arXiv:2601.08377v1 [math.DG] 13 Jan 2026

关于兰伯特正形圆锥投影与《俄罗斯帝国总图》

宫地秀树、大鹿健一、阿萨纳西奥斯·帕帕佐普洛斯和山田澄生

Abstract. 绘制地理地图的问题，是将球面上代表一个国家或其他区域的一部分映射到地球表面的欧几里得平面中，同时使预先规定的某些畸变性质达到最小。众所周知，单从数学角度来看，这是一个极其困难的问题。莱昂哈德·欧拉在圣彼得堡帝国科学院第一次任职期间（1727—1741年）所承担的职责之一，就是协助绘制俄罗斯帝国的地图。他在著名法国地理学家约瑟夫-尼古拉·德利尔的指导下开展这一项目；德利尔当时是该科学院天文学与地理学系的负责人。俄罗斯帝国总图以及该帝国若干具体地区的地图，于1745年在欧拉的指导下，作为所谓的《俄罗斯地图集》出版。在他后来于1777年撰写的回忆录
*De proiectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usitata*中，欧拉发展了德利尔以启发式方法采用的制图方法的数学理论，而他本人正是运用这一方法绘制俄罗斯帝国总图的。如今，这种方法通常被称为德利尔–欧拉地图。在此前的一篇论文中，本文的前两位作者将德利尔–欧拉地图与其他几种圆锥类型的地图进行了比较，考察了各种数学畸变性质。他们表明，就所考察的所有方面而言，当该地图用于绘制俄罗斯帝国时，它是其中最优的。在本文中，我们将欧拉–德利尔地图与此前提及的论文中未曾考察的一种地图进行比较，即应用于地球上同一区域的所谓兰伯特正形圆锥投影。我们表明，在若干方面，后者优于此前论文中考察的所有其他地图，包括德利尔–欧拉地图。

关键词：数学地理学、地图绘制、保角映射、球面几何、约翰·海因里希·兰伯特、兰伯特地理地图、泰尔的马里诺斯、托勒密、马里诺斯–托勒密地图、约瑟夫-尼古拉·德利尔、莱昂哈德·欧拉、膨胀、拟保角映射、十八世纪、俄罗斯帝国总图。

AMS 分类号：01A20, 01A50, 91D20, 30C62, 53A05, 30C20

1. Introduction

绘制地理地图的数学问题，是要找出一种映射：将球面上的一个子集（代表地球表面的一个国家或其他区域）映射到欧几里得平面上，并满足预先指定的某些性质。制图学中常用的性质示例如下：

(1) 保角性，即保持角度；(2) 面积保持；(3) 将球面上的纬线映射为平面上的平行直线；(4) 将纬线映射为同心圆弧；(5) 将球面上的经线映射为平面上的平行直线；(6) 将经线映射为交于同一点的直线；(7) 将球面上的经线映射为同心圆或椭圆（的一部分）；以及 (8) 在某种尚待明确的意义上使距离失真最小（涉及双 Lipschitz 常数、局部双 Lipschitz 常数的上确界、拟共形畸变等）。

制图学中还会用到许多其他性质。通常，绘制特定地图时会选择上述多种性质。所需性质取决于地图的用途，也取决于需要表示的地球区域的形状。例如，在通常称为托勒密地图或马里努斯–托勒密地图的一种地图中，[1]以及本文将详细论述的德利尔–欧拉地图[2] 中，经线被表示为平面上交于同一点的直线，而纬线则被表示为以该点为圆心的同心圆。此外，还要求在选定的两条纬线上，距离失真较小。（在托勒密地图中，为绘制已知世界地图，几条重要的纬线分别是经过图勒岛的纬线——当时已知最北端的位置、作为最南端界线的赤道，以及经过罗得岛的纬线；古希腊时代曾沿这条纬线进行了大量经度测量，见 [26,第 XXI 章]。）

关于性质（8）中的畸变，我们注意到以下事实，这表明不存在一种从球面的子集到欧几里得平面的映射，能够在一定尺度下不产生距离畸变：

[1]这幅地图以地理学家兼天文学家泰尔的马里努斯（约公元70—130年）以及数学家、地理学家兼天文学家克劳狄乌斯·托勒密（约公元100—168年）的名字命名，后者也被称为亚历山大的托勒密。[2]这幅地图以法国天文学家兼地理学家约瑟夫-尼古拉·德利尔（1688—1768年）和莱昂哈德·欧拉（1707—1783年）的名字命名。两人曾同时在圣彼得堡帝国科学院任职。沙皇彼得大帝邀请德利尔实施一项制图计划，为新成立的俄罗斯帝国绘制地图：一幅总图，以及各较小区域的地图。1736年，德利尔启动了一项大规模的帝国三角测量计划。这是计算距离和坐标的关键步骤，而这些数据正是绘制地图所需的。我们还要指出，欧拉除了是我们所熟知的杰出数学家外，也是一位地理学家和天文学家等。多年来，他协助时任科学院地理学部和天文学部主管的德利尔。后来，德利尔与科学院管理层发生冲突，欧拉便接任了该部门主管。

命题 1.1。 不存在一种从球面上具有非空内部的子集出发、能够在一定尺度下保持距离的映射。

这一命题自古希腊时代起便已为人所知；它可以很容易地由亚历山大的梅内劳斯所著《球面论》中的命题推出，参见 [25]以及 [19]中的论述。例如，它是《球面论》命题 27 的直接推论，该命题指出：如果 ABC 是球面上的任意测地三角形，且 D和 E 分别是 AB 和 BC 的中点，那么距离之间满足以下不等式：$DE > AC/2$ （如今，这一等式被称为正曲率度量空间中的比较不等式）。命题 1.1 也可以由《球面论》命题 12 推出（尽管方式稍不明显）；该命题指出，在任意球面三角形中，角度之和严格大于两个直角。

在论文 [17],中，本文的前两位作者比较了若干种用于表示18世纪俄罗斯帝国的地理地图。之所以选择俄罗斯帝国，是因为莱昂哈德·欧拉在其回忆录 [10], 中发展了一套绘制地理地图的理论，并将其用于绘制帝国地理总图这一实际问题。这里需要回顾的是，绘制俄罗斯帝国总图及其各个具体地区的地图，是欧拉在首次任职于圣彼得堡帝国科学院期间（1727—1741年）的职责之一。对于这一工作的数学方面，感兴趣的读者可以参考欧拉关于地理学的回忆录，这些回忆录写于1777年、次年出版， [8, 9, 10], 均收录于著作 [5], 中，并译成了英文；尤其是最后一篇，专门讨论所谓的德利尔–欧拉地图。最后一篇回忆录的标题是*De proiectione geo-graphica De Lisliana in mappa generali imperii russici usitata*，其译文为：“论用于绘制俄罗斯帝国总图的德利尔地理投影”。我们还提到所谓的《俄罗斯地图集》，该图集于1745年在圣彼得堡出版，由欧拉主持编纂 [3]。在该地图集的导言中，德利尔–欧拉方法以非技术性的方式进行了概述。关于欧拉在德利尔地图方面工作的现代论述，参见 [20, 6]。关于欧拉在地理学方面的工作及其与德利尔的关系，读者可参考 [21]。欧拉在其回忆录 [10] 中提到的德利尔地理地图也称为德利尔–欧拉地图，本文将采用这一术语。

在论文 [17], 中，作者从多个明确界定的角度指出，在用于俄罗斯帝国的一组地理地图中，德利尔–欧拉地理地图是最佳的。这组地图被他们称为“圆锥”地图。“圆锥”一词源于这类地图首先绘制在一个圆锥上，其顶点位于球面的南北轴上；随后沿一条子午线切开圆锥，并将其展开到平面上，最终得到一幅绘制在平面上的地图。[3] 在圆锥投影中，德利尔–欧拉地图

[3]读者应当注意到，与数学不同，地理学并没有普遍采用的术语体系，尤其是在地理地图方面。同一地图在不同的地理表中名称各异，有些地图的描述十分简略，等等。著名的地理学家和大地测量学家 L. P. Lee 在其关于 *The nomenclature and classification of map projection* [16]的报告结语中写道：“[.....] 以上观察表明，地图投影术语体系混乱不堪，这种情况在任何其他现代科学中都是无法容忍的，因此早就应该加以系统化。”有时，数学史学家也会加剧这种混乱。例如，我们在论文 [1] 开头读到，立体投影是一种圆锥投影。



FIGURE 1. 投影地图的一个示例：欧拉绘制的俄罗斯帝国地图，出自《俄罗斯地图集》 [3], ，该地图集于1745年在圣彼得堡出版。来源：法国国家图书馆 Gallica。

