arXiv:2601.08425v1 [cs.CG] 13 Jan 2026

球图上的支配集及单位球图上的加权支配集的下界*

Mark de Berg[1] 和 Sándor Kisfaludi-Bak[2]

[1] 埃因霍温理工大学，荷兰，m.t.d.berg@tue.nl[2] 马克斯·普朗克计算机科学研究所，德国萨尔布吕肯，
sandor.kisfaludi-bak@mpi-inf.mpg.de

摘要。近期研究表明，许多经典图问题——独立集、支配集、哈密顿回路等——都可以在单位球图上用次指数时间求解。更确切地说，对于 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球图，这些问题可以在 $2^{O(n^{1-1/d})}$ 时间内求解；在指数时间假设下，这一界是紧的。该结果可以推广到大小相近的胖对象的交图。

对于独立集，即使对象大小不相近，且考虑该问题的加权版本，也能达到相同的运行时间。我们证明，这种推广对于支配集很可能行不通：假设指数时间假设成立，我们证明

– 对于（非单位）球图上的支配集问题，不存在运行时间为 $2^{o(n)}$ 的算法；– 对于单位球图上的加权支配集问题，不存在运行时间为 $2^{o(n)}$ 的算法；– 对于平面上任意凸（但复杂度非恒定）物体的相交图上的支配集、连通支配集或斯坦纳树问题，不存在运行时间为 $2^{o(n)}$ 的算法。

1 引言

过去几年里，作者有幸与 *Hans Bodlaender* 合作研究了几何相交图上的各种算法问题。在这篇为庆祝 *Hans 60* 岁生日而撰写的短文中，我们将进一步探讨这项合作研究所启发的一些研究方向。*Hans*，希望你喜欢阅读本文，也期待未来继续合作。当然，祝你生日快乐！

假设指数时间假设 [10]成立，许多经典图优化问题无法在一般图上以次指数时间求解，也就是说，无法在 $2^{o(n)}$时间内求解，其中 n 是顶点数。对于平面图，

* 本研究得到荷兰科学研究组织 NWO 资助，项目编号为 024.002.003（网络）。

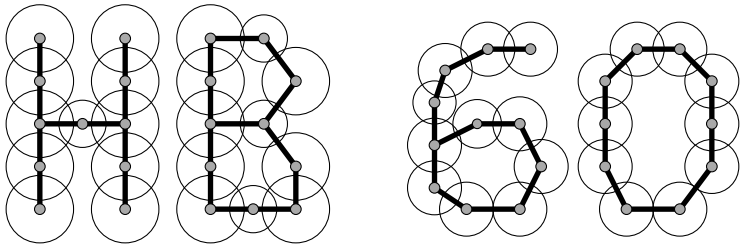

图 1。 平面上一组圆盘的交图。

然而，通常可以设计出次指数算法。特别是，对于平面图，通常可以实现 $2^{O(\sqrt{n})}$ 运行时间。例如，独立集（以及由此得到的顶点覆盖）、支配集和哈密顿回路 [9]问题都是如此。如此多的 NP 困难问题能够在平面图上以 $2^{O(\sqrt{n})}$ 时间求解，这一现象被称为平方根现象 [17]。受近期研究的启发，我们将探究这种现象在何种程度上也出现在某些可推广平面图的几何相交图中。

一组平面上物体的交图 $\mathcal{G}[S]$ 是这样一个图：其顶点集对应于 S，且当且仅当相应的两个物体相交时，两个顶点之间有一条边；见图 1。众所周知，平面图类等价于平面上圆盘的接触图类 [14], ，因此接触图呈现出平方根现象。（圆盘的接触图是由一组 S 内部互不相交的闭圆盘构成的交图。）其他类型的交图中是否也会出现平方根现象？高维中的交图是否也存在平方根现象的某种形式？答案是肯定的：De Berg等 [2]（另见 Kisfaludi-Bak 的论文 [12]）最近证明，上文提到的所有经典图问题都可以在单位圆盘图上用 $2^{O(\sqrt{n})}$ 时间求解——单位圆盘图是平面上单位圆盘的交图——，并且可以在$2^{O(n^{1-1/d})}$ 时间内求解单位球图上的问题，其中 $\mathbb{R}^d$。更一般地，对于大小相近的胖对象的交图，这些问题可以在 $2^{O(n^{1-1/d})}$ 时间内求解。这里，如果存在一个半径为 ρ_{in} 的球 $b_{\text{in}} \subseteq o$ 和一个半径为 ρ_{out} 的球 $b_{\text{out}} \supseteq o$，使得 $\rho_{\text{in}}/\rho_{\text{out}} \geqslant \alpha$，其中 α 是绝对常数，则称物体 o 为胖；如果一组物体的最大物体直径与最小物体直径之比至多为某个绝对常数，则称该物体集合大小相近。

在平面图上，运行时间为 $2^{O(\sqrt{n})}$ 的算法通常基于平面分隔定理 [15,16]。该定理指出，任意平面图 $\mathcal{G} = (V, E)$ 都有一个大小为 $O(\sqrt{n})$ 的平衡分隔器，也就是说，存在一个大小为 $O(\sqrt{n})$ 的子集$C \subset V$，移除它后，$\mathcal{G}$ 会被分成若干连通分量，每个分量至多包含 $\delta|V|$ 个顶点，其中常数 $\delta < 1$。对于单位圆盘图，这样的结果显然不可能成立，因为单位圆盘图可以包含任意大的团。不过，总是可以找到一个由少量团组成的平衡分隔器

。更准确地说，De Berg等人证明，任意 $\mathbb{R}^d$ 中的球图（或更一般地说，胖对象的交图）都存在一个平衡分隔器 $C_1 \cup \cdots \cup C_k$，满足 $\sum_{i=1}^{k} \log(|C_i| + 1) = O(n^{1-1/d})$，且每个 C_i 都是一个团。这个基于团的分隔定理构成了一种算法框架 [2] 的基础，可用于为上述所有问题设计运行时间为 $2^{O(n^{1-1/d})}$ 的算法。有趣的是，该框架只适用于单位球图，或者更一般地说，适用于由大小相近的胖对象构成的交图，尽管底层的基于团的分隔定理对任意大小的球（或者更一般地说，对胖对象）都成立。独立集是一个例外：基于团的分隔定理可直接给出一个算法，其对任意大小的球的运行时间为 $2^{O(n^{1-1/d})}$ [2]。对于独立集问题，也很容易将结果扩展到该问题的加权版本。此外，在保持亚指数特性的同时，还可以放宽胖度假设：对于 $\mathbb{R}^2$ 中的独立集，甚至存在一个针对任意多边形 [18], 的亚指数算法；而对于 $d \geqslant 3$，则可以在胖度与运行时间之间建立有利的权衡（对于大小相近的物体），且该权衡在指数时间假设下是紧的 [13]。本文探讨 De Berg等人 [2] 的算法框架在多大程度上可以推广。具体而言，我们研究哪些问题必须限制物体大小相近。我们还研究上述问题的加权版本能否在大小相近的物体上于次指数时间内求解。

我们的结果。 在第 2 节中，我们首先论证，对于连通顶点覆盖、反馈顶点集和连通反馈顶点集而言，对物体大小相近的限制并非必要：对于 $\mathbb{R}^d$ 中大小任意的胖物体，这些问题都存在次指数时间算法。随后，我们证明，这种推广对于支配集、连通支配集或斯坦纳树并不可行：假设指数时间假设成立，即使在平面上，针对大小任意的胖物体的交图，这些问题也不存在运行时间为 $2^{o(n)}$ 的算法。我们用于证明这一下界的胖物体是凸的，但它们不具有常数描述复杂度。

