某些赋值域中可定义的单群

JAKUB GISMATULLIN、IMMANUEL HALUPCZOK 和 DUGALD MACPHERSON

Abstract.我们证明，在 1-h- 极小亨泽尔赋值域中，非阿贝尔的可定义单群本质上已经是线性代数群。这里假设该群位于主排序中。对于正特征的纯代数闭赋值域，在额外假设该可定义群是某个线性代数群的子群时，我们也有类似的结果。

arXiv:2601.08423v1 [math.LO] 13 Jan 2026

Contents

1. 引言 1 2. 背景 5 2.1. 线性代数群 5 2.2. 赋值域 9 2.3. 模型论与 1-h-极小性 10 3. 赋值域上的流形与李群 14 3.1. 流形与李群 14 3.2. 切空间与李代数 16 4. 有界子群 21 4.1. $\mathbf{H}(K)$ 的有界子群 21 4.2. 有界子群的非单性 28 5. 定理 1.0.1 的证明。30 参考文献 33

1. Introduction

在域的模型论中，可定义集 （一阶公式的解集，可能带有参数）这一概念是对<同构集可构造集的抽象。在环语言下的代数闭域中，这两个概念相同；而在有序环语言下的实闭域中，可定义集恰好就是半代数集。在其他模型论上研究得很透彻的结构中，例如微分闭域中，可定义性也具有相应的几何内涵，

日期：2026年1月14日。2020 年 数学主题分类。主要分类号 03C60；次要分类号 20G07、12J10、20E32。关键词与短语。亨泽尔赋值域、代数群、简单群、可定义群、温和几何。第一作者获得波兰国家科学中心（NCN）资助，资助项目编号为 2014/13/D/ST1/03491 和 2017/27/B/ST1/01467。第二作者获得研究培训组 *GRK 2240*：代数、算术与拓扑中的代数几何方法资助，该项目由德国研究联合会资助。第三作者获得工程与自然科学研究委员会 UKRI2391 项目资助。

带有自同构的代数闭域、可分闭域、 $\mathbb{Q}_p$以及代数闭赋值域。在所有这类结构中，可定义群发挥着根本作用，它们可用来衡量模型论复杂度，刻画不同可定义集之间的相互作用，或体现为可定义群作用。理解可定义单群（或可定义单群，即没有非平凡真可定义正规子群的可定义群）往往至关重要。

本文在特征 0 的亨泽尔赋值域这一背景下，对可定义单群进行分类；在满足线性假设时，也对特征为 p 的代数闭赋值域进行分类。在特征 0 的情形下，我们的方法也适用于赋值域的*1-h-*极小扩张。这个广泛的框架涵盖了近来受到深入研究的若干背景：Cluckers-Lipshitz [CL11] 的“具有解析结构的赋值域”，其思想最终源自 Denef 和 van den Dries [DvdD88]；以及T-凸的域的幂有界 o-极小扩张 [vdDL95]。关于这些背景的更多细节，见例 2.3.3。我们的主要结果如下。

定理 *1.0.1. (i)* 设 *$(K, v, \ldots)$* 是特征 *0* 的亨泽尔赋值域的 *1-h-*极小扩张。设 G 是结构 *$(K, v, \ldots)$* 中的一个无限非阿贝尔群，其底集是某个 n 的可定义子集 K^n，并假设 G 没有真无限可定义正规子群。那么存在一个半单、几乎 K-简单且 K-各向同性的线性代数 K-群 $\boldsymbol{H}$，以及一个群 G^*，它与 $G/Z(G)$ 可定义同构，使得 $\boldsymbol{H}(K)^+ \leq G^* \leq \boldsymbol{H}(K)$。*(ii)* 设 *$(K, v)$* 是特征为 $p > 0$ 的代数闭赋值域，并设 $G \leq \boldsymbol{SL}_n(K)$ 是一个没有真无限可定义正规子群的无限非阿贝尔可定义群。那么存在一个半单、几乎 K- 简单且 K- 各向同性的线性代数 K- 群 $\boldsymbol{H}$，使得 $G/Z(G)$ 与 $\boldsymbol{H}(K)$ 可定义同构。

关于代数群的相关定义，见第 2.1 节；关于赋值域的模型论和 1-h-极小性的相关背景，见第 2.2 节和第 2.3 节。

(i) 中的结论表明， G^* 与$\mathbf{H}(K)$“几乎相等”。事实上，群$\mathbf{H}(K)^+$ （定义 2.1.6）在$\mathbf{H}(K)$中扎里斯基稠密（见注 2.1.11）；而且，如果 K 是代数闭的，这两个群甚至相等（见注 2.1.8）。我们不能确定，在给定假设下$\mathbf{H}(K)^+$ 是否自动可定义。如果它是可定义的，那么，由于$\mathbf{H}(K)^+$ 是$\mathbf{H}(K)$的正规子群，结论便是 $G^* = \mathbf{H}(K)^+$。例如，若 K 是实闭域或局部域（见引理2.1.14），这一点就成立。

注记 1.0.2. 我们不确定，如果不先用 $G/Z(G)$ 替换 G，该定理是否仍然成立。特别是，在命题 3.2.14 的证明中，定义到 $\mathbf{SL}_n$ 的同态时，我们要除去中心。

我们强调这一结果的两个关键局限。

首先，在定理 1.0.1 (ii) 中，情况为特征 p，我们假设 $G \leq \mathbf{SL}_n(K)$。这是因为在 (i) 的证明中，我们使用通过雅可比矩阵定义的伴随表示来线性化该群（参见命题 3.2.14）。如所述，这种方法只适用于特征 0。

其次，定理 1.0.1 仅论述“本”类K中的可定义群，而非任意可解释群。亨泽尔域中进行虚元消去所需的类

相当复杂（见 [HHM06、HMR18、Mel06、RKV]），而我们的方法似乎还不足以处理可解释群。关于后者的一些进展见论文 [HRK19]，该论文在代数闭非平凡赋值域的理论 ACVF 中发展了可解释的泛型亚稳群 这一概念。那里的结果似乎与本文的结果彼此独立。近期还有几篇论文（其中一些处于 1-h-最小背景下）研究赋值域中的可解释 群与域，避免使用虚元消去，作者为 Halevi、Hasson 和 Peterzil——例如参见 [HHP22], [HHP24], [HHP25]。[HHP25] 中的结果针对更受限的赋值域类，但与我们的定理形成良好互补。那里的主定理将关于一个可解释 可定义单群G 的问题归约到 G 可定义嵌入 $\mathbf{GL}_n(K)$ 的情形，而此时我们的定理即可适用。特别地，上述定理 1.0.1 与 [HHP25 、推论 10.5], 结合，得到如下结论。关于 V- 最小扩张（特征 0 的代数闭赋值域）的概念，见 [HK06、第 3 节4] 。

推论 1.0.3. 设$(K, v, \dots)$ 是幂有界的 T-凸域、 V-极小域或 p-进闭域，并设 G是一个可解释于$(K, v, \dots)$ 中的无限非阿贝尔群，且是可定义单的。那么， G 要么可定义同构于$\mathbf{GL}_n(k)$ 的一个子群，其中 k 是剩余域；要么 G 可定义同构于$\mathbf{H}(K)^+$，其中 $\mathbf{H}$ 是一个半单、近乎 K-单且 K-各向同性的线性代数 K-群。

证明。 需要指出的唯一一点是，在这些情况下，底层域是代数闭域、实闭域或 p-进闭域，因此根据下文的引理 2.1.14(ii)，$\mathbf{H}(K)^+$ 是可定义的。还要注意，CHRK22 的推论 6.2.7、定理 6.3.4 和命题 6.4.2]表明，这里所考虑的所有结构都是 1-h-极小的。□

我们还注意到一个与定理 1.0.1 相关的 p-进情形的结果，这是 Caprace 向我们指出的：在 $K = \mathbb{Q}_p$ 的情形下，根据 [Pil89b，引理 3.8] （另见 [ALH25]），我们的可定义群 G 自然带有 p-进李群的结构，因此我们的结果可视为关于可定义的、可定义单的 p-进李群的一个论述。在 [CRW17], 的第 77–78 页中，给出了非可定义情形下的一个类似结果：若 G 是一个拓扑单的 p-进李群，且其伴随表示非平凡，则 G 同构于形如 $\mathbf{H}(\mathbb{Q}_p)^+/Z$ 的群，其中 $\mathbf{H}$ 是一个非阿贝尔的几乎 K- 单 K- 各向同性线性代数 K-群，且具有 $K = \mathbb{Q}_p$，而 Z 是$\mathbf{H}(\mathbb{Q}_p)^+$ 的中心。注意，在可定义情形下，只要 G 是非阿贝尔的，其伴随表示就自动非平凡；见命题 3.2.14。

我们概述定理 1.0.1 的证明结构。对于可定义集，存在一种性质良好的（拓扑）维数概念。在特征 0 的 1-h-最小框架中，首要的关键步骤是赋予可定义群 G 一个可定义的 C^1-流形结构。为此，我们使用 [ALH25], 的结果；他们发展了可定义弱严格可微（dwsd）流形的概念，并证明任何可定义群都可以被可定义地赋予结构，从而成为 dwsd 李群。这一方法在 Wencel [Wen12], 的工作中已有先例，而该工作本身基于 Pillay [Pil88]的证明，并最终源自 Weil 的“群块”论证。给定 dwsd 李群结构，雅可比表示给出一个同态 $\varphi\colon G \to \mathbf{SL}_n(K)$；利用可定义性的维数论证保证 $\mathrm{Im}(\varphi)$ 非平凡，因此 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是有限的，并且等于中心 $Z(G)$。由此，我们用 $\mathbf{SL}_n(K)$ 的可定义子群 $G/Z(G)$ 替代 G 。在特征 p情形（定理 1.0.1(ii)）中，由于假设了线性性，这一步并不需要。

当 (K, v) 是纯赋值域时，第二阶段可以更直接地进行，即不带有额外的可定义结构（例如解析结构）。略作简化地说，我们取 G 在$\mathbf{SL}_n(K)$ 中的扎里斯基闭包，并证明它具有$\mathbf{H}(K)$ 的形式，其中 $\mathbf{H}$ 是定义在 K 上的某个半单、几乎 K-单、 K-各向同性代数群$\mathbf{H}$ 。通过维数论证， G 在$\mathbf{H}(K)$ 中是赋值开的。当 $(K, v, \ldots)$ 配备了额外的 1-h-最小结构时，这些维数论证在更一般的情形下无效；在后一情形中，我们改用李代数论证：取可定义几乎单线性群 G 的李代数 $L(G)$，证明它是单李代数，并证明 G 嵌入该李代数的自同构群中（取代 G 的扎里斯基闭包），而后者与 G 具有相同的维数。因此，粗略地说，$\mathbf{H}(K)$ 所扮演的角色由 $\mathrm{Aut}(L(G))$ 取代。最后这一论证使用了 [PPS00]中的思想。

第三步是证明 G 不可能是 有界 子群 $\mathbf{H}(K)$，也就是说，不存在这样的 $\gamma \in \Gamma$（ K的值群），使得G 中所有元素的所有矩阵元素的赋值都大于 γ。这里的论证运用了布吕阿-蒂茨建筑中的思想，尽管没有明确提及这些建筑。我们证明，如果 G有界，那么它可以嵌入$\mathbf{SL}_n(\mathcal{O})$的一个变体 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 中，其中 $\mathcal{O}$ 是赋值环。群 $\mathbf{SL}_n(\mathcal{O})$ 有一列交集平凡的正规子群（即合同子群），这与 G的可定义几乎单性不相容；类似的论证也适用于 $\mathrm{SL}_n(\eta)$。

最后，我们采用 Prasad [Pra82], 的两项结果的变体（适用于 Krull 赋值）；他在这些结果中还给出了更早的出处。首先，根据上一段，群 $\mathbf{H}(K)$ 不可能有界，因此 [Pra82] 中的一个结果推出$\mathbf{H}$ 是 K-各向同性的，这保证$\mathbf{H}(K)^+$ 几乎单且在 $\mathbf{H}(K)$ 中扎里斯基稠密。其次，由于 G 在 $\mathbf{H}(K)$ 中是赋值开且无界的，经过一些细致处理后应用 [Pra82] ，我们得到 $G \geq \mathbf{H}(K)^+$。如果$\mathbf{H}(K)^+$ 是可定义的，那么两者相等。在应用 [Pra82], 时还需要做一些额外工作，主要是因为我们处理的是任意 Krull 赋值，而不只是值群为阿基米德的赋值。当 Γ 没有极大真凸子群时，遇到的困难最大。

本文中的一些中间结果可能具有独立的研究价值，并有进一步的应用。参见第 3 节末尾的定理 3.2.11、3.2.12 和命题 3.2.14，它们讨论了特征 0 下，在 1-h-极小背景中可定义群的李代数，并拓展了 [ALH25]中的相关内容。定理 4.1.2 也是 [Pra82] 中一项结果的变体，该结果归功于 Tits；从某些方面来说，这是对 Tits 结果的加强，但它额外要求满足可定义性假设。命题 4.2.1 将以下事实推广了：无限有界子群 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 不可能是单群——这个特殊情形很容易通过考察 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 在一棵 $(p+1)$ 分支树上的作用得出。

我们简要提及一些关于赋值域中可定义群的其他文献。首先，Pillay 在 [Pil89b] 中证明，任何在 $\mathbb{Q}_p$ 中可定义的无限域 都是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张。他还在 [Pil89a] 中研究了 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 的可定义子群 G。借助一个让人联想到 Zilber 不可分解性的论证，他证明换位子群 $[G, G]$是扎里斯基闭的，并且 G 是抽象群意义下的单群，当且仅当它没有非平凡的真扎里斯基闭正规子群。在论文 [HP94], 中，除其他结果外，作者证明：若 G 是 $\mathbb{Q}_p$ 主排序中的可定义群，那么G 的某个开子群与某个连通代数$\mathbb{Q}_p$群 $\mathbf{H}(\mathbb{Q}_p)$ 的开子群可定义同构。Druart 于 2015 年完成的博士论文包含了关于交换

的$\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 可定义子群的大量结果，以及（参见 [Dru15]）关于$\mathbf{SL}_2(K)$ 可定义子群的结果，其中 K 是 p-进闭的。我们还提及 Ningyuan Yao、Will Johnson 及其合作者近期发表的若干篇值得关注的论文。例如，在 [PY] 中，他们回应了[Pil89a], 提出的一个问题，证明若 G 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的代数群，且为交换群或约化群，那么 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的任意开子群都在 $\mathbb{Q}_p$ 中可定义（等价地说，是半代数的）。

论文结构。 本文结构如下。我们在第 2 节介绍线性代数群、赋值域以及 1-h-极小性的背景。第 3.1 节介绍[ALH25]中关于可定义流形（尤其是*dwsd* 流形）的背景，并以 [ALH25] 提出的命题 3.1.8 作结；该命题源自 Wencel 以及更早的 Pillay 的结果，指出在 1-h-极小的背景下，任何可定义群都可以赋予可定义流形结构。第 3.2 节应用这一结论证明：在 1-h-极小结构中，若 G 是一个可定义的可定义几乎单群，则其切空间 $T_e(G)$ 可以赋予可定义的结构，使之成为一个维数相同的单李代数，而 G 则作为一个自同构群作用于其上。第 4.1 节介绍 Prasad 的论文 [Pra20] 中的若干变体；第 4.2 节证明，可定义的可定义几乎单群不可能在赋值意义下有界（命题 4.2.1）。主定理的证明在第 5 节完成。

进一步的方向。 我们提出另外两个问题。

问题 1.0.4。 描述本文所考虑的（扩张）域中可定义的可定义半单群。这里，若一个群没有无限可定义阿贝尔正规子群，就称其为可定义半单 群。这类群的一个典型例子应当是定理 1.0.1 中所描述的群的直积的某个开子群。注意，$\mathbf{SL}_n(\mathcal{O})$（其中 $\mathcal{O}$ 是 K的赋值环）是一个可定义半单的可定义群，但远非简单群。

问题 1.0.5。 将定理 1.0.1（至少对于 ACVF）推广到具有剩余映射的可定义截面的域扩张（这样，可定义单群将包括定义在剩余域上的单群的有理点）。对于 ACVF，第 6 节 [HK09] 中给出了这类结构的量词消去。

致谢： 这项工作得益于我们长期以来与许多人的交流。我们衷心感谢 Patrick Simonetta——事实上，这项工作最初是在 ACVF 的背景下展开的：第三作者在 Simonetta 于 1997–98 年在利兹获得玛丽·居里奖学金期间及之后，与他进行了讨论。我们感谢 Yatir Halevi、Assaf Hasson 和 Kobi Peterzil 与我们分享了 [HHP22、HHP24、HHP25],中的结果，也感谢 Gopal Prasad 提供了与 [Pra82]相关的补充信息。

2. Background

2.1. 线性代数群。 这里我们介绍本文所需的有关线性代数群的一些背景知识、术语和约定。关于代数几何的术语主要遵循 [Hum75、Spr09], ，尤其是始终假定背景中有一个固定的代数闭域 $\mathbf{K}$ 。为进一步简化表述，我们将所有线性代数群都视为嵌入到某个 $\mathbf{SL}_n = \mathbf{SL}_n(\mathbf{K})$ 中，其中 n；类似地，所有簇都将嵌入某个仿射空间 $\mathbf{K}^n$。此类线性代数群和簇始终用粗体字母表示，而非粗体字母通常表示簇的 K-值点的子集。对于不太熟悉这一主题的读者，我们回顾一些细节。

固定一个完美域 K，并固定一个包含 K的代数闭域 $\mathbf{K}$。只要 $\mathbf{K}$ 包含我们所关注的所有域，其具体选取并不重要；大多数情况下，只需令 $\mathbf{K}$ 为 K 的代数闭包 K^{alg} 。

如果一个子集 $\mathbf{X} \subset \mathbf{K}^n$ 是有限个系数属于 K 的、以 n 为变量的多项式的公共零点集，则称其为 K-闭集（或称为 定义在 K 上的集合，或称为 定义在K上的簇）。如果 $\mathbf{X}$ 在 K 上不可约，则称其为不可约，即它不能表示为两个真K-闭子集的并。定义在 K-正则 函数是指 $\mathbf{X}$ 上某个多项式函数的限制，其中该多项式以 n 为变量，系数属于 K。对于 $\mathbf{X}$ 的 K，我们将 $\mathbf{X} \cap K^n$ 记作 $=$，表示 $\mathbf{X}$的 K-有理点集。（注意，$\mathbf{X}$ 也自动定义在 K的任意域扩张 $L \subset \mathbf{K}$上，因此对这样的 L，$\mathbf{X}(L)$ 也有意义。）

在 $\mathbf{X}(K)$ 上的 扎里斯基拓扑 是这样一种拓扑，其闭集是形如 $\mathbf{Z}(K)$ 的集合，其中 K-闭集 $\mathbf{Z} \subset$ 是 $\mathbf{X}$的子集。对于任意子集 $Y \subset \mathbf{X}(K)$，我们将其在 $\mathbf{X}(K)$ 中的扎里斯基闭包记为 $\mathrm{cl}_K(Y)$。

注 2.1.1。 注意，$\mathbf{X}(K)$上的扎里斯基拓扑并不只是$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{K})$上的扎里斯基拓扑的限制（其中考虑的是$\mathbf{K}$-闭集）。然而，对于 $Y \subset \mathbf{X}(K)$，可以得到$\mathbf{Z}' := \mathrm{cl}_{\mathbf{K}}(Y) \subset \mathbf{X}$ 是 K-闭的，因为任何逐点固定 K 的$\mathbf{K}$ 的域自同构也会固定 Y，从而将$\mathbf{Z}'$ 映到自身。特别地，$\mathbf{Z}'(K)$是有意义的，并且等于 $\mathrm{cl}_K(Y)$。