属于“等距圆锥投影”类型，其中等距纬线的像是彼此等距的曲线。与兰伯特正形圆锥投影不同，德利尔–欧拉投影不是共形投影。德利尔–欧拉地图见图1。

图2展示了圆锥地图投影的另一个实例。这是荷兰制图师、天文学家兼画家约翰·鲁伊施（约1460—1533年）于1507年绘制的一幅地图。地图标题为《根据最新观测绘制的更普遍已知世界地图》（《根据最新观测绘制的更普遍的已知世界地图》）。鲁伊施的地图作为一幅补充性的现代地图，被收录在1507年于罗马出版的托勒密《style id='3'>地理学》版本中。它是目前已知第二古老的印刷版新世界地图，也是从基于托勒密观点的15世纪地图向美洲大陆被发现后绘制的新地图过渡的重要标志。这幅地图对西印度群岛的描绘也考虑了克里斯托弗·哥伦布的航行。这种圆锥投影还满足了另一项条件：在赤道处，一度纬度的长度等于一度经度的长度。

论文 [17] 和 [18] 中讨论的地图采用了以下名称：圆锥水平投影、圆锥正交投影、德利尔–欧拉投影、泰希米勒投影和正交投影。我们还注意到，德利尔–欧拉方法与所谓的马里努斯–托勒密地图非常接近；托勒密在公元一至二世纪描述了这幅地图，参见论文 [18]。

所谓的兰伯特正形圆锥投影是一种广为人知的地理地图绘制方法，直到20世纪，它在制图学中仍经常使用；参见 [4, 11, 28]。它与论文 [17] 和 [18] 中研究的其他地图的区别之一，在于它是共形的。它

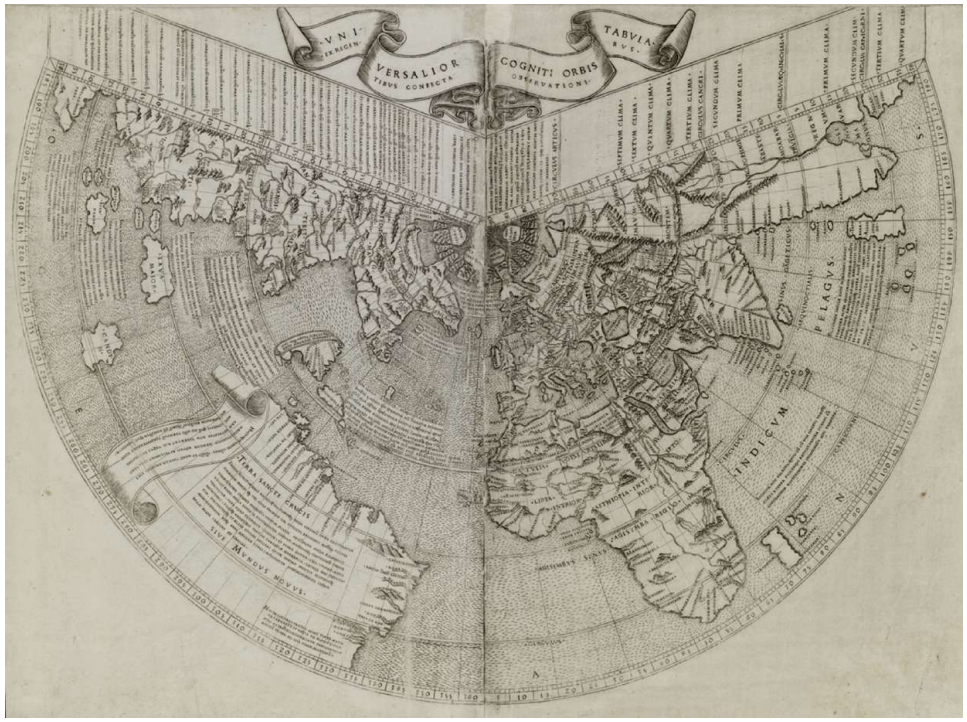


FIGURE 2. 圆锥投影的另一个例子：约翰·鲁伊施绘制的地图 *Universalior Cogniti Orbis Tabula ex Recentibus Con-fecta Observationibus* 。出版者 Bernardinus Venetus de Vitalibus。出自阿尔伯塔大学图书馆 William C. Wonders 地图收藏。

第一次和第二次世界大战期间曾在法国用于军事目的，参见例如 [7, 27]。本文 [17] 比较了其他几种地理地图，但未考虑这种投影。本文将兰伯特投影与 [17], 中考察的地图进行比较，并表明它在若干方面优于这些地图。

2. The Lambert conical projection

兰伯特投影是从球面环带到以圆锥顶点为中心的环域的保角映射。在这种投影中，经线表示为交于同一点的直线，纬线则表示为以该点为圆心的圆弧。下面引入一些记号，以更数学化的方式描述它。考虑欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 $\mathbb{S}^2$，其北极位于 $(0, 0, 1)$，南极位于 $(0, 0, -1)$；再考虑球面 $\mathbb{S}^2$ 上的一个由两条纬圈围成的环域 A。设有一个圆锥 $C(\alpha)$，其锥点位于连接两极的轴上且在北极上方，顶角为 2α，并与 $\mathbb{S}^2$ 相交于以北极为圆心的两个圆（见图3）。这些圆称为纬圈。其中一个纬圈记为 L_0。我们考虑从球面环带到 $C(\alpha)$上的圆锥环域的保角映射，该圆锥环域由两个同心圆围成。下文将说明如何对该映射进行归一化。显然，该映射关于绕 z-轴的旋转是等变的。这就是我们所说的角度为 α 的兰伯特圆锥投影（见图4）。

考虑角参数 α，它表示竖直轴与圆锥母线之间的夹角。当 α 趋近于 0，同时保持两个纬线之一（例如 L_0）与球面相交时，角度为 α 的兰伯特投影会趋近于一种所谓的圆柱墨卡托投影，该圆柱面沿着L_0与球面相交。[4] 反过来，当 α 趋近于 $\pi/2$，并再次保持同一条与球面相交的纬线L_0时，角度为 α 的兰伯特投影会趋近于映入平面的立体投影，该平面沿着 L_0与 $\mathbb{S}^2$ 相交。兰伯特本人已经注意到这一系列连接墨卡托投影与立体投影的兰伯特投影的存在，见 [14]中的 §47。这里摘录了兰伯特对这一单参数族映射的论述，译文出自 Annette A'Campo 的 [5], :

> 球面的立体投影以及墨卡托的航海地图具有一个特殊性质：所有角度都保持其在球面上的数值。由此，平面图形与球面上绘制的图形之间可以达到最大程度的相似性。然而，问题仍然存在：这一性质是否仅适用于这两种投影，抑或它们虽然看起来截然不同，却可能通过中间形式的投影连接起来。墨卡托投影将经线表示为相互平行的直线，这些直线与赤道正交相交，并按照赤道高度一半的余切的对数进行分度。赤道本身则按度数分为360个相等部分。因此，在这种投影中，经线的交角等于

[4]墨卡托投影或墨卡托航海图是一种"圆柱投影"类型的保角映射，有时假定圆柱面与赤道相切。需要注意的是，在不同的专著或地图目录中，地理地图有时会有不同的名称。因此，当我们讨论一种投影时，必须从数学角度对其作出精确定义。还要指出的是，此处"投影"一词的含义比经典射影几何中的用法更广。

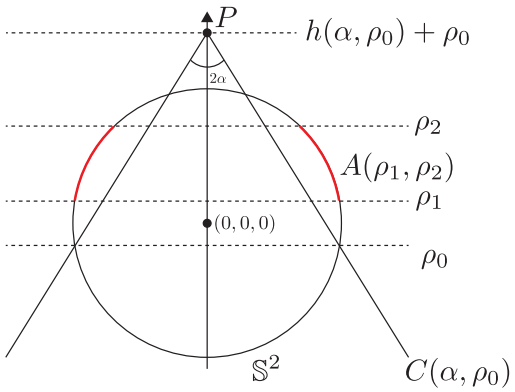


FIGURE 3. 圆锥 $C(\alpha,\rho_0)$ 和环域$A(\rho_1,\rho_2)$ 的位置。圆锥 $C(\alpha,\rho_0)$ 的顶角为 2α，交集 $\mathbb{S}^2\cap C(\alpha,\rho_0)$ 中较低的圆是位于 $z=\rho_0$ 的纬圈。

> 零，因为它们彼此平行。然而，对于从极点出发的立体投影，经线同样表示为直线，但它们以真实角度相交。因此，如果这两种投影之间存在中间形式，就应当通过任意比例地增大或减小经线的交角，使其相对于经线在球面上的交角发生变化，来寻找这些中间形式。这就是我将在此采用的方法。

兰伯特或许是历史上首位提出单参数族地理地图的人，该地图族连接了两幅重要的地理地图。

我们将计算这一投影族的畸变参数（稍后将更准确地说明畸变的含义）。首先，我们先做几点说明。

兰伯特投影按我们的定义，可以通过解析延拓扩展为一个映射，其定义域为二重穿孔球面 $\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1),(0,0,1)\}$。因此，为了规范化投影，我们将改为指定一个保角映射：从 $\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1),(0,0,1)\}$ 映射到 $C(\alpha)$ 中顶点 P 的补集。我们选取圆锥 $C(\alpha)$，使 P 位于 $(0,0,1)$ 点上方的 z 轴上，并将 L_0 称为与圆锥相交的两条纬线中较低的一条。此外，我们将 L_0 的高度（即 z 坐标）称为 ρ_0 。我们引入一个保角映射，从 $\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1),(0,0,1)\}$ 映射到 $C(\alpha)\setminus\{P\}$，且该映射在 L_0 上为恒等映射。我们用 ρ_0 表示 L_0 的 z 坐标。 $\mathbb{R}^3$ 中的圆锥环域 $C(\alpha)$ 也记作 $C(\alpha,\rho_0)$。注意，该保角映射是唯一确定的，并且可以表示为立体投影 $\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1),(0,0,1)\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 与一个从 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 映射到扇形的保角映射的复合；该扇形与 $C(\alpha)$ 等距。

