arXiv:2601.08437v1 [math.CV] 13 Jan 2026

`关于八元数 Monge-Ampère 方程及与二元八元数多重次调和函数相关的多重位势理论

王伟

Abstract. 我们将多重位势理论的若干方面推广到二元八元数多重次调和（$OPSH$）函数。我们证明了连续 $OPSH$ 函数的比较原理，以及局部有界函数的拟连续性。一项重要工具是混合八元数 Monge-Amp`ère 算子的分部积分公式。我们建立了八元数相对极值函数和八元数容量的若干有用性质。主要困难在于八元数的非结合性。不过，我们可以利用某种弱形式的结合律来克服这一困难。多重位势理论的另一项重要内容是求解单位球上齐次八元数 Monge-Amp`ère 方程的狄利克雷问题；我们通过应用 Bedford-Taylor 方法证明了其 $C^{1,\frac{1}{loc}}$-正则性。这样做的障碍在于，$OPSH$ 函数在单位球的自同构作用下通常并不 $OPSH$。通过找出 $OPSH$ 函数的加权变换公式，可以解决这一问题。

1. Introduction

Alesker [3] 引入了四元数拟次调和函数和四元数 Monge-Amp`ère 算子的概念，并证明了四元数版本的 Chern-Levine-Nirenberg 估计，从而使四元数 Monge-Amp`ère 算子的定义能够推广到连续的四元数拟次调和函数。他还 [5] 在复化四元数 K¨ahler 流形上使用 Baston 算子 $\triangle$ 来表示四元数 Monge-Amp`ère 算子。受此以及四元数分析中的 0-Cauchy-Fueter 复形 [30], 的启发，Wan-Wang [27] 引入了作用于四元数微分形式版本上的一阶微分算子 d_0 和 d_1，以及四元数正流的闭性概念。d_0, d_1 和 $\Delta = d_0 d_1$ 的性质与多复变数中的 ∂, ∂ 和 $\partial\partial$ 非常相似，并且复多重位势理论中的许多结果也已推广到四元数情形（参见 [4, 5, 8, 12, 13, 18, 25, 26, 28] 及其中的参考文献）。最近，四元数多重位势理论已推广到 m-次调和函数和 m-海森矩阵算子 [2, 19], ，以及非交换海森堡群 [31]。

Alesker 还引入了两个八元数变量下的多重次调和函数，以及 [6] 中的八元数 Monge-Amp`ere 算子。最近，Alesker-Gordon [7] 在八元数 K¨ahler 流形上建立了 Calabi-Yau 定理的八元数版本。特别地，他们引入了闭正流的八元数版本。本文旨在将多重位势理论的若干方面推广到八元数多重次调和函数。与复数情形和四元数情形相比，八元数

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 32W20；次要分类 32U15。*Key words and phrases.* 八元数多重次调和函数；八元数 Monge-Amp`ère 方程；八元数 Monge-Amp`ère 测度；比较原理；拟连续性；八元数容量；勒隆数。浙江大学数学系，浙江 310058，中国，电子邮箱：wwang@zju.edu.cn；作者受到国家自然科学基金（NSFC）（编号：12371082）资助。

情形更为复杂，因为八元数既不满足交换律，也不满足结合律。此外，我们无法使用外形式来定义流。不过，我们可以利用某种弱形式的结合律来克服这一困难。

回顾一下，$\mathbb{O}$ 具有一组基 e_0，e_1，$\cdots$，e_7，定义在 $\mathbb{R}$上，其中 $e_0 = 1$ 是单位元。它们满足

$$e_p^2 = -1, \qquad e_p e_q = -e_q e_p,$$

对于 p，$q = 1$，.....，7 和 $p \neq q$。八元数 $\mathbf{x} \in \mathbb{O}$ 可唯一地写成$\mathbf{x} = \sum_{p=0}^{7} x_p e_p$，其中 $x_p \in \mathbb{R}$，其八元数共轭为$\mathbf{x} := x_0 - \sum_{p=1}^{7} x_p e_p$.用 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 表示 $\mathbb{O}^2$中的一点，其中$\mathbf{x}_\alpha = \sum_{p=0}^{7} x_{\alpha p} e_p$。对于每个八元数变量，都有一个作用于 $\mathbb{O}$值函数的狄拉克算子：

$$\overline{\partial}_\alpha = \sum_{p=0}^{7} e_p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha p}}, \tag{1.1}$$

$\alpha = 1$，2，这是 $\mathbb{C}^n$ 上柯西-黎曼算子以及 $\mathbb{H}^n$ [30]上 k-柯西-富贝特算子的推广。设 $\partial_\alpha f = \sum_{p=0}^{7} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha p}} e_p$。对于标量函数 u，其八元数 *Hessian*定义为

$$Hess_{\mathbb{O}}(u) := \begin{pmatrix} \overline{\partial}_1\partial_1 u & \overline{\partial}_1\partial_2 u \\ \overline{\partial}_2\partial_1 u & \overline{\partial}_2\partial_2 u \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

用 $\mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 表示所有八元数 Hermitian（2×2）矩阵 $\begin{pmatrix} a & \mathbf{x} \\ \overline{\mathbf{x}} & b \end{pmatrix}$ 所构成的空间，其中 $a, b \in \mathbb{R}$,$\mathbf{x} \in \mathbb{O}$.行列式定义为 $\det \begin{pmatrix} a & \mathbf{x} \\ \overline{\mathbf{x}} & b \end{pmatrix} := ab - |\mathbf{x}|^2$，两个八元数 Hermitian 矩阵的混合行列式可自然地按照 (2.2) 定义。八元数 Monge-Ampère 算子为 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(u))$，而混合八元数 Monge-Ampère 算子为

$$\det(Hess_{\mathbb{O}}(u), Hess_{\mathbb{O}}(v)).$$

对于开子集 $\Omega \subset \mathbb{O}^2$，函数 $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ 若 u 上半连续，且其在任意仿射八元数直线上的限制均为次调和函数，则称其为八元数多重次调和$(OPSH)$函数。Ω 上所有八元数多重次调和函数构成的空间记为 $OPSH(\Omega)$。Alesker [6] 建立了 Chern-Levine-Nirenberg 估计，据此构造了连续 $OPSH$ 函数对应的八元数 Monge-Ampère 测度，并将其应用于赋值理论。

定理 *A* [6, 定理 *1.1.*3] *对于开子集 $\Omega \subset \mathbb{O}^2$上的任意连续 $OPSH$ 函数 u 和 v，Ω 中存在一个非负测度，记作 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(u)\ Hess_{\mathbb{O}}(v))$，它由以下两个性质唯一确定：(i) 当 $u, v \in C^2(\Omega)$ 时，该测度具有显而易见的含义；(ii) 若连续 $OPSH$ 函数 u_n 和 v_n 的序列在紧子集上一致收敛到函数 u 和 v，则 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_n)\ Hess_{\mathbb{O}}(v_n)) \to \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)\ Hess_{\mathbb{O}}(v))$ 在测度意义下弱收敛。*

定理 A 中的测度称为混合八元数 *Monge-Amp`ère* 测度。以下针对连续 $OPSH$ 函数的比较原理是多重位势理论中的一项基本工具。

定理 1.1. 设 Ω 为有界域，且 $u, v \in OPSH(\Omega) \cap C(\Omega)$。若 $\{u < v\} \Subset \Omega$，则有

$$\int_{\{u<v\}} \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \geq \int_{\{u<v\}} \det(Hess_{\mathbb{O}}(v)). \tag{1.3}$$

给定域 Ω ⊂ $\mathbb{O}^2$中的紧子集 K，电容器 (K,Ω) 的（八元数）容量 定义为

$$C(K) := \inf\left\{\int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) : u \in \mathcal{U}^*(K,\Omega)\right\}, \tag{1.4}$$

其中

$$\mathcal{U}^*(K,\Omega) = \left\{u \in OPSH(\Omega)\cap C(\Omega), u|_K \le -1, \varliminf_{\mathbf{x}\to\partial\Omega} u(\mathbf{x}) \ge 0\right\}. \tag{1.5}$$

比较原理将用于建立八元数容量的各种性质。例如，若 K 是域 Ω 在 $\mathbb{O}^2$ 中的八元数正则紧子集，且 Ω 是八元数超凸域，则

$$C(K) = \int_K \det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot,K,\Omega))), \tag{1.6}$$

其中 $\omega^*(\cdot, K, \Omega)$ 是集合 K 在 Ω 中的（八元数）相对极值函数。

多重位势理论中的另一个重要要素，是单位球 B^2 上齐次八元数 Monge-Ampère 方程的狄利克雷问题的解。

定理 1.2。对于 $\varphi \in C^2(\partial B^2)$，设 $\Psi_{B^2,\,\varphi}$ 是 B^2 和 φ 对应的 *Perron–Bremermann* 函数。那么，$u = \Psi_{B^2,\,\varphi}$ 在 B^2 上且在 ∂B^2 上满足 $u = \varphi$，属于 $C^{1,\,1}_{loc}$，并且是狄利克雷问题的唯一解

$$\begin{cases} u \in OPSH(B^2)\cap C(\overline{B^2}), & \\ \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) = 0, & \text{on} \quad B^2, \\ u = \varphi, & \text{on} \quad \partial B^2. \end{cases} \tag{1.7}$$

在定理 6.3 中，这一结果被推广为一般严格八元数伪凸域上齐次八元数 Monge-Amp`ère 方程的连续解的 Dirichlet 问题。

为证明 Perron–Bremermann 函数的 $C^{1,\,1}_{loc}$-正则性，我们将采用 Bedford-Taylor [10]方法来处理复 Monge-Amp`ère 方程。应用他们方法的主要困难在于，$OPSH$函数通常在单位球的自同构下并不具有 $OPSH$不变性，这与复拟亚调和性在双全纯变换下保持不变不同。这类似于调和性在 $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ 上的共形变换下并不保持不变的情形，若 $N \ge 3$。不过，乘以适当的共形因子后，调和函数在共形变换下仍然是调和函数。我们显式构造单位球的自同构，并找到了 $OPSH$ 函数在自同构下的加权变换公式（参见命题 6.2），从而能够将 Bedford-Taylor 方法推广到八元数情形。

开集 $U \subset \Omega$ 的八元数容量定义为 $C(U) := \sup\{C(K);\ K \subset U\}$. 局部有界 $OPSH$ 函数也具有拟连续性。

定理1.3。任意局部有界的 $OPSH$ 函数关于八元数容量几乎处处连续，即给定 $u \in OPSH(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ 以及任意 $\epsilon > 0$，存在一个开集 $U \subset \Omega$，使得 $C(U) < \epsilon$，且 u在 $\Omega \setminus U$上连续。

在 上述定理的证明中，一个重要工具是下面的分部积分公式 .