簇$\mathbf{X}$ 的维数 可以用多种等价方式定义，例如定义为扎里斯基维数：在 $\mathbf{K}$上不可约的、定义在$\mathbf{K}$ 上且包含于$\mathbf{X}$中的簇$\mathbf{Y}_i$ 所构成的最长链$\mathbf{Y}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{Y}_d \subseteq \mathbf{X}$ 的长度 d ；详见 [Har77, Ch. I] 中 Corollary 1.6 之后的定义。我们将该维数记为 $\mathrm{zardim}\ \mathbf{X}$。

我们设 $\mathbf{SL}_n := \mathbf{SL}_n(\mathbf{K})$。这是 $\mathbf{K}^{n^2}$ 的一个 K-闭子集，因此上述概念适用于 $\mathbf{SL}_n$ 的子集。 K线性代数群 （下文通常简称为 K-群）是一个子群 $\mathbf{H} \leq \mathbf{SL}_n$ （其中 n），且定义在 K 上。我们将$\mathbf{GL}_n$ 视为线性代数 K-群，方法是将其嵌入 $\mathbf{SL}_{n+1}$，并将矩阵 $A \in \mathbf{GL}_n$ 映射到 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (\det A)^{-1} \end{pmatrix}$。

如果 $\mathbf{H} \subset \mathbf{SL}_n$ 和 $\mathbf{H}' \subset \mathbf{SL}_{n'}$ 是两个 K-群，那么 K-态射 $f\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$（也称为一个定义在 K 上的态射）是从$\mathbf{H}$ 到$\mathbf{H}'$ 的群同态，由$\mathbf{H}$上的一个 $n' \times n'$ 元组 K-正则函数给出。如果 f 是双射，且其逆映射也是一个 K-态射，我们称 f 为一个 K-同构；若存在这样的 f，则称$\mathbf{H}$和$\mathbf{H}'$ 在 K上同构。

注 2.1.2。 对于任意 K-群态射 $f\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$，其像 $f(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}'$也是一个 K-群。若 f是单射且 K具有特征 0，则 $f^{-1}\colon f(\mathbf{H}) \to \mathbf{H}$ 也是一个 K-态射，因此 f 诱导出从$\mathbf{H}$ 到 $f(\mathbf{H})$ 的 K-同构（例如参见[Spr09，第 5.3.5(1) 题]）。

我们用$\mathbf{G}_a = \mathbf{G}_a(\mathbf{K})$表示$\mathbf{K}$的加法群，用$\mathbf{G}_m = \mathbf{G}_m(\mathbf{K})$表示$\mathbf{K}$的乘法群。注意，通过将它们与$\mathbf{SL}_2$的子群等同起来，两者都可以视为 K-群：$\mathbf{G}_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和$\mathbf{G}_m = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$。

[1]一般而言，“在 K上定义”是一个限制性更强的条件，但由于我们假设 K 是完美的，它等同于 K-闭；参见 [Bor91，AG §11], [Bor66，第 1] 节。

通常，线性代数群$\mathbf{H}$是抽象定义的，$i.e.$，$\mathbf{H}$ 并不附带嵌入$\mathbf{SL}_n$的固定方式。为了确认我们以朴素方式（使用固定嵌入）定义的各种概念在抽象情形下也有意义，需要验证嵌入的选择无关紧要。更确切地说，设$\mathbf{H} \subset \mathbf{SL}_n$ 和$\mathbf{H}' \subset \mathbf{SL}_{n'}$是 K-群，且 f: $\mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ 是一个 K-同构。那么：

- 映射 f 将$\mathbf{H}$ 的 K-闭子集映为 K-闭子集$\mathbf{H}'$，并将 K-有理点映为 K-有理点。
- 如果我们固定一个定义在 K 上且扩张域语言的一阶结构，那么 f 将$\mathbf{H}(K)$ 的 K-可定义子集映为$\mathbf{H}'(K)$ 的 K-可定义子集。[2]
- 如果 K 是一个赋值域，那么 f 将$\mathbf{H}$ 的有界子群映为$\mathbf{H}'$的有界子群；参见注 4.0.1。

一些作者常常谈论仿射 K-群。请注意，这与线性代数 K-群（在同构意义下）相同；例如参见 [Bor91，命题 1.10]。（回想一下，在本文中，所有 K-群都假定为线性的。）

关于$\mathbf{H}$何时是连通群、半单群 和约化群 的定义，可参见 [Bor66、Bor91、Spr09、Mar91]。

我们给出关于几乎单群的一些一般术语。

定义 2.1.3。 我们称抽象群 G 是几乎单 的，如果 G没有真无限正规子群。如果 G 在某个环境一阶结构中是可定义的，则当它没有真无限可定义正规子群时，我们称其为可定义几乎单 的。

注 2.1.4。 如果 G 是无限的几乎单群，且 H 是 G 的真正规子群，那么 H 是有限的，因此 $C_G(H) = G$ （因为 $|G : C_G(H)|$ 是有限的），也就是说， $H \leq Z(G)$。特别地， $G/Z(G)$ 是（抽象的）单群。同样地，如果 G 是可定义几乎单的，那么 $G/Z(G)$ 是可定义单的。

定义 2.1.5。 如果一个 K-群$\mathbf{H}$ 没有真非平凡连通正规 K-子群，则称其为几乎 K-单 的。

显然，如果$\mathbf{H}$ 作为抽象群是几乎单的，那么它就是几乎 K-单的，因为非平凡连通 K-子群必然是无限的。

定义 2.1.6. 设$\mathbf{H}$是一个连通 K-群。用$\mathbf{H}(K)^+$ 表示由$\mathbf{H}(K)$中 K-有理点生成的正规子群，这些点属于抛物 K-子群的幺幂根$\mathbf{H}$ [Mar91, 1.5.2], [Tit64, 1.1]。

注 2.1.7. 当 K 是完美的（本文中始终如此）时，$\mathbf{H}(K)^+$ 可刻画为由$\mathbf{H}(K)$中的所有幺幂元 [生成的子群 Mar91, 1.5.2], [BT73, 命题 6.2(i)]。

注 2.1.8. 请注意，只有当 K 不是代数闭时，$\mathbf{H}(K)^+$ 才主要值得关注。事实上，若 K 是代数闭且$\mathbf{H}$ 是半单的，则根据 [Hum75, 27.5 (e)]，有$\mathbf{H}(K)^+ = \mathbf{H}(K)$。

定义 2.1.9. 设 $\mathbf{H}$ 是一个连通 K群，且 K 是一个完美域。若 $\mathbf{H}$在 K 上具有一个代数子群 $\mathbf{T}$，该子群定义在 K 上，且在 K 上同构于某个环面，即同构于形如 $(\mathbf{G}_m)^t$ 的群（其中$t \geq 1$），则称 $\mathbf{H}$在 K 上是各向同性的，或称为 K-各向同性。这里，$\mathbf{T}$ 称为-分裂环面（属于$\mathbf{H}$）。若 $\mathbf{H}$ 不是 K-各向同性的，则称其为 K-各向异性。例如参见 [Mar91, 0.25]。

[2]请注意，听起来相似的术语“定义在 K上”和“K-可定义的”含义不同。不过，若$\mathbf{X} \subset \mathbf{K}^n$ 定义在 K上，则$\mathbf{X}(K)$是 K-可定义的。

请注意，要使$\mathbf{H}$ 各向同性，并不要求群$\mathbf{T}$ 是$\mathbf{H}$的极大环面。特别地，$\mathbf{H}(K)$不一定是切瓦利群。

例 2.1.10. $\mathbb{R}$-子群 $\mathbf{SO}_3 = \{A \in \mathbf{SL}_3 \mid AA^T = 1\}$ 在 $\mathbf{SL}_3$ 中是 $\mathbb{R}$-各向异性的，主要原因是 $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ 是紧的。

注 2.1.11. 设$\mathbf{H}$ 是一个连通的 K-群。

(i) 若 H 是半单的，则 H 是 K-各向同性的，当且仅当 $\mathrm{H}(K)^+$ 非平凡[Mar91, 1.5.2]。(ii) 若 K 是无限的，且 H 几乎 K-单、 K-各向同性且非阿贝尔，则 $\mathrm{H}(K)^+$ 在 $\mathrm{H}(K)$ 中扎里斯基稠密 [Mar91, 1.5.4], [Tit64, 3.2(20)]。(iii) 在开创性论文 [Tit64], 中，Tits 证明，若 K 至少有 4 个元素，且 H 是半单且几乎 K-单的（定义 2.1.5），则 $\mathrm{H}(K)^+$ 几乎单（见定义 2.1.3）。Tits 的这一结果涵盖了 Dieudonn´e、Chevalley、Steinberg 等人关于各种特殊类型经典线性代数群的简单性的先前结果，例如特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(K)$ 和辛群 $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$。(iv) 在 [Tit64, 1.3] 中给出了一个例子，其中 $\mathrm{H}(K)^+$ 是 $\mathrm{H}(K)$ 的扎里斯基稠密真子群。这是在非完美域上的例子，同时也是 $\mathrm{H}(K)^+$ 不等于由 $\mathrm{H}(K)$ 的所有幺幂元生成的群的例子。

定义 2.1.12. 若连通半单线性代数群 $\mathbf{H}$ 具有如下性质，则称其为单$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$连通：任意中心等源 $\pi\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$，其中$\mathbf{H}$ 是连通线性代数群，都是代数群同构（参见 [Mar91, 0.18, 1.4.9], [PR94, 2.1.13],[Spr09, 8.1.11]）。

$\widetilde{\ }$**注 2.1.13.** (i) 每个半单 K-群$\mathbf{H}$ 都有一个泛 K覆盖 $\pi\colon \mathbf{H} \to \widetilde{\mathbf{H}}$，定义在 K 上（[PR94, 命题 2.10] [Tit66, 2.6.1]）；也就是说，$\mathbf{H}$是单连通 K-群，且 π 是定义在 K上的中心等源。（关于这些概念的更多信息，例如请参见 [PR94, 第 2.1 节13]。）此外，（参见 [BT73, 6.5]）

$$\pi\left(\widetilde{\mathbf{H}}(K)^+\right) = \mathbf{H}(K)^+.$$

(ii) 著名的 *Kneser–Tits* 问题 探讨的是：若 $\mathbf{H}$ 在 K [上单连通、几乎 K-单且各向同性，是否有 $\mathbf{H}(K)$ $=\mathbf{H}(K)^+$ 成立 09]。众所周知，在这些假设下，例如当 K 是代数闭域（见注 2.1.8），或 K 是局部域（如 $K = \mathbb{Q}_p$ p-进数域） [Mar91, 2.3.1(a)], ，或 K 是实闭域时， [PPS02, 6.1, 6.8] 有 $\mathbf{H}(K) = \mathbf{H}(K)^+$ 成立；然而，一般而言，$\mathbf{H}(K)^+$ 可能是 $\mathbf{H}(K)$ 的真子群——Platonov 给出了 Kneser–Tits 问题的一个反例（见 [Gil09], [PR94] 和 [Tit78]）。

若能获知哪些条件可以保证半单的、几乎 K-单的线性代数 K群 $\mathbf{H}$ 满足 $\mathbf{H}(K)^+$ 在域 $(K, +, \times)$ 中可定义（该域也可能带有赋值），将对本文很有帮助。例如，若此结论成立，则定理 1.0.1 中的结论可加强为 $G^* = \mathbf{H}(K)^+$。我们对此作如下观察。

引理2.1.14。设$\mathbf{H}$是一个半单、几乎 K-单的线性代数 K-群。$\widetilde{\ }$假设 $\pi\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ 是万有 K-覆盖（见注 *2.1.13*）。则

$\tilde{}$ $\tilde{}$（i）若$\mathbf{H}$（K）$^+ = \mathbf{H}$（K），则$\mathbf{H}$（K）$^+$ 在（K、$+$、$\times$）中是可定义的；（ii）若 K 是实闭域或局部域，且$\mathbf{H}$ 是 K-各向同性的，则$\mathbf{H}$（K）$^+$ 在（K、$+$、$\times$）中是可定义的。

证明。(i) 我们可以假设$\mathbf{H}$是 K各向同性的，否则根据注 2.1.11(2) (i)，$\mathbf{H}(K)^+$ 是平凡的，因此显然可定义。根据注 2.1.13，$\pi\left(\tilde{}\mathbf{H}(K)\right) = \mathbf{H}(K)^+$。由于$\tilde{}\mathbf{H}$ 和 π 是在 K上定义的，$\mathbf{H}(K)^+$ 在域 K中可定义。

(ii) 这直接由 (i) 和注 2.1.13 (ii) 得出。（注意，如果$\mathbf{H}$是$\tilde{}$几乎 K单的，那么$\mathbf{H}$也如此。）□

2.2. **赋值域**。 在本文大部分内容中， K 表示带有非平凡非阿基米德亨泽尔赋值 v的域： $K \to \Gamma \cup \{\infty\}$，其中（$\Gamma, <, +$）是任意全序阿贝尔群。如果 K 具有正特征 p，我们通常假设K 是代数闭的。我们始终默认假设 v 是满射。

按照惯例， Γ 的单位元记作 0，并且对所有 $\gamma \in \Gamma$，我们令 $\gamma < \infty$。需要强调的是，群 Γ 可能是非阿基米德的，也就是说，它可能无法嵌入到 $(\mathbb{R}, <, +)$ 中——我们讨论的是$Krull$ 赋值。

我们将赋值域记作 (K, v)。称 (K, v) 是亨泽尔 的，意指 v在 K的任意代数扩张上都有唯一的扩张（相差一个等价关系）。我们用 K^{alg} 表示 K 的一个代数闭包，并滥用记号，用 v 同时表示 K^{alg} 上将 v 扩张到 K所得的唯一赋值。

记号 2.2.1。 若 (K, v) 是赋值域，定义 $\mathcal{O} = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$ （(K, v) 的赋值环）、$\mathcal{M} = \{x \in K : v(x) > 0\}$ （其唯一的极大理想）、$k = \mathcal{O}/\mathcal{M}$（剩余域）以及 res：$\mathcal{O} \to k$（剩余映射）。

记号 2.2.2。 对每个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $a \in K^n$，定义开球

$$B_\gamma(a) = \{x \in K^n : v(x_i - a_i) > \gamma \text{ for } i = 1, \ldots, n\}.$$

族 $\{B_\gamma(a)$： $\gamma \in \Gamma\}$ 构成 a 在一种拓扑中的开邻域基，该拓扑称为 K^n上的赋值拓扑。

接下来我们引入（高阶）首项结构 RV_λ。它如今已成为赋值域模型论中的标准要素，也是下一小节所必需的。

定义 2.2.3。 设 (K, v) 是一个赋值域。设 $\lambda \in \Gamma$ 满足 $\lambda \geq 0$，并定义I_λ：$= \{x \in K : v(x) > \lambda\}$，它是 $\mathcal{O}$ 的一个理想。令 $\mathrm{RV}_\lambda^\times$ 为乘法群 $\mathrm{RV}_\lambda^\times = K^\times/(1 + I_\lambda)$ 的商，令 $\mathrm{RV}_\lambda := \mathrm{RV}_\lambda^\times \cup \{0\}$，并令 rv_λ： $K \to \mathrm{RV}_\lambda$ 为将投影 $K^\times \to \mathrm{RV}_\lambda^\times$ 扩展得到的映射，其中 $\mathrm{rv}_\lambda(0) = 0$。我们分别用 RV 和 rv 表示 RV_0 和 rv_0 。

为了对 RV 有一些直观认识，注意到由于 $K^\times/(1+\mathcal{M})$ 的子群 $\mathcal{O}^\times/(1+\mathcal{M})$ 同构于乘法群 $k^\times$，我们有一个短正合序列

$$k^\times \to \mathrm{RV}^\times \to \Gamma.$$

另一种观点是，我们可以将 $\mathrm{RV}^\times$ 视为开球集合 $\{B_{v(a)}(a) : a \in K^\times\}$。

2.3. **模型论与 1-h-极小性**。我们将把赋值域 (K, v) 视为适当一阶语言中的一个结构。我们的许多结果适用于各种不同的语言，其中最基本的是 Abraham Robinson 的单排序语言 $L_{\mathrm{div}} = (+, -, \cdot, 0, 1, \mathrm{div})$，其中 div 是一个二元关系符号，满足 $K \models \mathrm{div}(a, b)$ 当且仅当 $v(a) \leq v(b)$。由 [Rob77] 可知，任何代数闭赋值域在这种语言中都具有量词消去；反过来，根据 [MMvdD83], ，任何在 L_{div} 中具有量词消去的非平凡赋值域都是代数闭的。

大多数情况下，我们要么假设 (K, v) 是 ACVF_p 的一个模型，即特征为正的代数闭赋值域 p，其语言为 L_{div}；要么假设 $\mathrm{char}(K) = 0$，并在任意一个 1-h-极小扩张 $(K, v, \ldots)$ 中工作。我们将在下文回顾这一概念。

值群、剩余域和首项结构 RV 将被视为虚排序。此外，我们可以将所有高阶首项结构的 不交并 $\coprod_{\lambda \geq 0} \mathrm{RV}_\lambda$ 视为一个虚排序。

1-h-极小性的概念首先在等特征零情形下于 [CHRK22] 中引入，随后在混合特征情形下于 [CHRKV23] 中引入。它为定理 1.0.1 提供了框架。我们将讨论关键示例，并描述所需的 1-h-极小性所带来的结果。请注意，我们使用上述赋值记号，而非 [CHRK22] 和 [CHRKV23] 中的乘法记号。

定义 2.3.1. 设 $(K, v, \ldots)$ 是一个赋值域，并设 $\lambda \in \Gamma$ 满足 $\lambda > 0$。若 $C \subset K$是有限的，而 $X \subset K$ 是任意的，则称 C λ-预备 X，如果满足以下条件：对于任意 $x, x' \in K$，只要对所有 $c \in C$都有 $\mathrm{rv}_\lambda(x - c) = \mathrm{rv}_\lambda(x' - c)$，便有

$$x \in X \Leftrightarrow x' \in X.$$

在 [CHRK22] 中，作者强调了与一个 o-极小域 R的类比：给定一个可定义的 $X \subset R$，存在一个有限集 C，使得对于 $x \in R$， $x \in X$是否成立取决于元组 $(\mathrm{sgn}(x - c) : c \in C)$；我们将 X 典范地写成开区间和单点集的有限并，而 C 由这些单点集和区间端点组成。在 1-h-极小性中，$\mathrm{sgn}(x - c)$ 被 $\mathrm{rv}_\lambda(x - c)$ 所取代（其中 λ满足某些条件）。在 o-极小情形下，C 可由 X 的一个典范参数定义（特别是可由用于定义 X的任意参数定义），但在赋值域情形下，这个问题更为微妙，也是下一个定义要讨论的要点。

定义 2.3.2. 设 T 是语言 $L \supseteq L_{\mathrm{div}}$ 中特征 0 的赋值域理论。若满足以下条件，我们称 T 为 *1-h-*极小：设 $K \models T$，设 $n \in \mathbb{N}^{>0}$，设 $\lambda \in \Gamma$ 满足 $\lambda > 0$，设 $A \subset K$，并设 $\xi \in \mathrm{RV}_\lambda$ 为单个元素。那么对于任意 $(A \cup \mathrm{RV}_{v(n)} \cup \{\xi\})$-可定义集 $X \subset K$，都存在 $m \in \mathbb{N}^{>0}$，使得 X 可由一个 A-可定义的有限集 $C \subset K$ 按 $(\lambda + v(m))$-预备。若一个结构的理论是 1-h-极小的，则称该结构为 1-h-极小。