3. Stereographic projection and the modulus of a concentric spherical annulus

现在我们开始进行一些计算，以便为兰伯特投影给出具体的数学表达式。首先，我们将通过考察同心球面环域在极立体投影下的像，给出其模数的公式。

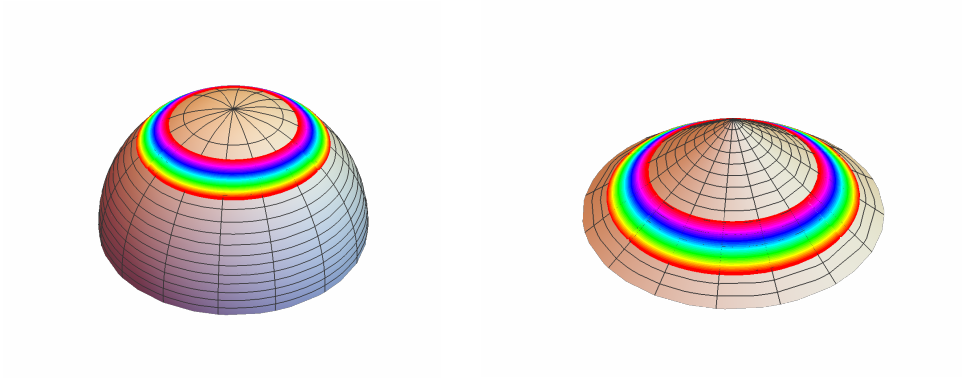


FIGURE 4. 兰伯特圆锥投影的定义域与值域

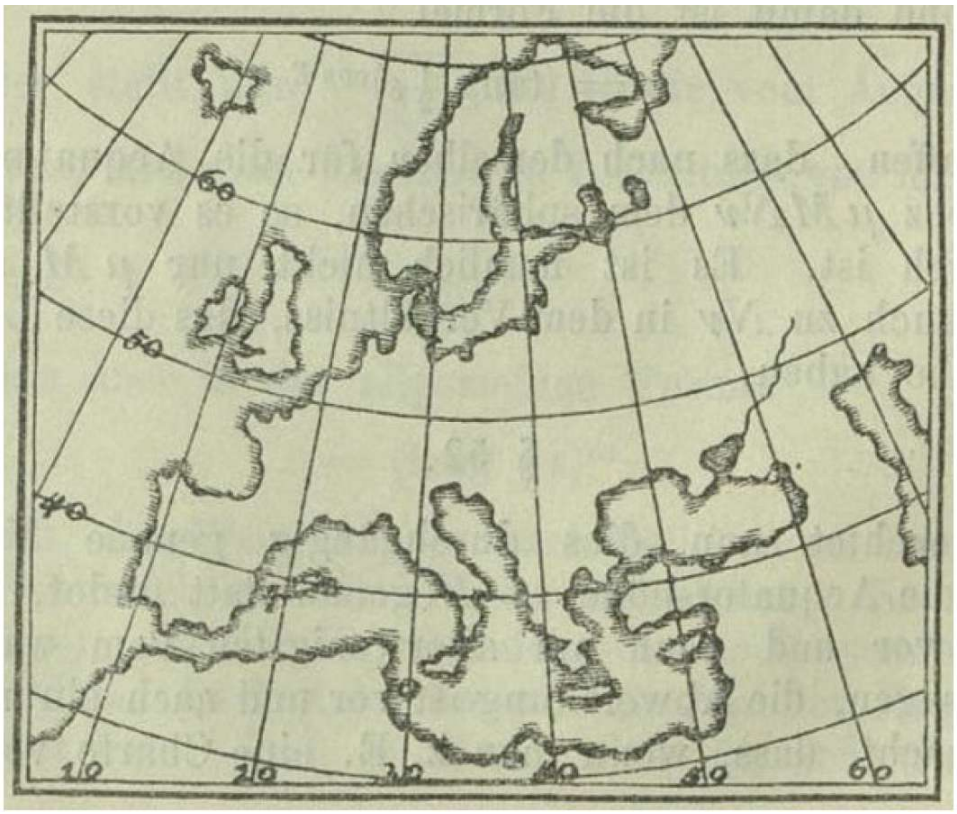


FIGURE 5. 摘自兰伯特回忆录的欧洲兰伯特圆锥地图*Beytr ¨age zum Gebrauche der Mathematik und deren An- wendung* [14]。

我们先约定一些记号。

我们用 $(X,\ Y,\ Z)$ 表示$\mathbb{R}^3$的普通笛卡尔坐标系。 $\mathbb{R}^3$ 上的欧几里得度量定义为 $ds^2_{\mathbb{R}^3} = dX^2 + dY^2 + dZ^2$. $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面表示为 $\mathbb{S}^2 = \{(X,\ Y,\ Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$。我们使用两个参数 θ 和 ρ 对单位球面进行如下参数化，其中它们分别对应经度和 Z-坐标:

$$[0, 2\pi] \times [-1, 1] \ni (\theta, \rho) \mapsto (\sqrt{1-\rho^2}\cos\theta, \sqrt{1-\rho^2}\sin\theta, \rho) \in \mathbb{S}^2.$$

在此参数化下，以 $(0,\ 0,\ 1)$ 为中心的极立体投影 Π （为简便起见，我们称其为立体投影）是从 $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,\ 0,\ 1)\}$ 到 XY-平面的保角映射 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$，其定义为

$$\Pi(\theta, \rho) = w = u + iv = \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} e^{i\theta}. \tag{1}$$

于是， Π 将南极 $(0,\ 0,\ -1) \in \mathbb{S}^2$ 映射到 XY-平面的原点。由 $\mathbb{R}^3$ 诱导的 $\mathbb{S}^2$ 上的球面度量，在作为 Π值域的 w-平面中表示为

$$(\Pi^{-1})^* ds^2_{\mathbb{R}^3} = \frac{4}{(1+|w|^2)^2} |dw|^2.$$

给定两个实数 $\rho_1,\ \rho_2$ 满足 $-1 < \rho_1 < \rho_2 < 1$，定义相应的同心球面环域如下:

$$A(\rho_1, \rho_2) = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{S}^2 \mid \rho_1 < \rho < \rho_2\}.$$

立体投影 Π 将 $A(\rho_1,\ \rho_2)$映射到平面同心圆环

$$\left\{ \sqrt{\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}} < |w| < \sqrt{\frac{1+\rho_2}{1-\rho_2}} \right\}.$$

因此，环域像的模数由下式给出。

$$\mathrm{Mod}(A(\rho_1, \rho_2)) = \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{\frac{1-\rho_1}{1+\rho_1}} \sqrt{\frac{1+\rho_2}{1-\rho_2}} = \frac{1}{4\pi} \log \frac{1-\rho_1}{1+\rho_1} \frac{1+\rho_2}{1-\rho_2}.$$

这一结果早已为赫伯特·格勒茨施（1928年）所知。读者可参阅格勒茨施的原始论文 [12]; 另见其译文 [13]。

4. Conformal maps from the complement of the poles in the sphere to a circular cone

4.1. 圆锥上的平坦结构。 我们首先将 $C(\alpha,\ A)$记作一个关于 Z 轴旋转对称、朝下的圆锥，其顶点位于 $(0,\ 0,\ A)$，顶角为 α。

对于满足 $0 < \alpha < \pi/2$ 和 $-1 < \rho_0 < 1$ 的 α 和 ρ_0，我们施加以下条件:

$$(h(\alpha, \rho_0) + \rho_0) \sin\alpha < 1, \tag{2}$$

其中函数 h 定义为

$$h(\alpha, \rho) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\tan\alpha}.$$

该条件 (2) 表示，圆锥 $C(\alpha,\ \rho_0 + h(\alpha,\ \rho_0))$ 与单位球面 $\mathbb{S}^2$ 相交于两个圆。这里，ρ_0 是下方小圆的 Z 坐标，该小圆是 $C(\alpha,\ \rho_0 + h(\alpha,\ \rho_0))$ 与 $\mathbb{S}^2$ 的交集。

$\mathbb{R}^3$ 中的圆锥 $C(\alpha,\ \rho+h(\alpha,\ \rho_0))$ 可表示为

$$C(\alpha,\rho_0+h(\alpha,\rho_0))=\left\{(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3\mid Z=\rho+h(\alpha,\rho_0)-\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\tan\alpha}.\right\},$$

$$\rho_0=\sin^2\alpha(h(\alpha,\rho_0)+\rho_0)-\cos\alpha\sqrt{1-(h(\alpha,\rho_0)+\rho_0)^2\sin^2\alpha}. \tag{3}$$

