arXiv:2601.08354v1 [cs.CC] 13 Jan 2026

符号函数分解：一种重配置方法

MATEUS DE OLIVEIRA OLIVEIRA*，瑞典斯德哥尔摩大学和挪威卑尔根大学WIM VAN DEN BROECK*，挪威卑尔根大学

函数分解是将函数 f 分解为较简单函数 f_1、……、f_k（属于某个函数类 F）的复合 $f = g(f_1, \ldots\ldots, f_k)$ 的过程。这一基本概念可用于对各种情境中的应用建模，范围从机器学习到形式语言理论。在这项工作中，我们借助函数重配置的概念来研究函数分解。在这种设定下，不仅对因子函数 $f_1, \ldots\ldots, f_k$ 施加约束，也对组合过程中产生的中间函数施加约束。

我们提出了一个符号框架，以解决函数重配置和分解问题。在该框架中，重配置过程中产生的函数以符号形式表示，采用有序二叉决策图（OBDD）进行表示。用于指定重配置过程的函数 g 由一个布尔电路 C 表示。最后，函数类 F 由一个二阶有限自动机 A 表示。我们的主要结果表明，当参数取输入有序二叉决策图的宽度、与重配置电路 C 相关的结构参数以及二阶有限自动机 A 的大小时，函数重配置（进而函数分解）可在固定参数线性时间内求解。

1 引言

认知与学习往往以层级方式进行，复杂概念会被拆解为更简单、更易于处理的概念（Atzmon 等，2020；Correa 等，2023；Goel 和 Chandrasekaran，1989；Wang 等，2023）。在概念可以用函数表示的情境中，这种处理和理解信息的层级方法，通常可以通过恰当的函数分解概念加以形式化（Bohanec 和 Zupan，2004；Deniziak 和 Wiśniewski，2021；Vykhovanets，2006；Zupan、Bohanec 等，1997）。

在本研究中，我们将函数分解视为将布尔函数 f 分解为复合形式 $g(f_1、\ldots\ldots、f_k)$ 的过程，其中 $f_1、\ldots\ldots、f_k$ 是来自某个预定义类 F 的函数。函数 g 规定了各分量函数 $f_1、\ldots\ldots、f_k$ 如何组合形成目标函数 f，而 F 是一个函数类，其成员被认为比目标函数 f 更简单。例如，F 可以是这样一类函数：其原像在某种代数运算下封闭；也可以是相对于某种适当复杂度度量而言复杂度有界的一类函数。

函数分解是人工智能领域中的一个基本概念，因为它能够促进模块化、可解释性和可说明性。首先，函数分解使我们能够在不同的人工智能系统中重复使用定义明确的组件（Izza 等，2020；Srivastava，2023；Sun 等，2019）。在此背景下，我们可以设想，通过组合已有的、具有功能 f 的系统，来实现具有给定功能 f_1、f_2、……、f_k 的系统。其次，将复杂函数分解为子函数可以提升模型的可解释性。每个子函数都可以理解为执行特定任务或变换，从而让我们深入了解模型如何得出最终计算结果。最后，将决策分解为更简单、更易理解的步骤，有助于解释计算模型的决策过程（Hashemi 和 Vikalo，2018；Hiabu 等，2023；Laberge 等，2024；Molnar 等，2020；Zupan、Bratko 等，1999）。

作为一个密切相关的概念，在本研究中我们还考虑了函数重配置这一概念。在这种情况下，不仅要求因子函数 $f_1, \ldots, f_k$ 满足某些性质，组合过程中产生的子函数也必须满足这些性质。直观而言，函数重配置在整个

*两位作者对本研究的贡献相同。

作者联系方式 信息：Mateus de Oliveira Oliveira，ORCID：0000-0001-7798-7446, oliveira@dsv.su.se，斯德哥尔摩大学，瑞典丹麦和伯gen，挪威；Wim Van den Broeck，ORCID：0000-0002-5305-7348，卑尔根大学，挪威，wim.broeck@uib。no.

分解过程中保持一致性。这种一致性进一步提升了可解释性，因为它确保模型的每个部分都遵循统一的结构或一套原则。

我们从参数化复杂性理论的视角分析函数分解和函数重配置。在我们的框架中，函数以符号形式表示，采用有序二叉决策图（OBDD），这是表示布尔函数的一种重要形式体系（Bryant 1992）。重配置过程由布尔电路描述 C。最后，函数类$\mathcal{F}$ 通过二阶有限自动机$\mathcal{A}$来指定；这是一种用于表示函数类的自动机理论形式体系。我们的主要结果表明，以因子函数的数量、表示这些函数的有序二叉决策图的宽度、电路的大小 C 以及二阶自动机$\mathcal{A}$的大小为参数时，函数重配置和函数分解均可在固定参数线性时间内求解。

1.1 我们的结果

对于一个固定的布尔电路 C（其有 k 个输入）和一个固定的函数类 F，我们考虑如下问题：将给定的布尔函数 f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$分解为来自 F 的函数 $f_1,\ldots,f_k$: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$的 C-组合。更具体地说，我们要求对每个 $x \in \{0,1\}^n$，都有 $f(x) = F_C(f_1(x)\ldots,f_k(x))$，其中 F_C是由 C计算的 k位函数。我们称序列 $f_1,\ldots,f_k$为 f的（C,F）-分解。

为了使 (C, F)-分解问题在计算角度上具有意义，我们还需要指定输入函数 f和因子函数 $f_1,\ldots,f_k$ 的表示模型，以及函数类 F 的表示模型。在我们的框架中，我们使用有序二叉决策图（OBDD）对布尔函数进行符号表示；OBDD 是符号计算中最重要的形式体系之一（Bryant 1992）。OBDD D 本质上是一种无环确定性有限自动机，其状态集合划分为一系列层级 $X_0X_1\ldots X_n$，转移集合则划分为一系列层 $B_1B_2\ldots B_n$，其中每一层 B_i仅包含从 X_{i-1}中的状态到 X_i的转移。这样的 OBDD D表示一个函数 f_D: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$，其中对于每个 $x \in \{0,1\}^n$，$f(x) = 1$ 当且仅当 D接受 x。与基于真值表或决策树的表示方法相比，OBDD 能够更简洁地表示布尔函数；同时，OBDD 还具有一系列算法性质，例如能够高效计算并集、交集、补集等（Bryant 1992）。

在符号计算中，一个重要的复杂度度量是有序二叉决策图的宽度，也就是说，它某一层中的状态数最大值（Bollig 2012, 2014；Hachtel 和 Somenzi 1993；Sawitzki 2004；͡Woelfel 2006）。对于每个固定的 $p \in \mathbb{N}$，宽度至多为 p 的有序二叉决策图都可以编码为字母表 B(p) 上的一个字，其中该字母表由所有宽度至多为 p的层构成。这使得我们能够使用自动机理论形式化方法来定义布尔函数类。具体而言，字母表 B(p) 上的有限自动机 A 定义了函数类 F (A) = $\{f_D : D \in \mathrm{L(A)}\}$，该类包含所有由 A 所接受的有序二叉决策图计算的函数。这种方法的一个关键特征是，正如（Melo and Oliveira Oliveira 2020）所示，二阶有限自动机可以根据其所表示的函数类进行规范化，并且由二阶自动机表示的函数类在通常的布尔运算以及若干其他高阶运算下封闭（Melo and Oliveira Oliveira 2020）。

在本研究中，我们证明了，当参数取为因子函数的数量 k、表示因子函数 $f_1,\ldots,f_k$的有序二叉决策图的宽度 p、电路 C中的门数量 m以及表示类 F 的二阶有限自动机的大小 |A|时，(C,F (A))-分解问题可以在固定参数可处理线性时间内求解。

问题名称：函数分解**给定：**数字 $k, p, m \in \mathbb{N}$、一个有序二叉决策图 D、一个具有 k个输入和 m个门的布尔电路 C，以及一个在 $\mathsf{B}(p)$ 上的二阶有限自动机 A。**参数：** k、 p、 m、 $|\mathsf{A}|$。**问题：**是否存在宽度至多为 p 的有序二叉决策图 $D_1, \ldots, D_k \in \mathsf{F}(\mathsf{A})$，使得 $f_D = F_C(f_{D_1}, \ldots, f_{D_k})$?

我们的主要结果（定理 4.4）指出，函数分解可以在以下时间内求解

$$2^{p^{O(2^m)}} \cdot |\mathcal{A}|^k \cdot |D|$$

其中， $|D|$ 是表示待分解函数的输入有序二叉决策图的大小。值得注意的是，当参数 k、 p、 m、 $|\mathsf{A}|$ 固定时，我们的算法能够在与输入有序二叉决策图大小 D成线性关系的时间内运行。

下面简要说明我们采用这种参数化方式的动机。首先请注意，长度为 n 、宽度为p 的有序二叉决策图，其描述所需的比特数为 $O(p \cdot n)$。在通常的分解问题中，参数 k 通常取 2，因为此时的目标是将给定的数学对象分解为两个更简单的数学对象。任何具有 k 个输入的布尔函数，都可以由至多含有$O(2^k/k)$ 个门的布尔电路计算（Shannon 1949）。因此，参数 m有一个关于 k的函数上界。尽管如此，将电路大小作为参数也是合理的，因为电路大小可能远小于平凡上界。例如，作用于 k 位的与函数可以由含有 $k-1$ 个门（扇入为 2）的电路计算。最后，许多有趣的函数类都可以用常数大小的二阶有限自动机表示（Kuske 2021；MeloandOliveira Oliveira 2020）。

我们在函数重配置框架内证明了主要结果。更具体地说，我们引入了相对于输入函数 f_1、……、 f_k 的电路 C 的重配置宽度概念（定义 4.1），这是一种可能具有独立研究价值的复杂度度量。直观而言，该度量刻画了这样一个过程所产生的函数的最大复杂度：根据电路 C 所提供的规范，将输入函数 f_1、……、 f_k 重配置为输出函数 $f = F_C$（f_1、……、 f_k）。在第 4 节中，我们介绍了函数重配置问题 FunctionalReconfiguration，这是函数分解问题 FunctionalDecomposition 的一种重配置变体，其中要求重配置宽度低于阈值 w。我们证明，该问题可以在 $2^{O(m \cdot w^2 \log w)} \cdot |\mathsf{A}|^k \cdot |D|$ 时间内求解（定理 4.2）。将定理 4.2 与关于重配置宽度、因子函数的宽度以及电路大小之间关系的上界相结合，即可得到我们的主要结果（引理 4.3）。

2 预备知识

2.1 基础知识

我们令 $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ 表示自然数的集合，并令 $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 表示正自然数的集合。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。根据此记号， $[0] = \emptyset$。对于每个 $w \in \mathbb{N}_+$，我们令$[\![w]\!] = \{0, 1, \ldots, w-1\}$。