引理 1.1。设 Ω 是 $\mathbb{O}^2$ 中的一个域，具有 $C^1(\Omega)$ 定义函数 ϱ。对于 $u \in C^2(\Omega)$ 和一个闭函数 $\omega \in C^1(\Omega\ \mathcal{H}^2(\mathbb{O}))$，有

$$\int_\Omega v\det(Hess_{\mathbb{O}}(u),\omega)dV = -\int_\Omega \det\left(\mathcal{T}(du\otimes dv),\omega\right)dV + \int_{\partial\Omega} v\det\left(\mathcal{T}(du\otimes d\varrho),\omega\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}, \tag{1.8}$$

其中 dV 是 $\mathbb{O}^2$ 上的体积形式，而 dS 是边界 $\partial\Omega$的曲面测度 .

特别地，如果 u, v, w之一在 Ω 中紧支撑，则

$$\int_\Omega u \det(Hess_{\mathbb{O}}(v), Hess_{\mathbb{O}}(w))dV = \int_\Omega v \det(Hess_{\mathbb{O}}(u), Hess_{\mathbb{O}}(w))dV. \tag{1.9}$$

这由 Alesker-Gordon 在 [7] 中证明。如果 $v \equiv 1$，那么（1.8）右端仅为边界上的一个积分，这也是一个有用的公式。

本文结构如下。第2节讨论八元数线性代数、$OPSH$ 函数以及八元数闭正流的基本事实。第 3 节给出混合八元数 Monge-Amp`ère 算子的分部积分公式（1.8），该公式在本文中起关键作用。第4节建立比较原理。第5节给出八元数 Monge-Amp`ère 方程的基本解，并为闭正流引入勒隆数。第6节展示单位球上齐次八元数 Monge-Ampere 方程狄利克雷问题解的 C^1, $^1_{loc}$ 正则性。第7节建立八元数相对极值函数和八元数容量的若干有用性质。第8节建立拟连续性。在附录中，我们显式构造单位球的自同构 $\mathbb{O}^2$，这些自同构可连续延拓至边界，但不像复数或四元数情形那样光滑。

2. Octonionic linear algebra, $OPSH$ functions and octonionic closed positive currents

2.1. 八元数与八元数厄米(2×2)-矩阵。八元数构成一个 $\mathbb{O}$ 实数 $\mathbb{R}$上的 8 维代数，它既不满足结合律，也不满足交换律。一个八元数$\mathbf{x} \in \mathbb{O}$ 可以写成$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}e_5$，其中$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 是两个四元数。也就是说，$\mathbf{x}$ 可以与 $\mathbb{H}^2$ 中的向量（$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$）对应。于是，八元数的乘法可以写成

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{ac} - \overline{\mathbf{d}}\mathbf{b}, \mathbf{da} + \mathbf{b}\overline{\mathbf{c}}). \tag{2.1}$$

尽管八元数不满足结合律，但它仍满足某种弱形式的结合律。

引理 2.1。 [6, 引理 2.1。1] 设$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c} \in \mathbb{O}$。则，*(i)* $Re((\mathbf{ab})\mathbf{c}) = Re(\mathbf{a}(\mathbf{bc}))$ （这个实数记作 $Re(\mathbf{abc})$）。*(ii)* $\mathbb{O}$是交错代数，即由任意两个元素及其共轭生成的任意子代数都是结合的。它总是同构于 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$ 中的一个。

$\mathbb{O}^2$ 中的八元数（右）直线是一个实*8*维子空间 $L \subset \mathbb{O}^2$，其形式为 {(**x**,**ax**)；其中$\mathbf{x} \in \mathbb{O}$}，且$\mathbf{a} \in \mathbb{O}$，或者其形式为 {(**0**,**x**)；其中$\mathbf{x} \in \mathbb{O}$}。两个八元数 Hermitian 矩阵 $A = (a_{\alpha\beta})$ 和 $B = (b_{\alpha\beta})$ 的混合行列式可类比经典复数情形定义为

$$\det(A, B) = \frac{1}{2}\Big(a_{\bar{1}1}b_{\bar{2}2} + a_{\bar{2}2}b_{\bar{1}1} - 2\,\mathrm{Re}\,(a_{\bar{1}2}b_{\bar{2}1})\Big). \tag{2.2}$$

若对任意列向量 $\xi \in \mathbb{O}^2 \setminus \{0\}$, $Re(\xi^* A\xi) > 0$, （分别地， $Re(\xi^* A\xi) \geq 0$）。则称八元数 Hermitian (2×2)-矩阵 $A \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 为正定（分别地，为半正定）。对于正定（分别地，半正定）矩阵 A，通常记作 $A > 0$（分别地， $A \geq 0$）。下述结果是八元数 Hermitian (2×2)-矩阵的西尔维斯特判据的一种形式。

命题 2.1。 [6, 命题 2.2。5] 设 $A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{x} \\ \overline{\mathbf{x}} & b \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$。则 $A \geq 0$ 当且仅当 $a \geq 0$且 行列式 $A \geq 0$。

命题 2.2。*(1)* [7, 断言 20。1] 对于列向量 $\xi \in \mathbb{O}^2$，八元数 *Hermitian* 矩阵$\xi \otimes \xi^* = \left(\xi_j \xi_k\right)$ 是半正定的。

(2) [7, 命题 20。2] 固定 $0 < \lambda < \Lambda < \infty$。那么存在一个自然数 N 和单位向量$\zeta_1, ..., \zeta_N \in \mathbb{O}^2$，使得每个 ζ_i 的两个坐标中至少有一个是实数，并且存在仅依赖于 λ, Λ 的 $0 < \lambda_* < \Lambda_* < \infty$，使得每个谱包含于 $[\lambda, \Lambda]$ 中的 $A \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 都可以写成

$$A = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \zeta_j \otimes \zeta_j^* \quad with \quad \beta_j \in [\lambda_*, \Lambda_*].$$

此外，可以选取向量 $\zeta_1, ..., \zeta_N$，使其包含向量 $(1, 0)$、$(0, 1) \in \mathbb{O}^2$。

$\xi \otimes \xi^*$ 的非负性由命题 2.1 得出。

命题 2.3. [7, 命题 7。1] *(1)* 对任意 $A \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$，都存在一个 $\mathrm{Spin}(9)$ 中的变换，将 A 映射为实对角矩阵。*(2)* 设 $A, B \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 满足 $A > 0$。那么存在一个 $\mathrm{Spin}(1,9)$ 中的变换，将 A 映射为与 I_2成比例的矩阵，并将 B 映射为对角矩阵。

引理 2.2. [7, 引理 6。7] 线性映射 $\mathcal{T}\colon Sym^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}^2) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 定义为

$$\mathcal{T}(\xi \otimes \eta) := \frac{1}{2}(\xi \otimes \eta^* + \eta \otimes \xi^*) \tag{2.3}$$

是$\mathrm{GL}_2(\mathbb{O})$-等变的，其中$\mathrm{GL}_2(\mathbb{O})$ 在源空间上的作用是定义表示的二次对称幂，在目标空间上的作用是伴随表示。

命题 2.4. [7, 引理 5。5] *(1)* 若 $A, B \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 为正定（分别为半正定），则$\det(A, B) > 0$（分别为 $\det(A, B) \geq 0$）。

(2) 若 $A > 0$，则对任意 $B \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$，有 $\det(A, B)^2 \geq \det A \cdot \det B$，且等号成立当且仅当 A 与 B 成实系数比例。

若元素 $A \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 满足 $A = \xi \otimes \xi^*$，其中 $\xi \in \mathbb{O}^2 \setminus \{0\}$，则称其为初等强正。若元素 $A \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 属于由初等强正元素生成的凸锥 $\mathcal{H}^2_+(\mathbb{O})$，则称其为强正。若 $A \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 对任意强正元素 $B \in \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 均满足 $\det(A, B) \geq 0$，则称其为正。于是，$\mathrm{span}\, \mathcal{H}^2_+(\mathbb{O}) = \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$。

2.2. $OPSH$ **函数与八元数闭正流**。$OPSH$ 函数 u 的标准逼近为 $u_\epsilon := u * \chi_\epsilon$，其中 χ 光滑，且 $\mathrm{supp}\ \chi \subset B^2, \chi \geq 0$ 和 $\int \chi = 1$，并且$\chi_\epsilon(\cdot) = \frac{1}{\epsilon^{16}} \chi(\frac{1}{\epsilon})$。

命题 2.5。设 Ω 是 $\mathbb{O}^2$ 中的一个域。那么，

(1) $OPSH(\Omega) \subset SH(\Omega)$。*(2)* $OPSH$ 函数的标准逼近 $u_\epsilon = u * \chi_\epsilon$ 也具有 $OPSH$，并且当 $\epsilon \downarrow 0$ 时满足 $u_\epsilon \downarrow u$。*(3)* 对任意 a、$b \geq 0$ 以及 u、$v \in OPSH(\Omega)$，有 $au + bv \in OPSH(\Omega)$。*(4)* 若 γ是定义在 $\mathbb{R}$ 上的凸递增函数，且 $u \in OPSH(\Omega)$，则 $\gamma \circ u \in OPSH(\Omega)$。*(5)* 一致收敛序列或递减序列的 $OPSH$ 函数的极限是一个 $OPSH$ 函数。*(6)* 有限个 $OPSH$ 函数的最大值是一个 $OPSH$ 函数；对于局部一致有界族 $\{u_\alpha\} \subset OPSH$，上确界 $u = \sup_\alpha u_\alpha$ 的正则化 u^* 也是一个 $OPSH$函数。