并且，条件（3）意味着，下方交点的 $\mathbb{S}^2$处的 Z 坐标等于 ρ_0。

令 $S(\alpha)=\{\zeta\in\mathbb{C}\mid 0<\arg\zeta\le 2\pi\sin\alpha\}$ 为 ζ 平面中的扇形，它对应于该平面中 $C(\alpha,\ \rho_0+h(\alpha+\rho_0))$ 的展开展像。

利用 $S(\alpha)\subset\mathbb{C}$ 上的极坐标 $\zeta=re^{i\theta}$，我们定义映射 $\Phi_0\colon S(\alpha)\to C(\alpha,\rho_0+h(\alpha+\rho_0))$ 如下:

$$\begin{aligned}\Phi_0(r,\theta)&=(0,0,\rho_0+h(\alpha,\rho_0))\\&\quad+\left(r\sin\alpha\cos\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right),r\sin\alpha\sin\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right),-r\cos\alpha\right).\end{aligned}$$

关于 $S(\alpha)$ 上的欧几里得度量和 C_α 的第一基本形式，映射 Φ_0 是一个等距映射。事实上，我们有

$$\begin{aligned}(\Phi_0)^*ds^2_{\mathbb{R}^3}&=\left(\sin\alpha\cos\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right)dr-r\sin\alpha\sin\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right)d\theta\right)^2\\&\quad+\left(\sin\alpha\sin\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right)dr+r\sin\alpha\cos\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right)d\theta\right)^2+\cos^2\alpha dr^2\\&=dr^2+r^2d\theta^2,\end{aligned}$$

其中 $\zeta=re^{i\theta}\in S(\alpha)$。

现在我们复合以下两个映射，构造一个保角映射 Φ_1，它将 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 映到 $C(\alpha,\ \rho_0+h(\alpha,\ \rho))\setminus\{(0,\ 0,\ \rho_0+h(\alpha,\ \rho_0))\}$:

$$z\mapsto z^{\sin(\alpha)}=\zeta=re^{i\theta}\mapsto\Phi_0(r,\theta),$$

其中定义域和值域为

$$\mathbb{C}\setminus\{0\}\longrightarrow S(\alpha)\setminus\{0\}\longrightarrow C(\alpha,\rho_0+h(\alpha,\rho_0))\setminus\{(0,0,\rho_0+h(\alpha,\rho_0))\}.$$

使用 z 平面上的极坐标 $z=Re^{i\Theta}$，复合映射 $\Phi_1\colon\mathbb{C}\setminus\{0\}\to C(\alpha,\ \rho_0+h(\alpha,\ \rho_0))\setminus(0,\ 0,\ \rho_0+h(\alpha,\ \rho_0))$ 可表示为

$$\Phi_1(R,\Theta)=\left(R^{\sin\alpha}\sin\alpha\cos(\Theta),R^{\sin\alpha}\sin\alpha\sin(\Theta),\rho_0+h(\alpha,\rho_0)-R^{\sin\alpha}\cos\alpha\right) \tag{4}$$

而 $C(\alpha)$ 上平坦度量的拉回度量 $\Phi_1^*ds^2_{\mathbb{R}^3}\setminus(0,\ 0,\ \rho_0+h(\alpha,\ \rho_0))$ 变为

$$\Phi_1^*ds^2_{\mathbb{R}^3}=(R^{\sin\alpha-1}\sin\alpha)^2(dR^2+R^2d\Theta^2). \tag{5}$$

4.2. **球面的规范化保角表示**。设

$$R_{\rho_0}=\left(\frac{\sqrt{1-\rho_0^2}}{\sin\alpha}\right)^{1/\sin\alpha}.$$

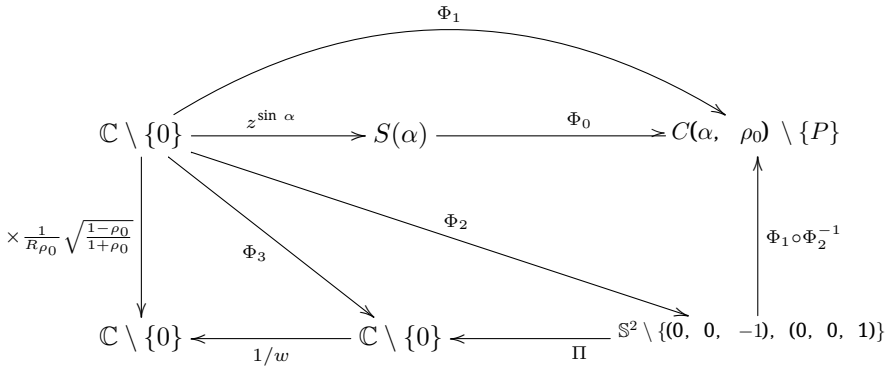


FIGURE 6. 从球面 $\mathbb{S}^2\setminus\{(0,\ 0,\ -1),\ (0,\ 0,\ 1)\}$ 到 $C(\alpha,\ \rho_0)\setminus\{P\}$的保角映射。保角映射 $\Phi_1\circ\Phi_2^{-1}$的连续延拓将北极映射到 P。

于是， $\mathbb{C}$ 中的圆 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=R_{\rho_0}\}$ 经 Φ_1 映射到两个小圆 $C(\alpha,\ \rho_0+h(\alpha,\ \rho_0))\cap\mathbb{S}^2$中的下方圆，我们将其记为 $\gamma(\rho_0)=\{Z=\rho_0\}\subset\mathbb{S}^2$。我们定义映射 $\Phi_3:\ \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$，其为

$$w=\Phi_3(z)=R_{\rho_0}\sqrt{\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}}\frac{1}{z}=\left(\frac{z}{R_{\rho_0}}\sqrt{\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}}\right)^{-1}.$$

由于 $1/\Pi(z)$ 是 $\mathbb{S}^2\setminus\{(0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ -1)\}$ 的共形表示，并且将北极映射到原点（按极限意义），复合

$$\Phi_2=\Pi^{-1}\circ\Phi_3$$

是一个共形参数化，将 z-平面中的圆 $R=R_{\rho_0}$ 映射到 $\mathbb{S}^2$ 中的圆 $\gamma(\rho_0)$。这意味着 Φ_1 和 Φ_2 按照以下条件进行归一化

$$\Phi_1(\{|z|=R_{\rho_0})=\Phi_2(\{|z|=R_{\rho_0})=\gamma(\rho_0).$$

根据构造，共形映射 Φ_1 和 Φ_2 相对于 $\mathbb{S}^1$ 的以下作用是等变的： $\mathbb{S}^1$ 在 Φ_1 和 Φ_2 的定义域 $\mathbb{C}$ 上的作用，即绕原点旋转；以及 $\mathbb{S}^1$ 在值域 $\mathbb{R}^3$ 上的作用，即绕 Z-轴旋转。

所得映射

$$\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1),(0,0,1)\}\ni(X,Y,Z)\mapsto\Phi_1\circ\Phi_2^{-1}(X,Y,Z)\in C(\alpha,\rho_0)\setminus\{P\}$$

是共形的，并且可连续延拓到北极，从而得到从 $\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1)\}$ 到 $C(\alpha,\rho_0)$ 的同胚（见图6）。

5. LAMBERT'S CALCULATION

现在，我们将自己的计算与兰伯特为其投影所做的原始计算进行比较（参见 [14] 兰伯特的原始文章及其英文译本，以及 [2]对这项工作的近期阐述）。由于这些投影对于旋转是等变的，我们只需确定各纬线像的高度，因此问题在于确定子午线上的一个函数，用以描述该处每个点的像的高度。兰伯特凭借他对

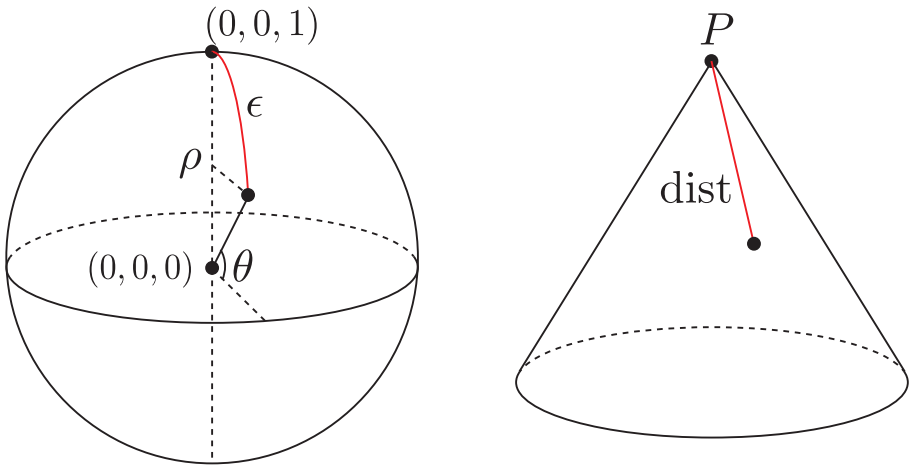


FIGURE 7. 兰伯特的计算与我们的计算之间的比较。ϵ 表示距北极点的球面距离，anddist 表示距顶点的距离。

保角映射（即兰伯特映射）几何行为的深刻洞见，推导出了一个微分方程，用以描述圆锥顶点到像的距离如何随球面上的角坐标变化，参见 [5, 第 195]页。令 ϵ 表示到北极的球面距离。根据我们对圆锥的共形表示Φ_1，到圆锥的距离为

$$\begin{aligned}\mathrm{dist} &= R_{\rho_1}^{\sin\alpha}\left(\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\frac{1-\cos\epsilon}{1+\cos\epsilon}\right)^{\sin\alpha/2}\\ &= \frac{\sqrt{1-\rho_1^2}}{\sin\alpha}\left(\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\right)^{\sin\alpha/2}\left(\tan\frac{\epsilon}{2}\right)^{\sin\alpha},\end{aligned}$$