这个定义出自 [CHRKV23 的定义 2.2.1], 适用于混合特征情形，并扩展了 [CHRK22]中给出的等特征 0 情形定义——在后一种情形下，我们有 $v(n) = v(m) = 0$，因此 n 和 m 不起作用。事实上， [CHRKV23 第 2.2], 节给出了这个定义的几个版本，并证明它们等价（见定理 2.2.8）。其中一个版本指出，对于任意 $(K, v, \ldots\ldots) \models T$，若 v'是 v的最细的等特征零粗化，则 $(K, v', \ldots\ldots)$ 按照 [CHRK22]的定义是 1-h-极小的。混合特征下从 1-h-极小性出发的证明通常会借助 RV-丰富性结果（[CHRKV23，第 2.6]节）归约为等特征 0 下的证明

以及通过最细的等特征零粗化定义的 1-h-极小性；例如参见 [CHRKV23，定理 2.2.8]。

1-h-极小性的概念是由一系列条件构成的层级之一，即针对$\ell \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$的 ℓ-h-极小性，其中 ℓ 决定了定义 2.3.2 中来自 RV_λ 的元素 ξ 的数量。随着 ℓ增大，这些条件的强度也随之增强，目前尚不清楚它们是否都等价。通常统称为亨泽尔极小性。假设在混合特征情形下具有有限分歧[3]（或者允许无限分歧，但将“可定义球完备性”作为额外假设），它们都蕴含：T 的模型作为赋值域都是亨泽尔的（等特征 0 的情形见 [CHRK22，定理 2.7.2],；混合特征的情形见 [CHRKV23，注 2.2.3]）。

例 2.3.3. 我们列出若干类赋值域的 1-h-极小扩张的例子。有关这些例子的更多细节，参见 [CHRK22]。

1. 等特征 0 的亨泽尔赋值域（[CHRK22，定理 6.2.1]），或混合特征的亨泽尔赋值域（[CHRK22，推论 6.2.7]），还可以按照 [CL11], 的意义配备解析结构，都是 1-h-极小的。这些具有解析结构的域构成了一个广泛的族，其源头最终可追溯到 [DvdD88] 中的构造 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{an}}$。（结构 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{an}}$ 本质上是对 $\mathbb{Q}_p$ 的扩张，其中加入了形如 $f(x) = \Sigma_{\mu\in\mathbb{N}^k} a_\mu x^\mu$ 的多元函数，满足 $x = (x_1, \ldots, x_k)$ 和 $a_\mu \in \mathbb{Z}_p$，且 $v(a_\mu) \to \infty$ 作为 $|\mu| \to \infty$，其中 $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_k$；这类函数在 $\mathbb{Z}_p^k$ 上收敛，并规定在其他地方取值为 0。）

2. 设 T_0 （在语言 L_0中）是实闭域理论的一个 o-极小扩张，并且满足 幂有界，即对于 $K \models T_0$ 以及任意 $L_0(K)$-可定义的函数 $f\colon K \to K$，存在一个‘幂函数’ $g : K^\times \to K^\times$ （$(K^\times, \cdot)$ 的一个可定义自同态），使得对于所有充分大的 x，都有 $|f(x)| \le g(x)$。设 $K_0 \prec K$ 是 T_0 的模型，设 $\mathcal{O}_K$ 是 K 中 K_0 的凸包，并假设 $\mathcal{O}_K$ 是 K 的真子环。那么， $\mathcal{O}_K$ 是 K 的赋值环；将 L_0-结构 K 扩展到语言 L ，并加入一个表示 $\mathcal{O}_K$ 的谓词，这样得到的结构称为 T_0-凸赋值域。（当然，也可以使用二元谓词 div 来定义赋值，而不使用定义 $\mathcal{O}_K$ 的谓词。）根据 [CHRK22，定理 6.3.4], ，这样的结构是 1-h-极小的。

3. 任意一个 1-h-极小域，若通过在 RV 的笛卡尔幂的子集上解释的谓词进行扩张，则仍是 1-h-极小的——等特征 0 情形见 [CHRK22, Section 1.2] ，混合特征情形见 [CHRKV23, Proposition 2.6.5 (ii)]。例如，我们可以通过添加一个真凸子群的谓词来扩张值群 Γ Γ_0，从而确保粗化赋值 $K \to \Gamma \to \Gamma/\Gamma_0$ 是可定义的。如果粗化赋值具有等特征 0,[4] ，那么根据 [CHRKV23, Theorem 2.2.8 (4)⇒ (2)], ，在这一扩张语言中，若将其视为带有粗化赋值的赋值域， K 仍是 1-h-极小的。

接下来，我们回顾如何在赋值域的语境中定义维数和微分。

定义 2.3.4。可定义集 $X \subset K^n$ 的（拓扑）维数 $\dim X$ 是满足以下条件的最大 d： 存在一个坐标投影 $\pi\colon K^n \to K^d$ ，使得$\pi(X)$ 包含一个球。（这里的坐标投影指映射 $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_d})$，其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n$ 是任意的。）若 X 为空，则定义 $\dim X := -\infty$。

[3]这意味着赋值在 0 和 $v(p)$[4]之间取有限多个值。也许当粗化赋值具有混合特征时，这同样成立，但证明尚未写出。

在 CHRK22, Definition 5.3.1], 中（等特征 0 的情形）给出了维数的另一种定义，但（在 1-h-极小性条件下）命题 5.3.4(1) 证明了它与上述定义等价（混合特征的情形另见 [CHRKV23, Proposition 3.1.1(3) part (1)]）。

在特征零的情形下，微分按通常方式定义，即使用相对于赋值拓扑的极限。在下面的定义中，我们将一个元组的赋值定义为其各项赋值的最小值：对于 $x = (x_1、 ... ...、 x_n) \in K^n$，令 $v(x) := \min_i v(x_i)$。

我们采用 [ALH25] 的表述，使用如下的严格可微性概念。

定义 2.3.5。设 (K, v) 是一个特征零赋值域。令 $U \subset K^m$为一个开集， $f\colon U \to K^n$ 为一个映射。若存在一个线性映射 $A\colon K^m \to K^n$，使得对每个 $\epsilon \in \Gamma$，都存在 $\delta \in \Gamma$，满足对所有满足 $v(x-a) > \delta$ 且 $v(y-a) > \delta$的 $x、 y \in K^m$，均有

$$v(f(x) - f(y) - A(x-y)) \geq v(x-y) + \epsilon.$$

我们称 f 在 U 上严格可微，如果它在 U的每一点都严格可微。

如 [ALH25], 中所述，上述映射 A 是唯一确定的，因此可记为$d_a f$。如果 f 严格可微，那么它也以更常见的意义连续可微。

以下命题汇集了 1-h-极小性的若干关键推论。请注意，无论在此处还是下文，1-h-极小性的定义都包含这样一点：该域的特征为 0（尽管剩余域可能具有素特征）。

命题 2.3.6。 假设 K 要么是特征为 p的代数闭赋值域，要么是亨泽尔赋值域的一个 *1-h-* 极小扩张。则以下结论成立。

(i) K 的每个无限可定义子集都包含一个球。因此，非空可定义集 $X \subset K^n$ 的维数为 *0*，当且仅当它是有限集。*(ii)* 若 $f\colon X \to Y$是一个可定义映射（其中 $X \subset K^m$、$Y \subset K^n$均为可定义集），且存在一个 $d \geq 0$，使得对于每个 $y \in Y$，$\dim f^{-1}(y) = d$，那么 $\dim X = \dim Y + d$。特别地，若某些可定义集 $X \subset K^m$和 $Y \subset K^n$之间存在可定义双射，则 $\dim X = \dim Y$；对于可定义集 $X \subset K^m$和 $Y \subset K^n$，有 $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$。*(iii)* 对于可定义集 $X、 X' \subset K^n$，有 $\dim(X \cup X') = \max\{\dim X, \dim X'\}$。特别地， $X \subset X'$蕴含 $\dim X \leq \dim X'$。 *(iv)* 对每个非空可定义集 X，差集 $X \setminus X$ 的维数严格小于 X的维数，其中 X 是 X 关于赋值拓扑的闭包。证明。*(i)* 若 K 是特征 p的代数闭域，则这直接由量词消去得出。在 *1-h-*极小的情形下，这几乎可直接由定义推出。第二个断言立即得出。*(ii)*、*(iii)*、*(iv)* 关于 $ACVF_p$，参见例如[*vdD89, 2.24(4),* 命题 *2.*15]。关于 *1-h-*极小的情形，等特征零情形参见 [*CHRK22,* 命题 *5.3*；4]混合特征情形参见 [*CHRKV23,* 命题 *3.1.1(3)* 的 *(4)–(6)*] 。

□

注 2.3.7。若 K 的特征为 0，则对于每个可定义函数 $f\colon K \to K$，都存在一个有限子集 $A \subset K$，使得 f 在 $K \setminus A$上严格可微。这由 [ALH25, 命题 3.13], 结合上文的命题 2.3.6(i) 得出。

引理 2.3.8。在命题 *2.3.6* 的假设下，设 $U \subset V$ 是可定义集，且 $\dim(U) = \dim(V)$。那么 U 在 V 中有非空内点。

证明。U 在 V 中的内点可写为 $U \setminus Y$，其中 $Y = Z \setminus Z$ 且 $Z = V \setminus U$。由命题 2.3.6(iv)，$\dim(Y) < \dim(Z) \leq \dim(V) = \dim(U)$，因此 $U \setminus Y$ 非空。□

下面的引理指出，可定义集 X 的维数等于 X 中各点处“局部维数”的最大值。显然，局部维数不会超过整体维数，因此唯一的问题是整体维数是否能在局部达到。

引理 2.3.9。设 K 是 ACVF_p 的一个模型，或是赋值域的一个 *1-h-*极小扩张。设 $X \subset K^n$ 是一个可定义集。那么存在一个 $x \in X$，使得对于每个包含 x 的球 $B \subset K^n$，$\dim(X \cap B) = \dim X$。

证明。对于特征为 0 的情形，参见 [CHRK22, 命题 5.3.4(5)], ；对于混合特征情形，则由 [CHRKV23, 命题 3.1.1(3) 的第 (5) 部分]得出。

当 K 是特征为 p的纯代数闭赋值域时，结论可直接由 [FH12]的定理 3.1 得出；该定理的假设与 [vdD89], 的 Dim(1)-Dim(4) 非常相似，且很容易验证它们对 ACVF_p成立。□

以下结果表明，对于 L_{div}-可定义集合，拓扑维数相对于扎里斯基闭包和扎里斯基维数具有良好的性质。

引理 2.3.10。假设 $X \subset K^n$ 是带参数的 L_{div}-可定义对象。回忆一下，我们用$\mathrm{cl}_K(X)$表示 X 在 K^n中的扎里斯基闭包，并记$\mathbf{Y} = \mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(X)$为 X 在$(K^{\mathrm{alg}})^n$中的扎里斯基闭包。那么

(i) X 在$\mathrm{cl}_K(X)$中具有非空内点（相对于赋值拓扑）。(ii) $\dim X = \dim \mathrm{cl}_K(X) = \mathrm{zardim}(\mathbf{Y})$（其中zardim 表示扎里斯基维数；见第 *2.1* 节）。

回顾上述内容，根据注 2.1.1，$\mathbf{Y}$ 是定义在 K 上的簇，并且$\mathbf{Y}(K) = \mathrm{cl}_K(X)$。

引理 *2.3.10* 的证明。(i) 见 [vdD89]；具体而言，命题 2.18 与 2.24 结合使用（其中例 (4) 处理 ACVF_p），以及定理 3.5（针对等特征 0）和 3.9（针对混合特征）。

(ii) 容易看出，上文定义的拓扑维数是 L_{div}-可定义集上的维数函数，其含义见 [vdD89，Dim(1)–Dim(4)]。条件 Dim(1) 和 Dim(3) 由拓扑维数的定义立即得出，Dim(2) 可由命题 2.3.6(iii) 推出，而 Dim(4) 则是命题 2.3.6(ii) 的推论。

子集的代数维数 $X \subset K^n$ 由 [vdD89, 定义 2.2] 引入，恰好是其扎里斯基闭包的扎里斯基维数 $\mathrm{zardim}(\mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(X))$；而[vdD89, 定理 3.5, 3.9] 断言，代数维数是特征 0 的亨泽尔赋值域中 L_{div}-可定义集上唯一的维数函数。定理 3.5 中的唯一性证明同样适用于 ACVF_p。因此，这两种维数概念一致，从而 $\dim X$ 和 $\dim \mathrm{cl}_K(X)$ 都等于 $\mathrm{zardim}\ \mathbf{Y}$。□

3. Manifolds and Lie Groups over valued fields

本节中，我们将在特征 0 的赋值域的一个 1-h-极小扩张（$K, v, \ldots$）中开展讨论。在第 3.1 小节中，我们概述一些来自[ALH25] 的材料，这些材料确保我们的可定义群 G 能够在适当意义下赋予可定义的微分流形结构。第 3.2 小节将应用这些内容，并结合 [PPS00], 中 o-极小情形的一种论证思路，得到关于切空间上的李代数结构的一些结果。

3.1. 流形与李群。 我们需要一个关于 K 上可定义流形的概念。在 [ALH25] 中已经提出了若干种这样的概念。我们将采用的概念，是 [ALH25] 的作者所称的可定义弱严格可微流形；我们将其简称为*dwsd* 流形。这类流形的定义大体上符合预期：它是一个配备了可定义坐标图 $U_i \to M$ 的可定义集 M，且这些坐标图满足关于过渡映射的通常条件。不过，“弱”这个形容词表明，坐标图并非完全如人们所想：我们不要求集合 U_i 是 K^n 的子集（当 $n = \dim M$ 时），而是允许它们是这类集合的某种有限（´étale）覆盖。

一个需要使用这类有限覆盖的具体例子是“圆” $M = \{(x, y) \in K^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$，它显然应该是一个流形。我们希望将 $U := M \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ 视为上半圆与下半圆的不交并，但“上”和“下”并无意义，也无法将其可定义地分成两个分支 U 。因此，我们修改了图册的概念，使得整个 U都是一个图。

下面给出 dwsd 流形的定义（[ALH25，定义 5.1–5.3]）：

定义 3.1.1. (1) 若可定义映射 $r\colon U \to K^n$ (其中 $U \subset K^m$ 对某个 m成立)满足：对每个 $u \in U$，都存在一个邻域 $B \subset U$，使得限制映射 $r|_B$ 是到其像 $r(B)$上的同胚（相对于 U 和 K^n上的赋值拓扑），则称其为（拓扑） ´etale。(2) 给定两个可定义的 ´etale 映射 $r_i\colon U_i \to K^{n_i} (i = 1, 2)$，若对每个 $y \in U_1$ 都存在一个邻域 $B \subset U_1$，使得 $r_1|_B$ 是单射，且 $r_2 \circ f \circ (r_1|_B)^{-1}$ 在 $r_1(B)$上严格可微（按照定义 2.3.5 的意义），则称可定义函数 $f\colon U_1 \to U_2$ 严格可微。(3) 可定义集 M 上的可定义 n-图由一个可定义单射 $\phi\colon U \hookrightarrow M$ 和一个 ´etale 可定义映射 $r\colon U \to K^n$ (其中 $U \subset K^m$ 对某个 m成立)构成。我们通常称“$\phi\colon U \hookrightarrow M$”为图，并默认其映射为 r。(4) 可定义弱严格可微 n-流形，简称 dwsd n-流形，由一个可定义集 M 及有限个可定义 n-图.$\phi_i\colon U_i \hookrightarrow M$ 构成，满足：(a) M 被像 $\phi_i(U_i)$覆盖；(b) 对每对 i, j，集合 $U_{ij} := \phi_i^{-1}(\phi_j(U_j))$ 在 U_i中是开集；(c) 过渡映射 $U_{ij} \to U_{ji}, \phi_j^{-1} \circ \phi_i$ 按照 (2) 的意义严格可微。我们在 M 上赋予唯一的拓扑，使所有映射 ϕ_i 成为开浸入（由 (b) 可知这是可能的）。下文中，提及流形M的图时，我们始终指其中某个 ϕ_i。dwsd 流形是某个 n上的 dwsd n-流形。

(5) 给定两个 dwsd 流形 M，N，若对所有图 $\phi_i\colon U_i \to M$和 $\psi_j\colon V_j \to N$，集合 $W_{ij}:=\phi_i^{-1}(f^{-1}(\psi_j(V_j)))$ 在 U_i 中是开集，且复合映射 $\psi_j^{-1}\circ f\circ\phi_i|_{W_{ij}}$ 在 W_{ij} 上严格可微（按照 (2) 的意义），则称可定义映射 $f\colon M\to N$严格可微。将 dwsd 流形视为一个范畴，其态射为严格可微的可定义映射。

注 3.1.2. 在上述定义中，我们作了若干选择；关于这些选择，我们遵循[ALH25]；特别是：

(1) U_i 上的拓扑总是由环境空间诱导的；相比之下，其可微结构由 r_i诱导。(2) 在 M上，拓扑和可微结构均由 ϕ_i诱导。(3) 规定流形 M 有有限张图覆盖。这意味着，若 M 是一个 n-流形，那么 n 也等于 M作为可定义集的维数（定义见定义 2.3.4）。

注 3.1.3. 严格来说，dwsd 流形附带有限张图的选取。然而，用其他相容的图替换这些图，会得到一个同构流形；而我们只关心同构意义下的流形。

注记 3.1.4。 在定义 3.1.1 中，可以将其中每一处的“严格可微”替换为其他条件。最重要的是，为了得到每个李群都能产生一个李代数（[ALH25，命题 6.19]），[ALH25] 使用 T_2-流形。这里，T_2是关于映射的一个相当技术性的条件，从实质上说类似于“二阶严格可微”，但并不能由二次严格可微推出。由于我们将把 [ALH25，命题 6.19]作为黑箱使用，因此这里不引入这一概念。

注记 3.1.5。 我们来证明上面关于 U_i 是有限覆盖的断言。考虑r：取上文 3.1.1(1) 中的 $U\to K^n$，并在 r的值域中任取一个 a。则 $r^{-1}(a)$ 是有限的；因为如果它是无限的，那么根据 1-h-极小性，它就不是离散的；于是我们可以选取非孤立的 $u\in r^{-1}(a)$，而对于这个 u，′的浸入条件不成立。

接下来，我们回顾 [ALH25]中的切空间概念。乍看之下，这个定义可能有些奇怪（尤其是定义 3.1.6 (1)），但它是从定义 3.1.1 (2)、(5)中给出的可微映射概念自然推导出来的。

定义 3.1.6（[ALH25，定义 5.4]）。（1）给定一个可定义的 ′etale 映射 $r_1\colon U_1\to K^{n_1}$以及一个点 $y\in U_1$，切空间 T_yU_1 定义为 K^{n_1}。若 $r_2\colon U_2\to K^{n_2}$ 是第二个可定义的 ′etale 映射，且 $f\colon U_1\to U_2$ 严格可微，则微分 $d_yf\colon T_yU_1\to T_{f(y)}U_2$ 定义为定义 3.1.1（2）中映射 $r_2\circ f\circ(r_1|_B)^{-1}$ 的严格导数。（2）给定一个带有图 $\phi_i\colon U_i\to M$的 dwsd 流形 M，以及一个点 $x\in M$，切空间 T_xM 按如下方式构造：令 I 为满足 x 属于 $\phi_i(U_i)$的指标 i 的集合，令 $y_i:=\phi_i^{-1}(x)$，取相应切空间的不交并 $\coprod_{i\in I}T_{y_i}U_i$，并将两点 $v\in T_{y_i}U_i$ 和 $w\in T_{y_j}U_j$等同，当且仅当相应过渡映射的微分 $d_{y_j}(\phi_i^{-1}\circ\phi_j)$将 w 映到v。注意，对每个 i，我们都得到 T_xM 与$T_{y_i}U_i$之间的自然对应。（3）若 N 是第二个 dwsd 流形，$f\colon M\to N$ 严格可微，且 $x\in M$，则微分 $d_xf\colon T_xM\to T_{f(x)}N$ 通过取任意图