接下来，在第 3 节和第 4 节中，我们转向本文的主要主题： $\mathbb{R}^3$ 中球图上的（加权）支配集问题的复杂度。（回顾一下，支配集问题是指：给定一个图 $\mathcal{G} = (V,\ E)$ 和一个数 k，判断是否存在一个大小至多为 k 的顶点子集 $D \subset V$，使得所有顶点 $v \in V \setminus D$ 都与 D 中的某个顶点相邻。）作为主要贡献，我们证明，假设指数时间假设成立，则无法在 $2^{o(n)}$ 时间内求解 $\mathbb{R}^3$ 中任意球图上的支配集问题。此外，我们还研究加权支配集问题，其中每个顶点都赋予一个实数权重，目标是找到权重至多为 k 的支配集。事实证明，这比无权问题难得多：假设指数时间假设成立，即使对于 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球图，也无法在 $2^{o(n)}$ 时间内求解加权支配集问题。

备注。 已知，判断给定图 $\mathcal{G}$ 是否为单位圆盘图是 NP困难的 [7], ，因此可以设想，某些问题在输入为一组诱导出球图的球，而不仅仅是图本身时，会更容易处理。

因此，人们希望开发出不需要知道定义交图的物体集合 S 、而仅以图 $\mathcal{G}[S]$ 作为输入即可运行的算法。De Berg等人 [2] 通过引入树宽的一种变体实现了这一点。后来被称为 $\mathcal{P}$-扁平树宽 [12]的概念基于加权树宽 [6]的思想。随后，通过使用 Bodlaender等人 [5]的树宽近似算法，便不再需要从几何角度寻找分隔集。另一方面，当下界在给定定义交图的集合 S 这一几何情形下仍然成立时，下界会更强。我们的所有下界都具有这一性质。从现在起，每当我们谈论交图上的问题时，指的都是该问题的这一几何版本。例如，在球图上的支配集问题中，输入是一组具有有理坐标和半径的球，以及一个整数 k；问题是判断其交图 $\mathcal{G}[S]$是否具有大小为 k的支配集。

2 不同尺寸的胖对象

在本节中，我们考虑任意胖对象的交图——这些物体不受尺寸相近的限制，并且可以具有复杂的形状（特别是，它们不必是球）。我们首先论证，对于 $\mathbb{R}^d$ 中的任意胖对象，即使是这些问题的加权版本，连通顶点覆盖、反馈顶点集和连通反馈顶点集也都有运行时间为 $2^{O(n^{1-1/d})}$ 的算法。然后我们将说明，支配集、连通支配集和斯坦纳树更加困难：对于 $\mathbb{R}^2$ 中胖对象的交图，这些问题不存在亚指数算法。

连通顶点覆盖和 （连通）反馈顶点集。使用 De Berg等人 [2]的算法工具处理给定图问题时，关键在于证明任意团从某个最优解中至多包含常数个顶点。例如，一个团从独立集解中至多包含一个顶点。对于反馈顶点集，情况并非如此。不过，在这里我们可以考察其互补问题：我们不再寻找一个删除后能破坏所有环的最小顶点子集，而是寻找一个构成诱导森林的最大顶点子集。事实上，当且仅当存在大小至少为 $n-k$ 的诱导森林时，才存在大小至多为 k 的反馈顶点集，因此我们可以转而专注于求解最大诱导森林。

对于最大诱导森林，我们具备所需的性质：任一解从一个团中至多包含常数个顶点，准确地说，至多两个。为了求解最大诱导森林，我们现在可以利用 [2] 的基于团的分隔集，设计一种标准的分治算法。当然，我们得到的两个子问题——一个对应分隔集“内部”的子图，另一个对应分隔集“外部”的子图——并非彼此独立：内部的解与分隔集本身的解，会对外部的解施加一些限制

。因此，需要跟踪两侧产生的连通分量。朴素算法的运行时间为 $2^{O(n^{1-1/d}\text{对数}\,n)}$，虽然是次指数级的，但并非最优。Bodlaender 等人 [4] 的基于秩的方法可以将其改进为 $2^{O(n^{1-1/d}}$)。

对于连通顶点覆盖和连通反馈顶点集，我们也有这样的性质：任意团中属于某个解补集的顶点数至多为常数。连通顶点覆盖的解的补集在每个团中至多包含一个顶点（因为补集是独立集）；连通反馈顶点集的解的补集在每个团中至多包含两个顶点（因为如上所述，补集是诱导森林）。利用 De Berg 等人 [2], 的框架以及基于秩的方法 [4]来处理连通性问题，我们同样可以得到运行时间为 $2^{O(n^{1-1/d}}$) 的算法。

（连通）支配集 和 斯坦纳树。对于（连通）支配集和斯坦纳树，无法保证一个解（或其补集）在任意团中只使用常数个顶点。因此， [2] 的框架难以应用。正如下一个定理所述，对于胖对象的交图，这些问题不太可能存在次指数时间算法。证明中的物体是凸的，其胖度可以任意接近 1，但它们具有很高的（非恒定）复杂度。

定理1. </style}令 为任意固定常数。除非指数时间假设不成立，否则不存在用于凸($1-\varepsilon$)-胖对象交图中支配集、连通支配集或斯坦纳树问题的 $2^{o(n)}$ 算法，其运行时间为 $\mathbb{R}^2$。

证明. 我们的证明分两步进行。首先，我们证明在分裂图上，支配集、连通支配集和斯坦纳树问题都不存在运行时间为 $2^{o(n)}$ 的算法（假设指数时间假设成立）。（分裂图 是指图 $\mathcal{G}=(A\cup B,E)$，其有 $2n$ 个顶点，且 A 诱导一个团， B 诱导一个独立集。）然后，我们证明任意分裂图都可以表示为凸$(1-\varepsilon)$-胖对象的交图。

已知，假设指数时间假设成立 [9]，具有 n 个顶点的一般图上的支配集问题不存在运行时间为 $2^{o(n)}$的算法。这个下界同样适用于分裂图。为此，考虑任意一个具有 n 个顶点的图 $\mathcal{G}=(V,E)$。我们构造一个具有 $2n$ 个顶点的分裂图 $\mathcal{G}'=(A\cup B,E')$，其中对每个 $v_i\in V$，我们创建顶点 $a_i\in A$ 和 $b_i\in B$。然后，当且仅当 $i=j$或 $(v_i,v_j)\in E$时，我们在 E' 中添加边 (a_i,b_j)。最后，在 A中的顶点之间添加所有边，因此 A 诱导一个团。

注意， $\mathcal{G}$ 有一个大小为 k 的支配集，当且仅当 $\mathcal{G}'$ 有一个大小为 k的支配集。为此，只需注意， $\mathcal{G}$ 的支配集 $D\subseteq V$对应于 $\mathcal{G}'$中具有相同顶点索引的支配集 $D'\subseteq A$。另一方面，如果 D' 是 $\mathcal{G}'$中的一个支配集，那么可以用 a_i替换任意顶点 $b_i\in D'\cap B$ ，因为 a_i 支配的顶点集合包含 b_i支配的顶点集合。如果两者

