\underline{t}_h}^{\bar{t}_h} \left(\mathbf{1}(u \geqslant s) - \tfrac{u - \underline{t}_h}{\bar{t}_h - \underline{t}_h}\right) f(u)\, du$$

以及乘法算子 $M_{\Sigma_i} f(s) := \Sigma_i(s) f(s)$，$s \in [t_h, \bar{t}_h]$，满足 $M_{\Sigma_0} = M_{\Sigma_1^{1/2}} \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & & \\ & \mathrm{Id} & \\ & & \mathrm{Id} \end{pmatrix} M_{\Sigma_1^{1/2}}$。因此，我们得到

$$C_1 = D^* D,\ C_0 = D^* \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \end{pmatrix} D \text{ with } D = \begin{pmatrix} M_{\underline{\lambda}_r} J & 0 \\ 0 & M_{\underline{\lambda}_r^{-1} L^2 h^{2\beta} f^2((\bullet - t)/8h)} J \end{pmatrix}.$$

对于标量情形（Reiß，2011），平方海林格距离可以用希尔伯特-施密特范数进行界定，并且我们得到

$$H^2(N(0, Q_0), N(0, Q_1)) \leqslant \|Q_1^{-1/2}(Q_1 - Q_0)Q_1^{-1/2}\|_{HS}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| (C_1 + \tfrac{1}{n}\,\mathrm{Id})^{-1/2} D^* \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} D (C_1 + \tfrac{1}{n}\,\mathrm{Id})^{-1/2} \right\|_{HS}^2 \\
&= 2\|(C_{1,11} + \tfrac{1}{n}\,\mathrm{Id})^{-1/2} D_{11}^* D_{22} (C_{1,22} + \tfrac{1}{n}\,\mathrm{Id})^{-1/2}\|_{HS}^2 \\
&\leqslant 2\|D_{22} n^{1/2}\|_{HS}^2 = 2n\,\mathrm{trace}(C_{1,22}), \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

其中在最后一个不等式中使用了

$$\|D_{11}\ C_{1\ 11} + \tfrac{1}{n}\quad {}^{-1}D_{11}^*\| \leqslant 1 \qquad \|\ C_{1\ 22} + (,\ \mathrm{Id})\ \text{和}\ (,\ \mathrm{Id})。$$

$\overline{\tfrac{1}{n}\quad {}^{-1}\|} \leqslant n$

对于 L^2 正迹类算子，其迹可通过核显式计算（例如参见Werner (2007) 中的例 VI.5(d)：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{trace}(C_{1,22}) &= \int_{\underline{t}_h}^{\bar{t}_h} c_{1,22}(s,s)ds \\
&= \int_{\underline{t}_h}^{\bar{t}_h} \Big(\frac{(\bar{t}_h - s)^2}{(\bar{t}_h - \underline{t}_h)^2} \int_{\underline{t}_h}^{s} \Sigma_{1,22}(u)du + \frac{(s - \underline{t}_h)^2}{(\bar{t}_h - \underline{t}_h)^2} \int_{s}^{\bar{t}_h} \Sigma_{1,22}(u)du \Big) ds \\
&\leqslant (\bar{t}_h - \underline{t}_h)^2 \|\Sigma_{1,22}\|_\infty = \tfrac{4}{\pi^2} \underline{\lambda}_r^{-1} L^2 h^{2\beta+2}. \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

我们得出

$$H^2(N(0,Q_0), N(0,Q_1)) \leqslant \underline{\lambda}_r^{-1} L^2 h^{2\beta+2} n.$$

˜对于任意检验 φ_n，基于对 dY 的观测，错误概率之和满足以下关于全变差范数 TV 和海林格距离 H (Tsybakov，2008)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\Sigma_0}[\varphi_n] + \mathbb{E}_{\Sigma_1}[1-\varphi_n] &= 1 - TV(N(0,Q_0), N(0,Q_1)) \\
&\geqslant 1 - H(N(0,Q_0), N(0,Q_1)) \\
&\geqslant 1 - \underline{\lambda}_r^{-1/2} L h^{\beta+1} n^{1/2}.
\end{aligned}
$$