$\phi_i\colon U_i \to M$和 $\psi_j\colon V_j \to N$，使得它们的像分别包含 x和 $f(x)$，并将 $d_x f$ 定义为由 $d_{\phi_i^{-1}(x)}(\phi_j^{-1} \circ f \circ \phi_i)\colon T_{\phi_i^{-1}(x)}U_i \to T_{\phi_j^{-1}(f(x))}V_j$诱导的映射。

定义 3.1.7. *dwsd* 李群是一个可定义群 G，配备了 dwsd 流形结构，使得群乘法 $G \times G \to G$和群求逆$G \to G$ 都是 dwsd 流形之间的态射（即，它们都是严格可微的）。*dwsd* 李群之间的同态是一个群同态，同时也是 dwsd 流形之间的态射（即，它是可定义的且严格可微）。

现在我们可以陈述 [ALH25], 的一个核心结果，该结果断言可定义群是李群。（回想一下，我们的结构（$K, v, \ldots$）中唯一的非虚 sort 是 K 本身，因此该命题不适用于例如值群。）

命题 3.1.8 ([ALH25，命题 6。4])。 任意可定义群都可以赋予一种 *dwsd* 流形结构，使其成为一个 *dwsd* 李群。

正如在 [ALH25，命题 6.4], 的证明之后所指出的，可定义群 G 上的 dwsd 李群结构在唯一同构意义下是唯一的。本节余下部分提及可定义群 G时，任何对流形结构的隐含指称 G 均指这一 dwsd 流形结构。

3.2. **切空间与李代数**。 本小节概述一些关于切空间与李代数的相当标准的内容，但讨论背景是可定义的非阿基米德 1-h-极小情形，并采用前一小节 [ALH25] 所述的框架。本小节的目标是下文的定理 3.2.12。我们的处理受到 [PPS00], 的启发，而 PPS 本身则改编自 [OV90] 对 [PPS00] 中 o-极小结构内可定义群的阐述。我们提及的任意可定义群，都假定配备了使用命题 3.1.8 所得到的唯一 dwsd 流形结构。（特别是，群上的拓扑不一定是来自环境 K^n的拓扑。）我们用 e 表示群的单位元。

引理 3.2.1. 设 $H \leq G$ 为可定义群。那么

(i) H 是 G 的闭子集（相对于由 G 上的 *dwsd* 流形结构赋予 G 的拓扑），此外，包含映射 $i\colon H \to G$ 是 *dwsd* 流形的闭嵌入。(ii) H 在 G 中是开集，当且仅当 $T_e(H) = T_e(G)$，当且仅当 $\dim(H) = \dim(G)$。特别地，若 H 在 G 中具有有限指数，则这些条件成立。

证明。 (i) 部分及 (ii) 中第一个等价关系分别由 [ALH25] 中的命题 6.9（连同命题 6.10）和推论 6.14 得出。对于 (ii) 中的第二个等价关系，注意到根据注 3.1.2(3)，我们有 $\dim G = \dim T_e(G)$，对 H 也同样如此。最后，若 H 在 G 中具有有限指数，则其补集 $G \setminus H$ 是 H 的有限个平移之并，因此在 G 中是闭集，所以 H 在 G 中是开集。□

如果 H_1、 H_2 是群 G 的子群，那么我们称 H_1， H_2 是可公度的，若 $H_1 \cap H_2$ 在 H_1 和 H_2 中的指数均为有限指数。

引理3.2.2。 [PPS00，命题 2。20] 设 H_1、 H_2 是可定义群 G 的可定义子群，且二者可公度。则 $T_e(H_1) = T_e(H_2)$。

证明。 由命题 2.3.6(iii)，对每个 i，都有 $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_i)$。因此，根据引理 3.2.1， $H_1 \cap H_2$ 在 H_i 中是开集，所以 $T_e(H_1 \cap H_2) = T_e(H_i)$（对于 $i = 1, 2$）。□

对于下一个结果， [ALH25，推论 6.11] 提供了一个重要工具。在 o-极小情形下，这对应于 [PPS00，定理 2.21]。

命题 3.2.3。 设 G, H 为可定义群，且 $\phi\colon G \to H$ 是 *dwsd* 李群的同态（即一个可定义且严格可微的群同态）。设 $H_1 \leq H$ 可定义，且 $G_1 := \phi^{-1}(H_1)$。则 $T_e(G_1) = (\mathrm{d}_e(\phi))^{-1}(T_e(H_1))$。

证明。 显然有包含关系 $\subset$，因此只需证明两边的维数相同。

考虑映射

$$f\colon G_1 \to G \times H_1, a \mapsto (a, \phi(a))$$

and

$$g_1, g_2\colon G \times H_1 \to H, g_1(a, b) = \phi(a), g_2(a, b) = b.$$

容易验证， f 是 g_1 和 g_2的等化子，即， f 是单射，且其像恰好是满足 g_1 和 g_2 相等的点集 Z。类似地，可以验证 $\mathrm{d}_e g_1$， $\mathrm{d}_e g_2$: $T_e(G) \times T_e(H_1) \to T_e(H)$ 的等化子是映射

$$(\mathrm{d}_e(\phi))^{-1}(T_e(H_1)) \to T_e(G) \times T_e(H_1), w \mapsto (w, \mathrm{d}_e(\phi)(w)).$$

应用 [ALH25, 6.11]并将所有结果汇总起来，我们得到

$$\dim T_e(G_1) = \text{维数}\, T_e(Z) = \text{维数}\, Z = \text{维数}(\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_e g_1 - \mathrm{d}_e g_2)) = \text{维数}(\mathrm{d}_e(\phi))^{-1}(T_e(H_1)).$$

□

如同在 o-极小背景中（见 [PPS00, 定理 2.24]），我们可推出如下结论:

推论 *3.2.4.* 设 G 是一个可定义群， V 是一个在 K上的 n维可定义向量空间，且 ϕ*:* $G \to$ *Aut(*V*)*是一个可定义同态。设 U 是 V的一个子空间，并令 G_1*:=* $\{g \in G$*:* ϕ*(*g*)* *(*U*)* $\subseteq U\}$ 且 G_2*:=* $\{g \in G$*:* ϕ*(*g*)*$|_U$ *=id* $|_U\}$。那么，将$d_e(\phi)$视为从 T_e*(*G*)*到*End(*V*)* （后者与 T_e*(Aut(*V*))*相认同）的线性函数，我们有

(i) $T_e(G_1) = \{\xi \in T_e(G) : \mathrm{d}_e(\phi)(\xi)(U) \subseteq U\}$
(ii) $T_e(G_2) = \{\xi \in T_e(G) : \mathrm{d}_e(\phi)(\xi)(U) = \{0\}\}$.

证明。 (i) 由命题 3.2.3 得出，令 $H =$ 自同构群(V) an d

$$H_1 := \{x \in \mathrm{Aut}(V) : x(U) \leq U\}.$$

(ii) 同样，应用命题 3.2.3，令

$$H_2 := \{x \in \mathrm{Aut}(V) : x|_U = \mathrm{id}\,|_U\} = \{x \in \mathrm{Aut}(V) : (x - \mathrm{id})(U) = \{0\}\},$$

并注意到

$$T_e(H_2) = \{x \in \mathrm{End}(V) : x(U) = \{0\}\}.$$

□

推论 3.2.5。 设 G 是一个可定义群，且 f 是 G 的一个可定义的严格可微李群自同构。那么 $\mathrm{d}_e(f) \in$ 自同构群$(T_e(G))$。

证明。 参见 [PPS00，推论 2.22]。应用命题 3.2.3，取 $H = G$ 并令 H_1为平凡群，可得 $\mathrm{d}_e(f)$ 具有平凡核，因而属于 Aut$(T_e(G))$。□

设 G 为一个可定义群。我们回顾在 [ALH25，6.15–6.19] 中得到的 $T_e(G)$ 上的李代数结构；关于 o-极小类比，参见 [PPS00，第 2.4] 节。对于 $g \in G$，我们将 Int_g 记作由 $\mathrm{Int}_g(x) = gxg^{-1}$给出的映射 $G \to G$ 。令 $\mathrm{Ad}\, g := \mathrm{d}_e(\mathrm{Int}_g)$。于是根据推论 3.2.5，$\mathrm{Ad}\ g \in \mathrm{Aut}(T_e(G))$。此外，$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(T_e(G))$ 是一个严格可微的可定义同态，下文称为 G的伴随 表示。

现在令 $\mathrm{ad} := \mathrm{d}_e(\mathrm{Ad})$。那么 $\mathrm{ad}\colon T_e(G) \to \mathrm{End}(T_e(G))$ 是一个可定义同态。在 $T_e(G)$ 上定义运算 $[-,-]$，使得 $[\xi,\zeta] = \mathrm{ad}(\xi)(\zeta)$。

引理 3.2.6。 $(T_e(G)\ [-,-])$ 是一个李代数。

证明。 参见 [ALH25，命题 6.19]。 □

我们用 $L(G)$ 表示由上一条引理给出的 G 的李代数。

注 3.2.7。标准计算表明，对于 $g \in G$，$\mathrm{Ad}\, g \in \mathrm{Aut}(T_e(G))$ 甚至是一个李代数自同构：由 $\mathrm{Ad}(ghg^{-1}) = (\mathrm{Ad}\, g) \circ (\mathrm{Ad}\ h) \circ (\mathrm{Ad}\, g)^{-1}$，可得 $\mathrm{Ad} \circ \mathrm{Int}_g = \mathrm{Int}_{\mathrm{Ad}\, g} \circ \mathrm{Ad}$（其中 $\mathrm{Int}^{\mathrm{Ad}\, g}\colon \mathrm{Aut}(T_e(G)) \to \mathrm{Aut}(T_e(G))\ \phi \mapsto (\mathrm{Ad}\, g) \circ \phi \circ (\mathrm{Ad}\ g)^{-1}$）。我们对等式两边在 e 处取导数，并利用这样一个事实：由于 $\mathrm{Int}^{\mathrm{Ad}\, g}$ 是向量空间 $V = \mathrm{End}(T_e(G))$ 上的线性自同构，它就是自身的导数——事实上，对于任意 $v \in V$，V 在 v 处的切空间就是 V 本身，而线性映射 f 在 v 处的导数是 f 的线性近似，也就是 f 本身。于是得到 $\mathrm{ad} \circ (\mathrm{Ad}\ g) = \mathrm{Int}_{\mathrm{Ad}\, g} \circ \mathrm{ad}$；在 ξ 处取值，再作用于 $(\mathrm{Ad}\ g)(\zeta)$，便得到$[(\mathrm{Ad}\ g)(\xi),(\mathrm{Ad}\ g)(\zeta)] = (\mathrm{Ad}\, g)[\xi,(\mathrm{Ad}\ g)^{-1}((\mathrm{Ad}\ g)(\zeta))] = (\mathrm{Ad}\ g)[\xi,\zeta]$。

回忆一下，如果 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，其李括号为 $[-]$，那么 $\mathfrak{g}$的理想是满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ 的子空间$\mathfrak{h}$。如果满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \{0\}$，我们称 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的。如果其仅有的理想是 $\{0\}$ 和 $\mathfrak{g}$，则称其为单的；如果其唯一的阿贝尔理想是 $\{0\}$，则称其为半单的。此外，任何有限维半单李代数都是有限多个单李代数理想的直和。

引理 3.2.8。 设 $\mathfrak{g}$ 是可定义群 G 的李代数，且 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的子空间。那么

(i) 子代数 $\{\xi \in \mathfrak{g}\colon\ [\xi,\mathfrak{h}] = 0\}$ 是子群 $\{g \in G\colon\ \mathrm{Ad}\, g|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Id}\}$ 的李代数，并且(ii) 子代数 $\{\xi \in \mathfrak{g}\colon\ [\xi,\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$ 是子群 $\{g \in G\colon\ \mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}\}$ 的李代数。

证明。 参见 [PPS00，断言 2.31]。这是将推论 3.2.4 应用于 G的伴随表示所得。□

引理 3.2.9。 设 G 是一个可定义群，并且 $\mathrm{Ad}\colon G \to$ 自同构群$(T_e(G))$ 如上所述。

(i) 对于 $x \in G$，我们有 $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) \Leftrightarrow |G\colon C_G(x)| < \infty$。(ii) 假设 G 是某个 $\mathbf{GL}_n(K)$的可定义子群。那么$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$ 中心化 G 的一个有限指数可定义正规子群。

证明。 (i) 正是 [ALH25，引理 8.7]（第一条陈述）。

(ii) 众所周知，群$\mathbf{GL}_n(K)$的任意子群都满足中心化子上的降链条件；例如，群 $\mathbf{GL}_n(K^{\mathrm{alg}})$满足该条件，因为后者是稳定的（例如参见 [Wag97，推论 1.0.7]）；而且，由于公式 $xy = yx$ 是无量词的，这一性质可由$\mathbf{GL}_n(K^{\mathrm{alg}})$的子群继承。

令 $g \in$ 核(Ad)。根据(i)， $C_G(g)$是 G 中的有限指数开子群。令 $N := \bigcap_{g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})} C_G(g)$，这是 G 的可定义正规子群，且 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) \leq C_G(N)$。由于 G

在中心化子上满足降链条件，我们有 $N = C_G(F)$，其中某个有限$F \subset \mathrm{Ker(Ad)}$，因此 $|G : N|$ 是有限的，正如所要求的那样。□

引理 3.2.10。设 G 是$\mathbf{GL}_n(K)$ 的一个可定义子群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。

(i) G 有一个有限指数的可定义阿贝尔子群，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔群。(ii) 设 H 是 G 的一个可定义子群，其李代数为 $\mathfrak{h}$。假设 H 与 G的一个可定义开子群G_0 的可定义正规子群 H_0 可公度。那么 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个理想。

证明。假设 $\mathfrak{g}$是阿贝尔群。根据 [ALH25，引理 8.7]，，可知 $|G : \mathrm{Ker(Ad)}|$ 是有限的。由引理 3.2.9 (ii)，Ker(Ad) 中心化一个有限指数的可定义正规子群 $H \subset G$。交集 $H \cap \mathrm{Ker(Ad)}$ 在 G中也具有有限指数，且它是阿贝尔群。

反过来，假设 G 有一个有限指数的可定义阿贝尔子群 U。那么对每个 $g \in U$，群 $C_G(g)$ 的指数有限，因此由引理 3.2.9(i)，对所有 $g \in U$，我们有 $\mathrm{Ad}\ g = 1$，所以 $\mathrm{Ker(Ad)} \geq U$。由引理 3.2.8(i) 和 3.2.1 可得$L(\mathrm{Ker(Ad)}) = \{\xi \in \mathfrak{g} : [\xi, \mathfrak{g}] = 0\} = L(G)$。因此 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔群。

(ii) 设 G_0、H 和 H_0 如陈述所述，并设 $\mathfrak{h} = L(H)$ 和 $\mathfrak{h}_0 = L(H_0)$。首先，由引理3.2.2可知 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$。于是对每个 $g \in G_0$，$\mathrm{Int}_{\mathfrak{g}}(H_0) = H_0$，因此 $\mathrm{Ad}\ g(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$（例如由推论 3.2.5 得出）。令 $G_1 := \{g \in G : \mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}\}$。则$G_0 \leq G_1 \leq G$，并且由引理 3.2.8(ii) 可知 $L(G_1) = \{\xi \in \mathfrak{g} : [\xi, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$。此外，由引理 3.2.1，$L(G_0) = L(G_1) = L(G)$，因为 G_0 在 G 中是开集，所以 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想。□

定理 3.2.11。设 G 是 $\mathbf{GL}_n(K)$ 的一个可定义子群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。则以下条件等价。

(i) G 有一个无限可定义阿贝尔正规子群。

(ii) G 有一个可定义开子群 H，且它有一个无限可定义阿贝尔正规子群。

(iii) $\mathfrak{g}$不是半单的。

证明。我们改编自 [PPS00，定理 2.34]。(i) $\Rightarrow$ (ii) 这一方向显然成立。

(ii) $\Rightarrow$(iii)。假设 G 有一个开子群 H，它含有一个无限可定义阿贝尔正规子群 B。我们应用引理 3.2.10：第 (ii) 部分推出 $L(B)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个非平凡理想，并且它是阿贝尔的，因为 B 是阿贝尔的。

(iii) $\Rightarrow$ (i) 假设 $\mathfrak{g}$ 不是半单的。那么它有一个非平凡阿贝尔理想，因此有非平凡可解根，而其导出列中最后一个非平凡项是一个阿贝尔理想 $\mathfrak{j}$，它在 Aut($\mathfrak{g}$) 下不变。

令 $H := \{g \in G : \mathrm{Ad}\ g|_{\mathfrak{j}} = \mathrm{Id}\}$。由引理 3.2.8(i)，$\mathfrak{h} := L(H) = \{\xi \in \mathfrak{g} : [\xi, \mathfrak{j}] = 0\}$。于是 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的理想（利用雅可比恒等式），并且包含 $\mathfrak{j}$，因为后者是阿贝尔的。此外，根据上述不变性，对于每个 $g \in G$，我们都有 $\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{j}) = \mathfrak{j}$，因此根据 H的定义，$g^{-1}Hg = H$，所以 H 是 G的正规子群。现在令 $B := \{h \in H : \mathrm{Ad}\, h|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Id}\}$。那么 B 是 G 的正规子群（因为 $\mathfrak{h}$ 是 Aut($\mathfrak{g}$)-不变的），并且由引理 3.2.8(i)，$L(B) = \{\xi \in \mathfrak{h} : [\xi, \mathfrak{h}] = 0\}$。由雅可比恒等式，$L(B)$是 $\mathfrak{g}$的理想，且包含 $\mathfrak{j}$，所以 B是无限的。此外，B 对 $L(B)$的伴随作用是平凡的，因此（由引理 3.2.9 (i)）对于每个 $g \in B$，我们有 $|B : C_B(g)|$有限。由此，根据 G 上的中心化子降链条件，$|B : Z(B)|$是有限的。因此，$Z(B)$是 G的一个无限可定义阿贝尔正规子群。□

定理 3.2.12. 设 G 是 $\mathbf{GL}_n(K)$的一个可定义几乎单非阿贝尔可定义子群。那么它的李代数 $\mathfrak{g}$ 是单的。

证明。 由定理 3.2.11， $\mathfrak{g}$ 是半单的，因此是由唯一一组 $\{\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_t\}$理想构成的直和，这些理想作为李代数均为非阿贝尔且单。反设 $t > 1$。