字母表 是任意有限的非空集合 Σ。 Σ 上的*字符串* 是由 Σ 中的符号构成的有限序列。我们令 Σ^* 表示 Σ 上所有字符串的集合，包括空字符串 λ，并令 $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$ 表示 Σ 上所有非空字符串的集合。 Σ 上的*语言* 是任意子集 $L \subseteq \Sigma^*$。对于每个 $k \in \mathbb{N}_+$，我们令 Σ^k 表示 Σ 上长度为 k的所有字符串的集合。

2.2 α-正则语言

我们的证明　　结果高度依赖自动机理论中的技术。为此，我们简要回顾一些　　e
基本概念　　关于有限自动机和正则语言。

有限自动机是一种元组 $A = (\Sigma, Q, I, F, \Delta)$，其中 Σ 是一个字母表，Q 是一个有限状态集合，$I \subseteq Q$ 是一个初始状态集合，$F \subseteq Q$ 是一个终态集合，$\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ 是一个转移集合。如果存在一个序列，则称字符串 $x \in \Sigma^n$ 被 A接受

$$(q_0, x_1, q_1)(q_1, x_2, q_2) \ldots (q_{n-1}, x_n, q_n)$$

使得 $q_0 \in I$，$q_n \in F$，且对于每个 $i \in [n]$，(q_{i-1}, x_i, q_i) 都是 Δ 中的一条转移。A 的语言定义为所有

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{x \mid x \text{ is accepted by } \mathcal{A}\}$$

被 A 接受的所有字符串组成的集合。注意，本文讨论的有限自动机可以是非确定性的，这意味着对于某个状态 q 和某个符号 $a \in \Sigma$，可能存在两个状态 q' 和 q''，使得 (q, a, q') 和 (q, a, q'') 都是 A 中的转移。

定义 *2.1.* 设 $\alpha \in \mathbb{N}$ 和 $L \subseteq \Sigma^*$。若存在一个定义在 Σ 上、状态数至多为 α 的有限自动机 A，使得 L (A) $= L$，则称 L 是 α-正则的。

在有限自动机的乘积构造中，两个自动机 A 和 A′ 合并为一个自动机 A $\times$ A′，其状态是分别来自 A 和 A′ 的状态对 (q, q')，并定义转移如下：$(q, q') \xrightarrow{\sigma} (r, r')$ 当且仅当 $q \xrightarrow{a} r$ 属于 A 且 $q' \xrightarrow{a} r'$ 属于 A′。初始（终）状态是相应自动机的初始（终）状态对。可以证明，$L(A \times A') = L(A) \cap L(A')$（Hopcroft 1971）。以下观察是这一构造的直接推论。

观察 2.2. 设 L 是一个 α-正则语言，L' 是一个 α'-正则语言。那么 $L \cap L'$ 是 $(\alpha \cdot \alpha')$-正则 *ar.*

2.3 布尔电路

我们将一个输入变量为 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ 的布尔电路视为门的序列 $C = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$，并满足以下条件：

(1) 每个门 g_i 都属于以下类型之一：(a) 集合 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ 中的变量；(b) 对某个 $j < i$，非门 $g_i =$ 非(g_j)；(c) 对某些 $j, l < i$，与门 $g_i =$ 与(g_j, g_l)；(d) 对某些 $j, l < i$，或门 $g_i =$ 或(g_j, g_l)。

(2) 对于每个 $i \in [k]$，恰好存在一个 $j \in [m]$ 使得 $g_j = x_i$。(3) g_m 是唯一的输出门，即不作为任何其他门输入的门。

给定一个布尔电路 $C = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ 和一个索引 $i \in [m]$，我们用 $F_{g_i}: \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ 表示在门 g_i 处计算的布尔函数。我们可以用 F_C 表示由 C 的输出门计算的布尔函数 F_{g_m}。如果存在一个布尔电路 C 使得 $f = F_C(f_1, \ldots, f_k)$，我们就称函数 $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 是函数 $f_1, \ldots, f_k: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 的布尔组合。更具体地说，对于每个 $x \in \{0,1\}^n$，都有 $f(x) = F_C(f_1(x) \ldots, f_k(x))$。

设 $C = (g_1, \ldots, g_m)$ 是一个布尔电路。门 g_i 的深度归纳定义如下。如果 g_i 是输入门，那么 $d(g_i) = 0$。另一方面，如果 g_i 不是输入门，那么 g_i 的深度定义为 g_i 的一个输入的最大深度加 1。

3 自动机与函数类

在最传统的情形下，有限自动机用于表示给定有限字母表上的字符串集合Σ，或者等价地，用于表示类型为 $\Sigma^* \to \{0, 1\}$ 的函数。近年来，在各种各样的情境中，人们定义了自动机理论形式，旨在表示字符串集合的集合，或者等价地，表示函数类（Case 等，2013；Jain 等，2012；Kuske 2021；Melo and Oliveira Oliveira 2020；

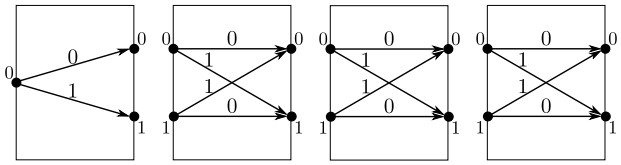


图 1. 一个宽度为 2、长度为 4 的有序二叉决策图，接受 {0、1}^{4} 中所有奇校验的字符串。注意，每个奇校验字符串（例如 1011）都会到达最后一层像集中的元素 1，而每个偶校验字符串（例如 1010）都会到达最后一层像集中的元素 0。

Zaid 等，2017年）。本节将介绍（Melo and Oliveira Oliveira 2020）中的方法，该方法基于二阶有限自动机的概念。我们之所以关注这种形式体系，是因为以此方式表示的函数类具有若干有用的封闭性和可判定性性质，例如对交集、并集和有界宽度补运算的封闭性，并且包含关系和交集非空性测试都是可判定的。

3.1 有序二叉决策图

我们首先用一种与文献中通常采用的略有不同的记法来定义有序二叉决策图（Bryant 1992）。这样做的原因是，在我们的工作中，将有序二叉决策图视为字母表 $\widehat{\mathrm{B}}(w)$ 上的符号序列会更加方便，其中 $\mathcal{B}(w)$ 由 w 层组成。

设 $w \in \mathbb{N}_+$。我们称子集 $B \subseteq [\![w]\!] \times \{0, 1\} \times [\![w]\!]$ 为一个 w 层。我们用 $\mathrm{B}(w)$ 表示所有 w-层构成的集合。对于每个 $B \in \mathrm{B}(w)$，我们定义

$$\mathrm{Dom}(B) = \{q \mid \exists (a, q'), (q, a, q') \in B\}$$

是 B的定义域，并且

$$\mathrm{Im}(B) = \{q' \mid \exists (q, a), (q, a, q') \in B\}$$

是 B的像集。给定 n， $w \in \mathbb{N}_+$，长度为 n 且宽度至多为 w的有序二叉决策图（OBDD）是一个由 w个层组成的序列 $D = B_1 B_2 \dots B_n$，满足以下条件：

(1) $\mathrm{Dom}(B_1) = \{0\}$，(2) 对每个 $i \in [n-1]$，$\mathrm{Im}(B_i) = \mathrm{Dom}(B_{i+1})$，(3) 对每个 $i \in [n]$、每个 $q \in \mathrm{Dom}(B_i)$以及每个 $a \in \{0, 1\}$，存在唯一的 q'使得（q， a， q'） $\in B_i$。

我们称字符串 $x = x_1 x_2 \dots x_n$ 被 D 接受，如果存在一个序列

$$(q_0, x_1, q_1)(q_1, x_2, q_2) \dots (q_{n-1}, x_n, q_n)$$

其中对于每个 $i \in [n]$， $(q_{i-1}, x_i, q_i) \in B_i$，且 $q_n \in [\![w]\!] \setminus \{0\}$。直观而言，如果 x到达 D最后一层像集中的一个非零元素，则 x被 D接受。 D 的语言是集合

$$\mathcal{L}(D) = \{s \mid s \text{ is accepted by } D\}.$$

我们也可以将长度为 n 的 OBDD 视为二元函数 $f_D \colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$的一种表示。更具体地，对于每个 $s \in \{0,1\}^n$，我们定义 $f_D(s) = 1$ 当且仅当 $s \in \mathrm{L}(D)$。换言之，OBDD D表示 f_D的支撑集，即集合 $f^{-1}(1)$ 中所有满足 f映射为 1 的字符串，其中 $f^{-1}(1)$ 是 $\{0,1\}^n$ 中的字符串集合。

在图 1中，我们展示了一个 OBDD 的示例。每一层由一个方框表示，而该层中的每个三元组 (q, a, q') 由一个箭头表示 $q \xrightarrow{a} q'$。

如果对于每个 $i \in [n]$，以及每两个 j， $j' \in \mathrm{Im}(B_i)$ 且满足$j < j'$，在 $\{0, 1\}^i$ 中到达 j 的字典序最小字符串都小于到达

中的字符串$\{0,1\}^i$到达j'。例如，图$D1$所示的有序二叉决策图是规范化的，因为对于每个$i \in [4]$，到达像集 0 中的元素B_i的字典序最小字符串是0^i，而到达元素1 的字典序最小字符串是$0^{i-1}1$。

有序二叉决策图$D = B_1B_2 \dots B_n$的大小记作$|D|$，定义为$|D| = |\mathrm{Dom}(B_1)| + \sum_{i\in[n]} |\mathrm{Im}(B_i)|$。$D$的宽度定义为$\mathrm{w}(D) = \max\{|\mathrm{Im}(B_i)|\}$。下面的定理在有序二叉决策图领域广为人知，它指出，每个有限语言$L \subseteq \{0,1\}^n$都对应一个唯一的规范化有序二叉决策图D，其大小最小，且满足$\mathrm{L}(D) = L$。此外，该有序二叉决策图的宽度也最小。

定理 3.1（（Bryant 1992；Melo 和 Oliveira Oliveira 2020））。对于每个有序二叉决策图D，都存在唯一的规范化有序二叉决策图$C(D)$，其大小最小，且满足以下性质：$\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(C(D))$。此外，$C(D)$在所有满足以下条件的有序二叉决策图中宽度最小：$D'$满足$\mathcal{L}(D') = \mathcal{L}(D)$。

注意，如果D是一个长度为n且宽度至多为w的有序二叉决策图，那么可以利用无环有限自动机最小化的标准算法，并随后进行规范化，在时间$O(w \cdot n)$内构造出$\mathrm{C}(D)$（Bryant 1992；Melo 和 Oliveira Oliveira 2020）。$\mathrm{C}(D)$经过规范化这一事实保证了它在语法上唯一，也就是说，对于任意两个有序二叉决策图D和D'，$\mathrm{L}(D) = \mathrm{L}(D')$当且仅当$\mathrm{C}(D) = \mathrm{C}(D')$。在大多数需要最小有序二叉决策图的应用中，只需考虑经过状态重命名后达到最小的有序二叉决策图即可。然而，在我们的应用中，语法唯一性是一项重要要求。