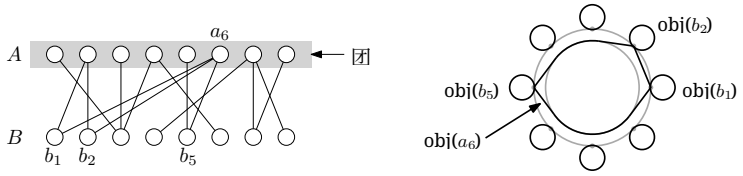

图 2。 将一个分裂图表示为胖对象的交图。圆 γ_{in} 和 γ_{out} 以及点 p_i 以灰色显示。为清晰起见，省略了 $i \neq 6$ 对应的物体 obj(a_i)。

a_i 和 b_i 都存在于 D'中，那么可以从 D'中移除 b_i 。因此，我们可以为 $\mathcal{G}'$找到一个大小至多为 k 的支配集 $D' \subset A$ ，它对应于 $\mathcal{G}$中一个大小相同的支配集。

由上可知，在指数时间假设成立的前提下，不存在用于求解分裂图上的支配集问题的 $2^{o(n)}$ 算法。请注意，对于连通支配集，同样的结论也成立，因为构造出的支配集 $D' \subset A$ 是连通的。对于斯坦纳树，该结论同样成立，理由如下。回忆一下，斯坦纳树的一个实例由图 $\mathcal{G} = (V, E)$、终端集 T 和自然数 k 组成；问题是判断是否存在一个大小至多为 k 的集合 $W \subseteq V$，使得 $T \cup W$ 所诱导的图是连通图。现在，要在给定图 $\mathcal{G}$ 上求解支配集问题，我们可以像上文那样构造图 $\mathcal{G}' = (A \cup B, E')$，并在 $\mathcal{G}'$ 上用 $T = B$ 求解斯坦纳树问题。容易验证， W 是 $\mathcal{G}'$ 上斯坦纳树问题的解，当且仅当它对应于 $\mathcal{G}$ 上的一个支配集。

接下来只需证明 $\mathcal{G}'$可实现为 $\mathbb{R}^2$ 中由 $(1-\varepsilon)$-胖对象构成的交图。设 γ_{out} 和 γ_{in} 是两个同心圆，其中 γ_{out} 的半径为 1，而 γ_{in} 的半径为 $(1-\varepsilon)$。设 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ 个点沿着γ_{out}等距分布。我们为每个顶点 $b_i \in B$ 创建的物体 obj(b_i) 是一个半径为 $1/n$的圆盘，它在 p_i处从外侧与 γ_{out} 相切。我们为每个顶点 $a_i \in A$ 创建的物体 obj(a_i) 是集合 $\gamma_{\text{in}} \cup \{p_j \in P$ 的凸包：$(a_i, b_j) \in E'\}$；参见图 2。因此， $\gamma_{\text{in}} \subset$ obj(a_i) $\subset \gamma_{\text{out}}$，且当且仅当 a_i 与 b_i 在 $\mathcal{G}'$中相连时，物体 obj(a_i) 才与物体 obj(b_i) 相切。由于物体 obj(b_i) 两两不相交，而物体 obj(a_i) 则两两相交，因此所构造物体的交图等于 $\mathcal{G}'$。此外，所有物体都是（至少）$(1-\varepsilon)$-胖的。□

注。上述构造中的物体是圆盘和凸物体，其边界由线段和圆弧组成。该构造也可以使用具有 O 个顶点的凸多边形物体来完成。

3 球图中支配集的下界

本节将证明，在指数时间假设成立的条件下，对于 $d \geqslant 3$，不存在能在 $\mathbb{R}^d$ 内求解球图上支配集问题的次指数算法。只需对 $d = 3$ 证明这一点，因为任何 $\mathbb{R}^d$ 中的球图都可以平凡地实现为 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的球图。我们将采用一种特殊版本的 3-可满足性问题，即 (3，3)-可满足性问题的归约。在 (3，3)-可满足性问题中，输入公式是一个 (3，3)-合取范式公式，我们要判断它是否可满足；也就是说，这是一个每个子句至多含有三个文字，且每个变量总共出现至多三次的合取范式公式。

命题 1。（De Berg 等人 [2]）除非指数时间假设不成立，否则不存在用于 $(3, 3)$-*sat* 的 $2^{o(n)}$ 算法。

我们将 (3，3)-sat 归约到球图上的支配集问题分为两步。首先，我们将给定的 (3，3)-sat 实例 ϕ 转换为一个图 $\mathcal{G}_\phi$，使得当且仅当 ϕ 可满足时，该图具有一个大小为特定值的支配集；然后我们在 $\mathbb{R}^d$中将$\mathcal{G}_\phi$ 实现为球图。

步骤 *1*：构造 $\mathcal{G}_\phi$。设 ϕ 是一个 (3，3)-sat 公式。我们对 ϕ 执行预处理步骤，以便按照以下方式移除仅含一个文字的子句。如果某个子句仅含一个文字，我们就将其变量设为满足该子句的值，并删除因此新满足的子句或由此产生的假文字。只要仍存在仅含一个文字的子句，我们就重复这一过程。如果某一时刻某个子句中的所有文字都被删除，则该子句无法满足，此时问题已经求解。在这种情况下，归约算法将返回一个图 $\mathcal{G}_\phi$ 和一个数 k，它们构成一个平凡的否实例。如果所有子句都因已被满足而被删除，那么同样可以结束，并返回一个平凡的是实例。如果这两种情况都未发生，那么剩下的公式仅含大小为二或三的子句，并且该公式可满足，当且仅当原公式可满足。稍微滥用记号，我们仍将该公式记为 ϕ。

令 $\mathcal{X}$:= $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 为出现在 ϕ中的变量集合，令 $\mathcal{C}$:=$\{c_1, \ldots, c_s\}$ 为 ϕ 中的子句集合，令 $\mathcal{L}$:= $\{l_1, \ldots, l_t\}$ 为出现在 ϕ中的文字多重集。（$\mathcal{L}$ 是一个多重集，因为同一文字可以在 ϕ中多次出现，例如 $\neg x_2$ 就在图 3 中如此。）现在按如下方式构造图 $\mathcal{G}_\phi$；示意图见图 3。

– 对于每个变量 $x_j \in \mathcal{X}$，我们创建一个变量构件，它由构成三角形的三个顶点组成。其中两个顶点分别标记为 x_j^T和 x_j^F，对应于对 x_j的真值赋值：将 x_j^T选入支配集，表示将 x_j 设为=真；将 x_j^F选入支配集，表示将 x_j 设为=假。第三个顶点称为该构件的耳。– 对于每个子句 $c_k \in \mathcal{C}$，我们创建一个子句构件，它由一个标记为 c_k的顶点组成。

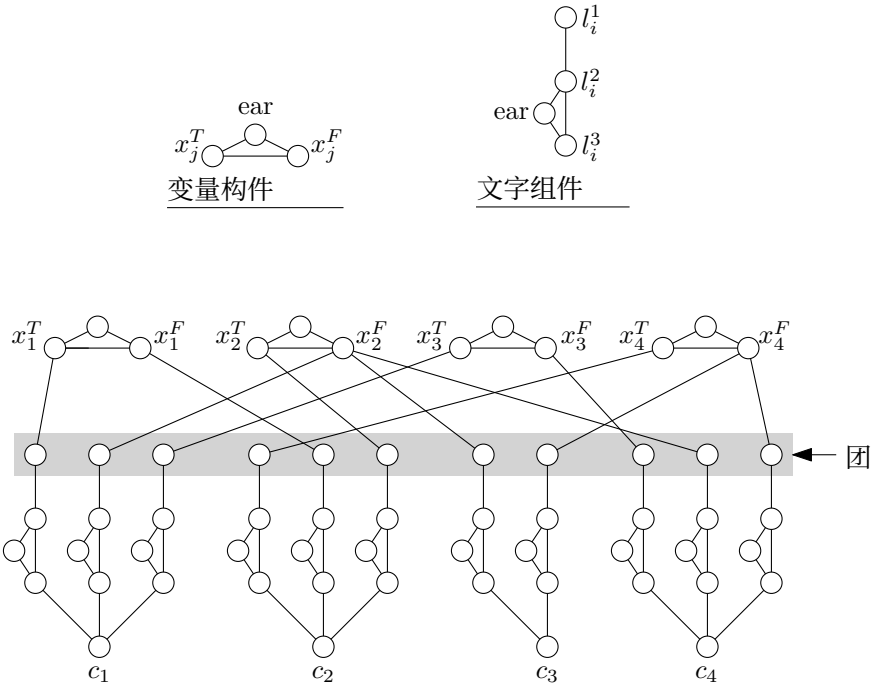

图 3. 上：一个变量构件和一个文字组件。下：公式 $\phi := (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_2 \vee x_4)$对应的图 $\mathcal{G}_\phi$ ；为清晰起见，省略了顶点 l_i^1所构成的团中的边。