设 $\mathfrak{j} := \mathfrak{h}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}_t$。 于是 $\mathfrak{h}_1 = \{\xi \in \mathfrak{g} : [\xi, \mathfrak{j}] = 0\}$，并且由引理 3.2.8(i)，$\mathfrak{h}_1$ 是 N_1 的李代数：$= \{g \in G : \mathrm{Ad}\, g|_{\mathfrak{j}} = \mathrm{Id}\}$。注意， G 没有有限指数的真可定义子群 N，否则 $\bigcap_{g \in G} g^{-1} N g$ 便是 G 的有限指数真可定义正规子群，这与可定义几乎单性矛盾。由于集合 $\{\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_t\}$ 是唯一确定的，因此每个 $\mathfrak{h}_i$ 在伴随作用下都对 G不变。于是， N_1 是 G的正规子群，并且显然是可定义的。此外，由于 $\mathfrak{h}_1$ 非平凡， N_1 是无限的，因此根据可定义几乎单性， $N_1 = G$ 。由于我们可以用任意 $\mathfrak{h}_j$ 替换 $\mathfrak{h}_1$ ，可知 G 的伴随表示是平凡的，因此由引理 3.2.9(ii)， $|G : Z(G)|$ 是有限的。这与 G 是非阿贝尔且可定义几乎单的假设矛盾。□

引理 3.2.13。 设 G 是 $\mathbf{GL}_n(K)$ 的一个无限、非阿贝尔、可定义且可定义几乎单的子群。那么 $G \leq \mathbf{SL}_n(K)$。

证明。 假设 G不包含于 $\mathbf{SL}_n(K)$。那么存在一个非平凡的可定义同态 $\sigma : G \to \mathbf{GL}_n(K)/\mathbf{SL}_n(K) \cong (K^\times, \cdot)$。由于 Ker($\sigma$) 是 G 的一个可定义真正规子群，因此它是有限的，且其中心化子等于 G，故 Ker(σ) 是中心的（见注 2.1.4），并且 G 是二步幂零的。现在对任意 $g \in G$，$C_G(g)$ 在 G 中具有有限指数，因此等于 G。由此可得 G 是阿贝尔的，这与假设矛盾。□

下面的结果汇总了本节所需的内容。

命题 *3.2.14*。设 $(K, v, \ldots)$ 是一个 *1*-*h*-极小赋值域，且设 $G \subseteq K^n$ 是一个可定义、可定义几乎单的非阿贝尔群，并赋予命题 *3.1.8* 中的 *dwsd* 李群结构。那么存在 $d \in \mathbb{N}$ 以及一个可定义同态 $\rho : G \to SL_d(K)$，其核为 $Z(G)$，该同态由 G 在切空间 $T_e(G)$ 上的伴随作用给出。此外， $T_e(G)$具有一个在 K 上的单李代数 $\mathfrak{g}$ 结构，而 $\rho(G)$作为 $\mathfrak{g}$ 的自同构群作用。我们有 $\dim(G) = \dim_K(\mathfrak{g})$。

证明。 对于 $g \in G$，令 $\mathrm{Int}_g : G \to G$ 为映射 $x \mapsto gxg^{-1}$。于是微分$d_e\mathrm{Int}_g$ 是一个可定义的线性映射 $T_e(G) \to T_e(G)$，并给出伴随表示 $\mathrm{Ad} : G \to \mathbf{GL}_d(K)$，其定义为令 $\mathrm{Ad}(g) = d_e\mathrm{Int}_g$。

首先，反设 $G = \mathrm{Ker(Ad)}$。那么对每个 $x \in G$， $C_G(x)$ 在 G 中具有有限指数（由引理 3.2.9 (i)）；因此，由于 G 的可定义几乎单性， $C_G(x) = G$ ，否则 $\bigcap_{g \in G} g^{-1} C_G(x) g$ 将是 G 的真可定义正规子群。因此G是阿贝尔的，矛盾。

因此，Ad 的核是有限的，且包含 $Z(G)$；而 $C_G(\mathrm{Ker(Ad)})$ 在 G 中具有有限指数，故由可定义几乎单性可知它等于 G ，所以 $\mathrm{Ker(Ad)} = Z(G)$。由引理 3.2.13，Ad 的像包含于 $\mathbf{SL}_n(K)$)，于是令 ρ:=Ad，便得到第一个断言。此外，由引理 3.2.6， G在单位元处的切空间具有李代数 $\mathfrak{g} = L(G)$ 的结构，其中 G 属于 G；并且由定理 3.2.12， $\mathfrak{g}$ 是一个单李代数。特别地，我们有 $\rho(G) \leq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$。

最后，$\dim(G) = \dim(T_e(G))$，这等于 $\mathfrak{g}$ 的 K-向量空间维数；例如参见注 3.1.2(3)。□

4. Bounded subgroups

本节旨在介绍并调整来自 [Pra82]的结果，这些结果是我们证明的关键，并且（在命题 4.2.1 中）排除定理1.0.1中的群G是“有界”的可能性。

若 (K, v) 是任意赋值域，我们称 K^n 的子集是有界的，如果它包含在以 0 为中心、形如 $B_\gamma(0)$ 的 K^n 球中，其中 $\gamma \in \Gamma$ 为某个值（另见 [BT72，第 3] 节）。例如，赋值对应的局部环 $\mathcal{O}$ 是有界集。若线性代数 K-群 $\mathbf{H}$ 的子群 $G \subset \mathbf{H}(K)$ 在视为嵌入到 $\mathbf{SL}_n$ 后，作为 K^{n^2} 的子集 G 有界，则称其为有界的。注意，我们始终假设赋值 v 是满射的，因此若集合 B 有界，则存在 $a \in K$，使得对所有 $b \in B$，都有 $v(a) < v(b)$。

注 4.0.1。注意，关于 G有界性的这一概念是良定义的，即它不依赖于 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{SL}_n$ 的嵌入。事实上，若 $\mathbf{H} \subset \mathbf{SL}_n$ 和$\mathbf{H}' \subset \mathbf{SL}_{n'}$ 是线性代数 K-群，且 $f\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ 是一个 K-同构，那么对 $G \subset \mathbf{H}(K)$ 的一个界会给出 $f(G) \subset \mathbf{H}'(K)$ 的一个界（因为 f 由系数属于 K 的多项式定义），对 f^{-1} 也同理。

4.1. $\mathbf{H}$ 的有界子群(K)。在本小节中，我们记录以下两个定理，它们对于我们证明定理 1.0.1 至关重要。在第一个定理中，我们添加了 K 是完美域这一假设，以与本文中的定义保持一致。

定理 4.1.1 （[Pra82，第 198]页上的定理（BTR）。设 K 是一个带有非平凡亨泽尔赋值 $v\colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ 的完美域（其值群 Γ可以是非阿基米德的），并且$\mathbf{H} \leq \mathbf{SL}_n$ 是一个连通约化线性代数 K-群。那么$\mathbf{H}(K)$ 是有界的，当且仅当$\mathbf{H}$ 在 K上是各向异性的。

定理 4.1.2。设$(K, v, \ldots)$ 是一个亨泽尔赋值域的 *1-h-*最小扩张，且该域的特征为 *0*。令$\mathbf{H} \leq \mathbf{SL}_n$ 为一个半单几乎 K-单的代数K-群。那么，任意无界的可定义开子群 G *of*$\mathbf{H}(K)$都包含$\mathbf{H}(K)^+$。

[Pra82] 中的背景是值群 Γ 为阿基米德的亨泽尔赋值
也就是说，具有如下性质：如果 $\gamma \in \Gamma$ 且 $\gamma > 0$，那么 $\{n\gamma\colon n \in \mathbb{N}\}$ 在 Γ中是共尾的。我们需要这些关于任意值群的陈述，即 关于 *Krull*赋值的陈述。上述定理 4.1.1 在 [Pra82]中的证明（该处将其归于 Bruhat、Tits 和 Rousseau）并未使用阿基米德值群这一假设（另见 [Pra20]中定理 1.1 的证明）。对于定理 4.1.2，其依据是 [Pra82] 中对 Tits 的一项未发表结果所作的证明，情况稍微复杂一些。我们的结论（即 G包含 $\mathbf{H}(K)^+$）比 [Pra82], 中的结论略强，而且，Prasad 的证明似乎确实使用了值群为阿基米德这一假设。修改 Prasad 的证明以得到更强的结论并不十分困难，将其推广到具有极大真凸子群的值群也不困难（因为此时可以将赋值粗化为阿基米德赋值）。然而，要对一般值群得到这一结果似乎更加棘手。至少，我们只能在假设 G 是可定义的条件下证明一般情形——而 Prasad 并不需要这一假设。

我们还需要定理 4.1.2 的以下正特征版本：

命题 4.1.3。 设 (K, v) 是特征为 p 的纯代数闭赋值域。设 $\mathbf{H} \leq \mathbf{SL}_n$ 是一个半单的几乎 K-单代数 K-群。则 G 的任意真可定义开子群都是有界的，其中 G 是$\mathbf{H}(K)^+$ 的子群。

这里的情形比定理 4.1.2 更简单：首先，我们只需要 [Pra82], 中也出现的较弱结论；其次，由于我们只在纯赋值域语言中工作，因此很容易将问题归约到值群具有极大真凸子群的情形，从而可以引用 [Pra82]。

命题 *4.1.3* 的证明。反设 G 是 $\mathbf{H}(K)^+$ 的一个无界真可定义开子群。设 Γ_1 为一个包含 Γ 且具有极大真凸子群 Γ_2的可除有序阿贝尔群，并设 $\Delta = \Gamma_1/\Gamma_2$为一个阿基米德有序阿贝尔群。另设 k 为 K的剩余域。由 L_{div} 中的模型完备性，域 (K, v) 是 Hahn 域 $(k((t^{\Gamma_1})), v_1)$ 的初等子结构，其中 v_1 是值群为 Γ_1的自然赋值。由于 G 是可定义的，当 K 代数闭时 $\mathbf{H}(K)^+$ 也是可定义的（见引理 2.1.14(ii)），并且“有界”和“开”这两个条件可以用一阶语言表达，因此我们可以用 $k((t^{\Gamma_1}))$ 替换K，也就是说，可以假设 $\Gamma = \Gamma_1$。

现在令 v_Δ 为诱导的粗化赋值 $v_\Delta : K \to \Gamma_1 \to \Delta$。相对于此赋值，群 G 仍是 $\mathbf{H}(K)^+$ 的一个无界开子群，并且还是一个真子群。这与定理 (T) 矛盾（该定理由 Prasad 归于 Tits），见 Pra82，第 198] 页。□

本小节余下部分将用于证明定理 4.1.2。我们先给出一个预备引理，这个引理可能是众所周知的，但由于我们没有在文献中找到它，因此给出证明。

引理 4.1.4。 设 K_1 和 K_2 是两个等特征0的球完备赋值域，它们具有相同的值群 Γ 和相同的剩余域k。此外，设 K_1 和 K_2 有一个公共子域 K_0。那么存在一个赋值域同构 $f\colon K_1 \to K_2$，它在 K_0 上为恒等映射，并且在 Γ 和 k上诱导恒等映射。

证明。 将所有域视为双排序结构，其中一个排序对应赋值域，另一个排序对应首项。我们令 RV :=rv(K_1) = rv(K_2)，并令 RV_0 := rv(K_0)。令 f 为 $K_0 \cup$RV 上的单位映射（将其视为从 (K_1, RV) 到 (K_2, RV) 的部分同构）。只需验证，对于任意 $a \in K_1$, 我们都能将 f 扩张为一个嵌入 ($K_0(a)$, RV) $\to$ (K_2, RV)。事实上，这样便可重复这一过程，从而得到一个从 (K_1, RV) 到 (K_2, RV) 的嵌入；如果像 $f(K_1)$ 是 K_2 的真子域，那么对 f^{-1} 和某个 $b \in K_2 \setminus f(K_1)$ 应用同样的论证，就会导出矛盾。

因此，设给定 $a \in K_1 \setminus K_0$，首先假设 $a \in \mathrm{acl}(K_0,\mathrm{RV})$。那么，由于$K_1 \equiv_{K_0 \cup \mathrm{RV}} K_2$（例如参见 [Fle11 中关于赋值域排序的相对量词消去，命题 4.3]），存在 $a' \in K_2$，使得 $\mathrm{tp}(a'/K_0 \cup \mathrm{RV}) = \mathrm{tp}(a/K_0 \cup \mathrm{RV})$，于是我们可以通过令 $f(a) := a'$ 来扩展 f。因此，现在可以假设 $K_0 \cup$ RV 在模型论意义下是代数闭的。在这种情况下，类型 $\mathrm{tp}(a/K_0 \cup \mathrm{RV})$ 由形如 $\mathrm{rv}(x - b) = \xi$ 的公式决定，其中 b 遍历 K_0，而 ξ遍历 RV。（这例如由 [CHRK22，引理 2.4.4], 推出；该引理指出，对于a，$a' \in K_1$ 要在 $K_0 \cup$RV 上具有相同的类型，只需包含 a 和 a' 的最小球 $B \subset K_1$ 与 $\mathrm{acl}(K_0) = K_0$ 不相交。如果存在某个 $b \in B \cap K_0$,

那么我们将有 $\mathrm{rv}(a-b) \neq \mathrm{rv}(a'-b)$。）每个这样的公式在 K_1 中定义一个赋值球，而这些球构成一条链。同样的公式也在 K_2 中定义一条球链。由 K_2 的球完备性，该链的交集非空。该交集中的任意 a' 都与 a 在 $K_0 \cup \mathrm{RV}$ 上具有相同的类型，因此我们可以定义$f(a) := a'$。□

下面再给出一个预备引理:

引理 4.1.5. 设 K 是一个特征0的亨泽尔赋值域（剩余特征任意）。设$\mathbf{H}$ 是一个连通线性代数 K-群，并设 U 是$\mathbf{H}(K)$中的一个赋值开子集。那么 U 在$\mathbf{H}(K)$中扎里斯基稠密。

证明。 不失一般性，$\mathbf{H} = \mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(\mathbf{H}(K))$。由引理 2.3.9，存在一个 $x \in \mathbf{H}(K)$，使得对于每个包含 x的球 $B \subset \mathbf{H}(K)$，都有 $\dim B = \dim \mathbf{H}(K)$。由左平移，可设 $x \in U$；于是利用引理 2.3.10(ii)，得到 $\dim U = \dim \mathbf{H}(K) = \mathrm{zardim}\, \mathbf{H}$，特别地，也有 $\mathrm{zardim}\, \mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(U) = \mathrm{zardim}\, \mathbf{H}$。由于$\mathbf{H}$是连通的，因而不可约，这意味着 $\mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(U) = \mathbf{H}$，进而利用注 2.1.1，有 $\mathrm{cl}_K(U) = \mathbf{H}(K)$。□

备注 4.1.6。 注意，在定理 4.1.2 中，$\mathbf{H}(K)^+$ 由集合 U 中 $\mathbf{H}(K)$ 的幺幂元生成（见注 2.1.6）。特别地，子群 $G \leq \mathbf{H}(K)$ 包含 $\mathbf{H}(K)^+$ 当且仅当它包含 U。还要注意，U 可以由系数属于 K 的多项式定义，因为它是满足 $A-1$ 为幂零的那些矩阵 $A \in \mathbf{H}(K)$ 的集合，而且我们可以给$\mathbf{H}$中的矩阵的幂零类设定上界。

定理 4.1.2 的证明。 设 G 是$\mathbf{H}(K)$ 的一个可定义的无界开子群，其中$\mathbf{H}$ 是一个半单的、几乎 K-单的线性代数群 K，且 $\mathbf{H}(K^{\mathrm{alg}}) \leq \mathbf{SL}_n\left(K^{\mathrm{alg}}\right)$。我们的目标是证明 G 包含 $\mathbf{H}(K)^+$。我们首先进行一系列约化。

首先，注意我们可以假设 $\mathbf{H}$ 的中心平凡。事实上，中心同源映射 $\pi : \mathbf{H} \to \bar{\mathbf{H}} := \mathbf{H}/Z(\mathbf{H})$ 将 $\mathbf{H}(K)^+$ 映到 $\bar{\mathbf{H}}(K)^+$（见注 2.1.13 (i)），将开子群映到开子群，并且有界子群的原像仍然有界。

在进行下一步约化之前，注意我们可以自由地将 $(K, v, \ldots)$ 替换为一个初等扩张。事实上，由于 G 的可定义性，如果 $(K, v \ldots)$ 存在一个反例，那么在初等扩张中也存在一个反例。确实，根据备注 4.1.6，我们可以用定义 $\mathbf{H}$ 的参数表达条件 $\mathbf{H}(K)^+ \leq G$，并用 G 表达。

接下来，我们给出一个论证，将混合特征情形归约为剩余特征为 0 的情形。因此，设 $(K, v, \ldots)$ 是混合特征的 1-h-极小结构。根据前一段，我们可以假设它是 ω_1-饱和的。令 $\mathcal{O}_1$ 为包含 $\mathcal{O}$ 和 $\mathbb{Q}$的 K 的最细赋值子环。存在与之对应的 Γ 的非平凡凸子群 Δ，使得 $\mathcal{O}_1$ 是值群为 $\Gamma_1 = \Gamma/\Delta$的赋值环，并且对应的赋值为 v_1：$K \to \Gamma_1$。我们在语言中加入一个关于 $\mathcal{O}_1$ 的谓词，现在将 K 视为赋值为 v_1 的赋值域，而不是赋值为 v的赋值域。注意，根据 $\mathcal{O}_1$的构造，(K, v_1)是等特征 0 的；并且由 [CHRKV23 定理 2.2，使用扩展语言的$(K, v_1, \ldots)$也是 1-h-极小的。由于将 v 替换为 v_1后，G仍然无界，原结构$(K, v, \ldots)$中的结论便可由扩展结构$(K, v_1, \ldots)$中的结论推出。因此，我们可以假设$(K, v, \ldots)$是等特征 0 的。

在继续下一步归约之前，请注意，K 有一个初等扩张是 Hahn 域，即即，$K = k((t^\Gamma))$。事实上，这实质上就是 [BWH23 定理 1]的陈述。（该定理指出，存在一个球完备的初等扩张；在等特征 0 的情形下，每个球完备赋值域本身就是 Hahn 域。）

显然，现在我们可以假设 $K = k((t^\Gamma))$，但我们还想要更多，即 H 定义在子域 $K' = k((t^{\Gamma'}))$ 上，其中 Γ' 是 Γ 的真凸子群。为此，我们先将当前的 $K = k((t^\Gamma))$ 重新命名为 $K' = k((t^{\Gamma'}))$。接着，我们选取一个值群为 Γ 的初等扩张 $K \succ K'$，使得 Γ' 包含在 Γ 的某个真凸子群中。（为此，只需在 Γ' 上实现位于 ∞ 的类型。）根据上一段，我们还可以假设 K 与 $k((t^\Gamma))$ 同构。（虽然这意味着我们可以假设 $K = k((t^\Gamma))$，但请注意，若如此，我们只能知道 H 定义在一个与 $k((t^{\Gamma'}))$ 同构的子域 K' 上，还不能确定可以令 K' 等于 $k((t^\Gamma))$ 的子域 $k((t^{\Gamma'}))$。）我们对 $K_1 = K$ 和 $K_2 = k((t^\Gamma))$ 应用引理 4.1.4，其中将子域 $K' \subset K$ 与子域 $k((t^{\Gamma'})) \subset k((t^\Gamma))$ 识别。然后，我们利用得到的赋值域同构 $f\colon K \to k((t^\Gamma))$，将附加结构从 K 转移到 $k((t^\Gamma))$，从而对于自然嵌入，我们有 $k((t^{\Gamma'})) \prec k((t^\Gamma))$。