3.2 二阶有限自动机

回顾一下，我们将宽度为w、长度为n的有序二叉决策图D视为由w层组成的序列$D = B_1B_2 \dots B_n$。换言之，$\widehat{\sim}D$只是一个长度为n、取自字母表$\mathrm{B}(w)$（即所有层的集合）的字符串。需要注意的是，集合$\mathrm{B}(w)^n$中的字符串并非都是长度为n且宽度为w的有效有序二叉决策图，因为并非所有此类字符串都满足第3.1小节所述的条件1—3。我们用$\mathrm{B}(w)^{\circ n}$表示$\mathrm{B}(w)^n$中所有属于有序二叉决策图的字符串构成的集合。我们用$\mathrm{B}(w)^{\circledast} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}(w)^{\circ n}$表示包含空字符串以及所有宽度至多为$w$的有序二叉决策图的集合。下面的命题指出，集合$\mathrm{B}(w)^{\circledast}$是$2^w$-正则的。

命题 3.2. 对于每个$w \in \mathbb{N}$，都存在一个有限自动机$\mathcal{A}(w)$，其状态数为2^w，使得$\mathcal{L}(\mathcal{A}(w)) = \mathcal{B}(w)^{\circledast}$。

证明。$\mathrm{A}(w)$的状态是$[\![w]\!]$的子集。唯一的初始状态是状态$\{0\}$。所有状态都是终态。对于每一对状态S和S'，以及每个$B \in \mathrm{B}(w)$，当且仅当$S = \mathrm{Dom}(B)$且$S' = \mathrm{Im}(B)$时，存在转移(S, B, S')。显然，序列$D = B_1B_2 \dots B_n$被$\mathrm{A}(w)$接受，当且仅当$\sim D \in \mathrm{B}(w)^{\circ n}$。□

由于每个宽度至多为w的有序二叉决策图D都表示一个函数f_D，因此，宽度至多为w的有序二叉决策图集合可视为一个函数类的表示。也就是说，该函数类由集合中有序二叉决策图所关联的所有函数组成。我们尤其关注那些可以用字母表$\mathrm{B}(w)$上的有限自动机进行有限表示的函数类。

定义 3.3. 如果有限自动机A在$\mathrm{B}(w)$上满足$\mathrm{L}(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}(w)^{\circledast}$，我们就称$\mathrm{A}$为二阶有限自动机。我们令

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \{f_D : D \in \mathcal{L}(\mathcal{A})\}$$

表示由A表示的函数类。

如果存在某个$w \in \mathbb{N}$以及某个在$\mathrm{B}(w)$上的二阶有限自动机A，使得$\mathrm{G} = \mathrm{F}(\mathrm{A})$，我们就称函数类$\mathrm{G}$是可判定的。

设$w, w' \in \mathbb{N}$，并设$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A}(w))$。我们将宽度为$w$的$\mathcal{G}$的补集定义为函数类$\overline{\mathcal{G}}^w = \mathcal{F}(\mathcal{A}(w)) \setminus \mathcal{G}$。接下来的定理引自 Melo 和 Oliveira Oliveira 2020，给出了一些基本的封闭性和

判定函数类的可判定性性质。我们注意到，这些性质并不能直接由正则语言通常的封闭性和可判定性性质推出。问题在于，多个宽度至多为 w 的有序二叉决策图可能表示同一个函数。因此，通常无法在 F (A) 中的函数与 L(A) 中的有序二叉决策图之间建立一一对应关系。

定理 3.4 ((Melo and Oliveira Oliveira 2020)). 决策函数类在并集、交集和有界宽度补运算下封闭。此外，正则函数类的包含关系和交集非空性是可判定的。

4 函数重配置

一个含有 C 个 k 输入的布尔电路，可以视为一个过程的规格说明：该过程将输入函数 $f_1, \ldots, f_k$ 重配置为输出函数 $f = F_C(f_1, \ldots, f_k)$，其中 F_C 是由 C 计算得到的 k 位函数。本节将为这种重配置过程引入一种合适的复杂度度量。具体来说，相对于 $f_1, \ldots, f_k$，我们将 C 的重配置宽度定义为重配置过程中出现的函数 $F_{g_i}(f_1, \ldots, f_k)$ 的最大复杂度（即宽度）。

给定函数 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，我们用 $\mathrm{Can}(f)$ 表示长度为 n 的（唯一）规范有序二叉决策图 D，使得 $f_D = f$（见定理 3.1）。换言之，规范有序二叉决策图 D 的语言为 $\mathrm{L}(D) = f^{-1}(1)$。注意，$D$ 在所有表示 f 的有序二叉决策图中具有最小宽度。利用这一概念，我们可以定义一个 k 输入布尔电路 C 相对于函数 f_1、…、$f_k\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 的重配置宽度。

定义 *4.1*（重配置宽度）。设 $C = (g_1, \ldots, g_m)$ 是一个具有 k 个输入的布尔电路，且 $f_1, \ldots, f_k\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 是布尔函数。相对于 $f_1, \ldots, f_k$，C 的重配置宽度定义为

$$\mathbf{w}(C, f_1, \ldots, f_k) = \max_{i \in [m]} \mathrm{w}(\mathrm{Can}(F_{g_i}(f_1, \ldots, f_k))).$$

下一个问题是函数分解的一个细化。在此细化中，我们要求相对于 $f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}$，C 的重配置宽度有界于 w。换句话说，我们希望将函数 f_D 分解为较简单的函数 $f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}$，使得在将 $f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}$ 重配置为 f_D 的过程中出现的所有函数都具有较低的复杂度（即宽度至多为 w）。

问题名称：函数重配置**给定：**数 $k, w, p, m \in \mathbb{N}$，以及 $p < w$、一个有序二叉决策图 D、一个具有 k 个输入和 m 个门的布尔电路 C，$\widehat{\ }$ 和一个定义在 $\mathrm{B}(p)$ 上的二阶有限自动机 A。**参数：** $k, w, m,$|A|.**问题：**是否存在宽度至多为 p 的有序二叉决策图 $D_1, \ldots, D_k \in \mathrm{F}(\mathrm{A})$，使得 $f_D = F_C(f_{D_1}, \ldots, f_{D_k})$ 且$\mathbf{w}(C, f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}) \leq w$?

下一个定理的证明详见第5节。该定理指出，若以因子函数的数量 k、重配置宽度 w、电路 C 的大小 m 以及表示函数类 |A|的二阶自动机的大小为参数，则函数重配置问题是固定参数可解的。我们注意到，参数 m 有上界 $O(2^k/k)$，因为任何具有 k 个输入的布尔函数都可以由大小至多为 $O(2^k/k)$ 的电路计算（Shannon 1949）。此外，对参数 |A| 的依赖形式为 $|\mathrm{A}|^k$。因此，当 k 和 w 固定时，即使A的状态数关于 n 是多项式级的，我们的函数重配置算法仍可在多项式时间内运行。

定理 4.2。函数重配置 可以及时解决

$$2^{O(m \cdot w^2 \log w)} \cdot |\mathcal{A}|^k \cdot |D|.$$

在函数重配置问题中，我们需要指定重配置过程中出现的有序二叉决策图的最大宽度。接下来，我们根据表示某个因子函数的规范有序二叉决策图的最大宽度 p，以及分解器电路 C 的深度 d，估算重配置宽度的一个上界。注意到 d 的上界是电路的门数 m，而且 m 的上界是 $O(2^k/k)$，我们还可以得到在以 p 和 m 或以 p 和 k 为参数时求解函数分解的界。

⁀引理 4.3. </style}设 , . . . , 是 B $(p)^{\circ n}$ 中的有序二叉决策图，并设 C 是一个具有 k 个输入、深度至多为 d 的电路。那么w$(C, f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}) \leq p^{2^d}$。

证明。设 $C = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$。我们声称，对于每个 $i \in [m]$，有序二叉决策图 Can$(F_{g_i}(f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}))$ 的宽度上界为 p^{2^d}，其中 d 是 C 中门 g_i 的深度。证明对门的深度进行归纳。基例中，设 g_i 是深度为 0 的门，也就是说，是一个输入门。那么，对于某个 $j \in [k]$，$F_{g_i}(f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}) = f_{D_j}$。由于 $D_j \in \widehat{\mathrm{B}}(p)^{\circ n}$，我们可知 Can$(F_{g_i}(f_{D_1}, \ldots, f_{Dk}))$ 的宽度至多为 $p^{2^0} = p$。现在，设$g_i = \mathrm{AND}(g_j, g_k)$ 是一个深度为 d 的门，并假设引理的结论对深度至多为 $d-1$ 的每个门都成立。根据归纳假设，存在有序二叉决策图 $D_{g_j}, D_{g_k} \in \widehat{\mathrm{B}}(p^{2^{d-1}})$，分别计算函数$F_{g_j}(f_{D_1}, \ldots, f_{Dk})$ 和 $F_{g_k}(f_{D_1}, \ldots, f_{D_k})$。由于 $g_j = \mathrm{AND}(g_j, g_k)$，我们有 $f_{D_{g_i}} = f_{D_{g_j}} \wedge f_{D_{g_k}}$；或者，$\mathrm{L}(D_{g_i}) = \mathrm{L}(D_{g_j}) \cap \mathrm{L}(D_{g_k})$。可以证明（见 (Melo and Oliveira Oliveira 2020) 的引理 15），给定宽度至多为 p 的有序二叉决策图 D 和 D'，存在一个宽度至多为 p^2、接受语言 $\mathrm{L}(D) \cap \mathrm{L}(D')$ 的有序二叉决策图。因此，存在一个宽度至多为 $(p^{2^{d-1}})^2 = p^{2^d}$、计算函数$F_{g_i}(f_{D_1}, \ldots, f_{D_k})$ 的有序二叉决策图。对于 $g_i = \mathrm{OR}(g_i, g_j)$ 的情形，也可以用类似的论证证明。□

将引理 4.3 代入定理 4.2 即可得到求解 函数分解 的以下上界。

定理 4.4. 函数分解可以在以下时间内求解
(1) $2^{p^{O(2^d)}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$,
(2) $2^{p^{O(2^m)}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$,
(3) $2^{p^{2^{O(2^k/k)}}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$.