一个与兰伯特的计算（相差一个乘法常数）一致的值。

6. COMPARISON OF THE METRICS

定义在 z-平面上的两个诱导度量 $\Phi_1^* ds^2_{\mathbb{R}^3}$ 和 $\Phi_2^* ds^2_{\mathbb{R}^3}$ 彼此共形，而 z 是等温坐标。由旋转等变性可知，两个共形 (0，2) 张量之比是 $\mathbb{C}$上的一个函数，

$$\lambda = \frac{\Phi_1^* ds^2_{\mathbb{R}^3}}{\Phi_2^* ds^2_{\mathbb{R}^3}},$$

仅取决于 z平面的径向坐标 $R = |z|$。因此，我们可以将比率 λ 视为径向参数 R的函数。

注意

$$\Phi_2^* ds^2_{\mathbb{R}^3} = \left(\frac{4}{\left(1 + \left| R_{\rho_0}\sqrt{\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}}\frac{1}{z}\right|^2\right)^2} \left| \frac{d}{dz}\left(R_{\rho_0}\sqrt{\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}}\frac{1}{z}\right)\right|^2 \right) |dz|^2$$
$$= 4R^2_{\rho_0}\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)\left(R^2_{\rho_0}\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} + |z|^2\right)^{-2}|dz|^2.$$

回顾一下 (5) 中 $\Phi_1^* ds^2_{\mathbb{R}^3}$ 的显式表达式。

现在我们可以显式计算 λ：

$$\lambda(R) = (R^{\sin\alpha - 1}\sin\alpha)^2 \frac{1}{4R^2_{\rho_0}} \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\left(R^2_{\rho_0}\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0} + R^2\right)^2. \tag{6}$$

对于 $R > 0$，小圆 $\Phi_2(\{|z| = R\})$ 在 $\mathbb{S}^2$ 上的高度 ρ 满足

$$R = R_{\rho_0}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\sqrt{\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}}.$$

因此，(6) 中的比率用 ρ 表示为

$$\begin{aligned}
\Lambda(\rho) &= \Lambda(\rho, \alpha, \rho_0) \\
&= \lambda\left(R_{\rho_0}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\sqrt{\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}}\right) \\
&= \frac{\sin^2\alpha}{4}\frac{1}{R^2_{\rho_0}}\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\left(R^2_{\rho_0}\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} + \left(R_{\rho_0}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\sqrt{\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}}\right)^2\right)^2 \\
&\quad \times \left(R_{\rho_0}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\sqrt{\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}}\right)^{2\sin\alpha - 2} \\
&= \frac{\sin^2\alpha}{4}\left(R^2_{\rho_0}\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)^{\sin\alpha}\left(1 + \frac{1}{1+\rho}\right)^2\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{\sin\alpha - 1} \\
&= \sin^2\alpha\left(R^2_{\rho_0}\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)^{\sin\alpha}\frac{1}{(1-\rho)^{1-\sin\alpha}(1+\rho)^{1+\sin\alpha}} \\
&= \sin^2\alpha\frac{1-\rho_0^2}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)^{\sin\alpha}\frac{1}{(1-\rho)^{1-\sin\alpha}(1+\rho)^{1+\sin\alpha}} \\
&= \frac{(1-\rho_0)^{1-\sin\alpha}(1+\rho_0)^{1+\sin\alpha}}{(1-\rho)^{1-\sin\alpha}(1+\rho)^{1+\sin\alpha}}.
\end{aligned}$$

我们将 $L(\rho, \alpha, \rho_0)$ 定义为 $\sqrt{\Lambda(\rho, \alpha, \rho_0)}$。由此我们证明了以下结论。

命题 6.1。数量

$$L(\rho, \alpha, \rho_0) = \sqrt{\frac{(1-\rho_0)^{1-\sin\alpha}(1+\rho_0)^{1+\sin\alpha}}{(1-\rho)^{1-\sin\alpha}(1+\rho)^{1+\sin\alpha}}}$$

是归一化共形映射的无穷小利普希茨常数

$$\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} \colon \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1),(0,0,1)\} \to C(\alpha, \rho_0 + h(\alpha,\rho_0)) \setminus \{(0,0,\rho_0 + h(\alpha,\rho_0)\}.$$

7. Optimal apex angle α for the projection

双 Lipschitz 映射 $f\colon X \to Y$在度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 之间必然是同胚。双 Lipschitz 映射 f 的畸变定义为

$$\log\left(\sup_{x_1\neq x_2}\frac{d_Y(f(x_1),f(x_2))}{d_X(x_1,x_2)}\right)-\log\left(\inf_{x_1\neq x_2}\frac{d_Y(f(x_1),f(x_2))}{d_X(x_1,x_2)}\right).$$

对于满足条件 $0<\alpha<\pi/2$ 和 $-1<\rho_0<1$的球面环带 $A(\rho_1,\ \rho_2)$，我们定义 $\delta(\rho_1,\ \rho_2,\ \alpha,\ \rho_0)$ 为

$$\delta(\rho_1,\rho_2,\alpha,\rho_0)=\log\left\{\frac{\sup_{\rho_1<\rho<\rho_2}L(\rho,\alpha,\rho_0)}{\inf_{\rho_1<\rho<\rho_2}L(\rho,\alpha,\rho_0)}\right\}.$$

由于 $\Phi_1\circ\Phi_2^{-1}$是共形的，$\delta(\rho_1,\ \rho_2,\ \alpha,\ \rho_0)$ 等于该映射的畸变。这可由以下观察得出：任何连接 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的路径 σ，其长度都小于该路径的原像 $f^{-1}(\sigma)$ 的长度乘以常数 $\sup_{\rho_1<\rho<\rho_2}L(\rho,\ \alpha,\ \rho_0)$；而 σ 的长度则大于该路径的原像$f^{-1}(\sigma)$ 的长度乘以常数 $\inf_{\rho_1<\rho<\rho_2}L(\rho,\ \alpha,\ \rho_0)$。

在本节中，我们的目标是选择一个最优顶角 $\alpha=\alpha_0$，使得满足下文所述的一些条件，并假设 $\rho_0=\rho_1$。为了确定最优顶角 α_0，我们可以自然地对圆锥的形状施加两种不同的条件：

(a) 在所有满足条件 (2) 和 (3) 的 $0<\alpha<\pi/2$ 和 ρ_0 中，畸变 $\delta(\rho_0,\ \rho_2,\ \alpha_0,\ \rho_0)$ 最小。(b) $L(\rho_0,\ \alpha_0,\ \rho_0)=L(\rho_2,\ \alpha_0,\ \rho_0)=1$。

从历史上看，第二个条件是在选定两条经过被认为对地图绘制十分重要的城市的纬线后使用的。德利尔–欧拉地图和马里努斯–托勒密地图便是如此；相关回顾请参阅本文引言以及论文 [18] 。

事实上，这两个条件是等价的。

定理 7.1. 给定 $-1<\rho_1<\rho_2<1$，畸变 δ 在 α_0 处取得最小值，当且仅当 $L(\rho_2,\alpha_0,\rho_1)=1$。此外，若此条件成立，则有$\rho_1<\sin(\alpha_0)<\rho_2$。

在证明定理 7.1 之前，我们先给出一个命题，用以描述函数 $\Lambda=L^2$ 的性质。固定 $-1<\rho_1<\rho_2<1$。定义函数 F 为

$$F(x,y,z)=\frac{(1+z)^{1+y}(1-z)^{1-y}}{(1+x)^{1+y}(1-x)^{1-y}}$$

对于 $-1<x$、y、$z<1$。注意到

$$\Lambda(\rho_2,\alpha,\rho_1)=F(\rho_2,\sin(\alpha),\rho_1).$$

命题 7.2. 以下性质成立：

(a) $F(x,y,x)=1$; *(b)* $F(z,y,x)=1/F(x,y,z)$; *(c)* $F(x,y,z)\,F(y,y,z)=F(x,y,y)$; *(d)* 若固定 $x>-1$ 和 $z<1$，且满足 $x>z$，则函数 $F(x,y,z)$ 关于 $y\in$ ~~$(-1,1)$~~ 严格单调递减。