现在，我们为证明的其余部分固定一些记号：给定 $\lambda \in \Gamma$ 及 $\lambda > 0$，定义：

- $C_\lambda \subset \Gamma$ 是包含 λ的 Γ 的最小凸子群；$C_\lambda^- \subset C_\lambda$ 是不包含 λ的 Γ的最大凸子群。
- $\mathcal{O}_\lambda = \{a \in K \mid v(a) \in C_\lambda \vee v(a) > 0\}$ 和 $\mathcal{O}_\lambda^- = \{a \in K \mid v(a) \in C_\lambda^- \vee v(a) > 0\}$ 分别是 K 中对应于值群 Γ/C_λ 和 Γ/C_λ^- 的赋值环。
- $v_\lambda\colon K \to \Gamma/C_\lambda^- \cup \{\infty\}$ 是赋值环为 $\mathcal{O}_\lambda^-$ 的赋值。
- $K_\lambda := k((t^{C_\lambda}))$ 是与 C_λ相对应的 K 的 Hahn 子域。注意，我们有 $K_\lambda \subset \mathcal{O}_\lambda$，并且 K_λ 自然同构于赋值环 $\mathcal{O}_\lambda$的剩余域。（剩余映射在 K_λ 上的限制给出了到该剩余域的一个同构。）
- 集合 $G_\lambda := G \cap \mathbf{H}(K_\lambda)$。

此外，我们令 $K_\infty \subset K$ 为所有 K_λ（对于正的 $\lambda \in \Gamma$）的并集。注意，$\mathbf{H}$定义在 K_∞上，因为我们假设它定义在某个子域 $K' = k((t^{\Gamma'}))$上，而该子域对任意正的 $\lambda \in \Gamma \setminus \Gamma'$都包含于 K_λ 中。

虽然 K_∞ 可能严格小于 K，但它在 K中总是赋值稠密的。更确切地说，我们甚至有：

断言 *1.* 若$\mathbf{X}$ 是定义在 K_∞上的$\mathbf{H}$的任意子簇，则$\mathbf{X}(K_\infty)$ 在$\mathbf{X}(K)$ 中赋值稠密。

断言 *1* 的证明。 我们将$\mathbf{X}$视为$\mathbf{SL}_n$的一个 K_∞-闭子集。因此，$\mathbf{X}$ 由定义在 K_∞上的某些多项式 f_i 所确定。设给定 $a \in \mathbf{X}(K)$ 和 $\lambda \in \Gamma$。我们需要证明存在一个 $a' \in \mathbf{X}(K_\infty)$，使得 $v(a - a') > \lambda$。通过增大 λ，我们可以假设 a 的所有坐标的赋值都属于 $C_\lambda \cup \Gamma_{\geq 0}$，且多项式 f_i 的系数属于 K_λ。

将 a 写成幂级数 $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma$，其中 $a_\gamma \in k^m$，并设 $a' := \sum_{\gamma \in C_\lambda} a_\gamma t^\gamma$。显然，我们有 $a' \in K_\lambda^m$ 和 $v(a' - a) > \lambda$，因此只需验证 a' 是多项式 f_i 的公共零点。但如果将 K_λ 视为 $\mathcal{O}_\lambda$ 的剩余域，这一点显然成立：如果我们这样做

并且记相应的剩余映射为 $\mathrm{res}_\lambda\colon \mathcal{O}_\lambda \to K_\lambda$，那么 $a' = \mathrm{res}_\lambda(a)$，$f_i = \mathrm{res}(f_i)$，从而 $f_i(a') = \mathrm{res}(f_i)(\mathrm{res}(a)) = \mathrm{res}(f_i(a)) = 0$。□（断言 *1*）

我们记录上述证明中的以下中间结果，以供后续使用：

断言 *1'*。若 $\mathbf{X} \subset \mathbf{H}$ 定义在 K_λ 上，那么对于每个 $a \in \mathbf{X}(K)$ 且 $v(a) \in C_\lambda \cup \Gamma_{\geq 0}$，都存在一个 $a' \in \mathbf{X}(K_\lambda)$，使得 $v(a' - a) > \lambda$。

定理证明的主要部分在于证明以下内容：

(*) 存在任意大的 λ，使得 G_λ 包含 $\mathbf{H}(K_\lambda)^+$。

(注意，$\mathbf{H}(K_\lambda)^+$ 是有意义的，因为$\mathbf{H}$ 定义在 K_∞ 上，因此当 λ 足够大时，也定义在 K_λ 上。)

我们先验证 **(*)** 蕴含该定理：由备注 4.1.6，只需证明 G 包含$\mathbf{U}(K)$，其中$\mathbf{U}$ 是$\mathbf{H}$中的幺幂矩阵集合。由 **(*)**，对于所有充分大的 λ，G都包含$\mathbf{U}(K_\lambda)$，因而也包含$\mathbf{U}(K_\infty)$。由于 G 在$\mathbf{H}(K)$中是开集（因而也是闭集），且$\mathbf{U}(K_\infty)$在$\mathbf{U}(K)$中赋值稠密（由断言 1），我们确实得到$\mathbf{U}(K) \subset G$。

剩下要证明 **(*)**。为此，固定一个正的 $\lambda \in \Gamma$。我们用 $B_\lambda(1) \cap \mathbf{H}(K)$ 表示$\mathbf{H}(K)$的单位元周围半径为 λ 的开球。我们始终假设 λ 足够大，使得 $B_\lambda(1) \cap \mathbf{H}(K)$ 包含于 G，并且$\mathbf{H}$ 也定义在 K_λ 上。

我们的证明将通过一系列断言展开。首先（断言 2），我们证明 G_λ 在$\mathbf{H}(K_\lambda)$中扎里斯基稠密。接着（断言 3，仿照 [Pra82，引理 1]），我们证明 G_λ含有半单元素，它们在伴随表示中的特征值具有很大的负赋值。**(*)** 与定理 4.1.2 的陈述之间一个关键的差异是，可以将 K_λ 上的赋值粗化为秩 1 赋值。在 K_λ 中工作使我们能够遵循 [Pra82，引理 2] 的策略，从而推得（断言 5）G_λ 包含某些幺幂子群$\mathbf{U}_\Pi(K_\lambda)$和 $\mathbf{U}_\Pi^-(K_\lambda)$（定义见下文）。利用已知结果，这意味着 G_λ 包含 $\mathbf{H}(K_\lambda)^+$。

命题 *2.* 集合 $B := B_\lambda(1) \cap \mathbf{H}(K_\lambda)$ 在$\mathbf{H}(K_\lambda)$ 中扎里斯基稠密。特别地，对于充分大的 λ，G_λ 在$\mathbf{H}(K_\lambda)$ 中扎里斯基稠密，因为 $G_\lambda \supset B$。

命题 *2* 的证明。第一个断言直接由引理 4.1.5 得出，该引理应用于域 K_λ。对于较大的 λ，G_λ 包含 B，这是因为 G 在$\mathbf{H}(K)$ 中是开集。□*(*命题 *2)*

令 Ad 表示$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 的伴随表示，将其视为 K_λ-态射 K_λ-群$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}}) \to \mathbf{SL}(V)$，其中 V 是一个 K_λ^{alg} 向量空间。由于我们假设$\mathbf{H}$是中心平凡的（在证明一开始），Ad 是单射。关于像包含在$\mathbf{SL}$中的论证，见引理 3.2.13 的证明。

下文中，我们使用赋值 v 和 v_λ 在 K 上向代数闭包 K^{alg} 的自然延拓。

断言 *3.* (i) 存在任意大的 $\lambda \in \Gamma$，使得存在 $g \in G_\lambda$，令 Ad(g) 有一个特征值 $\alpha \in K_\lambda^{\mathrm{alg}}$，满足 $v_\lambda(\alpha) < 0$。

(ii) (i) 中的元素 g 可以选为半单的。

断言 *3* 的证明。(i) 固定一面旗

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{r+1} = \{0\},$$

子表示 V_i，使得对每个 $i = 0, \ldots, r$，$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 在 $W_i := V_i/V_{i+1}$ 上的自然表示ρ_i不可约。令 $\rho = \bigoplus_{i=0}^r \rho_i$ 为$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 在 $\bigoplus_{i=0}^r W_i$ 上的相应表示。由于$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 是约化的，且 ρ 的核是$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 的幺正正规子群，因此 ρ 是单射的：事实上，关于通过逐步将每个 V_{i+1} 的基扩充为 V_i 而得到的 V 的一组基，

核中的每个矩阵都是上三角幺幺矩阵。由注 2.1.2， ρ 的单射性意味着它将$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 同构映射到其像 $\rho(\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}}))$ 上。

暂时固定 $i \leq r$。由于 ρ_i 不可约， $\rho_i(\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}}))$ 包含 K_λ^{alg}-代数 $\mathrm{End}^{K_\lambda^{\mathrm{alg}}}(W_i)$ 的一组基 $B_i = \{b_{i,1}, \ldots, b_{i,m_i}\}$ ；该代数由 W_i 上的 K_λ^{alg}- 向量空间自同态组成（根据雅各布森稠密性定理；例如参见 [Lan84] 第十七章中的推论 3.3）。由于 $\rho_i(G_\lambda)$ 在 $\rho_i(\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}}))$ 中扎里斯基稠密（根据命题 2），对 m_i次笛卡尔幂也成立： $\rho_i(G_\lambda)^{m_i}$ 在 $\rho_i(\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}}))^{m_i}$ 中扎里斯基稠密。由于成为一组基是扎里斯基开条件，我们可以选取上述基 B_i ，使其成为 $\rho_i(G_\lambda)$ 的子集。回想一下，在 $\mathrm{End}^{K_\lambda^{\mathrm{alg}}}(W_i)$ 上有一个对称非退化双线性形式 $(a, a') \mapsto \mathrm{tr}(aa')$，称为迹型；令 $B_i^* = \{b_{i,1}^*, \ldots, b_{i,m_i}^*\}$ 为 $\mathrm{End}^{K_\lambda^{\mathrm{alg}}}(W_i)$ 的一组基，它关于此迹型与 B_i 对偶。

现在考虑任意的 $\lambda' \geq \lambda$ ，并令 $W_i' := W_i \otimes_{K_\lambda^{\mathrm{alg}}} K_{\lambda'}^{\mathrm{alg}}$ 。那么 $\rho_i(G_{\lambda'})$ 仍包含B_i，我们现在将其视为 $\mathrm{End}^{K_{\lambda'}^{\mathrm{alg}}}(W_i')$ 的一个 $K_{\lambda'}^{\mathrm{alg}}$-基，而 B_i^* 仍是相对于迹型的对偶基。特别地，对于任意自同态 $h \in \mathrm{End}^{K_{\lambda'}^{\mathrm{alg}}}(W_i')$，我们有 $h = \sum_j \mathrm{tr}(hb_{i,\,j})b_{i,\,j}^*$。将此应用于每个 $h \in \rho_i(G_{\lambda'})$，得到

$$(**) \qquad \rho_i(G_{\lambda'}) \subset \sum_{j=1}^{m_i} \mathrm{tr}(\rho_i(G_{\lambda'}))b_{i,j}^*.$$

现在假设断言 3 (i) 对 λ' 不成立，也就是说，对于所有 $g \in G_{\lambda'}$ ，$\mathrm{Ad}(g)$ 的所有特征值 α 都满足 $v_{\lambda'}(\alpha) \geq 0$。由于 $\mathrm{Ad}(g)$ 与 $\rho(g)$ 具有相同的特征值，我们得到 $v_{\lambda'}(\mathrm{tr}(\rho_i(G_{\lambda'}))) \geq 0$。

为导出矛盾，首先考虑 $C_\lambda = \Gamma$ （因此 $K_\lambda = K_{\lambda'} = K_\infty = K$ 且 $\mathcal{O}_\lambda^- = \mathcal{O}_{\lambda'}^-$ ）的情形。由于 G 是$\mathbf{H}(K^{\mathrm{alg}})$的一个无界子群， $\rho(G)$ 也是无界的，因此存在某个 $i \leq r$ ，使得 $\rho_i(G)$ 是无界的。特别地，(**) 左侧无界，而右侧有界，这就产生了矛盾。因此，我们现在可以假设 C_λ 严格包含于 Γ。特别地，我们可以假设 λ' 位于 C_λ 之外（并且只对这样的 λ' 证明断言 3 (i)）。这特别意味着 $\lambda \in C_{\lambda'}^-$ ，从而 $K_\lambda \subset \mathcal{O}_{\lambda'}^-$ 。此外，对于所有 i 和 j，我们有 $v_{\lambda'}(b_{i,\,j}^*) \geq 0$ ，因此 (**) 右侧整个和的 $v_{\lambda'}$ 非负。为完成断言 3 的证明，只需证明：对于任意大的 λ'，我们都能找到一个 $g \in G_{\lambda'}$ 和一个 $i \leq r$ ，使得 $v_{\lambda'}(\rho_i(g)) < 0$。

由于 G 在 $\mathbf{H}(K)$ 中是无界的，因此存在赋值任意负的 $g \in G$ 。取这样的 g ，并令 $\lambda' := -v(g)$。根据断言 1’，存在一个 $g' \in \mathbf{H}(K_{\lambda'})$，使得$v(g - g') > \lambda'$；又由于 $B_\lambda(1) \cap \mathbf{H}(K) \subset G$，我们有 $g' \in G$。因此，不妨设 $g \in G_{\lambda'}$。根据 $v_{\lambda'}$ 的定义，我们有 $v_{\lambda'}(g) < 0$。由于 ρ 是一个到其像上的 K_λ^{alg}- 同构（见注 2.1.2 ），且所有元素 $a \in K_\lambda^{\mathrm{alg}}$ 都满足 $v_{\lambda'}(a) \geq 0$，因此我们也有 $v_{\lambda'}(\rho(g)) < 0$；否则，对 $\rho(g)$ 应用 ρ^{-1} 将推出 $v_{\lambda'}(g) = 0$。利用 ρ 是各个 ρ_i 的直和这一事实，我们推得存在一个 i ，使得我们有$v_{\lambda'}(\rho_i(g)) < 0$，如所要求。这就完成了断言 3 (i) 的证明。

为证明 (ii)，回顾一下，$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 的半单元素 h 若 h 属于 $\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 的唯一一个极大环面，就称其为正则元素。根据 [Ste65], 的定理 2.14，$\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 中正则半单元素的集合 $\mathbf{H}^{\mathrm{rss}}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 是 $\mathbf{H}(K_\lambda^{\mathrm{alg}})$ 中的稠密开集。特别地，$\mathbf{H}(K_\lambda)$ 中非半单元素的集合$\mathbf{H}^{\mathrm{nss}}(K_\lambda)$ 包含于 $\mathbf{H}(K_\lambda)$ 的一个真 Zariski 闭子集中。因此，对于 $B := B_\lambda(1) \cap \mathbf{H}(K_\lambda) \subset G_\lambda$ （如命题 2 中所述，且 g 是

由 (i) 得到的），集合 gB （属于 G_λ ）含有一个半单元素 g'；事实上，根据引理 4.1.5, B 在 $\mathbf{H}(K_\lambda)$ 中扎里斯基稠密，因此 gB 也如此。利用 Ad 的连续性，我们可以选取一个接近 g 的 g' ，使得 $\mathrm{Ad}(g')$ 足够接近 $\mathrm{Ad}(g)$，从而确保 $\mathrm{Ad}(g)$ 和 $\mathrm{Ad}(g')$ 的特征值具有相同的赋值。（这里我们用到了一个众所周知的事实：特征多项式的根连续依赖于特征多项式——例如参见 [CKS23，定理 23]。）换言之，我们可以假设 g 是半单的，从而完成断言的证明。□*(断言 3)*

在证明的其余部分，固定如断言 3 中的 $\lambda \in \Gamma$ 和 $g \in G_\lambda$ 。从现在起，我们只在 K_λ 和 K_λ^{alg} 中进行讨论，并且只使用粗化且受限的赋值v_λ:
$K_\lambda \to C_\lambda/C_\lambda^- \cup \{\infty\}$ 及其到 K_λ^{alg} 的（唯一）延拓，我们也将其记作v_λ。

依照 [Pra82 引理 2], ，我们固定一个定义在 K_λ 上的极大环面$\mathbf{T}$ ，它属于$\mathbf{H}$，且满足 $g \in \mathbf{T}(K_\lambda)$；根据 [Spr09]中的定理 13.3.6 和推论 13.3.8，这样的$\mathbf{T}$ 存在。我们用 $X(\mathbf{T})$表示$\mathbf{T}$ 的特征群，用 $\Phi \subset X(\mathbf{T})$表示相对于$\mathbf{T}$的$\mathbf{H}$ 的根系。容易验证，由 $\beta \mapsto v_\lambda(\beta(g))$ 定义的映射 $X(\mathbf{T}) \to C_\lambda/C_\lambda^-$ 是一个群同态。特别地，集合 $\{\beta \in X(\mathbf{T}) \mid v_\lambda(\beta(g)) \geq 0\}$ 包含 $X(\mathbf{T})$的一个闭半空间，因此存在一个正根集 $\Phi^+ \subset \Phi$ ，使得对每个根 $\phi \in \Phi$，都有如下蕴含关系

$$(***) \qquad v_\lambda(\phi(g)) > 0 \Rightarrow \phi \in \Phi^+ \Rightarrow v_\lambda(\phi(g)) \geq 0$$

我们令 $\Delta \subset \Phi^+$ 为相应的单根集合。

还要注意，上述群同态 $X(\mathbf{T}) \to C_\lambda/C_\lambda^-$ 并非处处映为 0，因为 $\mathrm{Ad}(g)$ 有一个特征值 α ，满足 $v_\lambda(\alpha) < 0$。这意味着存在一个单根 $\delta \in \Delta$ ，满足 $v_\lambda(\delta(g)) \neq 0$。特别地，集合

$$\Pi := \{\delta \in \Delta \mid v_\lambda(\delta(g)) = 0\}.$$

是 Δ 的真子集，因此我们得到 $\mathbf{H}$ 的一个真抛物子群$\mathbf{P}_\Pi$ ，其幺幂根为 $\mathbf{U}_\Pi$。回忆一下，对每个 $\phi \in \Phi$ ，存在唯一的 $\mathbf{H}$ 的扎里斯基闭子群 $\mathbf{U}_\phi$ （与 ϕ 对应的根子群）以及一个同构 $\epsilon_\phi : \mathbf{G}_a \to \mathbf{U}_\phi$ ，使得对每个 $t \in \mathbf{T}$ 和 $x \in K_\lambda^{\mathrm{alg}}$ ，都有 $t\epsilon_\phi(x)t^{-1} = \epsilon_\phi(\phi(t)x)$。此外，例如根据 [Spr09], 中关于 $\phi \in \Phi$ 的命题 8.4.3(ii)，当且仅当 ϕ 为正且 $\phi \notin \langle \Pi \rangle$ 时，$\mathbf{U}_\phi \leq \mathbf{U}_\Pi$ 。

断言 *4.* 对于 $\phi \in \Phi$，我们有 $\mathbf{U}_\phi \leq \mathbf{U}_\Pi \Leftrightarrow v_\lambda(\phi(g)) > 0$。

断言 *4* 的证明。首先假设 $v_\lambda(\phi(g)) > 0$。那么由 (***) 可知， $\phi \in \Phi^+$，也就是说， ϕ 为正。此外，若 $\phi \in \langle \Pi \rangle$ ，例如 $\phi = \Sigma_{i \in I}\delta_i$ ，其中 δ_i 属于 Π，则

$$v_\lambda(\phi(g)) = v_\lambda((\Sigma_{i \in I}\delta_i)(g)) = v_\lambda(\Pi_{i \in I}(\delta_i(g))) = \Sigma_{i \in I} v_\lambda(\delta_i(g)) = 0,$$

（因为对于 $\delta_i \in \Pi$， $v_\lambda(\delta_i(g)) = 0$），这就产生了矛盾。因此 $\phi \in \Phi^+$ 且 $\phi \notin \langle \Pi \rangle$，所以 $\mathbf{U}_\phi \leq \mathbf{U}_\Pi$。