证明。 第 1 项直接由将引理 4.3 代入定理 4.2即可得出。第 2 项由注意到大小为 m 的电路深度至多为 m 可得。第 3 项则由以下事实得出：任意具有 k 个输入的布尔函数都可由大小为 $O(2^k/k)$的电路计算。□

5 定理 4.2 的证明

本节将证明我们的主要技术定理（定理 4.2）。我们的证明基于自动机理论技术。特别是，我们将使用自动机来定义关系，并对这些关系进行运算。为求完整起见，我们回顾该领域的一些基本概念。关于这一主题的更多文献，例如可参见（Blumensath 和 Grädel 2000；MeloandOliveira Oliveira 2020）。

5.1 作为语言的关系

给定集合 S和正数 $r \in \mathbb{N}_+$，我们用 $S^{\times r}$表示由 S中的元素组成的所有 r-元组的集合。给定集合 X和 Y，我们用 Y^X表示所有形如 $f\colon X \to Y$的函数所组成的集合。

设 x_1，x_2、……、x_k 是长度为 n 的字符串，分别来自字母表 Σ_1，Σ_2、……、Σ_r。x_1，x_2、……、x_r 的张量积是如下字符串：

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r$$

其长度为 n，字母表为 $\Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_r$，其中对每个 $i \in [n]$，位置 i 上的符号是 r 元组 $(x_{1,\,i},\ x_{2,\,i}、\ \ldots\ldots、\ x_{r,\,i})$。

设 $n \in \mathbb{N}_+$、$R \subseteq \Sigma_1^n \times \cdots \times \Sigma_r^n$ 是一个 r 元关系，由分别基于字母表 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ 的字符串 r 元组组成。与 R 相关联的语言是集合 $\mathrm{L}(R) \subseteq (\Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_r)^+$，定义如下。

$$\mathcal{L}(R) = \{x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r \ :\ (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in R\}.$$

如果语言 $\mathrm{L}(R)$ 是 α-正则的，我们就称 R 是 α-正则的，其中 $\alpha \in \mathbb{N}_+$ 是某个值。

5.2 选择器

设 Σ 是一个字母表，且 $r, m \in \mathbb{N}_+$。一个 (r, m)-选择器是一个对 (R, S)，其中 $R \subseteq (\Sigma^*)^{\times r}$ 是一个元数为 r 的关系，且 $S = (i_1, \ldots, i_r)$ 是 $[m]^{\times r}$ 中的一个元组。(R, S) 的语言定义为

$$\mathfrak{S}[R, S] = \{u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \in (\Sigma^{\times m})^+ \mid u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r} \in \mathcal{L}(R)\}.$$

命题 5.1。 设 (R, S) 是一个 (r, m)-选择器。如果 R 是一个 α-正则关系，那么语言 $\mathfrak{S}[R, S]$ 是 α-正则的。

证明。设 $S = (i_1, \ldots, i_r)$，并考虑映射 $\mathfrak{m}_S\colon \Sigma^{\times m} \to \Sigma^{\times r}$ 其中 $\mathfrak{m}_S(a_1, \ldots, a_m) = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_r})$。于是，我们有 $\mathfrak{S}[R, S] = \mathfrak{m}_S^{-1}(\mathrm{L}(R))$。换言之，$\mathfrak{S}[R, S]$ 是 $\mathrm{L}(R)$ 在映射 $\mathfrak{m}$ 下的逆同态。自动机理论中众所周知，由字母表之间的映射导出的逆同态会保持自动机的状态数。更具体地说，在我们的情形中，给定一个至多有 α 个状态、接受语言 $\mathrm{L}(R)$ 的自动机 A，我们考虑由 A 得到的自动机 A'：将每个转移 $(q, (a_1, \ldots, a_r)\ q')$ 替换为转移集合 $\{(q, b, q') :\ b \in \mathfrak{m}^{-1}(a_1, \ldots, a_r)\}$。接着可以直接验证，$\mathrm{L}(A') = \mathfrak{m}_S^{-1}(\mathrm{L}(R))$。这表明 $\mathfrak{S}[R, S]$ 是 α-正则的。□

给定语言 $L \subseteq (\Sigma^{\times m})^*$ 和一个 (r, m)-选择器 (R, S)，其中 $S = (i_1, \ldots, i_r)$，我们令

$$\mathrm{sel}(L, R, S) = \{u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_m \in L \mid u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r} \in \mathcal{L}(R)\}$$

表示 L 的子集，其中字符串在条目 $(i_1, \ldots, i_r)$ 中与关系 R 一致。我们称 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 为 L 的 (R, S)-选择。

命题 5.2. 设 (R, S) 为一个 (r, m)-选择器，且 $L \subseteq (\Sigma^{\times m})^*$。如果 L 是 α-正则的，且 R 是 β-正则的，那么 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 是 $(\alpha \cdot \beta)$-正则的。

证明。语言 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 是 L 与语言 $\mathfrak{S}[R, S]$ 的交集。根据命题 5.1，后者是 β-正则的，因为 R 是 β-正则的。给定一个至多有 α 个状态且接受 L 的自动机 A，以及一个至多有 β 个状态且接受 $\mathrm{L}(R)$ 的自动机 A′，自动机理论中的标准乘积构造可得到一个至多有 $\alpha \cdot \beta$ 个状态且接受 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 的自动机 A″。□

5.3 有用关系

本节给出在二阶有限自动机上表示标准集合论运算的关系的正则性上界。

下面的定理将（Melo and Oliveira Oliveira 2020）中的定理 9 改编到有序二叉决策图的语境中。它指出，将一个有序二叉决策图与其确定性规范有序二叉决策图配对的关系 R_{can}^{det} 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则的。

定理 5.3。 *[(Melo and Oliveira Oliveira 2020)]*令 w_1、$w_2 \in \mathbb{N}$ 和 w 等于 最大值$\{w_1$、$w_2\}$。以下关系是 $2^{O(w \cdot \log w)}$ 正则的。

$$R_{can}^{det}(w_1, w_2) = \{(D, C(D)) \mid D \in \widehat{\mathcal{B}}(w_1)^{\circledast}, C(D) \in \widehat{\mathcal{B}}(w_2)^{\circledast}\}.$$

接下来，我们定义几个有用关系。

定义 *5.4.* 下文中，令 $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{N}$。

(1) $R_{=}(w_1, w_2) = \{(D_1, D_2) \mid D_i \in \mathrm{B}(w_i)^{\circledast}, \mathrm{L}(D_1) = \mathrm{L}(D_2)\}$. (2) $R_{\cap}(w_1, w_2, w_3) = \{(D_1, D_2, D_3) \mid D_i \in \mathrm{B}(w_i)^{\circledast}, \mathrm{L}(D_3) = \mathrm{L}(D_1) \cap \mathrm{L}(D_2)\}$. (3) $R_{\cup}(w_1, w_2, w_3) = \{(D_1, D_2, D_3) \mid D_i \in \mathrm{B}(w_i)^{\circledast}, \mathrm{L}(D_3) = \mathrm{L}(D_1) \cup \mathrm{L}(D_2)\}$. (4) $R_{\neg}(w_1, w_2) = \{(D_1, D_2) \mid D_i \in \mathrm{B}(w_i)^{\circledast}, \mathrm{L}(D_1) = \overline{\mathrm{L}(D_2)}\}$.

利用定理5.3，可以推导出以下推论。

推论 5. 5. 令 w_1、w_2、$w_3 \in \mathbb{N}$ 和 w 等于 最大值$\{w_1, w_2\}$（或在适当情况下取 最大值$\{w_1, w_2, w_3\}$）。(1) $R_{=}(w_1, w_2)$ 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则。(2) $R_{\cap}(w_1, w_2, w_3)$ 是 $2^{O(w^2 \text{对数} w)}$-正则。(3) $R_{\cup}(w_1, w_2, w_3)$ 是 $2^{O(w^2 \text{对数} w)}$-正则。(4) $R_{\neg}(w_1, w_2)$ 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则

推论 5.5 的证明见附录 A。下文中，我们将用 $R_{=}(w)$ 表示 $R_{=}(w_1, w_2)$当 $w_1 = w_2$时。此记法可类似地扩展到上述推论中的其他关系。

5.4 主要发展

给定函数 $f_1 : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 和 $f_2 : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，令 $f_1 \wedge f_2 : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为支集等于 f_1与 f_2的支集交集的函数，令 $f_1 \vee f_2 : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为支集等于 f_1与 f_2的支集并集的函数，并令 $\neg f_1 : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为支集等于 f_1的支集补集的函数。

定义 *5.6*（一致性）。设 $C = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ 是一个具有 k 个输入 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ 的布尔电路，并令 $D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_m \in (\mathrm{B}(w)^{\times m})^{\circledast}$。对于每个 $\ell \in [m]$，若满足以下条件，则称 $D_1 \otimes D_2 \otimes \cdots \otimes D_m$ 与 C 在第 ℓ 个门之前一致：对于每个 $i \in [\ell]$:

(1) 如果 $g_i = \text{与}(g_j, g_h)$，则 $f_{D_i} = f_{D_j} \wedge f_{D_h}$;

(2) 如果 $g_i = \text{或}(g_j, g_h)$，则 $f_{D_i} = f_{D_j} \vee f_{D_h}$;

(3) 如果 $g_i = \text{非}(g_j)$，则 $f_{D_i} = \neg f_{D_j}$。

如果 $D_1 \otimes D_2 \otimes \cdots \otimes D_m$与 C在门 m之前一致，那么我们就简单地说 $D_1 \otimes D_2 \otimes \cdots \otimes D_m$与 C一致。

设 $m \in \mathbb{N}_+$，并且 $(\mathrm{B}(w)^{\times m})^{\circledast}$是字母表 $\mathrm{B}(w)^{\times m}$上的语言，由所有形如 $D_1 \otimes D_2 \otimes \cdots \otimes D_m$ 的字符串组成，其中对于每个 $i \in [m]$，D_i 都是 $\mathrm{B}(w)^{\circledast}$ 中的一个有序二叉决策图，且 $|D_1| = |D_2| = \cdots = |D_m|$。

下一个命题（取自（Melo 和 OliveiraOliveira 2019）命题 9）给出了正则语言张量积的正则性上界。

命题 5.7（（Melo 和 Oliveira Oliveira 2019））。设 r_1。设 L_1 是 $(\Sigma_1^{\times r_1})^+$ 中的语言，L_2 是 $(\Sigma_2^{\times r_2})^+$ 中的语言。若 L_1 是 α_1 正则的，且 L_2 是 α_2-正则的，则语言 $L_1 \otimes L_2 \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}^{\times (r_1 + r_2)})^+$ 是 $\alpha_1 \cdot \alpha_2$-正则的。

将上述结果与命题3.2结合，可得以下推论。

推论 5.8。对于每个 w、$m \in \mathbb{N}_+$，语言 $(\mathrm{B}(w)^{\times m})^{\circledast}$ 是 $2^{m \cdot w}$-正则的。

证明。 存在一个自动机接受语言 $\mathcal{B}(w)^{\circledast}$，其状态数为 2^w，根据命题 3.2。应用 5.7 可得正则性 $2^{m \cdot w}$。 □

下面的引理为与给定电路 C 一致的形如 $D_1 \otimes D_2 \otimes \cdots \otimes D_m$ 的词语言的正则性建立了一个上界。

引理 5.9. 设 $C = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ 是一个以 k 为输入的电路。该语言，

$$Con(w, C) = \{D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_m \in (\widehat{\mathcal{B}}(w)^{\times m})^{\circledast} \mid D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_m \textit{ consistent with } C\}$$