– 对于每个文字 $l_i \in \mathcal{L}$ ，我们创建一个文字组件，它是一条由三个顶点组成的路径，分别标记为 l_i^1、 l_i^2和 l_i^3，此外还有一个额外的顶点——文字组件的耳——与 l_i^2 和 l_i^3相连。– 文字组件按如下方式与变量构件和子句构件相连。设 c_k 为包含文字 l_i 的子句， x_j 为与 l_i对应的变量。然后我们添加边 (c_k, l_i^3)；若$l_i = x_j$，则添加边 (x_j^T, l_i^1)；若 $l_i = \neg x_j$，则添加边 (x_j^F, l_i^1)。– 最后，我们在集合 $\{l_i^1$ 中的任意一对顶点 $l_i \in \mathcal{L}\}$之间添加边，从而在这些顶点上构成一个团。

引理 1. $\mathcal{G}_\phi$ 有一个大小为 $n + t$ 的支配集，当且仅当 ϕ 是可满足的。

证明。 首先，假设 ϕ 有一个满足赋值。我们可以如下构造一个大小为 $n + t$ 的支配集 D：对于每个变量 $x_j \in \mathcal{X}$，如果 $x_j =$ 为真，则将 x_j^T加入 D；如果 $x_j =$为假，则将 x_j^F加入 D。此外，对于每个文字 $l_i \in \mathcal{L}$ ，如果 $l_i =$为假，则将 l_i^2 加入 D；如果 $l_i =$为真，则将 l_i^3 加入 D。所得集合 D 的大小为 $n + t$，因为我们有 n 个变量和 t 个文字出现。为说明 D 是一个支配集，注意变量构件中的任意顶点都被从该构件中选出的顶点支配；还要注意

顶点 l_i^2、 l_i^3 以及文字 l_i 对应构件中的耳，都被从该构件中选出的顶点支配。顶点 l_i^1 也受到支配：若 l_i =为真，则由变量构件中的一个顶点支配；若 $l_i =$ 为假，则由 l_i^2 支配。最后，任意子句 c_k 对应的顶点都必定受到支配，因为 c_k 中的至少一个文字 l_i 为真，这意味着 $l_i^3 \in D$。

反过来，设 D 是一个大小为 $n+t$ 的任意支配集。$n+t$ 的耳朵具有互不相交的闭邻域，因此，要支配所有耳朵，集合 D 必须在这些闭邻域中各恰好包含一个顶点。此外，如果 D 包含一只耳朵 v，那么我们可以用它的一个邻居 w 替换 v；所得集合仍然是支配集，因为 w 支配的顶点是 v 所支配顶点的超集。因此，我们可以假设，对于每个 $1 \leqslant j \leqslant n$， D 都恰好包含一个来自 $\{x_j^T, x_j^F\}$ 的顶点；对于每个 $1 \leqslant i \leqslant t$， D 都恰好包含一个来自 $\{l_i^2, l_i^3\}$ 的顶点。现在，对于所有 $1 \leqslant j \leqslant n$，我们令 $x_j :=$ 当且仅当 $x_j^T \in D$ 时为真。我们声称，这个赋值满足 ϕ。为此，考虑一个子句 c_k。由于标记为 c_k 的顶点必须被支配，因此存在至少一个出现在 c_k 中的文字 l_i，使得 $l_i^3 \in D$。设 $l_i = x_j$；对 $l_i = \neg x_j$ 的论证类似。由于 $l_i^3 \in D$，我们有 $l_i^2 \notin D$；又因为顶点 l_i^1 必须被支配，这意味着 $x_j^T \in D$。因此， x_j 被赋值为真，从而满足了 c_k。 □

步骤 *2*：实现 $\mathcal{G}_\phi$ 为球图。接下来我们证明，步骤 1 中得到的图 $\mathcal{G}_\phi$ 可以在 $\mathbb{R}^3$ 中实现为球图。我们需要以下引理。

引理 *2.* 设 ℓ_1 为 x 轴， ℓ_2 为直线 *(0, 0, h)* + *λ(0, 1,0)*，其中 $h \in \mathbb{R}$ 为某个值。设 p_1 *:=(x, 0,0)* 和 p_2 *:=(0, y, h)* 分别为 ℓ_1 和 ℓ_2 上的任意点。那么存在唯一一个球，分别在 p_1 处与 ℓ_1 相切，在 p_2 处与 ℓ_2 相切。该球的~~中心为~~ *(*x, y, z_{xy}*)*，半径为 r_{xy} *:=* $\sqrt{y^2 + z_{xy}^2}$，其中 $z_{xy} := \frac{h^2+x^2-y^2}{2h}$.

证明。注意，与 ℓ_1 在 p_1 处相切且与 ℓ_2 在 p_2 处相切的球，其中心必定同时位于以下各平面上：

h_1：经过 p_1 且垂直于 ℓ_1的平面；h_2：经过 p_2 且垂直于 ℓ_2的平面；h_3： p_1 和 p_2的垂直平分面。

由于 ℓ_1 和 ℓ_2 是异面直线——它们既不相交也不平行——因此这三个平面两两不平行。因此，它们有唯一的交点 p，而以 p为中心、半径为 $|pp_1|$的球具有所需的性质。验证该球的中心坐标和半径如所述，只需进行常规计算，此处略去。□

接下来，我们将说明如何将图 $\mathcal{G}_\phi$ 实现为 $\mathbb{R}^3$中的球图。不失一般性，假设公式 ϕ中的文字出现和子句按从左到右的顺序编号，例如， c_1 是第一个子句， c_1中的 l_1 是第一个文字，而 c_k 是最后一个子句， c_k中的 l_t 是最后一个文字。

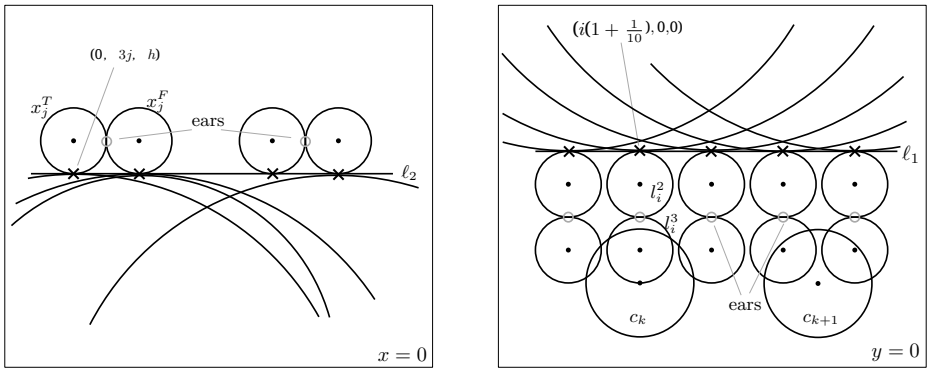

图 4. 构造在平面 $x = 0$（左）和 $y = 0$（右）上的截面。注意，大球 l_i^1 的中心位于这些平面之外。左侧有一个出现两次的文字 $\neg x_j$。