当 α' 时，此界取等号

$$h = \big((1-\alpha')^2 \underline{\lambda}_r L^{-2} n^{-1}\big)^{1/(2\beta+2)} \sim \big(\underline{\lambda}_r^{-1} L^2 n\big)^{-1/(2\beta+2)}. \qquad \text{(A.12)}$$

由于我们处于 $\lambda_r \geqslant (L^2 n^{-\beta})^{1/(\beta+2)}$ 的情形，条件 $h \leqslant (\lambda_r/L)^{1/\beta}$ 总是成立。对于 $\Sigma(s)$ 的第 $r+1$ 个（即第二个）特征值，在备择假设下，我们得到 $s \in \overline{I}_{t,\ h}$

$$\lambda_{r+1}(\Sigma_1(s)) \geqslant (32\pi^2)^{-1} \underline{\lambda}_r^{-1} L^2 h^{2\beta} = \tfrac{(1-\alpha')^{2\beta/(\beta+1)}}{32\pi^2} (L^2/\underline{\lambda}_r)^{1/(\beta+1)} n^{-\beta/(\beta+1)}.$$

对于 $c_{\alpha'} = (32\pi^2)^{-1}(1-\alpha')^{2\beta/(\beta+1)}$，我们得出

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\varphi_n} \Big(\sup_{\Sigma \in \mathcal{H}_0([0,1],\beta,L,\underline{\lambda}_r)} \mathbb{E}_\Sigma[\varphi_n] + \sup_{\Sigma \in \mathcal{H}_1(I_{t,h}, c_{\alpha'} v_n)} \mathbb{E}_\Sigma[1-\varphi_n] \Big) \geqslant \alpha', \quad \text{(A.13)}$$

˜其中，下确界是对所有基于观测 φ_n 的检验 dY 取的；显然，对所有基于观测 φ_n 的检验也同样成立 dY，在（1.3）中。对于 $h' \in (0,h$，我们有包含关系 $\mathcal{H}_1(I_{t,h}, c_{\alpha'} v_n) \subseteq \mathcal{H}_1(I_{t,h'}, c_{\alpha'} v_n)$，因此（A.13）中的左侧

对于 h'，只能更大，而不是 h，其定义见（A.12）。因此，对于任意 $h \in (0, c_{\alpha'}^{1/2\beta} (\lambda_r^{-1} L^2 n)^{-1/(2\beta+2)}]$，式（A.13）成立，如前所述。

最后，通过考虑协方差 Σ_i，使其在坐标 1 和 $r+1$ 上遵循上述设定，并将 λ_r 放在 Σ_i 的对角线上对应坐标 2 、 ..... 、 r，同时将所有其他元素设为零，即可将这个下界推广到 $d > 2$ 和秩 $1 \leqslant r \leqslant d-1$ 。这是因为 dY 的坐标 1 和 $r+1$ 显然构成了 $\{\Sigma_0, \Sigma_1\}$ 中二元统计模型的充分统计量。

□

参考文献

A¨ıt-Sahalia, Y.、Fan, J. 和 Xiu, D.（2010）。含噪且异步的金融数据的高频协方差估计。《美国统计学会杂志》，105(492)，1504–1517。A¨ıt-Sahalia, Y. 和 Jacod, J.（2014）。高频金融计量经济学。普林斯顿大学出版社。A¨ıt-Sahalia, Y. 和 Xiu, D.（2017）。使用主成分分析估计基于高频数据的高维因子模型。计量经济学杂志，201(2)，384–399。Artin, E.（2015）。伽马函数。Courier Dover出版社。Bacry, E.、Ga¨ıffas, S. 和 Muzy, J.-F.（2018）。连续时间矩阵鞅的集中不等式。概率论及相关领域，170(1)，525–553。Barndorff-Nielsen, O. E.、Hansen, P. R.、Lunde, A. 和 Shephard, N.（2011）。多元已实现核：带噪声和非同步交易条件下股票价格协变差的一致半正定估计量。计量经济学杂志，162(2)，149–169。Bibinger, M.、Hautsch, N.、Malec, P. 和 Reiß, M.（2014）。从含噪观测值估计二次协变差矩阵：局部矩方法与效率。统计学年刊，42(4)，1312–1346。Bibinger, M. 和 Reiß, M.（2014）。使用局部权重从含噪观测值进行协波动率的谱估计。斯堪的纳维亚统计学杂志，41(1)，23–50。Bibinger, M. 和 Winkelmann, L.（2015）。带噪高频数据中的共跳计量经济学。计量经济学杂志，184(2)，361–378。Birman, M. S. 和 Solomjak, M. Z.（2012）。希尔伯特空间中自伴算子的谱理论。Springer。Cai, T.、Ma, Z. 和 Wu, Y.（2015）。稀疏尖峰协方差矩阵的最优估计与秩检测。概率论及相关领域，161(3-4)，781–815。Christensen, K.、Podolskij, M. 和 Vetter, M.（2013）。关于带噪非同步观测方案下多元连续 Itô 半鞅的协变差估计。多元分析杂志，120，59–84。Crump, R. K. 和 Gospodinov, N.（2022）。关于债券收益率的因子结构。《计量经济学》，90(1)，295–314。