是 $2^{O(m \cdot w^2 \text{对数 } w)}$-正则的。

证明。设 $i \in [m]$，并假设 C 的门按某种适当的拓扑排序排列。对于每个内部 g_i，我们可以关联一个 (r_i, m)-选择器 (R_i, S_i)，其中 r_i 是门的元数加一。具体而言，

$$(R_i, S_i) = \begin{cases} (R_\cap(w), (j, h, i)) & \text{if } g_i = \mathsf{AND}(g_j, g_h), \\ (R_\cup(w), (j, h, i)) & \text{if } g_i = \mathsf{OR}(g_j, g_h), \\ (R_\neg(w), (j, i)) & \text{if } g_i = \mathsf{NOT}(g_j). \end{cases}$$

对于每个 $\ell \in [m]$，我们令 $Con_\ell(w, C)$ 表示由所有满足以下条件的字符串组成的语言：$D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_m$ 属于 $(\mathrm{B}(w)^{\times m})^{\circledast}$，且与 C 在门 ℓ 之前一致。

事实证明，语言 $Con_\ell(w, C)$ 可以用选择器归纳定义。具体而言，令 $\prec L_1, L_2, \ldots, L_m \subseteq (\mathrm{B}(w)^{\times m})^{\circledast}$ 为按如下方式归纳定义的语言序列。

(1) $L_1 = (\mathrm{B}(w)^{\times m})^{\circledast}$ (2) 如果 g_i 是输入门，那么 $L_i = L_{i-1}$ (3) 如果 g_i 是内部门，那么 $L_i = \mathrm{sel}(L_{i-1}, R_i, S_i)$。

我们声称，对于每个 $i \in [m]$，语言 L_i 等于语言 $Con_i(w, C)$，并且 $Con_i(w, C)$ 的正则性为 $2^{O(i \cdot (w^2 \log w) + mw)}$。

证明通过对 i 进行归纳。在基例中，我们有 $L_1 = (\mathcal{B}(w)^{\times m})^{\circledast}$，因为根据电路的定义，$g_1$ 必然是一个输入门。因此 $Con_1(w, C) = L_1$。由于 L_1 的复杂度为 $2^{m \cdot w} < 2^{O((w^2 \log w) + mw)}$，根据推论 5.8，该结论在基例中得证。

现在，令 $i \in [m-1]$，并假设该断言对 i 成立。我们证明该断言对 $i+1$ 也成立。

如果 g_{i+1} 是一个输入门，那么 $L_{i+1} = L_i$。根据假设，L_i 是 $2^{O(i \cdot (w^2 \log w) + mw)}$-正则的，因此 L_{i+1} 是 $2^{O((i+1) \cdot (w^2 \log w) + mw)}$-正则的。

如果 g_{i+1} 是一个内部节点，那么 $L_{i+1} = \mathrm{sel}(L_i, R_{i+1}, S_{i+1})$。根据选择引理，我们将 R_{i+1} 的正则性（至多为 $2^{O(w^2 \log w)}$）与 L_i 的正则性相乘。由此得到 L_{i+1} 的正则性为 $2^{O(i+1 \cdot (w^2 \log w) + mw)}$。同时，$L_{i+1} = Con_{i+1}(w, C)$，因为 $L_{i+1} = \mathrm{sel}(L_i, R_{i+1}, S_{i+1})$，使其与 C 保持一致，直至 g_{i+1}。

H既已证明我们的主张，可知 $Con_m(w, C) = Con(w, C)$ 的正则性为 $2^{O(m \cdot w^2 \log w)}$。

□

根据 $Con(w, C)$ 的定义，可以证明，相对于出现在 $Con(w, C)$ 中某个元组内的有序二叉决策图，C 在对应于 C 的输入门的条目处的重配置宽度有上界 w。更形式化地，以下推论给出了 C 相对于函数 $f_{D_{j_1}}$、……、$f_{D_{j_k}}$ 的重配置宽度上界，其中对于每个 $i \in [k]$，g_{j_i} 是对应于第 i 个输入的门。

推论 5.10。设 $C = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ 是一个具有 k 个输入、输入门为 $g_{j_1} = x_1, g_{j_2} = x_2, \ldots, g_{j_k} = x_k$ 的电路。对于任意 $D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_m \in Con(w, C)$，$\mathbf{w}(C, f_{D_{j_1}}, \ldots, f_{D_{j_k}}) \leq w$。

证明。对于每个 $i \in [m]$, $F_{g_i}(f_{D_{j_1}}, \ldots, f_{D_{j_k}})$，根据一致性的定义（定义 5.6），$= f_{D_i}$。此外，因为对于每个 $i \in [m]$, $D_i \in \mathrm{B}(w)^{\circ n}$，我们有 $\mathrm{w}(\mathrm{Can}(F_{g_i}(f_{D_{j_1}}, \ldots, f_{D_{j_k}}))) = \mathrm{w}(\mathrm{Can}(f_{D_i})) \leq w$（回忆一下，有序二叉决策图的规范形式是接受 D 的语言的最小确定性有序二叉决策图）。□

下一命题给出了语言为单个有序二叉决策图的二阶有限自动机正则性的一个直接上界。

命题 5.11。设 $D = B_1 B_2 \ldots B_n$ 是 $\mathcal{B}(w)^{\circledast}$ 中的一个有序二叉决策图。语言 $L_D = \{D\}$ 可由具有 $n+1$ 个状态的自动机接受。

证明。设 A 为这样一个自动机，其状态集合为 $\{q_0, q_1, \ldots q_n\}$，初始状态为 q_0，终态为 q_n，转移集合为 $\{(q_{i-1}, B_i, q_i) | i \in [\![n+1]\!]\}$。可以验证，$A$ 接受语言 L_D。□

通过在与 C 输入门相对应的条目中保留出现在 $Con(w, C)$ 某个元组中的有序二叉决策图集合，我们可以表示这样一些有序二叉决策图元组的语言：其在 C 下的布尔组合是非零函数（其支撑集非空）。对于任意选定的有序二叉决策图 D，还可以进一步将该语言限制为表示其布尔组合为 f_D 的函数的有序二叉决策图元组。

我们令 $Sol(w, D, C)$ 为满足以下性质的所有字符串 $D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_k \in (\widehat{\mathrm{B}}(w)^{\times k})^{\circ n}$ in $(\widehat{\mathrm{B}}(w)^{\times k})^{\circ n}$ 的集合：$f_D = F_C(f_{D_1}, \ldots\ldots, f_{D_k})$ 和 $\mathrm{w}(C, f_{D_1}, \ldots\ldots, f_{D_k}) \leq w$。

引理 5.12。设 $C = (g_1, \ldots, g_m)$ 是一个具有 k 输入变量 $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ 的电路，并设 D 是 $\widehat{\mathcal{B}}(w)^{\circ n}$ 中的一个有序二叉决策图。那么 $Sol(w, D, C)$ 是 $2^{O(m \cdot w^2 \log w)} \cdot n$-正则的。

证明。令 $L = \mathrm{Con}(w, C) \otimes L_D$ 为语言 $\mathrm{Con}(w, C)$ 与语言 L_D 的张量积。注意，这是所有有序二叉决策图张量积构成的语言，其中前 m 个有序二叉决策图的张量积属于 $\mathrm{Con}(w, C)$，而第 $(m+1)$ 个有序二叉决策图为 D。令 $g_{j_1} = x_1, \ldots, g_{j_k} = x_k$ 为 C 的输入门。于是根据引理 5.10，我们有 $\mathrm{w}(C, f_{D_{j_1}}, \ldots, f_{D_{j_k}}) \leq w$。

根据引理 5.9，$\mathrm{Con}(w, C)$ 是 $2^{O(m \cdot w^2 \log w)}$-正则的；根据命题 5.11，语言 L_D 是 $n+1$-正则的。因此，根据命题 5.7，L 是 $2^{O(m \cdot w^2 \log w)} \cdot n$-正则的。设 $R = R_{=}(w)$ 和 $S = (m, m+1)$。由于 $R_{=}(w)$ 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则的，根据引理 5.2，(R, S)-选择 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 是 $2^{O(m \cdot w^2 \log w)} \cdot n$-正则的。

注意，$\mathrm{sel}(L, R, S)$ 是所有 $m+1$ 个有序二叉决策图的张量积所构成的语言，其中前 m 个有序二叉决策图的张量积属于 $Con(w, C)$，且 $F_C(f_{j_1}, \ldots\ldots, f_{j_k}) = f_D$。

现在，设 π 是映射 $\mathrm{B}(w)^{\times m+1} \to \mathrm{B}(w)^{\times k}$，其中 $\pi(B_1, B_2, \ldots, B_{m+1}) = (B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_k})$。直观地说，$\pi$ 会删除元组 $(B_1, B_2, \ldots, B_{m+1})$ 中除坐标 $j_1, j_2, \ldots, j_k$ 以外的所有坐标。注意，在所得元组中，对于每个 $i \in [k]$，B_{j_i} 都是出现在与变量 x_i 对应的坐标中的层。由于语言的正则性在字母表之间的映射下保持不变，因此 $\pi(\mathrm{sel}(L, R, S))$ 也是 $2^{O(m \cdot w^2 \log w)} \cdot n$-正则的。我们注意到，$\pi(\mathrm{sel}(L, R, S))$ 是所有满足以下条件的 $D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_k$ 的语言：$D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_k$ 属于 $(\widehat{\mathrm{B}}(w)^{\times k})^{\circ n}$，且 f_D 是 $f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}$ 的 F_C-组合，并且 $\mathrm{w}(C, f_{D_1}, \ldots, f_{D_k}) \leq w$。这就证明了该引理。□

最后，我们还可以进一步限制 $Sol(w, D, C)$ 的元组中出现的有序二叉决策图，使其表示属于预定函数类的函数。

设 $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1, \ldots\ldots, \mathrm{A}_k)$ 是一个由 α-正则二阶有限自动机构成的元组。我们将 $Sol_{\mathcal{A}}(w, D, C)$ 定义为 $Sol(w, D, C)$ 的子集，其中对于每个 $D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_k \in Sol(w, D, C)$，$D_1 \in \mathrm{L}(\mathrm{A}_1) \ldots\ldots, D_k \in \mathrm{L}(\mathrm{A}_k)$,

$$Sol_{\mathcal{A}}(w, D, C) = \{D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_k \in Sol(w, D, C) \mid D_i \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_i), i \in [k]\}$$

定理 4.2 是以下定理的直接推论。

定理 5.13. 设 $C = (g_1, \ldots, g_m)$ 是一个具有 k个输入变量 $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$、深度至多为 d 的电路。设$\frown D$是 $B(w)^{\circ n}$ 中给定的一个有序二叉决策图，且 $A = (A1, \ldots, A_k)$ 是一个由 α-正则二阶有限自动机构成的元组。那么，语言 $Sol_{\mathcal{A}}(w, D, C)$ 是 $2^{O(m \cdot w^2 log\ w)} \cdot \alpha^k \cdot n$-正则的。

证明。由于二阶有限自动机 $A1, \ldots, A_k$ 是 α-正则的，因此存在一元关系 $R_1, \ldots, R_k, \frown R_i \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} B(w_i)^{\circ n}$，对于 $i \in [k]$，使得 $F(A_i) = \{f_D\colon\ D \in R_i\}$。令 $L = \{D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_k | D_i \in R_i\}$ 表示由 k 个有序二叉决策图 $D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_k$ 的张量积构成的语言，满足 $D_1 \in R_1, \ldots D_k \in R_k$。根据推论 5.8，该语言 L 是 α^k-正则的。