(7) 若 D 是Ω的一个开子集，$u \in OPSH(\Omega)$，$v \in OPSH(D)$ 且对所有 $\mathbf{x}_0 \in \partial D \cap \Omega$，都有 $\limsup_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} v(\mathbf{x}) \le u(\mathbf{x}_0)$，则定义如下的函数

$$\phi = \begin{cases} u, & \text{on} \quad \Omega \setminus D, \\ \max\{u, v\}, & \text{on} \quad D, \end{cases} \tag{2.4}$$

属于 $OPSH(\Omega)$。

证明。（1）–（6）参见 [6]。（3）–（7）由 $\mathbb{O}^2$中每条八元数直线上的 $\mathbb{R}^8$的亚调和函数性质得出。$\epsilon \downarrow 0$ 时 $u_\epsilon \downarrow u$ 递减，这是由 $\mathbb{R}^{16}$上 u 的次调和性得出的。□

我们需要八元数狄拉克算子作用于 $\mathbb{O}$值函数 F的左、右两种形式：

$$\overrightarrow{\partial_\alpha} F = \sum_{p=0}^{7} e_p \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha p}}, \qquad F\overleftarrow{\partial_\alpha} = \sum_{p=0}^{7} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha p}} e_p,$$

其中 $\alpha = 1, 2$。$\overrightarrow{\partial_\alpha} = \partial_\alpha$ 在（1.1）中。若光滑函数 $T : \Omega \to \mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 满足以下条件，则称其为闭的 es

$$T_{\overline{\alpha}\beta}\overleftarrow{\partial_{\overline{\beta}}} = \overrightarrow{\partial_{\overline{\alpha}}} T_{\overline{\beta}\beta}, \tag{2.5}$$

对于 $\alpha \neq \beta$，即 $-T_{12}\overleftarrow{\partial_2} = -\partial_1 T_{22}$ 和 $T_{21}\overleftarrow{\partial_1} = \partial_2 T_{11}$. 对于 $u \in C_c^3(\Omega)$，$Hess_{\mathbb{O}}(u)$ 是闭的，因为

$$(\partial_{\overline{\alpha}}\partial_\beta u)\overleftarrow{\partial_{\overline{\beta}}} = \partial_{\overline{\alpha}}\left(\partial_\beta u \overleftarrow{\partial_{\overline{\beta}}}\right) = \partial_{\overline{\alpha}}(\partial_{\overline{\beta}}\partial_\beta u), \tag{2.6}$$

根据傅里叶变换，这来自

$$(\xi_{\overline{\alpha}}\xi_\beta \widehat{u})\xi_{\overline{\beta}} = \xi_{\overline{\alpha}}\left(\xi_\beta \widehat{u}\xi_{\overline{\beta}}\right) = \xi_{\overline{\alpha}}(\xi_{\overline{\beta}}\xi_\beta \widehat{u})$$

由引理 2.1 (ii) 中的交替律可知。

令 $\mathcal{D}(\Omega\ \mathcal{H}^2(\mathbb{O}))$ 表示所有紧支撑光滑 $\mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 值函数构成的空间。对偶空间 $\mathcal{D}'(\Omega\ \mathcal{H}^2(\mathbb{O}))$ 中的元素称为一个流。若对于任意强正的 $\eta \in \mathcal{D}(\Omega\ \mathcal{H}^2(\mathbb{O}))$，均有 $T(\eta) \ge 0$，则称流 T为正 。若式 (2.5) 在分布意义下成立，则称其为闭的 。令 ψ 为 Ω 上的一个 $\mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 值 Radon 测度。可以将流 ψ 关联起来，其定义为 T_ψ

$$T_\psi(\varphi) = \int_\Omega \det(\psi, \varphi) \tag{2.7}$$

对于 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega\ \mathcal{H}^2(\mathbb{O}))$。如果流 T在 $C(\Omega\ \mathcal{H}^2(\mathbb{O}))$ 上有连续延拓，则称其为零阶流或测度型流。也就是说，对于任意邻域 $G \Subset \Omega$，都存在常数 K_G，使得$|T(\varphi)| \le K_G \|\varphi\|_G$对任意满足 supp $\varphi \subset G$ 的 $\varphi \in C(\Omega\ \mathcal{H}^2(\mathbb{O}))$ 都成立，其中 $\|\varphi\|_G = \sum_{\alpha,\beta=1,2} \max_{\mathbf{x}\in G} |\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x})|$。

推论 2.1. 如果 $T \in \mathcal{D}'(\Omega\ \mathcal{H}^2(\mathbb{O}))$ 是一个正流，那么 T 是一个由 $\mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 值测度$(T_{\alpha\beta})$ 通过 (2.7)定义的流。

证明. 由于 dim $\mathcal{H}^2(\mathbb{O}) = 10$，我们可以选取 $\mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 的一组基，记为 $\{h_1, \ldots, h_{10}\}$，其元素均为初等强正元素。设 $\{h'_1, \ldots, h'_{10}\}$ 为关于非退化双线性型 (2.2) 的对偶基。那么，对任意 $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$，$m_j(\phi) = T(\phi h_j)$ 定义了一个非负分布，因而是一个 Radon 测度。因此，$T = \sum_{j=1}^{10} T_{m_j h'_j}$, 其中 $T_{m_j h'_j}$ 是由 (2.7) 定义的流，因为

$$\sum_j T_{m_j h'_j}\left(\sum_k \phi_k h_k\right) = \sum_k m_k(\phi_k) = T\left(\sum_k \phi_k h_k\right),$$

对于任意 $\phi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$。 □

命题 2.6。 [6, 命题 4.1。16] 设 $u:\Omega\to[-\infty,+\infty)$ 是一个满足 u 不为 $-\infty$的函数。那么， u 是 $OPSH$ ，当且仅当它满足以下条件：
(i) u是上半连续的；*(ii)* u是局部可积的；*(iii)* $Hess_{\mathbb{O}}(u)$ 是正流。

注意，由(2.6)可知， $Hess_{\mathbb{O}}(u_\varepsilon)$是闭的，即$(\partial_\alpha\partial_\beta u_\varepsilon)\overleftarrow{\partial_\beta}=\partial_\alpha(\partial_\beta\partial_\beta u_\varepsilon)$。由分布上的微分运算具有连续性可得， $Hess_{\mathbb{O}}(u)$是闭的，因为 $\varepsilon\to 0$，且 $Hess_{\mathbb{O}}(u_\varepsilon)=Hess_{\mathbb{O}}(u)_\varepsilon$。

3. 积分分部

记 $\partial_{\alpha p}:=\frac{\partial}{\partial x_{\alpha p}}$。对于一个 C^1 标量函数 u，我们将 du 与 $\mathbb{O}^2$中的列向量 $\begin{pmatrix}\partial_1 u\\ \partial_2 u\end{pmatrix}$ 相对应。则由 (3.1) 定义的 $\mathcal{T}(du\otimes dv)$ 为

$$\mathcal{T}(du\otimes dv)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{\partial}_1 u\partial_1 v & \overline{\partial}_1 u\partial_2 v\\ \overline{\partial}_2 u\partial_1 v & \overline{\partial}_2 u\partial_2 v\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{\partial}_1 v\partial_1 u & \overline{\partial}_1 v\partial_2 u\\ \overline{\partial}_2 v\partial_1 u & \overline{\partial}_2 v\partial_2 u\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

$\mathcal{T}(du\otimes du)$ 根据命题 2.2 (1) 是初等强正的。根据定义，

$$\mathcal{T}(du\otimes dv)=\mathcal{T}(dv\otimes du).$$

引理 *1.1* 的证明。记 $\omega=(\omega_{\alpha\beta})$。注意 $\partial_{\beta p}$ 与 $e_{p'}$可交换。对于 $\alpha\neq\beta$，我们有 e

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\,\mathrm{Re}(\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\partial}_\beta\partial_\alpha u)dV&=\int_\Omega\sum_{p=0}^{7}v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}e_p\partial_{\beta p}\partial_\alpha u\right)dV\\&=-\int_\Omega\sum_{p=0}^{7}\partial_{\beta p}v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}e_p\partial_\alpha u\right)dV-\int_\Omega v\,\mathrm{Re}\left(\sum_{p=0}^{7}\partial_{\beta p}\omega_{\overline{\alpha}\beta}e_p\partial_\alpha u\right)dV\\&\quad+\int_{\partial\Omega}\sum_{p=0}^{7}v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}e_p\partial_{\beta p}\varrho\,\partial_\alpha u\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}\\&=-\int_\Omega\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\partial}_\beta v\partial_\alpha u\right)dV-\int v\,\mathrm{Re}\left(\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overleftarrow{\overline{\partial}_\beta}\right)\partial_\alpha u\right)dV+\int_{\partial\Omega}v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\partial}_\beta\varrho\,\partial_\alpha u\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}\\&=-\int_\Omega\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\partial}_\beta v\partial_\alpha u\right)dV-\int v\,\mathrm{Re}\left(\overline{\partial}_\alpha\omega_{\overline{\beta}\beta}\partial_\alpha u\right)dV+\int_{\partial\Omega}v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\partial}_\beta\varrho\,\partial_\alpha u\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|},\end{aligned}$$

通过分部积分、引理 2.1 (i) 中 Re**(abc)** 的结合律以及 ω的闭性 (2.5)，其中实值函数 $\partial_{\beta p}v$ 与各项相交换。同理，

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\,\mathrm{Re}(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta\partial_\beta u)dV&=\int_\Omega\sum_{p=0}^{7}v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}e_p\partial_{\beta p}\partial_\beta u\right)dV\\&=-\int_\Omega\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta v\partial_\beta u\right)-\int_\Omega v\,\mathrm{Re}\left(\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overleftarrow{\overline{\partial}_\beta}\right)\partial_\beta u\right)+\int_{\partial\Omega}v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta\varrho\,\partial_\beta u\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}\\&=-\int_\Omega\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta v\partial_\beta u\right)-\int_\Omega v\,\mathrm{Re}\left(\overline{\partial}_\beta\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\partial_\beta u\right)+\int_{\partial\Omega}v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta\varrho\,\partial_\beta u\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|},\end{aligned}$$