令直线 ℓ_1 为 x轴，并令 ℓ_2 为经过 (0，0，h) + λ(0，1，0) 的直线，其中高度 h稍后定义。其思路是，顶点x_j^T 和 x_j^F 对应的球将从上方与 ℓ_2 相切，顶点 l_i^2 对应的球将从下方与 ℓ_1 相切，而引理 2 将使我们能够放置 l_i^1 对应的球，从而实现正确的连接。接下来，我们将详细描述如何放置表示 $\mathcal{G}_\phi$ 顶点的球。我们用 ball(v) 表示代表节点 v 的球，例如，ball(c_k) 表示代表子句 c_k构件中顶点的球。

– 变量构件中标记为 x_j^T和 x_j^F、对应于 x_j 的顶点，将分别由球 ball(x_j^T) 和 ball(x_j^F) 表示，其中心分别为 (0，$3j$，$h + \frac{1}{2}$) 和 (0，$3j$ +1，h− + $\frac{1}{2}$)。这些球的半径为¬1 2，因此它们在点 (0，$3j$，h) 和 (0，$3j$ ¬+1，h) 与 ℓ_2 相切。注意，球 ball(x_j^T) 和 ball(x_j^F) 在点 (0，$3j + \frac{1}{2}$，$h + \frac{1}{2}$) 相切。该构件中对应于 x_j 的耳是一个球，其中心为这个切点，¯ 半径足够小，例如 1 20；见图 4（左）。注意，这三个球的交图是一个三角形，符合要求。

– 对于子句 c_k，球(c_k)的中心为 (i^*(1 + $\frac{1}{10}$) 0, −2)，半径为 9/10，其中 i^* 的值取决于 c_k 有两个还是三个文字。前一种情况下，$i^* = i + \frac{1}{2}$，其中 i 是满足 c_k 包含文字 l_i 和 l_{i+1}的索引；后一种情况下，$i^* = i$，其中 i 是满足 c_k 包含文字 l_{i-1}、l_i 和 l_{i+1} 的索引。

– 构件中表示文字 l_i 的顶点的球定义如下。球 ball(l_i^2 l_i^3 $\frac{1}{2}$ − i 1 +) 和 ball( ) 的半 $\frac{1}{10}$ 0 −$\frac{1}{2}$ − i 1 + $\frac{1}{10}$ 0 −$\frac{3}{2}$ − c_k 径以及中心分别为 (( ),) 和 (( ),)。注意，如果 是包含文字 l_i 的子句，那么 ball(l_i^3) 与 ball(c_k) 相交；见图 4（右）。另请注意，球 ball(l_i^2) 和 ball(l_i^3) 在点 (i(1 + $\frac{1}{10}$) 0, −1) 处相切。表示构件中耳的球将以该切点为中心，半径为 1 20。因此，ball(l_i^2)、ball(l_i^3) 的交图

—

以及表示耳的球构成一个三角形，符合要求。

构造的关键部分是放置球(l_i^1)，具体如下。我们要求球(l_i^1)在点($i(1+\frac{1}{10})$，0，0)与 ℓ_1 相切。注意，球(l_i^2)也在该点与 ℓ_1 相切，因此我们在 $\mathcal{G}_\phi$中实现了边(l_i^1，l_i^2)。我们还要求球(l_i^2)与直线 ℓ_2相切。切点取决于 l_i 是正文字还是负文字：若 $l_i = x_j$，则要求球(l_i^1)在(0，$3j$，h)与 ℓ_2 相切；若 $l_i = \neg x_j$，则要求球(l_i^1)在(0，$3j+1$，h)与 ℓ_2 相切。前一种情况下，它会与球(x_j^T)相交；后一种情况下，它会与球(x_j^F)相交，正如所需。根据引理 2，存在唯一一个球，按上述指定方式同时与 ℓ_1 和 ℓ_2 相切。

设 S_ϕ 为刚才定义的球的集合。接下来的引理指出，只要适当选取指定 ℓ_2 的 x 坐标的值 h，我们的构造就能实现图 $\mathcal{G}_\phi$。

引理 3。设 $h := 20N^2$，其中 $N :=$最大值$(3n+1, (1+\frac{1}{10})t)$。则由 S_ϕ 所诱导的交图 $\mathcal{G}[S_\phi]$ 就是图 $\mathcal{G}_\phi$。

证明。我们已经在上文说明，$\mathcal{G}_\phi$ 的大多数边也存在于 $\mathcal{G}[S_\phi]$中；也就是说，如果 (u, v) 是 $\mathcal{G}_\phi$ 中的一条边，那么球 ball(u) 与球 ball(v) 相交。唯一的例外是集合 $\{l_i^1$ 上的团所构成的边：$1 \leqslant i \leqslant t\}$。因此，接下来只需证明这些边也存在，[3] 并证明 $\mathcal{G}[S_\phi]$中不存在伪边。很容易验证，任何可能出现的伪边都必须涉及球 ball(l_i^1)。

考虑一个球 ball(l_i^1)。回想一下，ball(l_i^1) 在点 $(i(1+1\ 10), 0, 0)$ 与 ℓ_1 相切，并在 $(0, 3j, h)$ 或 $(0, 3j+1, h)$ 处与 ℓ_1 相切，其中 $1 \leqslant j \leqslant n$ 取决于 l_i 是正文字还是负文字。注意，这些切点的前两个坐标都在区间 $[0, N]$内，并且我们设 $h := 20N^2$。由引理 2 可知，与 ℓ_1 在 $(x, 0, 0)$ 处相切、与 ℓ_2 在 $(0, y, h)$ 处相切的球，其中心为 (x, y, z_{xy})，半径为 $r_{xy} := \sqrt{y^2 + z_{xy}^2}$，其中 $z_{xy} := \frac{h^2+x^2-y^2}{2h}$。因此，球 ball($l_i^1$) 的中心的 z 坐标为

$$z_{xy} = \frac{h^2+x^2-y^2}{2h} \in \left[\frac{h^2-N^2}{2h}, \frac{h^2+N^2}{2h}\right] = \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{40}, \frac{h}{2} + \frac{1}{40}\right],$$

而球 ball(l_i^1) 的半径满足

$$\begin{aligned}\text{radius}(\text{ball}(l_i^1)) &= \sqrt{y^2 + z_{xy}^2} \leqslant \sqrt{N^2 + \left(\tfrac{h}{2} + \tfrac{1}{40}\right)^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{h}{20} + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2 + \tfrac{h}{40} + \tfrac{1}{1600}} \\ &< \tfrac{h}{2} + \tfrac{1}{10}.\end{aligned}$$

[3] 事实上，结果表明，也可以论证这些边并非归约成立所必需。我们更倾向于使用之前定义的特定图 $\mathcal{G}_\phi$，因此需要证明我们的几何表示包含团中的所有边。

因此，该球与两个开半空间 $z > h + 1/5$和 $z < -1/5$均不相交。这些开半空间包含所有对应于耳朵的球，以及所有球 ball(c_k) 和 ball(l_i^3)。现在考虑两个球 ball(l_i^1) 和 ball(l_i^1)。这两个球的中心 (x， y， z_{xy}) 和 (x'， y'， $z_{x'y'}$) 之间的距离至多为