接下来，我们可以取 L 与 $Sol(w, D, C)$ 的交集。根据引理 5.12，语言 $Sol(w, D, C)$ 是 $2^{O(m \cdot w^2} \log\ w) \cdot n$-正则的。对接受 L 和 $Sol(w, D, C)$ 的自动机进行乘积构造，可知 $L \cap Sol(w, D, C)$ 是 $2^{O(m \cdot w^2} \log\ w) \cdot \alpha^k \cdot n$-正则的。注意，$L \cap Sol(w, D, C) = Sol_{\mathcal{A}}(w, D, C)$，因为它是 $Sol(w, D, C)$ 的子集，并且对于每个 $D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_k \in Sol(w, D, C)$，都有 $f_{D_1} \in F(A_1) \ldots, f_{D_k} \in F(A_k)$。□

6 应用

本节介绍函数分解问题的一些重要应用。第一个应用涉及广义 k合取的概念。也就是说，一个函数是 k 属于某个类$\mathcal{F}$的函数的布尔组合。关键区别在于，此处的分解器电路C 并非预先给定。在第二个应用中，我们针对因子有序二叉决策图的数量和有序二叉决策图的宽度，得到了一个求解有序二叉决策图分解问题的固定参数可处理算法。该问题类似于确定有限自动机分解问题（I. Jecker 等，2021；I. Jecker 等，2020；Kupferman 和 Mosheiff，2013），后者不存在以因子自动机数量为参数的固定参数可处理算法。

6.1 广义合取族

对于 $n, i \in \mathbb{N}$，若 $i \leq n$，则（n, i）-超立方体是函数 $H_{n,i}\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，满足对每个 $x \in \{0,1\}^n$,$H_{n,i}(x) = 1$ 当且仅当 $x_i = 1$。若函数 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 满足存在数值$j_1, \ldots, j_k$，使得 f是 $H_{n,j_1}, \ldots, H_n$的布尔组合，则称其为 k-合取。直观而言，若存在坐标$j_1, \ldots, j_k \in [n]$，使得对于每个输入 $x \in \{0,1\}^n$，函数值 $f(x)$ 由 $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ 的取值决定，则称 f 是 k-合取。判断一个函数是否为 k-合取的问题已在诸多不同背景下得到研究（Blais 2010）。事实证明，当输入函数 f由有序二叉决策图 D 表示时，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有一个简单的算法，可以在线性于 D大小的时间内判定 f是否为 k 合取。

观察 6.1. 给定一个长度为 n 的有序二叉决策图 D 和一个数 $k \in \mathbb{N}$，可以在线性于 D 大小的时间内，判断函数 $f_D\colon\ \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 是否为 k-*junta*。

证明。我们假设 D 已经最小化。否则，只需对有序二叉决策图应用标准最小化算法。令 $i \in [n]$，并假设 f_D 不依赖于 x_i 的取值。那么，从第 i 层的任意状态 q 到第 $i+1$ 层的每个转移都必须具有形式 $(q, 0, q')$ 和 $(q, 1, q')$。换句话说，从状态 q 出发，将 x_i 设为 1 或 0 都应到达状态 q'。如果情况并非如此，也就是说，如果第 i 层中存在转移 $(q, 0, q')$ 和 $(q, 1, q'')$，且满足 $q' \neq q''$，那么 q' 和 q'' 就可以合并，因为它们接受相同的词（因为 f_D 不依赖于 x_i）。这与 D 已经最小化的假设矛盾。因此，给定一个已最小化的有序二叉决策图，只需遍历每一层，检查每层 i 是否包含针对 $q' \neq q''$ 的转移 $(q, 0, q')$ 和 $(q, 1, q'')$。这样便可确定 D 所依赖的变量集合 $Y \subseteq x_1$，…，x_n。因此，判断 D 是否为 k-Junta 归结为检查 $|Y| \leq k$。□

文献中在多种背景下研究了更一般的联合函数概念（De 等，2019，2021）。在这些背景下，我们不要求 k 因子函数 f_1，……，f_k 是超立方体，而是要求这些函数属于某个性质良好的函数类 $\mathcal{F}$。

定义 *6.2*。 设 F 是一个布尔函数类，且 $k \in \mathbb{N}$。若存在 k 个函数 f_1，……，$f_k: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 属于 F，使得 f 是 f_1，……，f_k 的布尔组合，则称函数 $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 是一个（k，F）-联合函数。

注意，等价地，$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 是一个 (k, F)-junta，当且仅当存在某个电路 C，使其具有 (C, F)-分解 $f_1, \ldots, f_k: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$。这启发我们定义函数分解的一种变体：我们不再指定一个组合电路 C，而只需指定此类电路大小的上界。我们将这种推广称为 GeneralizedJunta。

问题名称： GeneralizedJunta **给定：** 数值 $k, p, m \in \mathbb{N}$、一个有序二叉决策图 D，以及一个定义在 B(p) 上的二阶有限自动机 A。**参数：** k, p, m, |A|。**问题：** 是否存在一个具有 k 个输入且至多有 m 个门的布尔电路 C，以及宽度至多为 p 的有序二叉决策图 $D_1, \ldots, D_k \in \mathrm{A}$，使得 $f_D = F_C(f_{D_1}, \ldots, f_{D_k})$?

下一个定理指出，GeneralizedJunta 可以在与定理4.4给出的渐近界相同的界内求解。

定理 6.3。GeneralizedJunta 可以在……时间内求解

(1) $2^{p^{O(2^d)}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$,

(2) $2^{p^{O(2^m)}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$,

(3) $2^{p^{2^{O(2^k/k)}}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$.

证明。该定理可通过枚举所有大小至多为 m 的可能电路，再应用定理 4.4 得出。由于一个含有 m 个门的电路可以用 $O(m \log m)$ 位来描述，因此这类电路的总数为 $2^{O(m \log m)}$。由于 $2^{O(m \log m)} \cdot 2^{p^{O(2^m)}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$ 仍为 $2^{p^{O(2^m)}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$，我们便证明了条目 2。若只想用 k 和 p 作为问题的参数，那么只需枚举至多含有 $m = O(2^k/k)$ 个门的所有电路。因此，得到条目 3。另一方面，若只想用电路的深度 d 作为参数，则注意到任何深度为 d 的电路至多含有 $2^{O(d)}$ 个门。因此，以深度为参数时，复杂度为 $2^{2^{O(d)}} \cdot 2^{p^{O(2^d}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$，其渐近量级仍为 $2^{p^{O(2^d}} \cdot |\mathrm{A}|^k \cdot |D|$。因此，得到条目 1。□

6.2 OBDD 分解

自动机理论中的一个重要分解问题是 *DFA* 分解问题(I. Jecker 等，2021；I. R. Jecker 等，2020；Kupferman 和 Mosheiff，2013)。在这个问题中，给定一个具有 A 个 w状态的 DFA，目标是判断是否存在 DFA A_1、……、A_k，每个 DFA 的状态数至多为 $w-1$，使得$L(A) = L(A_1) \cap \cdots \cap L(A_k)$。

在 OBDD 的背景下也有一个类似的问题，即 OBDD 分解问题：给定一个宽度至多为 w 的 OBDD，目标是判断是否存在 OBDD D_1、……、D_k，每个的宽度至多为 $w-1$，使得 $L(D) = L(D_1) \cap \cdots \cap L(D_k)$。我们的主定理直接推论是，通过将二阶自动机 A 实例化为接受所有宽度至多为 $w-1$的 OBDD 的自动机，可以在固定参数线性时间内（即关于 $|D|$ 线性）解决这个问题。

推论 6.4。 给定一个长度为 n 且宽度至多为 w 的有序二叉决策图 D，可以在 $2^{w^{O(2^k)}} \cdot |D|$ 时间内确定是否存在宽度至多为 $w-1$ 的有序二叉决策图 D_1、…、D_k，使得 $L(D) = L(D_1) \cap \cdots \cap L(D_k)$。

7 结论与相关工作

在这项工作中，我们结合自动机理论与参数化复杂性理论中的技术，提出了一个用于处理函数重配置和函数分解问题的新框架。在我们的结果中，我们假设函数 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 在输入时通过有序二叉决策图 D 显式给出。我们注意到，如果不提供有序二叉决策图，而是提供一个能够针对语言 $L = \{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 1\}$ 回答成员查询和等价查询的预言机，则可以放宽这一假设。更具体地说，在使用成员查询和等价查询的传统学习模型中，目标是学习给定字母表 Σ 上的正则语言 L，学习者与一个能够回答以下两类查询的预言机（最小充分教师）进行交互：

(1) 成员查询：学习者在 $x \in \Sigma^*$ 中选择一个单词，教师回答 $x \in L$。 (2) 等价查询：学习者选择一个假设自动机 H，教师回答L 是否为 H的语言。如果不是，教师会向学习者提供一个反例单词$x \in \Sigma^* \setminus L$。

Angluin 的经典结果（Angluin 1987）指出，任何正则语言 L 都可以通过多项式数量的查询被精确学习，其中多项式关于表示L的最小确定性自动机的状态数，以及教师返回的最大反例的大小。由于长度为 n 且宽度为w的有序二叉决策图可以被视为一个具有 $O(w \cdot n)$ 个状态的无环有限自动机，并且在这种情况下可以假设反例的大小为 $O(n)$，Angluin 定理推出以下推论。

推论 7.1。 设 $L \subseteq \{0,1\}^n$ 是一个语言，满足存在一个有序二叉决策图 $D \in \mathcal{B}(w)^{\circledast}$，且$L = L(D)^{\circledast}$ 成立。那么可以通过 $w^{O(1)} \cdot n^{O(1)}$次成员查询和等价查询来学习 L。

因此，鉴于推论7.1 我们的结果（定理 4.2、定理 4.4 和定理 6.3）也可以用于为以下问题提供参数化方法： 函数分解 、 函数重配置 和GeneralizedJunta即使不知道待分解目标有序二叉决策图的显式描述，只要我们有一个能够回答成员查询和等价查询的预言机。