(e) 若固定 $y > -1$ 和 $z < 1$，则函数 $F(x, y, z)$ 关于 $x \in (-1, 1)$ 严格凸，并且当 $x \to \pm 1$时，$F(x, y, z) \to \infty$。此外，函数 $F(x, y, z)$ 在 $x = y$ 处达到最小值。*(f)* 若固定 $z \in (-1, 1)$，则函数 $F(x, x, z)$ 关于 x 在 $(-1, z)$ 上严格单调递增，并在 $(z, 1)$ 上严格单调递减。

证明。 命题 (a)、(b)、(c) 显然。为证明 (d)，我们注意到

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z) = \left(\log \frac{1+z}{1+x} + \log \frac{1-x}{1-z} \right) F(x, y, z).$$

若 $x > z$，则 $\log F(x, y, z)$ 对 y 的导数在 $y \in (-1, 1)$ 上为负。因此，$y \mapsto F(x, y, z)$ 严格单调递减。

接下来证明 (e)。 $F(x, y, z)$ 对 x 的二阶导数为

$$2\frac{(1+z)^{1+y}(1-z)^{1-z}(1+3x^2-6xy+2y^2)}{(1+x)^{y+3}(1-x)^{y-3}}$$
$$= 2\frac{(1+z)^{1+y}(1-z)^{1-z}}{(1+x)^{y+3}(1-x)^{y-3}}(3(x-y)^2+1-y^2)$$

若 $-1 < y < 1$，则其为正。因此， $F(x, y, z)$ 关于 x 在 $(-1, 1)$ 上严格凸，并且我们还有 $F(x, y, z) \to \infty$（当 $x \to \pm 1$ 时）。由此可知，在固定 y 和 z 的情况下，函数 $x \mapsto F(x, y, z)$ 在某个 $x_0 \in (-1, 1)$ 处取得唯一最小值。由于 $F(x, y, z)$ 对 x 的一阶导数为

$$2\frac{(1+z)^{1+y}(1-z)^{1-y}(x-y)}{(1+x)^{y+2}(1-x)^{y-2}},$$

我们看到 $x_0 = y$。

最后证明 (f)。我们很容易看出

$$\frac{\partial}{\partial x} \log F(x, x, z) = \log \frac{1-x}{1-z} + \log \frac{1+z}{1+z},$$

因此， $F(x, x, z)$ 在 $(-1, z)$ 上严格单调递增，在 $(z, 1)$ 上严格单调递减。□

定理 *7.1* 的证明。 为使描述更简单，我们使用 $F(x, y, z)$，而不使用 Λ。我们首先注意到，存在唯一的 a_0，满足 $\rho_1 < a_0 < \rho_2$，使得 $F(\rho_2, a_0, \rho_1) = 1$。事实上，由于

$$\lim_{a \to -1} F(\rho_2, a, \rho_1) = \left(\frac{1-\rho_1}{1-\rho_2} \right)^2 > 1$$
and
$$\lim_{a \to 1} F(\rho_2, a, \rho_1) = \left(\frac{1+\rho_1}{1+\rho_2} \right)^2 < 1,$$

由命题 7.2 的 (d)，存在唯一的 $-1 < a_0 < 1$，使得 $F(\rho_2, a_0, \rho_1) = 1$。另一方面，由命题 7.2 的 (a)， $F(\rho_1, a_0, \rho_1) = 1 = F(\rho_2, a_0, \rho_1)$；并且由命题 7.2 的 (e)，映射 $\rho \mapsto F(\rho, a_0, \rho_1)$ 是严格凸的，函数 $\rho \mapsto F(\rho, a_0, \rho_1)$ 在 $\rho = a_0$ 处取得最小值。因此我们有$\rho_1 < a_0 < \rho_2$。

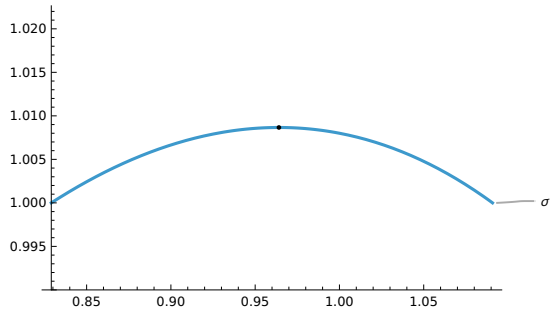


FIGURE 8. 在 $\rho_1 < \rho < \rho_2$ 上的无穷小双 Lipschitz 常数 $\sigma(\rho)$ 图

我们将 a 的两个函数 M 和 m 定义为

$$M(a) = \sup_{\rho_1<\rho<\rho_2} F(\rho, a, \rho_1),$$
$$m(a) = \inf_{\rho_1<\rho<\rho_2} F(\rho, a, \rho_1).$$

由于 F 关于第一个坐标是严格凸的，因此它在 $\rho = \rho_1$ 或 ρ_2 处取得 $M(a)$。由命题 7.2 中的 (d)，当 $-1 < a \le a_0$ 时，我们有 $F(\rho_2, a, \rho_1) > 1$；当 $a_0 < a < 1$ 时，有 $F(\rho_2, a, \rho_1) < 1$。因此，当 $-1 < a \le a_0$ 时，$M(a) = F(\rho_2, a, \rho_1)$；当 $a_0 < a < 1$ 时，$M(a) = 1$。由于 $F(\cdot, a, \rho_1)$ 关于第一个坐标的最小值在 $\rho = a$ 处取得，因此，当 $\rho_2 < a$ 时，它在 $\rho = \rho_2$ 处取得 $m(a)$；当 $\rho_1 \le a \le \rho_2$ 时在 $\rho = a$ 处取得；当 $a < \rho_1$ 时在 $\rho = \rho_1$ 处取得。因此，我们有

$$\frac{M(a)}{m(a)} = \begin{cases} F(\rho_2, a, \rho_1) & (-1 < a < \rho_1) \\ \frac{F(\rho_2,a,\rho_1)}{F(a,a,\rho_1)} = F(\rho_2, a, a) & (\rho_1 \le a < a_0) \\ 1/F(a, a, \rho_1) & (a_0 \le a < \rho_2) \\ 1/F(\rho_2, a, \rho_1) & (\rho_2 \le a < 1). \end{cases}$$

根据命题 7.2 中的 (f)，$F(\rho_2, a, a) = 1/F(a, a, \rho_2)$ 关于 $a \in (-1, \rho_2)$ 严格单调递减，并且当$\rho_1 < a$时，$F(a, a, \rho_1)$ 严格单调递减。因此，商式 $M(a)/m(a)$ 在 $(-1, a_0)$ 上严格单调递减，在 $(a_0, 1)$ 上严格单调递增。由此可见，该商式在 $a = a_0$ 处取得唯一最小值。□

8. INFINITESIMAL BI-LIPSCHITZ CONSTANTS

设给定了 ρ_1 和 ρ_2，且满足 $-1 < \rho_1 < \rho_2 < 1$。取满足$\Lambda(\rho_2, \alpha_0, \rho_1) = 1$ 的 α_0，如上一节所述。在本节中，我们研究由下式定义的无穷小双 Lipschitz 常数 $\sigma(\rho)$:

$$\sigma(\rho) = \max\left\{L(\rho, \alpha_0, \rho_1), \frac{1}{L(\rho, \alpha_0, \rho_1)}\right\}$$

对于 $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$。由于 $\Lambda(\rho_1, \alpha_0, \rho_1) = \Lambda(\rho_2, \alpha_0, \rho_1) = 1$ 和 $\Lambda(\rho, \alpha_0, \rho_1)$ 关于第一个坐标是严格凸的，$\Lambda(\rho, \alpha_0, \rho_1) < 1$ 对于 $\rho_1 < \rho < \rho_2$。因此，

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{L(\rho, \alpha_0, \rho_1)}$$

对于 $\rho_1 < \rho < \rho_2$ （见图8）。

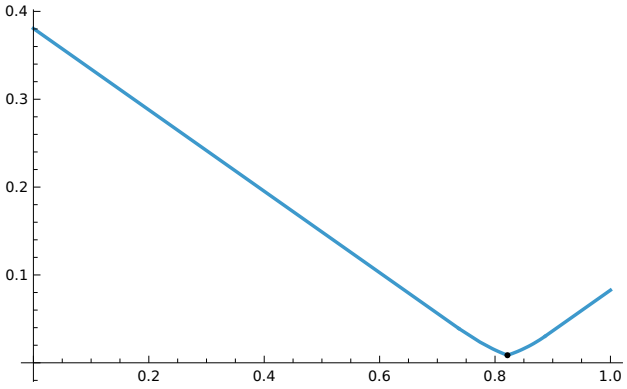


FIGURE 9. 函数 $\delta(\rho_1, \rho_2, \arcsin(a)\ \rho_0)$ 在 $0 < a < 1$ 上的图像。最小值在 $a = 0.821529 = \sin(55.24')$ 处取得。