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z_{xy}-z_{x'y'})^2 \leqslant 2N^2+\left(\frac{1}{20}\right)^2 < h/3 < r_{xy}+r_{x'y'}.$$

因此，集合 $\{\text{ball}(l_i^1) : 1 \leqslant i \leqslant t\}$ 诱导出一个团，符合要求。

接下来要证明，ball(l_i^1) 与任意 ball($l_{i'}^2$)（$i' \neq i$）不相交，并且与任意 ball(x_j^T) 和 ball(x_j^F) 不相交；唯一例外是那个在与 ball(l_i^1) 接触 ℓ_2 的同一点处接触 ℓ_2 的球。设 (x, y, z_{xy}) 为 ball(l_i^1) 的中心，并考虑点 (x, y, z_{xy}) 到点 (x', 0, $-\frac{1}{2}$) 的距离，其中 $|x-x'| \geqslant 1$。（对于点 (x, y, z_{xy}) 到点 (0, y', $h+\frac{1}{2}$) 的距离，论证类似，其中 $|y-y'| \geqslant 1$。）只需证明该距离大于球半径之和，即我们需要 dist((x, y, z_{xy}), (x', 0, $-\frac{1}{2}$)) $> r_{xy} + \frac{1}{2}$。改为考察距离平方，我们需要证明

$$(x'-x)^2+y^2+\left(z_{xy}+\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{y^2+z_{xy}^2}+\frac{1}{2}\right)^2,$$

这等价于

$$(x'-x)^2+z_{xy} > \sqrt{y^2+z_{xy}^2}.$$

由于 $y \leqslant N$，我们有 $y^2 \leqslant N^2 = \frac{h}{20} < \frac{z_{xy}}{8}$，因此可以将左侧界定为：

$$\sqrt{y^2+z_{xy}^2} < \sqrt{\frac{z_{xy}}{8}+z_{xy}^2} < z_{xy}+\frac{1}{4} < z_{xy}+(x'-x)^2,$$

其中，最后一个不等式成立，是因为 x 和 x' 是不同的整数，因此每个球（l_i^1）都具有正确的交集。

最后，尽管上述构造使用了一些无理数球半径，但只需使用精度为 O（$1/n$）的有理数半径，便可得到相同的交图。□

综上，我们得到了本节的主要结果。

定理 2。除非指数时间假设失败，否则不存在用于球图中支配集问题的 $2^{o(n)}$ 算法。

4 单位球图中加权支配集的下界

现在我们将注意力转向 $\mathbb{R}^3$ 中球图上的加权支配集。这里我们甚至可以证明单位球图的下界。

我们的归约同样来自 (3,3)-SAT。设 ϕ 是一个 $(3,3)$-SAT 公式，我们按照定理 2 证明开头的做法对其进行预处理，使所有子句的大小均为二或三。首先，我们将构造一个顶点加权图 $\mathcal{G}_\phi$，使其当且仅当 ϕ 可满足时，存在一个大小为给定值 k 的支配集。然后，我们证明该图可以表示为 $\mathbb{R}^3$ 中单位球的交图。

步骤 1： $\mathcal{G}_\phi$的构造。设 ϕ具有变量 x_1、……、x_n，文字 l_1、……、l_t（作为多重集），以及子句 c_1、……、c_m。我们构造一个顶点加权图 $\mathcal{G}_\phi$，它由七个团组成，记为 C^1、……、C^7。图中其余的（非团）边都位于两个相邻的团 C^p 和 C^{p+1}之间。团 C^1 含有 n 个顶点，标记为 x_j^1，每个变量对应一个顶点。团 C^2 含有 $2n$ 个顶点，其中每个变量对应两个顶点，分别表示将该变量设为真或假。这些顶点标记为 x_j^{2T}和 x_j^{2F}，见图 5。团 C^3、……、C^6 分别为每个文字出现 l_i包含一个顶点，标记为 l_i^3、l_i^4、l_i^5、l_i^6。最后， C^7 为每个子句 c_k（$k=1$、……、m）包含一个顶点，标记为 c_k^7。除此之外，我们还分别向 C^4 和 C^6 添加一个虚拟顶点，标记为 d^4 和 d^6。除团中的边外，其他边定义如下。对于 $j=1\ldots$、n，我们添加边 $x_j^1x_j^{2T}$和 $x_j^1x_j^{2F}$。我们将第一个文字顶点连接到相应的变量赋值；也就是说，对于每个正文字 $l_i=x_j$，添加 $x_j^{2T}l_i^3$，对于每个负文字 $l_i=\neg x_j$，添加 $x_j^{2F}l_i^3$。对于每个文字 l_i，我们添加路径 $l_i^3l_i^4l_i^5l_i^6$中的边。最后，对于 $k=1$、……、m，当且仅当 l_i出现在 c_k中时，我们将 c_k^7连接到 l_i^6。 C^1、C^3、C^5和 C^7 中的顶点权重均设为 ∞，虚拟顶点的权重为 [4] $0,$，所有其他顶点的权重均设为 1。

引理 4. 图 $\mathcal{G}_\phi$ 存在一个权重为 $n+t$ 的支配集，当且仅当 ϕ可满足。

证明。 首先假设 ϕ 是可满足的。我们展示如何根据一个满足赋值构造一个权重为 $n+t$ 的支配集 D。对于每个取真的变量 x_j，我们将顶点 x_j^{2T}加入 D；对于每个取假的变量 x_j，我们改为加入 x_j^{2F}。对于取真的文字，我们将 l_i^6 加入 D；对于取假的文字，我们将 l_i^4 加入 D。最后，我们加入两个虚拟节点。注意， D的权重为 $n+t$。为证明每个顶点都受到支配，首先注意到， C^1 中的顶点都受到支配，因为它们恰好有一个邻居属于 $D\cap C^2$；而 C^7 中的顶点也都受到支配，因为它们至少有一个文字为真，即 C^6 中的对应顶点属于 D。此外， C^2中至少有一个顶点被选中，因此 C^2 也受到支配。虚拟节点确保 C^4 和 C^6 受到支配。最后，所有其他顶点都位于某条路径 $x_j^2{\cdot}l_i^3l_i^4l_i^5l_i^6$上，其中对于取真的文字， $x_j^2{\cdot}$和 l_i^6 被选中；对于取假的文字，则 l_i^4 被选中，这意味着 C^3 和 C^5 也受到支配。

[4] 或者，也可以将虚拟节点的权重设为 1，并为每个虚拟节点添加一个权重为 ∞的唯一邻居，这样可以确保它们都包含在所有有限权重支配集中。

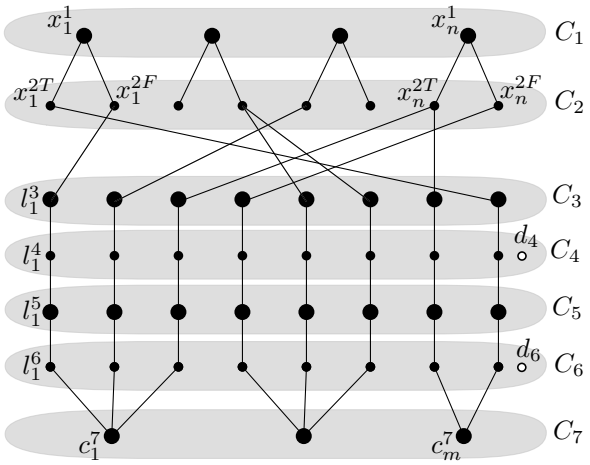

图 5. 加权图 $\mathcal{G}_\phi$。每组中的顶点 C_i 构成一个团。大型节点的权重为无穷大，虚拟节点 d_4 和 d_6 的权重为 0，所有其他节点的权重均为 1。