Edelman, A.（1988）。随机矩阵的特征值和条件数。*SIAM*矩阵分析与应用杂志，9(4)，543–560。Figueroa-L´opez, J. E. 和 Wu, B.（2024）。使用预平均和微观结构噪声进行现货波动率的核估计。计量经济学理论，40(3)，558–607。Fissler, T. 和 Podolskij, M.（2017）。对含噪观测连续扩散的波动率过程最大秩进行检验。*Bernoulli*，23(4B)，3021–3066。Ingster, Y. 和 S uslina, I. A.（2012）。高斯模型下的非参数拟合优度检验，第169卷。Springer。Jacod, J.、Lejay, L. 和 Talay, D.（2008）。连续 Itô 过程的布朗维数估计。*Bernoulli*，14(2)，469–498。Jacod, J. 和 Podolskij, M.（2013）。波动率过程秩的检验：随机扰动方法。统计学年刊，41(5)，2391–2427。Johnstone, I. M.（2001）。关于主成分分析中最大特征值的分布。统计学年刊，29(2)，295–327。Johnstone, I. M. 和 Ma, Z.（2012）。高斯正交系综和 GUE 边缘处 Tracy-Widom 定律的快速逼近。应用概率年刊，22，1962–1988。Katznelson, Y.（2004）。调和分析导论。剑桥大学出版社。K¨ uchler, U. 和 Tappe, S.（2008）。金融数学中的双边伽马分布与过程。随机过程及其应用，118(2)，261–283。Ledoux, M. 和 Talagrand, M.（1991）。巴拿赫空间中的概率论：等周不等式与过程。Springer。Lieb, E. H.（1973）。凸迹函数与 Wigner–Yanase–Dyson 猜想。数学进展，11，267–288。Ma, Z.（2012）。白Wishart矩阵极端特征值的 Tracy–Widom 极限精度。*Bernoulli*，18(1)。Nourdin, I. 和 Peccati, G.（2012）。使用 *Malliavin* 演算的正态逼近：从 *Stein* 方法到普适性，第192卷。剑桥大学出版社。Onatski, A.、Moreira, M. J. 和 Hallin, M.（2014）。高维中的信号检测：多尖峰情形。统计学年刊，42(1)，225–254。Pajor, A.（1998）。格拉斯曼流形的度量熵。凸几何分析，34，181–188。Reiß, M.（2011）。关于含噪观测下波动率推断的渐近等价。统计学年刊，39(2)，772–802。Reiß, M. 和 Wahl, M.（2020）。PCA 重构误差的非渐近上界。统计学年刊，48(2)，1098–1123。Reiß, M. 和 Winkelmann, L.（2023）。利用高频数据对时变协方差矩阵最大秩的推断。统计学年刊，51(2)，791–815。Tao, T.（2012）。随机矩阵理论专题，第132卷。美国数学学会。Tropp, J. A.（2012）。随机矩阵和的用户友好型尾界。

计算数学基础，12(4)，389–434。Tsybakov, A. B. (2008)。非参数估计导论。Springer。Werner, D. (2007)。泛函分析。Springer。