因为 $\omega_{\overline{\alpha}\alpha}$ 是实数。于是，两者之差为

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta\partial_\beta u-\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\partial}_\beta\partial_\alpha u\right)dV=&\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\partial}_\beta v\partial_\alpha u-\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta v\partial_\beta u\right)\\&+\int_\Omega v\,\mathrm{Re}\left(\overline{\partial}_\alpha\omega_{\overline{\beta}\beta}\partial_\alpha u-\overline{\partial}_\beta\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\partial_\beta u\right)\\&+\int_{\partial\Omega} v\,\mathrm{Re}\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta\varrho\,\partial_\beta u-\omega_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\partial}_\beta\varrho\,\partial_\alpha u\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

另一方面，注意到根据定义和引理 2.1 (1),

$$\mathrm{Re}(abc)=Re(\overline{c}\overline{b}\overline{a}),\qquad \mathrm{Re}(a)=\mathrm{Re}(\overline{a}),\qquad \mathrm{Re}(ab)=\mathrm{Re}(ba),\tag{3.3}$$

对于任意 a，$b\in\mathbb{O}$，由此可得 $\mathrm{Re}\left(\omega_{\underline{12}}\partial_{\underline{2}}\partial_1 u\right)=\mathrm{Re}\left(\omega_{\underline{21}}\partial_{\underline{1}}\partial_2 u\right)$. 将恒等式 (3.2) 对 $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$ 和 $(2,\ 1)$ 求和，得到

$$\begin{aligned}&2\int_\Omega v\det(\omega,Hess_{\mathbb{O}}(u))\\=&\int_\Omega vRe(\omega_{\overline{1}1}\overline{\partial}_2\partial_2 u-\omega_{\overline{1}2}\overline{\partial}_2\partial_1 u)dV+\int_\Omega vRe(\omega_{\overline{2}2}\overline{\partial}_1\partial_1 u-\omega_{\overline{2}1}\overline{\partial}_1\partial_2 u)dV\\=&\int_\Omega Re\left(\omega_{\overline{1}2}\overline{\partial}_2 v\partial_1 u-\omega_{\overline{1}1}\overline{\partial}_2 v\partial_2 u+\omega_{\overline{2}1}\overline{\partial}_1 v\partial_2 u-\omega_{\overline{2}2}\overline{\partial}_1 v\partial_1 u\right)\\&+\int_{\partial\Omega} vRe\left(\omega_{\overline{1}1}\overline{\partial}_2\varrho\,\partial_2 u-\omega_{\overline{1}2}\overline{\partial}_2\varrho\,\partial_1 u+\omega_{\overline{2}2}\overline{\partial}_1\varrho\,\partial_1 u-\omega_{\overline{2}1}\overline{\partial}_1\varrho\,\partial_2 u\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

在上述求 和中，恒等式 (3.2) 右端的第二项相互抵消。注意 t

$$\begin{aligned}Re\left(\omega_{\overline{2}1}\overline{\partial}_1 v\partial_2 u\right)&=Re\left(\overline{\partial}_2 u\partial_1 v\omega_{\overline{1}2}\right)=Re\left(\omega_{\overline{1}2}\overline{\partial}_2 u\partial_1 v\right),\\Re\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta v\partial_\beta u\right)&=\omega_{\overline{\alpha}\alpha}Re\left(\overline{\partial}_\beta v\partial_\beta u\right)=Re\left(\omega_{\overline{\alpha}\alpha}\overline{\partial}_\beta u\partial_\beta v\right),\end{aligned}$$

再次利用 (3.3)，因此，我们有

$$\begin{aligned}Re\left(\omega_{\overline{1}1}\overline{\partial}_2 v\partial_2 u+\omega_{\overline{2}2}\overline{\partial}_1 v\partial_1 u\right)&=\omega_{\overline{1}1}\mathcal{T}(du\otimes dv)_{\overline{2}2}+\omega_{\overline{2}2}\mathcal{T}(du\otimes dv)_{\overline{1}1},\\Re\left(\omega_{\overline{1}2}\overline{\partial}_2 v\partial_1 u+\omega_{\overline{2}1}\overline{\partial}_1 v\partial_2 u\right)&=2Re\left(\omega_{\overline{1}2}\mathcal{T}(du\otimes dv)_{\overline{2}1}\right)=2Re\left(\omega_{\overline{2}1}\mathcal{T}(du\otimes dv)_{\overline{1}2}\right).\end{aligned}\tag{3.5}$$

将 (3.5) 代入 (3.4)，即可得到恒等式 (1.8)，因为根据定义，$\det(A,\ B)=\det(B,\ A)$。 □

推论 3.1。 假设与引理 *1.1* 中相同。则，*(1)*

$$\int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(u),\omega)dV=\int_{\partial\Omega}\det\left(\mathcal{T}(du\otimes d\varrho),\omega\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}.\tag{3.6}$$

(2) 若 u,v 中有一个在 Ω 中紧支撑，则 (1.9) 成立。

4. Octonionic mixed Monge-Ampère measure and the comparison principle

4.1. 一致估计。 我们需要以下关键积分估计（参见例如 Sadullaev-Abdullaev[21, 定理 16.2]，关于复多重次调和函数；以及 [19] ，关于四元数 m-次调和函数）。

命题 4.1。 对于任意紧子集 $K\Subset\Omega$，这些积分

$$\int_K u_1\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_2),Hess_{\mathbb{O}}(u_3))dV\quad\text{and}\quad\int_K\det\left(\mathcal{T}(du_1\otimes du_1),Hess_{\mathbb{O}}(u_2)\right)dV\tag{4.1}$$

对于 u_1、u_2、$u_3\in L_M:=\{u\in OPSH(\Omega)\cap C^2(\Omega):\ |u|\le M\}$ 是一致有界的。

证明。设 $0 \le \chi \in C_0^\infty(\Omega)$，且在 K 上有 $\chi \equiv 1$，$\mathrm{supp}\ \chi \subset K' \Subset \Omega$。若将 u_j 替换为 $u_j + M$，则不妨设 $0 \le u_1,\ u_2 \le 2M$。于是，

$$\begin{aligned}\pm\int_K u_1 \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_2), Hess_{\mathbb{O}}(u_3))dV &\le M\int_\Omega \chi \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_2), Hess_{\mathbb{O}}(u_3))dV \\ &= M\int_\Omega u_2 \det(Hess_{\mathbb{O}}(\chi), Hess_{\mathbb{O}}(u_3))dV \\ &\le \frac{2M^2}{\varepsilon_0}\int_{K'} \det(Hess_{\mathbb{O}}(|\mathbf{x}|^2), Hess_{\mathbb{O}}(u_3))dV,\end{aligned}$$

利用 (1.9) 和

$$-Hess_{\mathbb{O}}(|x|^2) \le \varepsilon_0 Hess_{\mathbb{O}}(\chi) \le Hess_{\mathbb{O}}(|x|^2),$$

对于某个 $\varepsilon_0 > 0$。重复这一过程，我们得到

$$\pm\int_K u_1 \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_2), Hess_{\mathbb{O}}(u_3))dV \le \frac{4M^2}{\varepsilon_0\varepsilon_0'}\int_{K''} \det(Hess_{\mathbb{O}}(|\mathbf{x}|^2), Hess_{\mathbb{O}}(|\mathbf{x}|^2))dV$$

对于某个 $\varepsilon_0' > 0$ 和 $K \Subset K' \Subset \Omega$。由此可知，(4.1) 中第一个积分一致有界。

对于第二个积分，不失一般性，我们可以假设 $B^2 \Subset \Omega$，且 $-1 \le u_j \le 0$ 在 B^2 上。如果将 u_j 替换为 $\max\{u_j, v\}$，其中 $v(\mathbf{x}) = 9(|\mathbf{x}|^2 - \frac{5}{9})$，则 u_j 在 $B(\mathbf{0}, 2/3)$ 内的值保持不变，而 $u_j \equiv v$ 在球面 ∂B^2 的邻域内，由 $v|_{\partial B^2} = 4 > 0 > u|_{\partial B^2}$ 可知。但此时 u_j 可能仅连续。考虑在球 B^2 的邻域内用光滑 $OPSH$ 函数对 $u_j^t \downarrow u$ 作标准逼近。注意到在 $C^2(B')$ 中 $u_j^t \to u_j$，其中 $B' = B(\mathbf{0}, 1/2)$，且 $\mathcal{T}(du_1^t \otimes du_1^t)\ Hess_{\mathbb{O}}(u_2^t) \ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}0 \le \int_{B'} \det(\mathcal{T}(du_1 \otimes du_1), Hess_{\mathbb{O}}(u_2)) &= \lim_{t\to+\infty}\int_{B'} \det(\mathcal{T}(du_1^t \otimes du_1^t), Hess_{\mathbb{O}}(u_2^t)) \\ &\le \lim_{t\to+\infty}\int_{B^2} \det\left(\mathcal{T}(du_1^t \otimes du_1^t), Hess_{\mathbb{O}}(u_2^t)\right) \\ &= -\lim_{t\to+\infty}\int_{B^2} u_1^t \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1^t), Hess_{\mathbb{O}}(u_2^t)) \\ &\quad + \int_{\partial B^2} v \det\left(\mathcal{T}(dv \otimes d\varrho), Hess_{\mathbb{O}}(v)\right)\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|},\end{aligned}$$

通过对引理 1.1 应用分部积分，并在边界上取较大的 t。我们已证明，右端的 B^2 上的第一个积分一致有界，而 ∂B^2 上的第二个积分则由一个绝对常数控制，该常数只依赖于边界上的 v。结论得证。□

以下命题由命题 4.1 和定理 A 得出。

推论 4.1。 在函数类 $L_M = \{u \in OPSH(\Omega) \cap C(\Omega) : |u| \le M\}$ 中，测度族$\det(Hess_{\mathbb{O}}(u)\ Hess_{\mathbb{O}}(v))$ 局部一致有界。

4.2. **比较原理**。 我们需要以下命题来证明比较原理。

命题 4.2. 设Ω 是一个具有 C^2 定义函数 ϱ的有界域，且 $u, v \in C^2(\Omega) \cap OPSH(\Omega)$。若 $u = v$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，且 $u \le v$ 在Ω内成立，则

$$\int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \ge \int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(v)). \tag{4.2}$$