反过来，假设 $\mathbf{U}_\phi \leq \mathbf{U}_\Pi$。那么，如上所述， $\phi \in \Phi^+$ ，因此由 (***) 可知 $v_\lambda(\phi(g)) \geq 0$。为导出矛盾，假设 $v_\lambda(\phi(g)) = 0$，并将 $\phi = \sum_i \delta_i$写成单根 $\delta_i \in \Delta$之和。由于所有这些 δ_i 都满足 $v_\lambda(\delta_i(g)) \geq 0$ （由 (***)），要得到 $v_\lambda(\phi(g)) = 0$ ，唯一的可能就是所有 δ_i 本身都满足 $v_\lambda(\delta_i(g)) = 0$。换言之， $\phi \in \langle \Pi \rangle$，这与 $\mathbf{U}_\phi \leq \mathbf{U}_\Pi$ 矛盾。□*(* 断言 *4)*

由于$\mathbf{T}$ 是一个 K_λ-群，且集合 $\{\phi \in \Phi \mid v_\lambda(\phi(g)) > 0\}$ 在 $\mathrm{Gal}(K_\lambda^{\mathrm{alg}}/K_\lambda)$作用下不变，我们推得 $\mathbf{U}_\Pi$ 是一个 K_λ-群。

断言 *5.* 群 G_λ 包含$\mathbf{U}_\Pi(K_\lambda)$ 和 $\mathbf{U}_\Pi^-(K_\lambda)$。

断言 *5* 的证明。 我们证明 G_λ 包含$\mathbf{U}_\Pi(K_\lambda)$，而对$\mathbf{U}_\Pi^-(K_\lambda)$ 的证明类似。为此，只需验证对于每个 $\phi \in \Phi^+ \setminus \langle \Pi \rangle$， G_λ 包含$\mathbf{U}_\phi(K_\lambda)$；因此固定这样一个根 ϕ，并固定一个在K_λ上定义的同构 $\epsilon_\phi \colon \mathbf{G}_a \to \mathbf{U}_\phi$，使得对于所有 $t \in \mathbf{T}$， $t\epsilon_\phi(x)t^{-1} = \epsilon_\phi(\phi(t)x)$。由于 ϵ_ϕ 关于赋值拓扑是连续的，存在一个 $\lambda' \in C_\lambda / C_\lambda^-$，使得赋值球$B' = B_{\lambda'}(0) \subset K_\lambda$ 在 ϵ_ϕ 下的像包含于 $B_\lambda(1) \cap \mathbf{U}_\phi(K_\lambda)$。

由于 $v_\lambda(\phi(g)) > 0$（根据我们对 ϕ 的选择以及断言 4），且值群 C_λ / C_λ^- 是阿基米德的，对于任意 $a \in K_\lambda$，存在一个整数 n使得 $nv_\lambda(\phi(g)) + v_\lambda(a) > \lambda'$，因此 $\phi(g)^n a \in B'$。于是 $g^n \epsilon_\phi(a) g^{-n} = \epsilon_\phi(\phi(g)^n a) \in B_\lambda(1) \subset G_\lambda$，这意味着$\epsilon_\phi(a) \in G_\lambda$。由于$\mathbf{U}_\phi(K_\lambda)$中的每个元素都具有这种形式，我们刚刚证明了$\mathbf{U}_\phi(K_\lambda) \subset G_\lambda$。□*(*断言 *5)*

根据 [BT73，命题 6.2(v)]，$\mathbf{H}(K_\lambda)^+$ 由$\mathbf{U}_\Pi(K_\lambda)$和$\mathbf{U}_\Pi^-(K_\lambda)$生成，因此断言 5 推出$\mathbf{H}(K_\lambda)^+ \subset G_\lambda$。这就完成了 **(*)** 的证明，从而也完成了定理的证明。□

4.2. **有界子群的非单性**。 本小节的目标是命题 4.2.1。该命题与定理 4.1.2（或正特征情形下的命题 4.1.3）结合起来，对证明主定理至关重要：它给出了应用定理 4.1.2 所需的无界性假设。

命题 4.2.1。 设 $(K, v, \dots)$ 是特征 *0* 的亨泽尔赋值域的一个 *1*-h-极小扩张，或者是特征为 p 的纯代数闭赋值域。设 G 是 $\mathbf{SL}_n(K)$的一个无限可定义且可定义几乎单的子群。那么 G不是有界的。

这个命题的证明源自一个关于布吕阿-蒂茨建筑的论证。虽然在形式上，布吕阿-蒂茨建筑已不再出现在证明中，但其背后的思路仍是如此。作为基本思路的一个例子，群 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$作用在一棵（$p+1$）度树上（见 [Ser03] 的第二章），任何有界子群 $G < \mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$都会固定一个顶点，因此共轭于 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$的一个子群。利用 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$有一列交集平凡的正规子群（由合同子群构成），可以推知 G不可能是可定义几乎单的。

命题 *4.2.1* 的证明。 我们反设 G 有界。

令 $V = K^n$，并令 Γ^c 为 Γ的所有向上闭子集构成的集合。注意， Γ^c是一个有序集（其中 $\lambda \leq \lambda'$ 当且仅当 $\lambda' \subset \lambda$，且 $\infty^c := \emptyset \in \Gamma^c$ 是最大元），并且 Γ 通过加法在 Γ^c 上有一个保序作用。我们将该作用记为$+\colon \Gamma \times \Gamma^c \to \Gamma^c$，并且对任意 $\lambda \in \Gamma^c$，另定义 $\infty + \lambda := \infty^c$。

我们将 V上的一个赋值 （取值于 Γ^c）定义为满足以下条件的映射 $\eta \colon V \to \Gamma^c$：对所有 u， $w \in V$和 $x \in K$均成立。

(a) $\eta(u) = \infty^c$ 当且仅当 $u = 0$, (b) $\eta(xu) = v(x) + \eta(u)$, (c) $\eta(u + w) \geq \min\{\eta(u), \eta(w)\}$。

（这里第二项中的加法是上述 Γ 在 Γ^c 上的作用。）

注意，对每个 $u \in V$，我们都有 $\eta(u) = \eta(-u)$；并且，如果 $\eta(u_1) < \min\{\eta(u_2), \dots, \eta(u_k)\}$，那么 $\eta(u_1 + \dots + u_k) = \eta(u_1)$。事实上，为了证明后者，反设 $\eta(u_1 + \dots + u_k) > \eta(u_1)$，并令 $w = u_2 + \dots + u_k$。于是

$$\eta(u_1) = \eta(u_1 + w - w) \geq \min\{\eta(u_1 + w), \eta(w)\} > \eta(u_1), \text{ a contradiction.}$$

设 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 是 $V=K^n$ 的标准基。在 V 上定义“标准赋值”η_0 如下： $\eta_0(\sum_{i=1}^n a_ie_i):=\{\lambda\in\Gamma:\ \lambda\geq \min\{v(a_i):\ 1\leq i\leq n\}\}$。上述公理对 η_0 成立，留待读者验证。（注意，它将零向量映射到空集 $\infty^c\in\Gamma^c$。）

定义 η: $V\to\Gamma^c$ 由 $\eta(x):=\bigcup_{g\in G}\eta_0(g(x))$. 容易验证， η也是一个赋值。事实上，定义的 (a) 部分显然。为证明 (b)，我们有

$$\eta(xu)=\bigcup_{g\in G}\eta_0(g(xu))=\bigcup_{g\in G}\eta_0(xg(u))$$

$$=\bigcup_{g\in G}(v(x)+\eta_0(g(u))=v(x)+\bigcup_{g\in G}\eta_0(g(u))=v(x)+\eta(u).$$

为证明 (c)，我们有

$$\eta(u+w)=\bigcup_{g\in G}\eta_0(g(u+w))=\bigcup_{g\in G}\eta_0(g(u)+g(w))$$

$$\geq\bigcup_{g\in G}\min\{\eta_0(g(u)),\eta_0(g(w))\}=\min\{\bigcup_{g\in G}\eta_0(g(u)),\bigcup_{g\in G}\eta_0(g(w))\}=\min\{\eta(u),\eta(w)\}.$$

Let

$$\mathrm{SL}_n(\eta):=\{g\in\mathbf{SL}_n(K):\forall u\in V(\eta(u)=\eta(gu))\}.$$

容易验证 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 是一个群，且是可定义的。此外，根据 η 的定义，我们有 $G\leq\mathrm{SL}_n(\eta)$.

对于满足 $\delta\geq 0$ 的 $\delta\in\Gamma$，令

$$\mathrm{SL}_n(\eta,\delta):=\{g\in\mathrm{SL}_n(\eta):\forall u\in V(\eta(u-gu)\geq\delta+\eta(u))\}.$$

那么 $\mathrm{SL}_n(\eta,0)=\mathrm{SL}_n(\eta)$，且 $\mathrm{SL}_n(\eta,\delta)$ 是 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 的一个可定义正规子群。事实上，可定义性以及对取逆封闭显然，并且我们有（对于 $g,h\in\mathrm{SL}_n(\eta,\delta)$

$$\eta(u-ghu)=\eta((u-hu)+(hu-ghu))\geq\min\{\eta(u-hu),\eta(hu-g(hu))\}$$

$$\geq\min\{\delta+\eta(u),\delta+\eta(hu))\}=\delta+\eta(u);$$

同样，对于 $g\in\mathrm{SL}_n(\eta,\ \delta)$ 和 $h\in\mathrm{SL}_n(\eta)$，以及 $u\in V$，我们有

$$\eta(u-h^{-1}ghu)=\eta(hu-g(hu))\geq\delta+\eta(hu)=\delta+\eta(u).$$

交集 $\bigcap_{\delta\geq 0}\mathrm{SL}_n(\eta,\ \delta)$ 是平凡的；事实上，对于任意 $g\in\mathbf{SL}_n(K)\setminus\{I\}$（其中 I是单位矩阵），存在一个 $x\in V$ 使得 $gx\neq x$。利用 G的有界性，我们知道 $\eta(x)$ 不等于 Γ的全部。利用 Γ 在 Γ^c 上的轨道共尾这一事实，我们可推出存在一个 δ，使得 $\eta(x-gx)<\delta+\eta(x)$，因此 $g\notin\mathrm{SL}_n(\eta,\ \delta)$。

由于 $\bigcap_{\delta\geq 0}\mathrm{SL}_n(\eta,\ \delta)$ 是平凡的，存在一个 δ_0，使得 $N:=G\cap\mathrm{SL}_n(\eta,\ \delta_0)$ 不等于 G。由于 G是可定义几乎单的，且 N 是 G的可定义正规子群，因此群 N 必为有限群。

由下文引理 4.2.2（待证），群 $\mathrm{SL}_n(\eta,\ \delta_0)$ 包含单位矩阵 I 在 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 中的一个开邻域。因此，由于 N 是有限的，我们得到 G是 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 的离散子群。由引理 2.3.9 可知 $\dim G=0$，进而由命题 2.3.6(i) 可知 G是有限的，矛盾。□

引理 4.2.2。 在命题 *4.2.1* 的假设下，并在假设 G 有界这一矛盾前提下，群 $\mathrm{SL}_n(\eta,\delta_0)$ 包含 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 的一个开邻域 I 单位元。

证明。 我们首先考虑 $(K, v, \ldots)$ 是特征为 0 的一个 1-h-极小扩张的情形。在此情形下，根据引理 3.2.1(ii)，只需证明 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 和 $\mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0)$ 的切空间相等；而为此，只需证明它们具有相同的维数。由于切空间的维数等于相应群的维数，因此只需证明 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 和 $\mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0)$ 具有相同的维数。

断言。 存在 $\delta_1 > \delta_0$，使得对于所有 $u \in V$，都有 $\eta(u) + \delta_1 > \eta(u)$。

断言的证明。 对每个 $u \in V$，定义 $C_u := \{\mu \in \Gamma : \mu + \eta(u) = \eta(u)\}$。于是 C_u 是 Γ的凸子群，并且由于 G 有界，故 $C_u \neq \Gamma$。要证明该断言，只需证明不同的 C_u 至多有 $n = \dim(V)$ 个，因为这样我们便可选取一个不属于 $\bigcup_{u \in V} C_u$的 $\delta_1 > \delta_0$。

因此，假设出现矛盾：C_{u_1}、……、$C_{u_{n+1}}$彼此不同，其中 u_1、……、$u_{n+1} \in V$。存在 a_1、……、$a_{n+1} \in K$，且并非全为零，使得 $\sum_{i=1}^{n+1} a_i u_i = 0$。必要时去掉若干项，我们可以假设对所有 i，都有 $a_i \neq 0$，因此对每个 i，都有 $C_{u_i} = C_{a_i u_i}$。于是这些 $C_{a_i u_i}$ 彼此不同，因此 $\eta(a_i u_i)$ 也彼此不同。由此，根据前面对 Γ^c中赋值的说明，可得 $\eta(\sum_{i=1}^{n+1} a_i u_i) = \min_{i=1}^{n+1} \eta(a_i u_i) \neq \infty^c$，这与 $\sum_{i=1}^{n+1} a_i u_i = 0$矛盾。□(断言)

现在固定 $a \in K$ with $v(a) = \delta_1$。令 $M_n(K)$ 为 K 上的 $n \times n$ 矩阵集合。定义映射 $\phi : \mathrm{SL}_n(\eta) \to M_n(K)$，令 $\phi(g) = a(g - I) + I$。由于 ϕ 是单射，只需证明 ϕ 的值域包含于 $\mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0)$，从而（如所期望的）推出 $\mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0)$ 与 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 具有相同的维数。

因此，固定 $g \in \mathrm{SL}_n(\eta)$，并令 $h = \phi(g)$。我们先验证 $h \in \mathrm{SL}_n(\eta)$。为此，令 $u \in V$。注意，由于 $\eta(gu) = \eta(u)$，我们有 $\eta(gu - u) \geq \eta(u)$。因此，我们得到

$$\eta(a(gu - u)) = \delta_1 + \eta(gu - u) \geq \delta_1 + \eta(u) > \eta(u)$$

（最后一个不等式由利用断言选取 δ_1 得出。）因此

$$\eta(hu) = \eta(a(gu - u) + u) = \min\{\eta(a(gu - u)), \eta(u)\} = \eta(u),$$

所以 $h \in \mathrm{SL}_n(\eta)$。 此外，

$$\eta(hu - u) = \eta(a(gu - u) + u - u) = \eta(a(gu - u)) = \delta_1 + \eta(gu - u) \geq \eta(u) + \delta_1,$$

因此，如所需，我们得到 $h \in \mathrm{SL}_n(\eta, \delta_1) \subset \mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0)$。

现在考虑 K 是特征 p 的纯代数闭赋值域的情形。在这种情况下，我们不再能借助涉及切空间的论证，但上述论证仍可推出 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 和 $\mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0)$ 是维数相同的可定义群。令 $\mathrm{H}_1 = \mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(\mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0))$ 和 $\mathrm{H}_2 = \mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(\mathrm{SL}_n(\eta))$ 分别为它们在 SL_n 中的扎里斯基闭包。于是 $\mathrm{H}_1 \leq \mathrm{H}_2$，，并利用引理 2.3.10(ii)，$\mathrm{H}_1$,$\mathrm{H}_2$ 具有相同的扎里斯基维数。因此，$|\mathrm{H}_2 : \mathrm{H}_1|$是有限的。此外，再次利用引理 2.3.10(ii)，$\dim(\mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0)) = \dim(\mathrm{H}_1(K))$。于是，由引理 2.3.8，$\mathrm{SL}_n(\eta, \delta_0)$ 在 $\mathrm{H}_1(K)$ 中有非空内点，因此包含 $\mathrm{H}_1(K)$ 中单位元 I 的一个开邻域 U_1。这 U_1 也是 $\mathrm{H}_2(K)$ 中 I 的一个开邻域，因而也是 $\mathrm{SL}_n(\eta)$ 中的开邻域。□

5. Proof of Theorem 1.0.1.

本节中我们证明定理 1.0.1。证明实质性地使用了第 3.2 节中的论证（关于与可定义群相关联的李代数）、关于任意域上的单李代数的经典结果，以及第 4 节中的结果。

李代数方法源于[PPS00]中在 o-极小情形下所使用的一个论证。一个关键问题是，在定理 1.0.1 的证明中，我们希望取 G 的扎里斯基闭包并应用引理 2.3.10(ii)。然而，后者要求 L_{div}-可定义性，而 G 在更广义的 1-h-极小框架下并不具备这一性质。我们通过下面的结果规避这一问题。

在整个本节中，当 K 是一个域且 $\mathbf{H}$是一个线性代数 K-群时，我们将把 $\mathbf{H}$ 视为存在于 K^{alg} （即，$\mathbf{H}=\mathbf{H}(K^{\mathrm{alg}})$）中。

命题 5.0.1。 设$(K, v, \ldots)$ 是一个亨泽尔赋值域的特征 *0* 的 *1*-*h*-极小扩张，并设 $G \subseteq K^m$ 是一个非阿贝尔可定义的可定义几乎单群，且有维数$(G) = r$。则存在一个同态 $\rho\colon G \to \mathbf{SL}_r(K)$，其核为 G 的（有限）中心 $Z(G)$，并且满足 $r =$ 维数 $\rho(G) =$ 维数 $\mathrm{cl}_K(\rho(G))$。

证明。 将 G 替换为 $G/Z(G)$后，根据命题 3.1.8 和 3.2.14（使用伴随表示），不妨设 $G \leq \mathbf{SL}_r(K)$（其中 $r =$ 维数 G）。此外，通过这一表示， G 忠实地作为一个维数为 r、定义在 K上的单李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群作用。我们必须证明维数$(G) =$ 维数 $\mathrm{cl}_K(G)$。

我们采用 Jacobson [Jac62]《第 IX 和 X 章》中关于任意域上的单李代数及其自同构群的一些基础理论。首先，利用 $\mathfrak{g}$是单的这一点，可得一个规范的有限扩域 F，它是 K的扩域，称为 $\mathfrak{g}$的质心，并具有如下性质： $\mathfrak{g}$ 具有 F上的李代数结构；对于 F的每个扩域 F'，李代数 $\mathfrak{g}\otimes_F F'$（在 F'上）都是单的。为构造F，定义 A为所有 K 线性映射 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$构成的结合 K代数。令 $T(\mathfrak{g})$为 A的 K子代数，由所有映射 a_L: $x \mapsto [a, x]$和 a_R: $x \mapsto [x, a]$ （其中$a \in \mathfrak{g}$）生成。那么， F就是 $T(\mathfrak{g})$在 A中的中心化子。由于 A 在 K上具有有限向量空间维数，因此 F 在 K上有限维，故它是 K的有限次数扩域，次数记为 d。注意，$\mathrm{ldim}_K(\mathfrak{g}) = d \cdot \mathrm{ldim}_F(\mathfrak{g})$，其中 ldim_K和 ldim_F分别表示在 K和 F上的向量空间维数。我们将 $\mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g})$记为 $\mathfrak{g}$ 作为 K上的李代数时的自同构群，将 $\mathrm{Aut}_F(\mathfrak{g})$记为 $\mathfrak{g}$ 作为 F上的李代数时的自同构群。