现在假设 $\mathcal{G}_\phi$ 具有一个权重为 $n+t$的支配集 D。基于 D，我们展示如何为 ϕ构造一个满足赋值。注意， D 不能包含权重为无穷大的顶点。因此， C^1、C^3、C^5和 C^7 中的所有顶点都必须从外部受到支配。注意， $C^1 \cup C^5$ 中每个顶点的闭邻域由其自身的团以及另外两个可称为潜在支配顶点的顶点组成：事实上， x_j^1 只能由 x_j^{2T}或 x_j^{2F}支配，而 l_i^5只能由 l_i^4或 l_i^6支配。由于 $C^1 \cup C^5$ 中有 $n+t$ 个顶点，且它们的所有潜在支配顶点构成互不相交的集合，因此可知， D 恰好由每一对 $\{x_j^{2T}, x_j^{2F}\}\, j = 1 \dots n$和 $\{l_i^4, l_i^6\}\, i = 1 \dots t$中的一个顶点组成。考虑如下赋值：当且仅当 $x_j^{2T} \in D$时，将 x_i 设为真。为导出矛盾，假设子句 c_k 不满足。令 i为一个文字出现的索引，使得 $l_i^6 \in D$；由于 c_k^7 只能由 C^6中的顶点支配，这样的索引必然存在。因此， $l_i^4 \notin D$，所以为了支配 l_i^3，其在 C^2 中的潜在支配顶点必须属于 D。也就是说，如果 $l_i = x_j$，则 $x_j^{2T} \in D$；如果 $l_i = \neg x_j$，则 $x_j^{2F} \in D$。但这意味着在我们的赋值中， c_k 被该文字满足，矛盾。 □

与定理 2 的证明相同， $V(\mathcal{G}_\phi)$ 的大小为 $O(n)$，因此只需证明 $\mathcal{G}_\phi$ 可以实现为单位球图。（为简单起见，我们在构造中使用了无穷大权重，但也可以使用关于实例大小的多项式权重。）

步骤 *2*：将 $\mathcal{G}_\phi$ 实现为单位球图。

引理 5. 图 $\mathcal{G}_\phi$ 可以实现为单位球图。

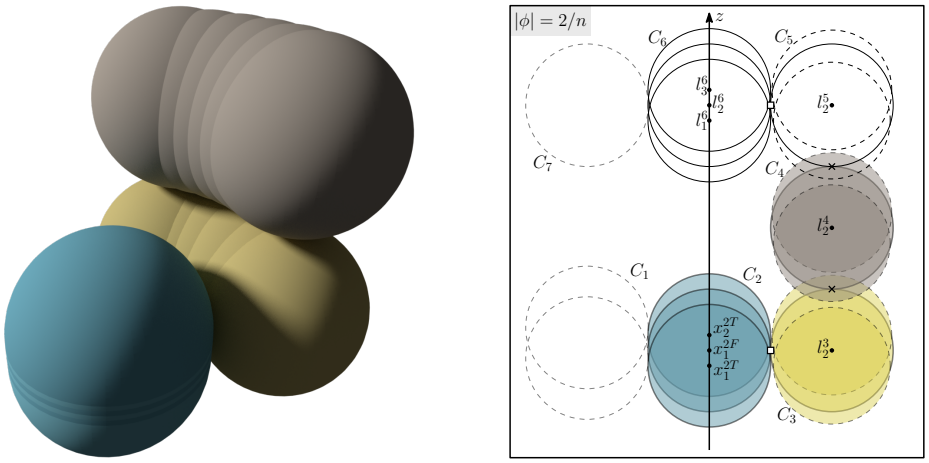

图 6. 左：团 C_2、C_3 和 C_4 分别为蓝色、黄色和灰色。C_2 的球心彼此非常接近，因此使用深浅交替的蓝色来区分这些球。右：每个团中最前面的几个球与平面 $|\phi| = 2/n$ 的交集。不同团中的球在该平面内有两个相切点（用正方形标示）和两个非空交集（用叉号标示）。较小的虚线圆盘对应球心位于该平面之外的球。

证明。使用柱坐标会更方便：点 $(x,\ y,\ z)$ 变为 $(r,\ \phi,\ z)$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 且 $\phi = \arctan(y/x)$。我们首先定义团 C^2 至 C^6 的球心，然后定义团 C^1 和 C^7 的球心。我们构造中的球直径均为 1（而非半径为 1），因此两个球相交当且仅当它们之间的距离不超过 1。

令 $\varepsilon > 0$ 为一个稍后确定的小数。我们按照自然顺序，将 C^2 的球心彼此靠近地放置在 z 轴上。更准确地说，我们将坐标（柱坐标）$(0,0,(2j-1)\varepsilon)$ 赋给球 (x_j^{2T}) 的球心，并将 $(0,0,2j\varepsilon)$ 赋给球 (x_j^{2F}) 的球心。不失一般性，假设文字出现和子句从左到右编号，因此 l_1 是 c_1 中的第一个文字，而 l_t 是最后一个子句 c_k 中的最后一个文字。现在定义 C^3 的球心。若 $l_i = x_j$，则球 (l_i^3) 的球心为中心 $(l_i^3) := (1, i/n, (2j-1)\varepsilon)$；若 $l_i = \neg x_j$，则令中心 $(l_i^3) := (1, i/n, 2j\varepsilon)$。注意，$C^3$ 的所有球都与圆柱面 $r = \frac{1}{2}$ 相切于一点，该点同时也是与 C^2 中对应球的相切点，见图 6。（注意，图中夸大了 C_2 内部的距离；按正确的放置方式，这些球用肉眼无法区分。）

接下来，我们设 $\text{center}(l_i^4) := (1,\ i/n,\ 1)$，并设 $\text{center}(l_i^5) := (1,\ i/n,\ 2 - i\varepsilon)$。通过让 ε 足够小，我们可以确保每个球 $\text{ball}(l_i^4)$ 只与 C^3 中的球 $\text{ball}(l_i^3)$ 和 C^5 中的球 $\text{ball}(l_i^5)$ 相交。为说明这一点，注意中心 $(1,\ \phi,\ z)$ 到中心 $(1,\ \phi',\ z')$ 的距离平方为

$$(1 - \cos(\phi - \phi'))^2 + \sin^2(\phi - \phi') + (z - z') = 2 - 2\cos(\phi - \phi') + (z - z')^2.$$

如果 $\phi = \phi'$ 且 $z - z' < 1$，那么此距离小于 1，因此球 ball(l_i^4) 与球 ball(l_i^3) 和球 ball(l_i^5) 相交。否则，center(l_i^4) 到 $C^3 \cup C^5$ 中任一中心的距离在 $\phi - \phi' = 1/n$ 且 $z - z' = 1 - t\varepsilon$ 时最小。为避免不必要的相交，我们需要满足以下条件：

$$2 - 2\cos(1/n) + (1 - t\varepsilon)^2 > 1$$

这等价于

$$1 - t\varepsilon + \frac{t^2\varepsilon^2}{2} > \cos(1/n).$$

我们设定 $\varepsilon = 1/(3tn^2)$。注意，这意味着 $\varepsilon = \Theta(1/n^3)$。根据余弦幂级数，我们有

$$\cos(1/n) < 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} < 1 - \frac{1}{3n^2} = 1 - t\varepsilon < 1 - t\varepsilon + \frac{t^2\varepsilon^2}{2},$$