证明。由于

$$\begin{aligned}\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1),Hess_{\mathbb{O}}(u_2))-\det(Hess_{\mathbb{O}}(v_1),Hess_{\mathbb{O}}(v_2))=&\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1-v_1),Hess_{\mathbb{O}}(u_2))\\&+\det(Hess_{\mathbb{O}}(v_1),Hess_{\mathbb{O}}(u_2-v_2)),\end{aligned}\tag{4.3}$$

由混合行列式的线性性质 (2.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(u))-\det(Hess_{\mathbb{O}}(v))=&\int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(u-v),Hess_{\mathbb{O}}(u))\\&+\int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(v),Hess_{\mathbb{O}}(u-v))\\=&\int_{\partial\Omega}\det(\mathcal{T}(d(u-v)\otimes d\varrho),Hess_{\mathbb{O}}(u))\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}\\&+\int_{\partial\Omega}\det(Hess_{\mathbb{O}}(v),\mathcal{T}(d(u-v)\otimes d\varrho))\frac{dS}{|\operatorname{grad}\varrho|}\end{aligned}\tag{4.4}$$

由推论 3.1 (1)。由于 $u\le v$ 属于 Ω，对于满足 $\operatorname{grad}(u-v)(\mathbf{x})\neq 0$ 的点 $\mathbf{x}\in\partial\Omega$，我们可以在$\mathbf{x}$ 的某个邻域上写成 $u-v=h\varrho$，其中 $h\ge 0$ 是某个光滑函数。因此，我们有$\partial_{\alpha p}(u-v)=h\partial_{\alpha p}\varrho$ 在 $\partial\Omega$ 上，于是

$$\mathcal{T}(d(u-v)\otimes d\varrho)=h\mathcal{T}(d\varrho\otimes d\varrho),\tag{4.5}$$

在$\mathbf{x}$附近的 $\partial\Omega$ 上，根据命题 2.2，它是初等强正的。由于 $Hess_{\mathbb{O}}(u)$也是非负的，我们根据定义可知 $\det(\mathcal{T}(d(u-v)\otimes d\varrho)\ Hess_{\mathbb{O}}(u))\ge 0$。因此，(4.4) 右端在 $\partial\Omega$ 上的被积函数，当 $\operatorname{grad}(u-v)(\mathbf{x})\neq 0$ 时非负；而当 $\operatorname{grad}(u-v)(\mathbf{x})=0$ 时，它们为零。因此，(4.4) 非负。□

定理 *1.1* 的证明。首先，我们假设 $u,v\in OPSH(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$。那么

$$G:=\{\mathbf{x}\in\Omega;u(\mathbf{x})<v(\mathbf{x})\}=\cup_{\eta>0}G_\eta,$$

其中 $G_\eta:=\{\mathbf{x}\in\Omega;u(\mathbf{x})<v(\mathbf{x})-\eta\}$。由萨德定理，对于几乎所有的 $\eta>0$，G_η都是边界光滑的开集。也就是说，对于这样的 η，G_η 有一个 C^∞ 定义函数 $u-v+\eta$。对于这样的 η，我们有

$$\int_{G_\eta}\det(Hess_{\mathbb{O}}(u))\ge\int_{G_\eta}\det(Hess_{\mathbb{O}}(v)),$$

根据命题 4.2。令 $\eta\to 0$ 取极限，我们得到

$$\int_{G}\det(Hess_{\mathbb{O}}(u))\ge\int_{G}\det(Hess_{\mathbb{O}}(v)).\tag{4.6}$$

现在，若 $u,v\in OPSH(\Omega)\cap C(\Omega)$，考虑在开子集 E 中由光滑$OPSH$ 函数构成的标准逼近 $u_j\downarrow u$, $v_j\downarrow v$，使得 $G\Subset E\Subset\Omega$。记

$$G_p:=\{\mathbf{x}\in G;u(\mathbf{x})<v(\mathbf{x})-1/p\}\quad\text{and}\quad G_{j,k,p}:=\{\mathbf{x}\in G;u_j(\mathbf{x})<v_k(\mathbf{x})-1/p\}.$$

对于任意开集 $G'\Subset G$，我们可以选取正整数 p_0 和 p_1，使得 $G'\Subset G_{p_0}\Subset G_{p_1}\Subset G$。由于 u_j 和 v_j 在 G 上局部一致收敛，因此存在 k_0，使得 $G'\Subset G_{j,\ k,\ p_0}\subset G_{p_1}\Subset G$ 对所有 $j,\ k>k_0$ 均成立。于是

$$\int_{G_{j,k,p_0}}\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_j))\ge\int_{G_{j,k,p_0}}\det(Hess_{\mathbb{O}}(v_k))$$

对所有 $j,\ k > k_0$，利用 (4.6) 可得。因此，

$$\int_{G_{p_1}} \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_j)) \geq \int_{G'} \det(Hess_{\mathbb{O}}(v_k)).$$

根据定理 A 中八元数 Monge-Amp`ère 测度的收敛性，我们得到

$$\int_{G} \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \geq \int_{G_{p_1}} \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \geq \int_{G'} \det(Hess_{\mathbb{O}}(v)).$$

由于 $G' \Subset G$ 是任意选取的，结论成立。 □

命题 4.3。 设 Ω 是一个具有光滑边界的有界域，且 $u, v \in C(\Omega) \cap OPSH(\Omega)$。假设在 $\overline{\Omega}$ 上有 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \leq \det(Hess_{\mathbb{O}}(v))$，并且 $\lim_{\mathbf{x}\in\Omega}(u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})) \geq 0$。则在 Ω 中有 $u \geq v$。

证明。 假设在某一点 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ 处有 $v(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{x}_0)$。因此，开集 $G := \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) < v(\mathbf{x}) - \eta/4\}$ 非空且相对紧地包含于 Ω 中。于是，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，我们有

$$G_1 := \{D : u(\mathbf{x}) < v(\mathbf{x}) - \eta/2 + \varepsilon|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2\} \Subset G,$$

并且显然包含 $\mathbf{x}_0$。应用定理 1.1 中的比较原理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{G_1} \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) &\geq \int_{G_1} \det(Hess_{\mathbb{O}}(v + \varepsilon|\cdot - \mathbf{x}_0|^2)) \\ &\geq \int_{G_1} \det(Hess_{\mathbb{O}}(v)) + \varepsilon^2 \int_{G_1} \det(Hess_{\mathbb{O}}(|\cdot - \mathbf{x}_0|^2)),\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由恒等式 (4.3) 得出。这与 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \leq \det(Hess_{\mathbb{O}}(v))$ 的假设矛盾。□

对于两个 $OPSH$ 函数，我们还需要以下命题。

推论 4.2。 设 Ω 为有界域，且 $u_j, v_j \in C(\Omega) \cap OPSH(\Omega)$。若 $u_j = v_j$ 在 Ω 的某个紧子集之外成立，则

$$\int_{\Omega} \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1), Hess_{\mathbb{O}}(u_2)) = \int_{\Omega} \det(Hess_{\mathbb{O}}(v_1), Hess_{\mathbb{O}}(v_2)). \tag{4.7}$$

证明。 若该域的边界光滑，且 $u_j, v_j \in C^2(\Omega) \cap OPSH(\Omega)$，则如同 (4.4) 中那样应用 (4.3) 可得此恒等式，因为边界项消失。一般情形可由逼近轻易得到。□

5. The fundamental solution of the octonionic Monge-Ampère equation and the Lelong number for a closed positive current

命题 5.1。该函数

$$K(\mathbf{x}) := -\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^6}$$

在 $\mathbb{O}^2$ 上为 $OPSH$，且是八元数 *Monge-Amp`ere* 方程的基本解，即

$$\det(Hess_{\mathbb{O}}(K)) = C\delta_{\mathbf{a}}, \tag{5.1}$$

对于某个常数 $C > 0$。

证明。W 不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$。记 $K_\epsilon(\mathbf{x}) := -{}^{1}{}_{(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^3}\cdot$ 于是 ———— ，

$$\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta K_\epsilon(\mathbf{x}) = \overline{\partial}_\alpha \frac{6\overline{\mathbf{x}}_\beta}{(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^4} = -\frac{48}{(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^5}\mathbf{x}_\alpha\overline{\mathbf{x}}_\beta + \frac{48\delta_{\alpha\beta}}{(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^4}. \tag{5.2}$$

因此， $\partial_{\overline{\alpha}}\partial_\alpha K_\epsilon = 48\,{}^{|}{}_{\mathbf{x}_\beta|^2+\epsilon\,(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)_5} > 0$，其中 $\beta \neq \alpha$，且

$$2\det(Hess_{\mathbb{O}}(K_\epsilon)) = \frac{48^2(|\mathbf{x}_1|^2+\epsilon)(|\mathbf{x}_2|^2+\epsilon)}{(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^{10}} - \frac{48^2\,\mathrm{Re}((\mathbf{x}_1\overline{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2\overline{\mathbf{x}}_1))}{(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^{10}} = \frac{48^2\epsilon}{(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^9} > 0,$$

由交替律。因此，根据命题 2.1， $Hess_{\mathbb{O}}(K_\epsilon)$ 是正的，从而根据命题 2.6， $K_\epsilon \in OPSH(\mathbb{O}^2)$。然后，由命题 2.5 (5)，由于 $K_\epsilon \downarrow K$，有 $K \in OPSH(\mathbb{O}^2)$。现在令 $\epsilon \to 0$，得到 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(K)) = 0$ 在 $\mathbb{O}^2 \setminus \{0\}$. 上

为证明 (5.1)，对于任意 $\varphi \in C_0(\mathbb{O}^2)$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^{16}} \frac{\epsilon}{(|\mathbf{x}|^2+\epsilon)^9}\varphi(\mathbf{x})dV = \int_{\mathbb{R}^{16}} \frac{\varphi(\mathbf{x}'\epsilon^{\frac{1}{2}})}{(|\mathbf{x}'|^2+1)^9}dV(\mathbf{x}') \to C\varphi(0),$$