致谢

我们感谢 挪威研究委员会提供的支持，资助编号为 288761 和 326537。

参考文献

D. Angluin。1987年。“从查询和反例中学习正则集合。” 信息与计算，75，2，87–106。Y. Atzmon、F. Kreuk、U. Shalit 和 G. Chechik。2020年。“组合式零样本识别的因果视角。”载于： 神经信息处理系统进展*33*：神经信息处理系统年会*2020*，*NeurIPS 2020*，*2020*年*12*月*6*日至*12*日，线上。H. Larochelle、M. Ranzato、R. Hadsell、M. Balcan 和 H. Lin 编。https://proceedings.neurips.cc/paper/20206323 5101085672408712/hash/cedffaebedce-Abstract.html。E. Blais。2010年。“合取测试：简要综述。” 性质测试：当前研究与综述，32–40。A. Blumensath 和 E. Grädel。2000年。“自动结构。”载于： 第*15*届*IEEE*计算机科学逻辑年度研讨会论文集（*LICS 2000*）。IEEE计算机学会，51–62。M. Bohanec 和 B. Zupan。2004年。“用于开发层次多属性决策模型的函数分解方法。” 决策支持系统，36，3，215–233。B. Bollig。2012年。“关于用于最小生成树问题的基于符号 OBDD 的算法。” 理论计算机科学，447，2–12。B. Bollig。2014年。“关于有序二叉决策图的宽度。”载于： 组合优化与应用国际会议。Springer，444–458。R. E. Bryant。1992年。“使用有序二叉决策图进行符号布尔运算。” *ACM* 计算评论（*CSUR*），24，3，293–318。J. Case、S. Jain 和 F. Stephan。2013年。“自动函数、线性时间与学习。” 计算机科学中的逻辑方法。C. G. Correa、M. K. Ho、F. Callaway、N. D. Daw 和 T. L. Griffiths。2023年。“人类通过权衡效用与计算成本来分解任务。” *PLoS*计算生物学，19，6，e1011087。A. De、E. Mossel 和 J. Neeman。2019年。“你的函数是低维的吗？”载于： 学习理论会议。PMLR，979–993。

A. De、E. Mossel 和 J. Neeman。2021年。“低维函数的鲁棒测试。”载于：第53届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，584–597。S. Deniziak 和 M. Wiśniewski。2021年。“DECOLib：离散函数分解的组件库。”SoftwareX，16，100799。A. K. Goel 和 B. Chandrasekaran。1989年。“设计的函数表示与重新设计问题求解。”载于：第11届国际人工智能联合会议论文集。美国密歇根州底特律，1989年8月。N. S. Sridharan 编。Morgan Kaufmann，1388–1394。http://ijcai.org/Proceedings/89-2/Papers/086.pdf。G. D. Hachtel 和 F. Somenzi。1993年。“0-1网络中最大流的符号算法。”载于：1993年 IEEE/ACM计算机辅助设计国际会议论文集。IEEE计算机学会出版社，403–406。A. Hashemi 和 H. Vikalo。2018年。“用于子空间聚类的进化自表达模型。”IEEE信号处理精选主题期刊，12，6，1534–1546。M. Hiabu、J. T. Meyer 和 M. N. Wright。2023年。“通过低维结构的函数分解统一局部和全局模型解释。”载于：国际人工智能与统计会议。PMLR，7040–7060。J. Hopcroft。1971年。“最小化有限自动机状态的 n log n 算法。”载于：机器与计算理论。Elsevier，189–196。Y. Izza、S. Jabbour、B. Raddaoui 和 A. Boudane。2020年。“关联规则枚举：基于分解的方法。”载于：第二十九届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI 2020。C. Bessiere 编。ijcai.org，1265–1271。doi:10.24963/IJCAI.2020/176。S. Jain、Q. Luo 和 F. Stephan。2012年。“自动类的可学习性。”计算机与系统科学杂志，78，6，1910–1927。I. Jecker、N. Mazzocchi 和 P. Wolf。2021年。“分解置换自动机。”载于：第32届并发理论国际会议，CONCUR 2021，2021年8月24日至27日，线上会议（LIPIcs）。S. Haddad 和 D. Varacca 编。第203卷。Schloss Dagstuhl——莱布尼茨信息学中心，18:1–18:19。doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2021.18。I. R. Jecker、O. Kupferman 和 N. Mazzocchi。2020年。“一元素语言。”载于：第45届数学计算机科学基础国际研讨会。第170卷。O. Kupferman 和 J. Mosheiff。2013年。“素语言。”载于：数学计算机科学基础 2013。K. Chatterjee 和 J. Sgall 编。Springer柏林海德堡，柏林、海德堡，607–618。isbn: 978-3-642-40313-2。D. Kuske。2021年。“二阶有限自动机：使用自动结构的表达能力与简明证明。”载于：第25届语言理论发展国际会议论文集（DLT 2021）（计算机科学讲义）。N. Moreira 和 R. Reis 编。第12811卷。Springer，242–254。G. Laberge、Y. B. Pequignot、M. Marchand 和 F. Khomh。2024年。“通过区域解释应对 XAI分歧问题。”载于：国际人工智能与统计会议。PMLR，2017–2025。A. A. de Melo 和 M. de Oliveira Oliveira。2019年。“有限结构正规类的宽度。”载于：自动推理——CADE 27——第27届自动推理国际会议，巴西纳塔尔，2019年8月27日至30日，论文集（计算机科学讲义）。第11716卷。Springer，18–34。A. A. de Melo 和 M. de Oliveira Oliveira。2020年。“二阶有限自动机。”载于：俄罗斯第15届国际计算机科学研讨会论文集（CSR 2020）（计算机科学讲义）。H. Fernau 编。第12159卷，46–63。C. Molnar、G. Casalicchio 和 B. Bischl。2020年。“通过函数分解量化模型复杂度，以实现更好的事后可解释性。”载于：机器学习与数据库中的知识发现：ECML PKDD 2019国际研讨会，德国维尔茨堡，2019年9月16日至20日，论文集，第I部分。Springer，193–204。D. Sawitzki。2004年。“通过迭代平方实现隐式流最大化。”载于：计算机科学理论与实践当前趋势国际会议。Springer，301–313。C. E. Shannon。1949年。“双端开关电路的综合。”贝尔系统技术期刊，28，1，59–98。doi:10.1002/j.1538-7305 .1949.tb03624.x。S. Srivastava。2023年。“广义规划的层次分解与终止性分析。”人工智能研究杂志，77，1203–1236。doi:10.1613/JAIR.1.14185。L. Sun、C. H. Nguyen 和 H. Mamitsuka。2019年。“面向高效多视图多任务学习的乘法稀疏特征分解。”载于：第二十八届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI 2019，中国澳门，2019年8月10日至16日。S. Kraus 编。ijcai.org，3506–3512。doi:10.24963/IJCAI.2019/486。V. S. Vykhovanets。2006年。“离散函数的代数分解。”自动化与远程控制，67，3，361–392。H. Wang、M. Yang、K. Wei 和 C. Deng。2023年。“组合式零样本识别的层次提示学习。”载于：第三十二届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI 2023，中国澳门特别行政区，2023年8月19日至25日。ijcai.org，1470–1478。doi:10.24963/IJCAI.2023/163。P. Woelfel。2006年。“使用 OBDD 进行符号拓扑排序。”离散算法杂志，4，1，51–71。F. A. Zaid、E. Grädel 和 F. Reinhardt。2017年。“带建议自动结构与一致自动类。”载于：第26届 EACSL计算机科学逻辑年会论文集（CSL 2017）（LIPIcs）。V. Goranko 和 M. Dam 编。第82卷。Schloss Dagstuhl——莱布尼茨信息学中心，35:1–35:20。

B. Zupan、M. Bohanec、I. Bratko 和 J. Demsar。1997年。“通过函数分解进行机器学习。”载于：*ICML*，421–429。B. Zupan、I. Bratko、M. Bohanec 和 J. Demšar。1999年。“机器学习中的函数分解。”载于：人工智能高级课程。Springer，71–101。

A 省略的证明

我们给出推论5.5的证明；该推论在下文重述为推论 A.1。

推论 A.1。 令 w_1、 w_2、 $w_3 \in \mathbb{N}$ 和 w等于 最大值$\{w_1, w_2\}$ （或在适当情况下等于 最大值$\{w_1, w_2, w_3\}$）。(1) $R_{=}(w_1, w_2)$ 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则。(2) $R_{\cap}($ $w_1, w_2, w_3)$ 是 $2^{O(w^2 \text{对数 } w)}$-正则。(3) $R_{\neg}(w_1,$ $w_2, w_3)$ 是 $2^{O(w^2 \text{对数 } w)}$-正则。(4) $R_{\neg}(w_1,$ $w_2)$ 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则

证明。我们简要描述一种自动机，它可以实现推论中的每个关系。与推论的陈述一样，我们将在适当情况下令 w 等于 $\max\{w_1, w_2\}$ 或 $\max\{w_1, w_2, w_3\}$。

我们用 $R_{\text{id}}(w)$ 表示可通过的命题 2.2 决策图细化自相关得到 $\{(D, D) \mid D \in$

$R_{=}(w_1, w_2)$：令 $L = \mathrm{L}(R^{\det}_{\text{can}}(w_1, w_2)) \otimes \mathrm{L}(R^{\det}_{\text{can}}(w_1, w_2))$。由于 $R^{\det}_{\text{can}}(w_1, w_2)$ 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则的，根据命题 5.7， L 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则的。设 (R, S) 是一个 $(2, 4)$-选择器，其中 $R = R_{\text{id}}(w)$ 且 $S = \{2, 4\}$。根据选择引理（命题 5.2），(R, S)-选择 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则的。现在考虑投影 π： $\widehat{\mathrm{B}}(w)^{\times 4} \to \widehat{\mathrm{B}}(w)^{\times 2}$，其中 $\pi(B_1, B_2, B_3, B_4) = (B_1, B_3)$。注意，对 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 的第一和第三个坐标进行投影，得到 $\pi(\mathrm{sel}(L, R, S)) = \mathrm{L}(R_{=}(w_1, w_2))$，它仍然是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则的。

$R_{\cap}(w_1, w_2, w_3)$：令 γ： $[\![w]\!] \times [\![w]\!] \to [\![w^2]\!]$ 为一个双射函数，使得 $\gamma(0, 0) = 0$，我们定义第一个函数 f_γ： $\widehat{\mathrm{B}}(w) \times \widehat{\mathrm{B}}(w) \to \widehat{\mathrm{B}}(w^2)$,

$$f_\gamma(B_i, B_i') = \{(\gamma(q, q'), a, \gamma(p, p')) \mid (q, a, p) \in B_i, (q', a, p') \in B_i'\}$$

此函数将 $\widehat{\mathrm{B}}(w)$ 中的层对双射映射到 $\widehat{\mathrm{B}}(w^2)$ 中的单层。

接下来，令 γ'： $[\![w]\!] \times [\![w]\!] \to [\![w^2]\!]$ 为一个函数，使得对于 $x, y \in [\![w]\!]$, $\gamma'(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 与 $y = 0$。现在我们定义 $f_{\gamma'}$： $\widehat{\mathrm{B}}(w) \times \widehat{\mathrm{B}}(w) \to \widehat{\mathrm{B}}(w^2)$；这是对 f_γ 的略微修改。

$$f_{\gamma'}(B_i, B_i') = \{(\gamma(q, q'), a, \gamma'(p, p')) \mid (q, a, p) \in B_i, (q', a, p') \in B_i'\}$$