9. COMPARISON WITH OTHER MAPS OF THE RUSSIAN EMPIRE THAT USE CONICAL PROJECTIONS

在论文 [17], 中，作者比较了几种用于绘制俄罗斯帝国地图的圆锥投影的畸变。正如我们在本文引言中所说，我们选择这个地区，是因为欧拉在圣彼得堡逗留期间曾为它绘制过一幅著名地图，见图1。欧拉绘制该地图所用的方法被称为德利尔–欧拉投影。这种投影最初由著名的法国裔圣彼得堡地理学家约瑟夫-尼古拉·德利尔基于经验采用，后来欧拉运用微分演算发展了其理论，并证明它确实适合绘制像俄罗斯帝国这样经度跨度很大的地区的地图。[5] 在 [17], 所考察的地图中，从多个精确的角度来看，德利尔–欧拉投影被证明是最佳选择。论文 [17]未纳入兰伯特正形圆锥投影。在本节中，我们将比较兰伯特圆锥投影与 [17]中使用的其他圆锥投影的畸变。我们将证明，兰伯特映射不仅具有共形性，而且从多个角度来看都优于其他投影。

我们沿用前几节中确立的记号。下文考虑 $\rho_0 = \rho_1 = \sin(47.30') = 0.737277$ 且 $\rho_2 = \sin(67.30') = 0.92388$ 的情形，它们分别对应俄罗斯帝国的最南端和最北端。

畸变 δ 的图像见图9。畸变 δ 在 $\alpha_0 = 0.9640 = 55°14'$ 处取得最小值，最小值为 0.0086263354。通过数值计算可知，圆锥 $C(\alpha_1, \rho_0 + h(\alpha_1, \rho_0))$ 与球面 $\mathbb{S}^2$ 相交于 $\partial A(\rho_1, \rho_2)$ 的下方圆以及高度为 $\rho = 0.890819$ 的圆，该圆位于 $A(\rho_1, \rho_2)$ 内部（见图 10 ）。

现在，我们绘制一张图，将这个兰伯特投影与我们在 [17]中研究过的其他圆锥投影进行比较。我们回顾一下，其中共有五种投影：从中心出发的投影、水平投影、德利尔–欧拉投影、Teichm¨uller 映射和正交投影。结果发现，在这些投影中

[5]俄罗斯帝国横跨十一个时区，在欧拉时代，其疆域涵盖了欧亚大陆北部的大部分地区。

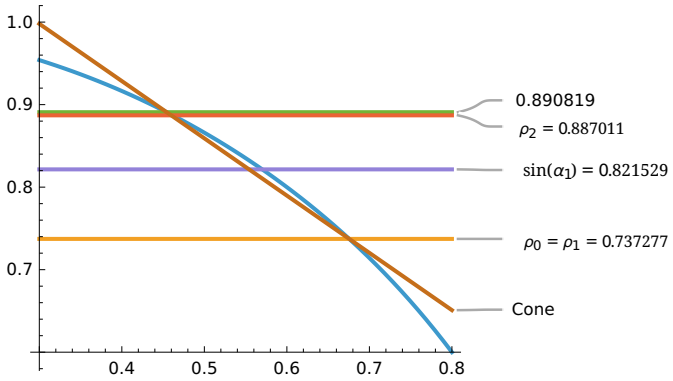


FIGURE 10. 圆锥与球面沿 xz平面的截面：球面与圆锥分别与高度为 ρ_1 =0.737277 和 $\rho = 0.890819 > \rho_2 = 0.887011$ 的圆相交。

水平投影的畸变远大于其他投影，因此我们将其排除在研究范围之外。

现在，我们对 [17] 中选用的德利尔地图作几点说明，并介绍另一种可能的选择。德利尔的方法给出了一族将球面环带映射到圆锥上的环域的投影：经线映射为直射线，纬线映射为以顶点为中心的同心圆，并且映射在每条经线上的限制都是相似映射，所有经线具有相同的缩放因子。在 [17], 中，我们选择了一种德利尔投影，将由两条纬线 L_1 和 L_2 围成的球面环带映射到圆锥上由 L_1 和 L_2 围成的环域；该圆锥与球面沿 L_1 和 L_2相交。还有另一种自然的选择：固定由 L_1 和 L_2 围成的球面环带，以及同一个沿 L_1 和 L_2与球面相交的圆锥，然后选择一种德利尔投影，使每条经线都等距地映射为一条直射线。我们将两种选择都纳入考量。我们称后一种投影为德利尔等距圆锥投影。现在，我们绘制上述六种映射的无穷小双 Lipschitz 常数关于 ρ 的函数图（图11）。图中显示，我们的 Lambert 映射（采用最佳顶角的选择）具有相当好的无穷小双 Lipschitz 常数值。数值上，六种投影——中心投影、德利尔投影（如 [MO]中所示）、德利尔等距圆锥投影、正交投影、Teichm¨uller 映射以及兰伯特投影——的畸变分别为 0.0171839、0.00862621、0.00921812、0.00866925、0.0115244 和 0.00862633。这表明，采用最佳 α_0 选择的兰伯特投影，其畸变与其他投影相当（尽管略逊于 [17], 中选用的德利尔投影）。

至于 Teichm¨uller 映射与兰伯特投影之间的比较，如图11所示，它们的无穷小双 Lipschitz 常数曲线几乎重合。根据数值计算，$A(\rho_1, \rho_2)$ 和 B 的模数分别为 $\mathrm{Mod}(A(\rho_1, \rho_2)) = 0.0737271$ 和 $\mathrm{Mod}(B) = 0.0739411$，而 Teichm¨uller 映射的最大膨胀等于 $1.0029\ldots = \mathrm{Mod}(B)/\mathrm{Mod}(A(\rho_1, \rho_2))$。因此，Teichm¨uller 映射几乎是共形的，预计会接近一个保角映射，在本例中即兰伯特映射。此外，根据

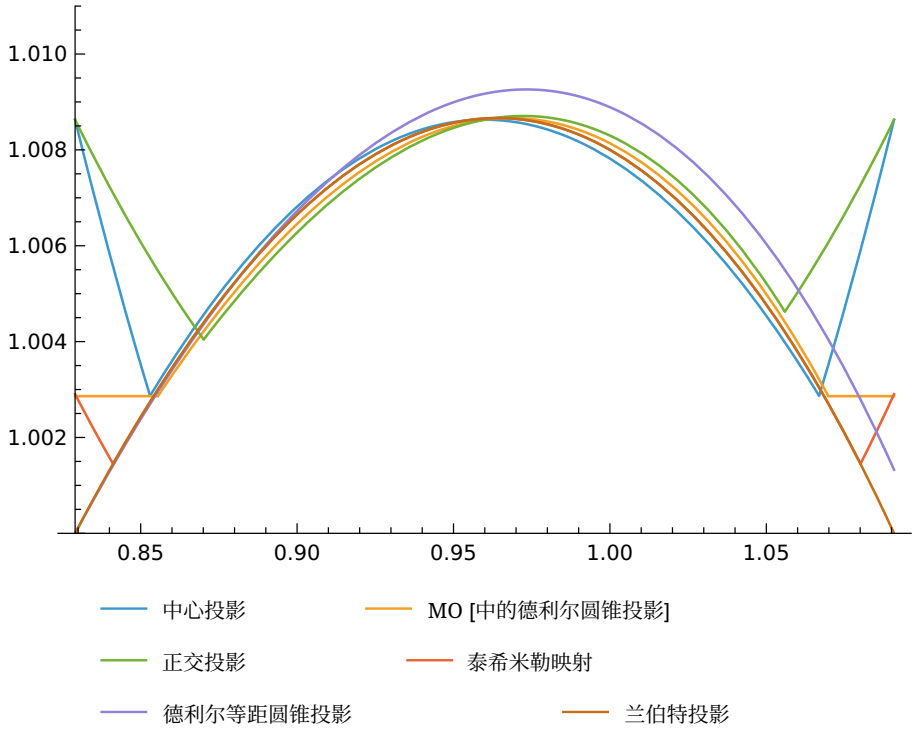


FIGURE 11. 六幅地图的比较。

数值计算，在 $\alpha_0 = \sin^{-1}(0.821529442901464)$ 处，兰伯特映射的双 Lipschitz 常数达到最大值；该值与 Teichm¨uller 映射的对应值至少精确到小数点后14位。

10. FINAL REMARKS

1. 鉴于兰伯特投影是共形投影，而其他投影都不是，且其畸变（从几个方面来看）与德利尔–欧拉地图相当，因此可以认为兰伯特投影是绘制俄罗斯帝国地图的不错选择。

2. 在我们的计算中，我们使用了平面同心圆环模数的显式表达式，从而得以估计共形表示的畸变。需要强调的是，除少数情况外，对于一个（平面或非平面）区域的共形表示并不存在显式表达式；而计算平面（或球面）上一般开单连通区域的共形表示的度量畸变，是一个极其困难的问题。对此我们注意到，拓扑圆盘的共形表示的利普希茨畸变问题，早已由 M. A. Lavrentieff 提出，他是拟共形映射理论的三位奠基人之一。该问题包含在他的论文《论一类连续表示》中；该文连同评论已被译成英文，见 [15]；尤其参见英文译本第 434 页。