由于 $\epsilon \to 0$，通过对 $\mathbf{x} = \mathbf{x}'\epsilon^{\frac{1}{2}}$ 重新缩放。因此 (5.1) 得证。 □

命题 5.2. 设$\Omega \subseteq \mathbb{O}^2$ 是一个域，且 $B(\mathbf{a}\ R) \Subset \Omega$ 对某个 $R > 0$成立。对于Ω 上的闭正流 ω 以及 $0 < r < R$，记

$$\sigma(\mathbf{a}, r) = \int_{B(\mathbf{a},r)} \det(Hess_{\mathbb{O}}(|\mathbf{x}|^2), \omega). \tag{5.3}$$

则， ${}^{\sigma}{}_{\overline{(\mathbf{a}\ r)}\,r^8}$ 是 r 关于 $0 < r < R$的递增函数，并且

$$v_{\mathbf{a}}(u) = \lim_{r\to 0+} \frac{\sigma(\mathbf{a}, r)}{r^8} \tag{5.4}$$

存在且非负 。它称为闭正流 ω 在$\mathbf{a}$处的八元数 *Lelong* 数。

证明。 不失一般性，设$\mathbf{a} = 0$。首先，假设 ω 是光滑闭正流。考虑

$$v_{\mathbf{a}}(r_1, r_2) := \int_{r_1<|\mathbf{x}|<r_2} \det(Hess_{\mathbb{O}}(K), \omega),$$

for $0 < r_1 < r_2 < R$。由于在环 $r_1 < |\mathbf{x}| < r_2$上， K 是光滑的，且 $dK = {}^{3d|\mathbf{x}|}{}_{|}{}^{|^2}{}_{\mathbf{x},\ 我}$们有 ve

$$\begin{aligned}
v_{\mathbf{a}}(r_1, r_2) &= \int_{|\mathbf{x}|=r_2} \det\left(\mathcal{T}(dK \otimes d|\mathbf{x}|^2), \omega\right) \frac{dS}{2r_2} - \int_{|\mathbf{x}|=r_1} \det\left(\mathcal{T}(dK \otimes d|\mathbf{x}|^2), \omega\right) \frac{dS}{2r_1} \\
&= \frac{3}{2r_2^9}\int_{|\mathbf{x}|=r_2} \det\left(\mathcal{T}(d|\mathbf{x}|^2 \otimes d|\mathbf{x}|^2), \omega\right) dS - \frac{3}{2r_1^9}\int_{|\mathbf{x}|=r_1} \det\left(\mathcal{T}(d|\mathbf{x}|^2 \otimes d|\mathbf{x}|^2), \omega\right) dS \\
&= \frac{3}{r_2^8}\int_{|\mathbf{x}|<r_2} \det(Hess_{\mathbb{O}}(|\mathbf{x}|^2), \omega) - \frac{3}{r_1^8}\int_{|\mathbf{x}|<r_1} \det(Hess_{\mathbb{O}}(|\mathbf{x}|^2), \omega) \\
&= 3\left(\frac{\sigma(\mathbf{a}, r_2)}{r_2^8} - \frac{\sigma(\mathbf{a}, r_1)}{r_1^8}\right) > 0,
\end{aligned}$$

通过反复使用推论 3.1（1），可得该结论对光滑流成立。

根据推论 2.1，Ω 上的闭正流 ω 由一个取值于 $\mathcal{H}^2(\mathbb{O})$ 的测度 $\omega = (\omega_{\alpha\beta})$ 给出。利用光滑闭正流 li $\mathrm{m}_{\epsilon\to 0}{}^{\omega * \chi_\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}(\omega_{\alpha\beta} * \chi_\epsilon) = \omega$ 在测度意义下的收敛性，即得所需结果。−□

6. The Dirichlet problem for the homogeneous octonionic Monge-Ampère equation

在 $\mathbb{O}^2$ 中的有界域 Ω 上，若函数 $u \in OPSH(\Omega)$ 满足 $OPSH(\Omega)$ 类中的最大值原理，即对于任意 $D \Subset \Omega$，若 $v \in OPSH(D)$ 且 $\lim_{\mathbf{x}\in\partial D}(u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})) \geq 0$，则 $u \geq v$ 属于 D，则称其为 极大函数。广义狄利克雷问题是：给定 $\varphi \in C(\partial\Omega)$，求一个上半连续函数$u : \Omega \to \mathbb{R}$，使得 $u|_\Omega$ 是极大的 $OPHS$ 且 $u|_{\partial\Omega} \equiv \varphi$。我们用 $\mathscr{B}(\Omega\ \varphi)$ 表示所有满足以下条件的函数 $u \in OPHS(\Omega)$ 所构成的族：对所有 $\mathbf{x} \in \partial\Omega$，$\limsup^{\Omega\ni\mathbf{y}\to\mathbf{x}} u(\mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{x}),$。Ω 和 φ 的*Perron–Bremermann* 函数定义为

$$\Psi_{\Omega,\varphi}(\mathbf{x}) := \sup\{u(\mathbf{x}); u \in \mathscr{B}(\Omega, \varphi)\}. \tag{6.1}$$

这一针对复数 PHS 函数的函数由 Bremermann [11] 引入，类比于实势理论中使用的经典佩龙函数。Perron–Bremermann 函数的连续性和极大性可如复数情形那样由 Walsh [29]证明。事实上，Harvey-Lawson 给出了一个更一般的关于$\mathbb{G}$多重次调和函数的定理，其中我们的情形是其特例。

若域 Ω $\subset \mathbb{O}^2$ 在每个边界点附近都满足以下条件，则称其为严格（八元数）伪凸：对边界点$\mathbf{x} \in \partial\Omega$，存在一个 C^2 定义函数 ϱ，使得 $Hess_{\mathbb{O}}(\varrho)$正定。

定理6.1。 [16, 定理7。6] 设Ω 是 $\mathbb{O}^2$中的严格八元数伪凸域。对于 $\varphi \in C(\Omega)$，*Perron–Bremermann* 函数$\Psi_{\Omega,\ \varphi}$ 在Ω 上连续，且是广义狄利克雷问题的解，即它具有极大性。

6.1. 在单位球的自同构下，$OPSH$ 函数的加权变换公式。 为了使用 Bedford-Taylor [10] 方法处理复 Monge-Amp`ère 方程，我们需要单位球的自同构 B^2. 它是八元数双曲空间的一个模型。八元数双曲空间的自同构比复数或四元数情形 [9, 24]复杂得多。在八元数西格尔上半空间模型中，将它们写出来相对容易：

$$\mathcal{U} := \left\{(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in \mathbb{O}^2 : 2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{y}_2 - |\mathbf{y}_1|^2 > 0\right\}. \tag{6.2}$$

对于每个$\mathbf{a} \in B^2$，我们可以构造一个从 B^2 到其自身的微分同胚（参见附录 ）

$$T_{\mathbf{a}} := C^{-1} \circ D_{\delta_{\mathbf{a}}} \circ \tau_{\zeta_{\mathbf{a}}} \circ C \text{ such that } T_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{6.3}$$

其中 (6.3) 中的数 $\delta_{\mathbf{a}} > 0$ 和边界点 $\zeta_{\mathbf{a}} \in \partial\mathcal{U}$ 分别定义于 (A.2) 和 (A.3)，而 C 是由下式定义的凯莱变换 $C : B^2 \longrightarrow \mathcal{U}$

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \longmapsto \left(\sqrt{2}\mathbf{x}_1(1 + \mathbf{x}_2)^{-1}, (1 - \mathbf{x}_2)(1 + \mathbf{x}_2)^{-1}\right) := (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2). \tag{6.4}$$

这是从球 B^2 到 $\mathcal{U}$的一个微分同胚，因为 $1 - |\mathbf{x}|^2 > 0$ 当且仅当

$$2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{y}_2 - |\mathbf{y}_1|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1 - \mathbf{x}_2 + \overline{\mathbf{x}}_2 - |\mathbf{x}_2|^2}{|1 + \mathbf{x}_2|^2} - \frac{2|\mathbf{x}_1|^2}{|1 + \mathbf{x}_2|^2} = 2\frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{|1 + \mathbf{x}_2|^2} > 0. \tag{6.5}$$

C 具有逆映射 $C^{-1} : \mathcal{U} \longrightarrow B^2$，其表达式为

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \longmapsto C^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) := \left(\sqrt{2}\mathbf{y}_1(1 + \mathbf{y}_2)^{-1}, (1 - \mathbf{y}_2)(1 + \mathbf{y}_2)^{-1}\right), \tag{6.6}$$

通过 $(1 + \mathbf{y}_2)^{-1}$ 与 $1 - \mathbf{y}_2$交换。对于 $\zeta = (\zeta_1,\ \zeta_2) \in \partial\mathcal{U}$，即 $2\,\mathrm{Re}\,\zeta_2 = |\zeta_1|^2$，左平移 τ_ζ： $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$由下式给出

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) := \left(\mathbf{x}_1 + \zeta_1, \mathbf{x}_2 + \zeta_2 + \overline{\zeta}_1\mathbf{x}_1\right), \tag{6.7}$$

以及对于 gi 对于正数 δ，膨胀由 D_δ 给出：$(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \longrightarrow (\delta\mathbf{x}_1,\ \delta^2\mathbf{x}_2)$。我们有

$$C(\mathbf{0}) = (0,1) \qquad \text{and} \qquad C^{-1}(0,1) = \mathbf{0}. \tag{6.8}$$

我们首先给出在 $\mathbb{R}^N$ 上关于反演 ι 的标准拉普拉斯算子的变换公式：$\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 由 $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$ 定义。显然，$\iota \circ \iota = id_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}}$。 —

命题 6.1。设 Ω 是 $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 中的一个域，且满足 $N \geq 3$。那么对于 $x \in \iota(\Omega)$ 和 $f \in C^2(\Omega)$，有

$$\triangle\left(\frac{1}{|x|^{N-2}} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right) = \frac{1}{|x|^{N+2}} (\triangle f)\left(\frac{x}{|x|^2}\right). \tag{6.9}$$

其中，$\triangle$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的标准拉普拉斯算子。

证明。注意到

$$\triangle\left(\frac{1}{|x|^{N-2}} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right) = \frac{1}{|x|^{N-2}} \triangle\left(f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right) + 2\nabla \frac{1}{|x|^{N-2}} \cdot \nabla\left(f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right) \tag{6.10}$$