因此，对于任意 $i \neq j$，球(l_i^4)都不与球(l_j^3)和球(l_j^5)相交。

接下来，我们继续放置其余的中心。令中心(l_i^6) := (0, 0, $2 - i\varepsilon$)，使得球(l_i^6)与球(l_i^5)相切； C^3 与C^2之间也采用了类似的结构。我们设中心(x_j^1) := (r, π, ($2j - \frac{3}{2}$)ε)，其中选择 $r = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$，使得球($x_j^1$)与球($x_j^{2T}$)和球($x_j^{2F}$)相切。接下来放置$C_7$时，请注意，任意给定子句的文字出现对应于 C_6中连续的球心。我们设中心(c_k^7) := (r, π, z)，其中 r 和 z 按以下方式定义。若 l_i 是 c_k的中间文字，则高度为 $z = 2 - i\varepsilon$；若 $c_k = (l_i \vee l_{i+1})$，则高度为 $z = -(i + \frac{1}{2})\varepsilon$。半径 r 的选取确保球(c_k)与其第一个和最后一个文字对应的球相切：对于大小为二和三的子句，我们分别设定 $r = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$和 $r = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ 。作为构造的最后一步，我们放置球来表示虚拟顶点 d_4 和 d_6 ，其中心分别为中心(d_4) := (1.5, 0.5, 1)和中心(d_6) := (0, 0, 2.5)。容易验证，这正确地实现了 $\mathcal{G}_\phi$。

最后，尽管上述构造使用了一些无理坐标，但可以使用精度为 $O(1/n^4)$ 的有理坐标。□

上述构造和引理推出以下定理。

定理 3. 除非指数时间假设不成立，否则不存在用于单位球图中加权支配集问题的 $2^{o(n)}$ 算法。

5 总结性评述

De Berg 等人 [2] 最近提出了一个框架，可以在大小相近的胖对象的交图上，以次指数时间解决许多经典图问题。我们已经证明，将该框架以其完整的一般形式扩展到任意（大小不相近的）胖对象是不可能的。更具体地说，我们已经证明，支配集是该框架能够处理的问题之一，但在 中，假设指数时间假设成立，则任意球图上不存在支配集的次指数算法。因此，该框架

似乎表明，若要为任意胖对象获得次指数算法（如果可能的话），就需要采用针对具体问题的论证。类似地，为大小相近的物体上的加权问题获得次指数算法也并非总是可能：在 $\mathbb{R}^3$ 中，假设指数时间假设成立，则单位球图上的加权支配集不存在次指数算法。对于任意胖对象（而不只是球）而言，情况更糟：即使在 $\mathbb{R}^2$ 中，假设指数时间假设成立，支配集、连通支配集和斯坦纳树问题也都不存在次指数算法。积极的一面是，我们提出，如果所讨论问题（或其补问题）的解在一个团中至多包含常数个顶点，那么 De Berg 等人 [2]提出的技术或许适用；连通顶点覆盖、反馈顶点集和连通反馈顶点集就是这样的例子。

我们的研究留下了几个尚未解决的问题。首先，尽管我们已经排除了针对任意胖对象的支配集亚指数算法，但圆盘图上的支配集问题的复杂度仍未解决。在这里，关于几何集合覆盖的相关研究使我们相信，对于圆盘，可能存在亚指数算法，甚至可能适用于加权版本。

~猜想 *1.* 圆盘图上的（加权）支配集问题存在 $2^{O(\sqrt{n})}$ 算法。

我们在此未涉及、但在 [2]中受到广泛研究的一个重要问题是哈密顿回路。圆盘图上的哈密顿回路问题是否存在亚指数算法？球图呢？最后，只要物体大小相近，这些问题中几乎所有问题的加权版本在 $\mathbb{R}^2$中仍未解决。例如，单位圆盘图上的顶点加权斯坦纳树问题的复杂度如何？

参考文献

1. M. de Berg、H. L. Bodlaender、S. Kisfaludi-Bak 和 S. Kolay。欧几里得旅行商问题的 ETH 紧确切算法。发表于第*59*届 *IEEE* 计算机科学基础研讨会（*FOCS*）论文集，第 450–461 页，2018 年。2. M. de Berg、H.L. Bodlaender、S. Kisfaludi-Bak、D. Marx 和 T.C. van der Zanden。几何相交图中 ETH 紧致算法与下界的框架。发表于第*50*届 *ACM* 计算理论研讨会（*STOC*）论文集，第 574–586 页，2018 年。3. M. de Berg、S. Kisfaludi-Bak 和 G. Woeginger。几何相交图中支配集问题的复杂度。理论计算机科学 769：18–31，2019 年。4. H.L. Bodlaender、M. Cygan、S. Kratsch 和 J. Nederlof。以树宽为参数的连通性问题的确定性单指数时间算法。*Inf. Comput.* 243：86–111，2015 年。5. H.L. Bodlaender、P.G. Drange、M.S. Dregi、F.V. Fomin、D. Lokshtanov 和 Mi. Pilipczuk。树宽的 $c^k n$ 5 近似算法。*SIAM J. Com- put.* 45(2)：317–378（2016）。

6. F. van den Eijkhof、H.L. Bodlaender 和 A.M.C.A. Koster。加权树宽的安全约简规则。*Algorithmica* 47(2)：139–158（2007）。7. H. Breu 和 D.G. Kirkpatrick。单位圆盘图识别是 NP 困难的。*Comput. Geom. Theory Appl.* 9：3–24（1998）。8. K. Bringmann、S. Kisfaludi-Bak、Mi. Pilipczuk 和 E.J. van Leeuwen。关于正交象限上的几何集合覆盖。发表于第*27*届欧洲算法研讨会（*ESA*）论文集，第 26:1–26:18 页，2019 年。9. M. Cygan、F. V. Fomin、Ł. Kowalik、D. Lokshtanov、D. Marx、Ma. Pilipczuk、Mi. Pilipczuk 和 S. Saurabh。参数化算法。*Springer*，2015 年。10. R. Impagliazzo 和 R. Paturi。关于 k-SAT 的复杂度。*J. Comput. Sys. Sci.* 62(2)：367–375（2001）。11. R.J. Kang 和 T. Müller。图的球体与点积表示。*Discr. Comput. Geom.* 47：548–568（2012）。12. S. Kisfaludi-Bak。几何网络问题的ETH紧致算法。博士论文，埃因霍温理工大学 （2019）。13. S. Kisfaludi-Bak、D. Marx 和 T.C. van der Zanden。物体肥胖度如何影响 d 维装箱问题的复杂度？即将发表于第*30*届国际算法与计算研讨会（*ISAAC*）论文集，2019 年。14. P. Koebe。《共形映射的接触问题》。1936 年，Hirzel。15. R.J. Lipton 和 R.E. Tarjan。平面图的分隔定理。*SIAM J. App. Math.* 36(2)：177–189（1979）。16. R.J. Lipton 和 R.E. Tarjan。平面分隔定理的应用。*SIAM J. Comput.* 9(3)：615–627（1980）。17. D. Marx。平面图中的平方根现象。发表于第*40*届国际自动机、语言与编程大会（*ICALP*）论文集，第二部分，第 28 页，2013 年。18. D. Marx 和 Mi. Pilipczuk。利用沃罗诺伊图求解平面设施选址问题的最优参数化算法。发表于第*23*届欧洲算法研讨会（*ESA*）论文集，第 865–877 页，2015 年。