根据 Jacobson 第 X 章的定理 5， [Jac62], 群 $\mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g})$ 在F上是半线性的，也就是说，如果 $g \in \mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g})$，那么存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(F/K)$，使得对于$a \in F$和 $x \in \mathfrak{g}$， $g(ax) = a^\sigma g(x)$。由于 $\mathrm{Aut}(F/K)$ 是有限的，$\mathrm{Aut}_F(\mathfrak{g})$ 是 $\mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g})$ 的有限指数正规子群。令 G' 为群 $\mathrm{Aut}_F(\mathfrak{g})$，将其视为 $\mathbf{GL}_r(K)$ 的子群，该子群在我们的结构 K 中是可定义的。由于 G 是可定义几乎单的，因此可得 $G \leq G'$；又由于 G' 在 $\mathbf{GL}_r(K)$ 中是扎里斯基闭的，为了得到 $\dim(G) = \dim \mathrm{cl}_K(G)$，只需证明 $\dim G' \leq r$。

令 m 为 $\mathfrak{g}$ 在 F 上的向量空间维数，则 $md = r = \dim(G)$。通过任意将 F-向量空间 $\mathfrak{g}$ 与 F^m 进行识别，我们可以将 $G' = \mathrm{Aut}_F(\mathfrak{g})$ 视为 $\mathrm{GL}_m(F)$ 的子群。这样，它就是某个 F-群 $\mathbf{H} \subset \mathrm{GL}_m$ 的 F-有理点集合 $\mathbf{H}(F)$。令 $e := \mathrm{zardim}\ \mathbf{H}$ 为其扎里斯基维数。于是 $\dim G' \leq de$。事实上，根据诺特正规化，存在一个有限到一的 F-态射 $\mathbf{H} \to (K^{\mathrm{alg}})^e$。这诱导出从 $G' = \mathbf{H}(F)$ 到 F^e 的有限到一映射。将其与一个 K-线性映射 $F \to K^d$ 复合，得到一个有限到一映射 $G' \to K^{de}$，该映射在结构K中是可定义的。这就推出了不等式 $\dim(G') \leq de$，如所断言。因此，为了得到 $\dim G' \leq r$，只需证明 $m = e$。

现在我们转而讨论 K^{alg}，如下所示：由于对于每个 $F' \supset F$， $\mathfrak{g} \otimes_F F'$都是定义在 F'上的单李代数，因此 $\mathfrak{g} \otimes_F K^{\mathrm{alg}}$也是定义在 K^{alg} 上的单李代数。注意，我们

有 $\mathbf{H} = \mathrm{Aut}_{K^{\mathrm{alg}}}(\mathfrak{g} \otimes_F K^{\mathrm{alg}})$（因为只需在 $\mathfrak{g}$ 的一个 F-基上验证对 $\mathfrak{g} \otimes_F K^{\mathrm{alg}}$ 的李括号的保持性）。连通分支 $\mathbf{H}^\circ$ 是一个与 $\mathfrak{g} \otimes_F K^{\mathrm{alg}}$ 同李型的单代数群，因此我们有 $e = \mathrm{zardim}\mathbf{H} = \mathrm{zardim}\mathbf{H}^\circ = \mathrm{ldim}_{K^{\mathrm{alg}}}(\mathfrak{g} \otimes_F K^{\mathrm{alg}}) = m$。□

最后，我们证明主定理，并先将其重新陈述如下。

定理 *5.0.2*。（*i*）设 $(K, v, \ldots)$ 是特征 *0* 的亨泽尔赋值域的一个 *1-h-*极小扩张。设 G 是结构 $(K, v, \ldots)$ 中可定义的非阿贝尔群，其全集为某个 n 的 K^n 可定义子集，并假设 G 是可定义几乎单的。那么存在一个半单、几乎 K-单且 K-各向同性的线性代数 K群 $\boldsymbol{H}$，以及一个与 $G/Z(G)$ 可定义同构的群 G^*，使得 $\boldsymbol{H}(K)^+ \leq G^* \leq \boldsymbol{H}(K)$。（*ii*）设 (K, v) 是特征 $p > 0$ 的代数闭赋值域，且设 $G \leq \boldsymbol{SL}_n(K)$ 是一个可定义的非阿贝尔群，并且是可定义几乎单的。那么存在一个半单、几乎 K-单且 K-各向同性的线性代数K群 $\boldsymbol{H}$，使得 $G/Z(G)$ 与 $\boldsymbol{H}(K)$ 可定义同构。

证明。令 $r = \dim(G)$。首先，假设 K 的特征为 0。将 G 替换为$G/Z(G)$后，由命题 5.0.1，可假设 $G \leq \mathbf{SL}_r(K)$，且 $r = \dim G = \dim \mathrm{cl}_K(G)$。

在特征 p下，假设群 G 是某个$\mathbf{SL}_n(K)$的 L_{div}-可定义子群。于是由引理 2.3.10(ii)，自动有 $\dim G = \dim \mathrm{cl}_K(G)$。利用 [Bor91, 定理 6.8] 将中心除去后，可假设 G 中心平凡。

因此，无论哪种情况，都可假设 $G \leq \mathbf{SL}_n(K)$，且 $\dim G = \dim \mathrm{cl}_K(G)$，并且 G中心平凡。特别地，G 的可定义几乎单性已蕴含其可定义单性（见注 2.1.4）。

断言 *1*。存在一个半单、几乎 K-单的线性代数 K-群$\mathbf{H}$，以及一个可定义的单射群同态 $\phi\colon G \to \mathbf{H}(K)$，使得对于 $G^* := \phi(G)$，以下结论成立：扎里斯基闭包 $\mathrm{cl}_K(G^*)$（即 G^* 在$\mathbf{H}(K)$中的扎里斯基闭包）等于整个$\mathbf{H}(K)$，并且 $\dim(G^*) = \dim(\mathbf{H}(K))$。

~ ~证明。令$\mathbf{H} := \mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(G)$为 G 在 $\mathbf{SL}_n$中的扎里斯基闭包。于是$\mathbf{H}$ 是$\mathbf{SL}_n$ 的子群（例如参见 [Bor66, Ch. I, Proposition 1.3(b)]）。由于任何逐点固定 K 的域自同构α 也会固定 G（因为它的论域包含于 K的某个幂中），我们~还可得出$\mathbf{H}$ 是一个 K-群，由此特别可以推得~$\mathrm{cl}_K(G) = \mathbf{H}(K)$；另见注 2.1.1。

~ ~显然，$\mathbf{H}$ 是连通的。事实上，它的连通分支 $\mathbf{H}^\circ$ 是$\mathbf{H}$中的正规有限指数子群~ ~，因此 $G \cap \mathbf{H}^\circ$ 是 G 的可定义正规有限指数子群，故包含 G（依据 G的可定义单性~）。因此 $\mathrm{cl}_{K^{\mathrm{alg}}}(G) \subset \mathbf{H}^\circ$，从而两者相等。

令$\mathbf{N}$为$\mathbf{H}$的最大的连通真正规~子群，$\mathbf{N}(K) \cap G$ 是 $\tilde{G}$的可定义正规子群。若$\mathbf{N}(K) \cap G = G$，则$\mathbf{N} = \mathbf{H}$~，这与$\mathbf{N}$ 在$\mathbf{H}$中的真性矛盾。因此，由 G的可定义单性，$\mathbf{N}(K) \cap G = 1$。

令$\mathbf{H}/\mathbf{N}$是代数 K-群范畴中的一个商。因此，$\mathbf{H}$ 是连通且几乎 K-单的（由$\mathbf{N}$的极大性可知），并且是定义在 K上的线性代数群，依据 [Bor91，定理 6.8]。令

$$\rho\colon \tilde{\mathbf{H}} \to \mathbf{H}$$

˜是典范的 K-满态射，且$\mathbf{N} = \mathrm{Ker}(\rho)$。特别地， $\rho : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$是满射，其核为$\mathbf{N}$。

令 $\phi := \rho_{|G}$，并设 $G^* := \phi(G)$。注意， G^* 在$\mathbf{H}$中扎里斯基稠密，因为 G 在$\mathbf{H}$中扎里斯基稠密。由于 $\mathrm{Ker}(\phi) = G \cap \mathbf{N}(K)$ 是平凡的，由命题 2.3.6(ii)，我们˜有 $\dim(G) = \dim(G^*) \leq \dim(\mathbf{H}(K)) \leq \dim(\mathbf{H}(K))$。此外，回想一下，在断言 1 之前我们已经˜证明 $\dim(G) = \dim \mathrm{cl}_K(G) = \dim \mathbf{H}(K)$。由此可知，所有这些维数都相等，尤其是

$$\dim(G^*) = \dim(\mathbf{H}(K)).$$

*(*断言 *1)*$\mathbf{H}$的可解根 $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ 是 K-闭且连通的，因此（由于 K 是完美的）$\mathcal{R}(\mathbf{H})$ 可在 K 上定义（见 [Bor66, 5.1]），故由$\mathbf{H}$的几乎 K-单性可知它是平凡的。这说明$\mathbf{H}$是半单的，断言得证。□

固定一个将$\mathbf{H}$ 嵌入某个$\mathbf{SL}_m$中的 K-群嵌入。由命题 4.2.1， G^* 不是有界的；又由于 $G^* \leq \mathbf{H}(K)$，群$\mathbf{H}(K)$也不是有界的。因此，由定理 4.1.1，$\mathbf{H}$ 在 K上是各向同性的。

由于 $\dim(G^*) = \dim(\mathbf{H}(K))$，由引理 2.3.8 可知， G^* 在$\mathbf{H}(K)$中有非空内点。由于 G^* 是$\mathbf{H}(K)$的子群，有非空内点便足以推出 G^* 在$\mathbf{H}(K)$中是开集（取 G^* 的一个开子集并将其平移遍及整个群）。如上所述， G^* 不是有界的。

若$(K, v, \ldots)$是特征 0 的 1-h-极小结构，则由定理 4.1.2 可得 $G^* \geq \mathbf{H}(K)^+$，故结论成立。若(K, v)是特征为 p的纯代数闭赋值域，则由命题 4.1.3 可知， G 不是$\mathbf{H}(K)^+$的真子群。由于 K 是代数闭的（且$\mathbf{H}$ 是半单的），我们有$\mathbf{H}(K)^+ = \mathbf{H}(K)$（由注 2.1.8），因此 $G = \mathbf{H}(K)$。定理得证。□

利益冲突：作者均无利益冲突。

References

[ALH25] Juan Pablo Acosta L´opez 与 Assaf Hasson。论 1-h-极小域中可定义的群与域。《*J. Inst. Math. Jussieu*》，24(1):203–248，2025。[Bor66] Armand Borel。线性代数群。载于《代数群与不连续子群（纯粹数学研讨会论文集，博尔德，科罗拉多州，*1965*）》，第3–19页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1966。[Bor91] Armand Borel。线性代数群，数学研究生教材第126卷。Springer 出版社，纽约，第二版，1991。[BT72] F. Bruhat 与 J. Tits。局部域上的约化群。高等科学研究所 ´科学出版物，(41):5–251，1972。[BT73] Armand Borel 与 Jacques Tits。简单代数群的“抽象”同态。《数学年刊》（第二辑），97:499–571，1973。[BWH23] David B. Bradley-Williams 与 Immanuel Halupczok。亨泽尔极小赋值域的球完备模型。《数学逻辑季刊》，69(2):138–146，2023。[CHRK22] Raf Cluckers、Immanuel Halupczok 与 Silvain Rideau-Kikuchi。亨泽尔极小性 I。《数学论坛·派》，10:论文编号 e11，68页，2022。[CHRKV23] Raf Cluckers、Immanuel Halupczok、SilvainRideau-Kikuchi 与 Floris Vermeulen。亨泽尔极小性 II：混合特征与一个丢番图应用。《数学论坛·西格玛》，11:论文编号 e89，33页，2023。[CKS23] H. ´Cmiel、F.-V. Kuhlmann 与 P. Szewczyk。赋值域上多项式根的连续性。《代数通讯》，51(4):1383–1412，2023。

[CL11] R. Cluckers 与 L. Lipshitz。具有解析结构的域。《欧洲数学学会杂志》，13(4):1147–1223，2011。[CRW17] Pierre-Emmanuel Caprace、Colin D. Reid 与 George A. Willis。全不连通群的局部正规子群。第二部分：紧生成单群。《数学论坛·西格玛》，5:论文编号 e12，89页，2017。[Dru15] Benjamin Druart。在一个 $_2$ 上的 sl p-进闭域中可定义的子群，2015。arXiv:1501.06834。[DvdD88] J. Denef 与 L. van den Dries。 p-进与实次解析集。《数学年刊》（第二辑），128(1):79–138，1988。[FH12] Antongiulio Fornasiero 与 Immanuel Halupczok。拓扑结构中的维数：拓扑闭包与局部性质。载于《群与模型论》，当代数学第576卷，第89–94页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012。[Fle11] Joseph Flenner。亨泽尔赋值域中的相对可判定性与可定义性。《符号逻辑杂志》，76(4):1240–1260，2011。[Gil09] Philippe Gille。Kneser-Tits 问题。《阿斯特里斯克》，(326):专题报告第983号，vii，39–81页（2010），2009。Bourbaki 研讨会，2007/2008年卷。[Har77] Robin Hartshorne。《代数几何》，数学研究生教材第52号。Springer 出版社，纽约—海德堡，1977。[HHM06] Deirdre Haskell、Ehud Hrushovski 与 Dugald Macpherson。代数闭赋值域中的可定义集：虚元消去。《纯粹与应用数学杂志》，597:175–236，2006。[HHP22] Yatir Halevi、Assaf Hasson 与 Ya'acov Peterzil。各种赋值域中的可解释域。《数学进展》，404:论文编号 108408，58页，2022。[HHP24] Yatir Halevi、Assaf Hasson 与 Ya'acov Peterzil。论各种赋值域中可解释的群。《数学选刊》（新系列），30(4):论文编号 59，64页，2024。[HHP25] Yatir Halevi、Assaf Hasson 与 Ya'acov Peterzil。各种赋值域中可解释的半单群。《数学论坛·西格玛》，13:论文编号 e127，45页，2025。[HK06] Ehud Hrushovski 与 David Kazhdan。赋值域上的积分。载于《代数几何与数论》，《数学进展丛书》第253卷，第261–405页。Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2006。[HK09] Ehud Hrushovski 与 David Kazhdan。动机泊松求和。《莫斯科数学杂志》，9(3):569–623，附录，2009。[HMR18] Ehud Hrushovski、Ben Martin 与 Silvain Rideau。可定义等价关系与群的 ζ 函数。《欧洲数学学会杂志》，20(10):2467–2537，2018。附录由 Raf Cluckers 撰写。[HP94] Ehud Hrushovski 与 Anand Pillay。局部域与伪有限域中可定义的群。《以色列数学杂志》，85(1-3):203–262，1994。[HRK19] Ehud Hrushovski 与 Silvain Rideau-Kikuchi。赋值域与亚稳群。《数学选刊》（新系列），25(3):论文编号 47，58页，2019。[Hum75] James E. Humphreys。《线性代数群》，第21号。Springer 出版社，纽约—海德堡，1975。[Jac62] Nathan Jacobson。《李代数》。纯粹与应用数学 Interscience 专著丛书第10号。Interscience 出版社（John Wiley & Sons 的一个分部），纽约—伦敦，1962。[Lan84] Serge Lang。《代数》。Addison-Wesley 出版公司，高级图书计划，雷丁，马萨诸塞州，第二版，1984。[Mar91] G. A. Margulis。《半单李群的离散子群》，数学及其边界领域成果丛书（第三辑）第17卷。Springer 出版社，柏林，1991。[Mel06] T. Mellor。实闭赋值域中的虚元。《纯粹与应用逻辑年刊》，139(1-3):230–279，2006。[MMvdD83] Angus Macintyre、Kenneth McKenna 与 Lou van den Dries。代数结构中的量词消去。《数学进展》，47(1):74–87，1983。

[OV90] A. L. Onishchik 和 `E. B. Vinberg。《李群与代数群》。Springer 苏联数学丛书。Springer 出版社，柏林，1990。由 D. A. Leites 从俄文译出并撰写序言。[Pil88] Anand Pillay。论 o-极小结构中可定义的群与域。《纯代数与应用代数杂志》，53(3):239–255，1988。[Pil89a] Anand Pillay。模型论在实代数群与 p-进代数群中的一个应用。《代数杂志》，126(1):139–146，1989。[Pil89b] Anand Pillay。论 Q_p 中可定义的域。《数学逻辑档案》，29(1):1–7，1989。[PPS00] Y. Peterzil、A. Pillay 和 S. Starchenko。o-极小结构中的可定义单群。《美国数学会汇刊》，352(10):4397–4419，2000。[PPS02] Y. Peterzil、A. Pillay 和 S. Starchenko。o-极小结构中可定义的线性群。《代数杂志》，247(1):1–23，2002。[PR94] Vladimir Platonov 和 Andrei Rapinchuk。《代数群与数论》，纯粹与应用数学第139卷。Academic Press，波士顿，马萨诸塞州，1994。由 Rachel Rowen 从1991年俄文原版译出。[Pra82] Gopal Prasad。Bruhat-Tits-Rousseau 定理及 Tits 定理的初等证明。《法国数学会通报》，110(2):197–202，1982。[Pra20] Gopal Prasad。Bruhat-Tits 理论中非分歧下降的新方法。《美国数学杂志》，142(1):215–253，2020。[PY] Anand Pillay 和 Ningyuan Yao。 p-进代数群的开子群。arxiv:2304.14798。[RKV] Silvain Rideau-Kikuchi 和 Mariana Vicaria。等特征零亨泽尔域中的虚元。arXiv 预印本 arXiv:2311.00657。[Rob77] Abraham Robinson。《完备理论》。North-Holland 出版公司，阿姆斯特丹-纽约-牛津，第二版，1977。序言由 H. J. Keisler 撰写，收入《逻辑与数学基础研究》。[Ser03] Jean-Pierre Serre。《树》。Springer 数学专著。Springer 出版社，柏林，2003。由 John Stillwell 从法文原版译出；1980年英文译本的修订版第2次印刷。[Spr09] T. A. Springer。《线性代数群》。现代 Birkhäuser 经典丛书。Birkhäuser 波士顿公司，波士顿，马萨诸塞州，第二版，2009。[Ste65] Robert Steinberg。半单代数群的正则元。《高等科学研究所数学出版物》，(25):49–80，1965。[Tit64] J. Tits。代数单群与抽象单群。《数学年刊》(2)，80:313–329，1964。[Tit66] J. Tits。代数半单群的分类。载于《代数群与离散子群》（1965年博尔德纯粹数学专题讨论会论文集），第33–62页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1966，1966。[Tit78] Jacques Tits。域上简单代数群的 Whitehead 群（据 V. P. Platonov 等人的研究）。载于《Bourbaki 研讨会》，第29年（1976/77），数学讲义第677卷，第505号报告，第218–236页。Springer，柏林，1978。[vdD89] Lou van den Dries。可定义集的维数、代数有界性与亨泽尔域。《纯粹与应用逻辑年刊》，45(2):189–209，1989。模型论中的稳定性，II（特伦托，1987）。[vdDL95] Lou van den Dries 和 Adam H. Lewenberg。T-凸性与驯分扩张。《符号逻辑杂志》，60(1):74–102，1995。[Wag97] Frank O. Wagner。《稳定群》，伦敦数学会讲义丛书第240卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997。[Wen12] Roman Wencel。第一阶拓扑结构中可定义的群、群作用与域。《数学逻辑季刊》，58(6):449–467，2012。

J. Gismatullin, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2, 50-384 Wrocław, Poland电子邮件地址: jakub.gismatullin@math.uni.wroc.pl, https://gismat.math.uni.wroc.pl/I. Halupczok, Mathematisches Institut, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Universitätsstr. 1, 40225 Düsseldorf, Germany电子邮件地址: math@karimmi.deD. Macpherson, School of Mathematics, University of Leeds, Woodhouse Lane,Leeds, LS2 9JT, UK电子邮件地址: H.D.MacPherson@leeds.ac.uk