因为 $\triangle\left(\underline{\frac{1}{|x|^{N-2}}}\right) = 0$，其中 ∇ 是 $\mathbb{R}^N$上的梯度。显然

$$\begin{aligned}
\triangle\left(f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right) =& \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\delta_{jk}}{|x|^2} - \frac{2x_j x_k}{|x|^4}\right) \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \\
=& \sum_{j=1}^N \sum_{k,l=1}^N \left(\frac{\delta_{jk}}{|x|^2} - \frac{2x_j x_k}{|x|^4}\right)\left(\frac{\delta_{jl}}{|x|^2} - \frac{2x_j x_l}{|x|^4}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \\
&+ \sum_{k=1}^N \left(-\sum_{j=1}^N \frac{2\delta_{jk}x_j}{|x|^4} - \sum_{j\neq k} \frac{2x_k}{|x|^4} - \frac{4x_k}{|x|^4} + \sum_{j=1}^N \frac{8x_j^2 x_k}{|x|^6}\right) \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \\
=& \frac{1}{|x|^4} \triangle f\left(\frac{x}{|x|^4}\right) - 2(N-2) \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{|x|^4} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\frac{x}{|x|^2}\right).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

But

$$\begin{aligned}
2\nabla \frac{1}{|x|^{N-2}} \cdot \nabla\left(f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right) =& 2(N-2) \sum_{j=1}^N \frac{-x_j}{|x|^N} \sum_{l=1}^N \left(\frac{\delta_{jl}}{|x|^2} - \frac{2x_j x_l}{|x|^4}\right) \frac{\partial f}{\partial x_l}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \\
=& 2(N-2) \sum_{l=1}^N \frac{x_l}{|x|^{N+2}} \frac{\partial f}{\partial x_l}\left(\frac{x}{|x|^2}\right).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

将 (6.11)-(6.12) 代入 (6.10)，得到 (6.9)。 □

推论 6.1. 如果 f在Ω上是次调和的，那么 $\underline{\frac{1}{|x|^{N-2}} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)}$ 在 $\underline{\quad}$ $\iota(\Omega)$上也是次调和的。

证明. 命题 6.1 给出了 $f \in C^2(\Omega)$ 的情形。一般情形可由光滑逼近 $f_\epsilon \downarrow f$ 得出。□

以下 g 是 $OPSH$ 函数在变换 $T_{\mathbf{a}}$下的加权变换公式 .

命题 6.2. 给定一个 $\in B^2$ 和 $u \in OPSH(B^2)$，函数

$$(T_{\mathbf{a}}^* u)(\mathbf{x}) := \frac{1}{|\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})|^6} u(T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})), \qquad \text{where} \quad \Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 2(1+[T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})]_2)^{-1}(1+\mathbf{x}_2), \tag{6.13}$$

也在 B^2 上。

$T_{\mathbf{a}}$ 的光滑性不如复数或四元数单位球自同构，这是因为八元数不满足结合律（参见注 A.1）。不过，下述光滑性将在附录中证明，且足以满足我们的需要。

命题 6.3. 固定一个 $0<\varepsilon<1$。则，*(1)* $\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 关于 $\mathbf{a},\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$是光滑的。
(2) 对于一个 $\in B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$，$\Psi_{\mathbf{a}}(\cdot)$ 在 B^2 上连续；存在一个仅依赖于 ε 的常数 $C_\varepsilon>0$，使得对于任意 $\mathbf{x}\in B^2$，以及 $\mathbf{a}\in B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$，$|\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})|\geq C_\varepsilon$。*(3)* 对于 $\mathbf{x}\in\partial B^2$，$\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 关于 $\mathbf{a}\in B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$ 光滑，其 C^k-范数有界于一个仅依赖于 ε 和给定的 $k\in\mathbb{N}$ 的常数。

推论 6.2。*(1)* $T_{\mathbf{a}}$ 是从 B^2 到其自身的微分同胚；$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 对于$\mathbf{a}$、$\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$是光滑的。*(2)*对于固定的 $\mathbf{a}\in B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$，$T_{\mathbf{a}}$和 $T_{\mathbf{a}}^{-1}$在 B^2上连续。*(3)* 对于$\mathbf{x}\in\partial B^2$，$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$和 $T_{\mathbf{a}}^{-1}(\mathbf{x})$ 关于$\mathbf{a}\in B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$ 是光滑的，并且具有一致有界的 C^k-范数。

为了证明 $T_{\mathbf{a}}^* u$是 (6.13) 中的 $OPSH$，根据 (6.3) 中 $T_{\mathbf{a}}$的定义，我们需要了解 $OPSH$ 函数在膨胀、左平移和凯莱变换下的变换公式。

命题 *6.4*。*(1)* 对于 $\zeta\in\partial\mathcal{U}$和 $\delta>0$，若 $u\in OPSH(\mathcal{U})$，则 $u\circ\tau_\zeta, u\circ D_\delta\in OPSH(\mathcal{U})$。*(2)* 若 $u\in OPSH(\mathcal{U})$，则 $|1+[C(\mathbf{x})]_2|^6 u(C(\mathbf{x}))$ 在 B^2上是 $OPSH$；反之，若 $u\in OPSH(B^2)$，则$|1+[C^{-1}(\mathbf{x})]_2|^6 u(C^{-1}(\mathbf{x}))$ 在 $\mathcal{U}$上是 $OPSH$。

证明。(1) 根据定义，若 $u\in OPSH(\mathcal{U})$，则对于任意 $\alpha\in\mathbb{O}$ 和一个 $=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\in\mathcal{U}$，当 $\mathbf{t}$ 在原点 $\mathbf{0}$ 附近时，$u(\mathbf{a}_1+\alpha\mathbf{t},\mathbf{a}_2+\mathbf{t})$ 和 $u(\mathbf{a}_1+\mathbf{t},\mathbf{a}_2)$ 都是次调和函数。这等价于要求对于任意 $\alpha\in\mathbb{O}$、一个 $\in\Omega$，以及原点 $\mathbf{0}\in\mathbb{O}$ 附近的 $\mathbf{t}$，$u(\mathbf{a}_1+\mathbf{t},\mathbf{a}_2+\alpha\mathbf{t})$ 和 $u(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2+\mathbf{t})$ 都是次调和函数。这是因为

$$\begin{aligned} u(\mathbf{a}) &\leq \frac{1}{|D(\mathbf{0},r)|}\int_{|\mathbf{t}|\leq r} u(\mathbf{a}_1+\alpha\mathbf{t},\mathbf{a}_2+\mathbf{t})dV(\mathbf{t}) \\ &= \frac{1}{|D(\mathbf{0},|\alpha|r)|}\int_{|\mathbf{t}'|\leq|\alpha|r} u(\mathbf{a}_1+\mathbf{t}',\mathbf{a}_2+\alpha^{-1}\mathbf{t}')dV(\mathbf{t}'), \end{aligned}$$

如果我们取变换 $\mathbf{t}'=\alpha\mathbf{t}$，其中 $D(\mathbf{0},r)$ 是 $\mathbb{O}$ 中以 $\mathbf{0}$ 为中心、半径为 r 的球。由此可知，对于固定的 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)\in\partial\mathcal{U}$，

$$u\circ\tau_\zeta|_{(\mathbf{a}_1+\mathbf{t},\mathbf{a}_2+\alpha\mathbf{t})} = u\left(\mathbf{a}_1+\zeta_1+\mathbf{t},\mathbf{a}_2+\zeta_2+\overline{\zeta}_1\mathbf{a}_1+\left(\alpha+\overline{\zeta}_1\right)\mathbf{t}\right),$$

在原点 $\mathbf{0}$ 附近的 $\mathbf{t}$ 上是次调和函数，$u(\tau_\zeta(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2+\mathbf{t}))$ 也如此。同理，

$$u\circ D_\delta|_{(\mathbf{a}_1+\mathbf{t},\mathbf{a}_2+\alpha\mathbf{t})} = u\left(\delta\mathbf{a}_1+\delta\mathbf{t},\delta^2\mathbf{a}_2+\delta^2\alpha\mathbf{t}\right)$$

并且，当$\mathbf{t}$ 在原点$\mathbf{0}$附近时，$u\circ D_\delta|_{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2+\mathbf{t})}$ 是次调和的。因此，$u\circ\tau_\zeta, u\circ D_\delta\in OPSH(\mathcal{U})$。（2）
注意，

$$\begin{aligned} u\circ C|_{(\mathbf{a}_1+\alpha\mathbf{t},\mathbf{a}_2+\mathbf{t})} &= u\left(\sqrt{2}(\mathbf{a}_1+\alpha\mathbf{t})(1+\mathbf{a}_2+\mathbf{t})^{-1},(1-\mathbf{a}_2-\mathbf{t})(1+\mathbf{a}_2+\mathbf{t})^{-1}\right) \\ &= u\left(\sqrt{2}\alpha+\beta(1+\mathbf{a}_2+\mathbf{t})^{-1},-1+2(1+\mathbf{a}_2+\mathbf{t})^{-1}\right) \end{aligned} \tag{6.14}$$

根据定义 凯莱变换（6.4）及交替律，其中 $\beta := \sqrt{2}(\mathbf{a}_1 - \alpha - \alpha\mathbf{a}_2)$。如果取 e

$$v(\mathbf{s}) := u\left(\sqrt{2}\alpha + \beta\mathbf{s}, -1 + 2\mathbf{s}\right),$$

那么， v 在点（$1+\mathbf{a}_2$）附近的 $\mathbb{O}$ 上是次调和的，因为 u 在 C（$\mathbf{a}$）附近是 $OPSH$，且由（6.14）可知， v（（$1+\mathbf{a}_2$）$^{-1}$）$=u$（C（$\mathbf{a}$））也成立。将推论 6.1 应用于 v，可知 $|1+\mathbf{a}_2+\mathbf{t}|^{-6}v$（（$1+\mathbf{a}_2+\mathbf{t}$）$^{-1}$）是次调和的。因此，

$$|1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{t}|^{-6} u\left(\sqrt{2}\alpha + \beta(1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{t})^{-1}, -1 + 2(1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{t})^{-1}\right) \tag{6.15}$$