此函数也会将 $\widehat{\mathrm{B}}(w)$ 中的层对映射到 $\widehat{\mathrm{B}}(w^2)$ 中的单层，但它与 f_γ 的不同之处在于，对于x, $y \in [\![w]\!]$其中 $x = 0$ 或 $y = 0$， $f_{\gamma'}$会将形如 $\gamma'(x, y)$ 的状态合并为 $[\![w^2]\!]$中的单个状态 0。换句话说， $f_{\gamma'}$确保如果 $f_{\gamma'}(B_i, B_i')$ 是有序二分决策图 $f_{\gamma'}(D, D')$ 的最终层，那么它只接受同时被 D 和 D'接受的字符串。

现在注意，给定两个有序二分决策图 $D = B_1 B_2 \ldots B_l$ 和 $D' = B_1' B_2' \ldots B_l'$，我们可以得到有序二分决策图 $D'' = f_\gamma(B_1, B_1') f_\gamma(B_2, B_2') \ldots f_\gamma(B_{l-1}, B_{l-1}') f_{\gamma'}(B_l, B_l')$。有序二分决策图 D'' 表示 D 和 D' 的语言的交集，即 $\mathrm{L}(D'') = \mathrm{L}(D) \cap \mathrm{L}(D')$。

利用函数 f_γ和 $f_{\gamma'}$，现在我们可以定义字母表上的有限自动机 A $\widehat{\mathrm{B}}(w_1) \otimes \widehat{\mathrm{B}}(w_2) \otimes \widehat{\mathrm{B}}(w_1 \cdot w_2) \otimes \mathrm{B}(w_3)$ 如下所示。该自动机的状态集为 $Q(\mathrm{A}) = Q_a \cup Q_b$，其中集合 Q_a和 Q_b定义如下：

- $Q_a = \{q_{[S_1, S_2, S_3]} \mid S_1 \subseteq [\![w_1]\!], S_2 \subseteq [\![w_2]\!], S_3 \subseteq [\![w_3]\!]\}$
- $Q_b = \{q'_{[S_1, S_2, S_3]} \mid S_1 \subseteq [\![w_1]\!], S_2 \subseteq [\![w_2]\!], S_3 \subseteq [\![w_3]\!]\}$

状态 $q_{\{0\},\{0\},\{0\}}$ 被视为初始状态， $I(\mathrm{A}) = q_{\{0\},\{0\},\{0\}}$，而状态集合 Q_b 被视为终态， $F(\mathrm{A}) = Q_b$。该自动机的转移集为 $T(\mathrm{A}) = T_a \cup T_b$，其中集合 T_a 和 T_b 定义如下：

- $T_a = \{(q_{[S'^1,S'^2,S'^3]}, (B_1, B_2, f_\gamma(B_1, B_2)\ B_3)\ q_{[S_1,S_2,S_3]}) \mid \mathrm{Dom}(B_i) = S'_i, \mathrm{Im}(B_i) = S_i\}$
- $T_b = \{(q_{[S'^1,S'^2,S'^3]}, (B_1, B_2, f'^\gamma(B_1, B_2)\ B_3)\ q'_{[S_1,S_2,S_3]}) \mid$ 定义域$(B_i) = S'_i$, </style}值域$(B_i) = S_i\}$

容易验证，$\mathrm{L}(\mathrm{A})$ 是 4 个有序二分决策图 $D_1 \otimes D_2 \otimes D_3 \otimes D_4$ 的张量积所构成的语言，其中 $\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \frown D_1 \in \mathrm{B}(w_1)\ D_2 \in \mathrm{B}(w_2)\ D_3 \in \mathrm{B}(w_1 \cdot\ w_2)\ D_4 \in \mathrm{B}(w_3)$，且 $\mathrm{L}(D_3) = \mathrm{L}(D_1) \cap \mathrm{L}(D_2)$。语言 $\mathrm{L}(\mathrm{A})$ 是 $2^{O(w)}$-正则的。令 (R, S) 为一个 $(\widehat{\ }\mathrm{B}(w^2), 2, 4)$-选择器，其中 $R = R_=(w^2)$ 且 $S = \{3, 4\}$。根据选择引理（命题 5.2），(R, S)-选择 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 是 $2^{O(w^2 \cdot \log\ w)}$-正则的。现在考虑投影 π：$\widehat{\ }\mathrm{B}(w^2)^{\times 4} \to \widehat{\ }\mathrm{B}(w^2)^{\times 3}$，其中 $\pi(B_1, B_2, B_3, B_4) = (B_1, B_2, B_4)$。注意，从 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 中投影掉第三个坐标，得到 $\pi(\mathrm{sel}(L, R, S)) = \mathrm{L}(R_\cap(w_1, w_2, w_3))$，它仍然是 $2^{O(w^2 \cdot \log\ w)}$-正则的。

$\boldsymbol{R_\cup(w_1,\ w_2,\ w_3)}$：与前一种情况类似，我们令并定义 γ：$[\![w]\!] \times [\![w]\!] \to [\![w^2]\!]$ 为一个双射函数，使得 $\gamma(0,\ 0) = 0$，并定义函数 $f_\cup$：$\widehat{\ }\mathrm{B}(w) \times \widehat{\ }\mathrm{B}(w) \to \widehat{\ }\mathrm{B}(w^2)$，其中，

$$f_\cup(B, B') = \{(\gamma(q, q'), a, \gamma(p, p')) \mid (q, a, p) \in B, (q', a, p') \in B'\}$$

现在注意，给定两个有序二分决策图 $D = B_1 B_2 \ldots B_l$ 和 $D' = B'_1 B'_2 \ldots B'_l$，我们可以得到有序二分决策图 $D'' = f_\cup(B_1,\ B'_1) f_\cup(B_2,\ B'_2) \ldots f_\cup(B_l,\ B'_l)$。有序二分决策图 D'' 表示 D 和 D' 的语言的并集，$\mathrm{L}(D'') = \mathrm{L}(D) \cup \mathrm{L}(D')$。

利用函数 $f_\cup$，现在可以定义字母表上的以下有限自动机 A $\widehat{\mathrm{B}}(w_1) \otimes \widehat{\mathrm{B}}(w_2) \otimes \widehat{\ }\mathrm{B}(w_1 \cdot \frown w_2) \otimes \mathrm{B}(w_3)$。状态集 $Q(\mathrm{A})$ 定义如下：

$$Q(\mathcal{A}) = \{q_{[S_1,S_2,S_3]} \mid S_1 \subseteq [\![w_1]\!], S_2 \subseteq [\![w_2]\!], S_3 \subseteq [\![w_3]\!]\}$$

状态 $q_{\{0\},\ \{0\},\ \{0\}}$ 被视为初始状态， $I(\mathrm{A}) = q_{\{0\},\ \{0\},\ \{0\}}$；其余所有状态均被视为终态， $F(\mathrm{A}) = Q(\mathrm{A}) \setminus I(\mathrm{A})$。转移集 $T(\mathrm{A})$ 定义如下：

$$T(\mathcal{A}) = \{(q_{[S'_1,S'_2,S'_3]}, (B_1, B_2, f_\cup(B_1, B_2), B_3), q_{[S_1,S_2,S_3]}) \mid \mathrm{Dom}(B_i) = S'_i, \mathrm{Im}(B_i) = S_i\}$$

语言 $\mathrm{L}(\mathrm{A})$ 是 $2^{O(w)}$-正则的。设 (R, S) 是一个 $(\widehat{\ }\mathrm{B}(w^2), 2, 4)$-选择器，其中 $R = R_=(w^2)$ 且 $S = \{3, 4\}$。根据选择引理（命题 5.2），(R, S)-选择 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 是 $2^{O(w^2 \cdot \log\ w)}$-正则的。现在考虑投影 π：$\widehat{\ }\mathrm{B}(w^2)^{\times 4} \to \widehat{\ }\mathrm{B}(w^2)^{\times 3}$，其中 $\pi(B_1, B_2, B_3, B_4) = (B_1, B_2, B_4)$。注意，从 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 中投影掉第三个坐标，得到 $\pi(\mathrm{sel}(L, R, S)) = \mathrm{L}(R_\cap(w_1, w_2, w_3))$，它仍然是 $2^{O(w^2 \cdot \log\ w)}$-正则的。

$\frown \boldsymbol{R_\neg(w_1, w_2)}$：我们首先定义函数 $f_\neg$：$\mathrm{B}(w) \to \mathrm{B}(w)$，其中，

$$f_\neg(B) = \{(q, a, 1) \mid (q, a, p) \in B, p = 0\} \cup \{(q, a, 0) \mid (q, a, p) \in B, p \in [\![w]\!] \setminus \{0\}\}$$

该函数将映射到状态 0 的转移重定向，使其映射到状态 1；并将未映射到 0 的转移重定向，使其映射到 0。利用 $f_\neg(B)$，我们可以定义如下字母表为$\widehat{\ }\mathrm{B}(w)^{\times 3}$的有限自动机 A。该自动机的状态集为 $Q(\mathrm{A}) = Q_a \cup Q_b$，其中集合 Q_a 和 Q_b 定义如下：

- $Q_a = \{q_{[S_1,S_2]} \mid S_1 \subseteq [\![w_1]\!], S_2 \subseteq [\![w_2]\!]\}$
- $Q_b = \{q'_{[S_1,S_2]} \mid S_1 \subseteq [\![w_1]\!], S_2 \subseteq [\![w_2]\!]\}$

状态 $q_{\{0\},\{0\}}$ 被视为初始状态， $I(\mathrm{A}) = q_{\{0\},\{0\}}$；而状态集合 Q_b 被视为终态， $F(\mathrm{A}) = Q_b$。该自动机的转移集为 $T(\mathrm{A}) = T_a \cup T_b$，其中集合 T_a 和 T_b 定义如下：

- $T_a = \{(q_{[S'_1,S'_2]}, (B_1, B_1, B_2), q_{[S_1,S_2]}) \mid \mathrm{Dom}(B_i) = S'_i, \mathrm{Im}(B_i) = S_i\}$
- $T_b = \{(q_{[S'_1,S'_2]}, (B_1, f_\neg(B_1), B_2), q'_{[S_1,S_2]}) \mid \mathrm{Dom}(B_i) = S'_i, \mathrm{Im}(B_i) = S_i\}$

语言 $\mathrm{L}(\mathrm{A})$ 是 $2^{O(w)}$-正则的。令 (R, S) 为一个 $(\widehat{\ }\mathrm{B}(w), 2, 3)$-选择器，其中 $R = R_{=}(w)$ 且 $S = \{2, 3\}$。根据选择引理（命题 5.2），(R, S)-选择 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则的。现在考虑投影 π: $\widehat{\ }\mathrm{B}(w)^{\times 3} \to \widehat{\ }\mathrm{B}(w)^{\times 2}$，其中 $\pi(B_1, B_2, B_3) = (B_1, B_3)$。注意，从 $\mathrm{sel}(L, R, S)$ 中投影掉第三个坐标，得到 $\pi(\mathrm{sel}(L, R, S)) = \mathrm{L}(R_{\neg}(w_1, w_2))$，它仍然是 $2^{O(w \cdot \log w)}$-正则的。

□