3. 最后，我们谈几句关于兰伯特的话。欧拉和兰伯特关系密切。兰伯特比欧拉年轻约 20 岁，但比欧拉早逝 5 年。兰伯特是双曲几何的先驱，也许是最重要的先驱。和他之前的许多数学家（包括欧拉）一样，他试图证明欧几里得平行公设可以由其他公设推出。为此，他试图构造一种几何：它接受欧几里得公设和公理，但不接受平行公设，而以其否定取代之，并试图由此导出矛盾。然而，他没有得到任何矛盾，而他所获得的结果正是双曲几何的定理。关于他在这一主题上的回忆录，请参见带有法文译文的批校本，题为《平行线理论》 [23], ；另请参见 [24] 中对该回忆录的扩展评论。关于兰伯特在地理地图方面的工作，参见 [2]。关于约翰·海因里希·兰伯特的生平及其总体工作评述，读者可参阅[22]。

References

[1] 《球面投影原理比较研究：托勒密、法尔加尼、库希》，halshs-00926601，版本1（09-01-2014）。[2] A. A'Campo-Neuen，《兰伯特关于地图投影的研究》，载于：《十八世纪数学地理学：欧拉、拉格朗日与兰伯特》，R. Caddeo 和 A. Papadopoulos 编，施普林格，沙姆，2022年，第111-130页。[3] 《俄罗斯地图集：一幅总图及十九幅专题图，依据地理学法则和最新观测绘制，展现幅员辽阔的俄罗斯帝国及其邻近地区》。圣彼得堡帝国科学院主持并编制，1745年。[4] P. A. d'Avezac，《地理地图投影历史概述（续篇及结尾）》，1862年12月19日在巴黎地理学会公开会议上宣读的报告，《地理学会通报》第五辑，第五卷（1863年），437-485页。[5] R. Caddeo 和 A. Papadopoulos（编），《十八世纪数学地理学：欧拉、拉格朗日与兰伯特》。沙姆：施普林格，2022年。[6] C. Charitos 和 A. Papadopoulos，《论德利尔地理投影》，载于：《十八世纪数学地理学：欧拉、拉格朗日与兰伯特》，施普林格国际出版公司，2022年，第139-150页。[7] P. D'Hollander Paul，《战争部的制图作品》。载于：《军事史评论》，第171期，1988年。军事档案。军事史。第43-52页；[8] L. Euler，《球面在平面上的表示》，《圣彼得堡帝国科学院学报》1777年，1778年，第107-132页，《全集》，第一辑，第28卷，248-275页；R. Caddeo 英文译本《球面在平面上的表示》，载于：R. Caddeo 和 A. Papadopoulos，《十八世纪数学地理学：欧拉、拉格朗日与兰伯特》。沙姆：施普林格（2022年），第243-278页。[9] 莱昂哈德·欧拉，《球面的地理投影》，《圣彼得堡帝国科学院学报》1777年，1778年，第133-142页，《全集》，第一辑，第28卷，276-287页。R. Caddeo 英文译本《球面的地理投影》，载于：《十八世纪数学地理学：欧拉、拉格朗日与兰伯特》，R. Caddeo 和 A. Papadopoulos 编，沙姆：施普林格（2022年），第279-294页。[10] L. Euler，《俄罗斯帝国总图中使用的德利尔地理投影论》，《圣彼得堡帝国科学院学报》1777年，1778年，《全集》，第一辑，第28卷，143-153页。R. Caddeo 英文译本《用于俄罗斯帝国总图的德利尔地理投影》，载于：R. Caddeo 和 A. Papadopoulos，《十八世纪数学地理学：欧拉、拉格朗日与兰伯特》。沙姆：施普林格（2022年），第295-306页。[11] A. Germain，《地理地图投影论》，巴黎，Arthus Bertrand 出版社，1866年。[12] H. C. Gr¨otzsch，《论单叶非保角映射中的畸变及皮卡定理的相关推广》，《萨克森科学院报告与纪要》**80**（1928年），503-507页。

[13] H. C. Gr¨otzsch, 《论单叶非保角映射中的畸变及皮卡定理的相关推广》, Melkana Brakalova-Trevithick 译, 载于: 《蒂希米勒理论手册》, A. Papadopoulos 编, 第VII卷, 371-374页, IRMA 数学与理论物理讲义丛书第30卷, 欧洲数学会, 苏黎世。[14] J. H. Lambert, 《数学及其应用指南》第三部分, 实科学校书店出版社, 柏林, 1772年。与地理学相关的段落英文译本发表于: 《陆地图与天地图编制札记与评论》, A. A'Campo-Neuen 译, 载于: 《十八世纪数学地理学: 欧拉、拉格朗日与兰伯特》, R. Caddeo 和 A. Papadopoulos 编, 施普林格, 沙姆, 2022年, 第367-422页。[15] M. A. Lavrentieff, 《论一类连续表示》。《数学文集》42（1935年）, 407-424页。英文译本《论一类连续表示》, 载于: 《蒂希米勒理论手册》第VII卷, A. Papadopoulos 编, 欧洲数学会出版社, 2019年, 第417-439页。[16] L. P. Lee, 《地图投影的术语体系与分类》, 惠灵顿, 新西兰土地测量局, 载于: 《帝国测量评论》第VII卷第51期, 1944年1月, 第190-200页。[17] H. Miyachi 和 K. Ohshika, 《制图学中的利普希茨映射与拟保角映射》, 载于: 《几何学论文集: 献给阿萨纳西奥斯·帕帕佐普洛斯65岁生日》, M. Uludag 和 A. Zeytin 编, 施普林格, 沙姆, 2025年, 第111-130页。[18] H. Miyachi、K. Ohshika 和 A. Papadopoulos, 《马里努斯—托勒密与德利尔—欧拉圆锥地图》, 《印度数学》。《印度数学史学会通报》45（2013年）, 第227-251页。[19] A. Papadopoulos, 《梅涅劳斯的三个定理》, 《美国数学月刊》126（2019年）, 第610-619页。[20] A. Papadopoulos, 《欧拉、德利尔与制图学》, 载于: 《十八世纪数学地理学: 欧拉、拉格朗日与兰伯特》, 施普林格国际出版公司, 2022年, 第113-138页。[21] A. Papadopoulos, 《十八世纪的数学与地图绘制》, 《印度数学》第41卷第1-2期（2019年）, 第91-126页。[22] A. Papadopoulos, 《约翰·海因里希·兰伯特的生平与著作》, 载于: 《十八世纪球面几何》第一卷: 欧拉、拉格朗日与兰伯特, R. Caddeo 和 A. Papadopoulos 编, 施普林格, 沙姆, 2026年。[23] A. Papadopoulos 和 G. Th´eret, 《约翰·海因里希·兰伯特的平行线理论》, 校勘版, 附法文译文及数学、历史评论, 阿尔贝·布朗沙尔科学与技术书店, 《历史中的科学》丛书, 巴黎, 214页, 2014年。[24] A. Papadopoulos 和 G. Th´eret, 《评约翰·海因里希·兰伯特的论文 *Theorieder Parallellinien*》, 载于: 《十八世纪球面几何》第一卷: 欧拉、拉格朗日与兰伯特, R. Caddeo 和 A. Papadopoulos 编, 施普林格, 沙姆, 2026年。[25] R. Rashed 和 A. Papadopoulos, 《梅涅劳斯球面学: 早期译本与马哈尼／哈拉维版本》, 校勘版及数学评注, 附英文译文, 德格鲁伊特, 《希腊—阿拉伯学术》丛书第21卷, 2017年, 890页。[26] C. Ptol´ém´ée（托勒密）, 《地理学论》, N. Halma 从希腊文译为法文, Eberhart, 巴黎, 1828年。[27] A. A. Stanley, 《现代海图绘制的地图投影》, 《军事工程师》第40卷第268期, 1948年2月, 第55-58页。[28] N. A. Tissot, 《关于曲面表示与地理地图投影的论文》。Gauthier-Villars, 巴黎, 1881年。

Hideki Miyachi, School of Mathematics and Physics, College of Science and Engi-neering, Kanazawa University, Kakuma-machi, Kanazawa, Ishikawa, 920-1192, Japan*Email address*: miyachi@se.kanazawa-u.ac.jp

Ken'ichi Ohshika, Department of Mathematics, Gakushuin University, Mejiro, Toshima-ku, Tokyo, Japan*Email address*: ohshika@math.gakushuin.ac.jp

Athanase Papadopoulos, Institut de Recherche Mathématique Avancée (Universitéde Strasbourg et CNRS), 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex France
Email address: papadop@math.unistra.fr

Sumio Yamada, Department of Mathematics, Gakushuin University, Mejiro, Toshima-ku, Tokyo, Japan
Email address: sumio.yamada@gmail.com