在原点**0**附近的$\mathbf{t}$ 上是次调和的。但是

$$1 + [C(\mathbf{x})]_2 = 2(1 + \mathbf{x}_2)^{-1}, \tag{6.16}$$

根据定义（6.4）。（6.14）—（6.15）意味着， $|1+[C$（$\mathbf{x}$）$]_2|^6 u$（C（$\mathbf{x}$））在直线 {（$\mathbf{a}_1+\alpha\mathbf{t}$，$\mathbf{a}_2+\mathbf{t}$）；$\mathbf{t}\in\mathbb{O}$}上是次调和的。用同样的论证可知，它在直线 {（$\mathbf{a}_1+\mathbf{t}$，$\mathbf{a}_2$）；$\mathbf{t}\in\mathbb{O}$}上也是次调和的。因为 C^{-1} 与 C具有相同的表达式（6.6），所以关于 C^{-1} 的结论也成立。命题得证。□

命题 *6.2* 的证明。对于$\mathbf{a}$,$\mathbf{x}\in B^2$，记

$$\begin{aligned}
(C^*u)(\mathbf{x}) &:= |1 + [C(\mathbf{x})]_2|^6 u \circ C(\mathbf{x}),\\
(\tau^*_{\zeta_\mathbf{a}}u)(\mathbf{x}) &:= u \circ \tau_{\zeta_\mathbf{a}}(\mathbf{x}),\\
(D^*_{\delta_\mathbf{a}}u)(\mathbf{x}) &:= u \circ D_{\delta_\mathbf{a}}(\mathbf{x}),\\
((C^{-1})^*u)(\mathbf{x}) &:= |1 + [C^{-1}(\mathbf{x})]_2|^6 u \circ C^{-1}(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

根据命题 6.4，它们都是 $OPSH$。由定义 (6.17) 和 (6.16) 可得

$$\begin{aligned}
(C^* \circ \tau^*_{\zeta_\mathbf{a}} \circ D^*_{\delta_\mathbf{a}} \circ (C^{-1})^* u)(\mathbf{x}) &= |1 + [C(\mathbf{x})]_2|^6 |1 + [T_\mathbf{a}(\mathbf{x})]_2|^6 u(T_\mathbf{a}(\mathbf{x}))\\
&= \frac{2^6 |1 + [T_\mathbf{a}(\mathbf{x})]_2|^6}{|1 + \mathbf{x}_2|^6} u(T_\mathbf{a}(\mathbf{x})),
\end{aligned} \tag{6.18}$$

是 $OPSH$，这恰好是 (6.13) 相差一个因子 4^6。 □

推论 6.3。对于给定的 $\mathbf{a}\in B^2$，若 $u\in OPSH(B^2)$，则

$$\left|\Psi_\mathbf{a}\left(T^{-1}_\mathbf{a}(\mathbf{x})\right)\right|^6 u\left(T^{-1}_\mathbf{a}(\mathbf{x})\right) \tag{6.19}$$

在 B^2 上也为 $OPSH$。

证明。对于 $\zeta\in\partial\mathcal{U}$，$\tau_\zeta$ 的逆映射为 $\tau_{\zeta^{-1}}$，其中 $\zeta^{-1}=(-\zeta_1,\zeta_2)$，由定义 (6.7) 可知。由定义 (6.3)，$T^{-1}_\mathbf{a}$:$= C^{-1}\circ D_{\delta^{-1}_\mathbf{a}}\circ\tau_{\zeta^{-1}_\mathbf{a}}\circ C$. 与 (6.18) 类似，可知

$$\left(C^* \circ \tau^*_{\zeta^{-1}_\mathbf{a}} \circ D^*_{\delta^{-1}_\mathbf{a}} \circ (C^{-1})^* u\right)(\mathbf{x}) = \frac{2^6 |1 + [T^{-1}_\mathbf{a}(\mathbf{x})]_2|^6}{|1 + \mathbf{x}_2|^6} u(T^{-1}_\mathbf{a}(\mathbf{x})) \tag{6.20}$$

为 $OPSH$。根据 (6.13) 中 $\Psi_\mathbf{a}$ 的表达式，我们有

$$\Psi_\mathbf{a}(T^{-1}_\mathbf{a}(\mathbf{x})) = 2(1 + \mathbf{x}_2)^{-1}\left(1 + [T^{-1}_\mathbf{a}(\mathbf{x})]_2\right).$$

因此，(6.20) 的右端恰好就是 (6.19)。 □

6.2. **Perron–Bremermann 函数的正则性**。

命题 6.5。 设 $\varphi \in C^2(\partial B^2)$ 且 $u = \Psi_{B^2,\ \varphi}$。则 $u \in Lip(B^2)$。

证明。 我们可以将 φ 延拓为一个 $C_c^2(\mathbb{O}^2)$ 函数，该函数在 ∂B^2 上与 φ 一致，也记作 φ。于是

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0) - \nabla\varphi(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)| \le C|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2$$

根据泰勒展开，对于$\mathbf{x}$，$\mathbf{x}_0 \in \partial B^2$，其中 $C = \|\varphi\|_{C^2}$。现在，对每个$\mathbf{x}_0 \in \partial B^2$，定义一个实线性函数

$$v_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x}_0) + \nabla\varphi(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) - 2C(1-\mathrm{Re}(\mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{x}}_0)) \tag{6.21}$$

对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{O}^2$，这显然成立 $OPSH$。但对于 $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}_0| = 1$,

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}_0|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{x}}_0) = 2(1-\mathrm{Re}(\mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{x}}_0)).$$

我们看到，对于 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}_0 \in B^2$,

$$v_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) + \nabla\varphi(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) - C|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 \le \varphi(\mathbf{x}),$$

并且 $v_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0) = \varphi(\mathbf{x}_0)$。因此 $v_{\mathbf{x}_0}$ 是一个光滑函数，属于族 $\mathscr{B}(B^2,\ \varphi)$。令

$$v(\mathbf{x}) := \sup\{v_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}); \mathbf{x}_0 \in \partial B^2\}, \qquad \mathbf{x} \in \overline{B^2}.$$

显然，它是定义在 B^2 上的 Lipschitz 函数 $\overline{v}$，其 Lipschitz常数为 $C' > 0$。类似地，可以构造一个定义在 B^2 上的 Lipschitz 函数 $\widetilde{v}$，其 Lipschitz常数为 C'，使得 $-\widetilde{v} \in \mathscr{B}(B^2,\ -\varphi)$，并且$\widetilde{v} = \varphi$ 在 ∂B^2 上。因此，根据 Perron–Bremermann 函数的定义， $v \le u \le \widetilde{v}$ 在 B^2 上，于是得到边界估计

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_0)| \le C'|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|, \qquad \text{for} \quad \text{any} \quad \mathbf{x} \in \overline{B^2}, \mathbf{x}_0 \in \partial B^2. \tag{6.22}$$

现在，固定 $\mathbf{y} \in B^2$，令

$$H_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \max\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - C'|\mathbf{y}|\}, & \text{if} \quad \mathbf{x} \in \overline{B^2} \cap (-\mathbf{y} + \overline{B^2}), \\ u(\mathbf{x}), & \text{if} \quad \mathbf{x} \in \overline{B^2} \setminus (-\mathbf{y} + \overline{B^2}). \end{cases} \tag{6.23}$$

我们声称，将 $H_{\mathbf{y}}$ 限制在 B^2 上后，属于 $\mathscr{B}(B^2,\ \varphi)$。对于边界部分$\partial(-\mathbf{y}+B^2)$ 中位于 B^2 内的一点 $\mathbf{x}$，有 $\mathbf{x} \in B^2$ 且 $\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}} \in \partial B^2$。因此，根据边界估计（6.22）， $u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - C'|\mathbf{y}| \le u(\mathbf{x})$。于是，根据命题 2.5 (7)， $H_{\mathbf{y}}$ 在 B^2 上是 $OPSH$。

另一方面，对于 $\mathbf{x} \in \partial B^2 \cap (-\mathbf{y}+B^2)$，有 $\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}} \in \partial B^2$ 且 $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in B^2$，因此由边界估计 (6.22) 再次得到 $u(\mathbf{x}) \ge u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - C'|\mathbf{y}|$。所以，对于 $\mathbf{x} \in \partial B^2$，有 $H_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$。断言得证。因此，对于所有 $\mathbf{x} \in B^2$，都有 $H_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \le u(\mathbf{x})$。特别地，对于 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}+\mathbf{y} \in B^2$，有 $u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - C'|\mathbf{y}| \le u(\mathbf{x})$，即

$$u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) \le C'|\mathbf{y}|.$$

交换 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 的角色，我们得到 $u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \le C'|\mathbf{y}|$。因此， u 是一个 Lipschitz 函数，其 Lipschitz常数为 C'。□

现在证明 u 的二阶差分的内部估计。

命题 6.6。 若 $\varphi \in C^2(B^2)$ 且 $u = \Psi_{B^2,\varphi}$，则对每个 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $C > 0$，使得对所有 $(\mathbf{x},\mathbf{h}) \in B(\mathbf{0}, 1-\varepsilon) \times B(\mathbf{0}, \varepsilon/2)$，我们有如下估计

$$u(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + u(\mathbf{x}-\mathbf{h}) - 2u(\mathbf{x}) < C|\mathbf{h}|^2. \tag{6.24}$$

证明。 固定 $\varepsilon \in (0,1)$。对于 $(\mathbf{a},\mathbf{h}) \in B(\mathbf{0},1-\varepsilon) \times B(\mathbf{0},\varepsilon/2)$，定义

$$L(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}) := T^{-1}_{\mathbf{a}+\mathbf{h}} \circ T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in B^2,$$

根据推论 6.2，它是从 B^2 到自身的微分同胚。于是，我们看到

$$U(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}) := \left(T^*_{\mathbf{a}} \circ \left(T^{-1}_{\mathbf{a}+\mathbf{h}}\right)^* u\right)(\mathbf{x}) = |\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})|^{-6} \left((T^{-1}_{\mathbf{a}+\mathbf{h}})^* u\right)(T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = J_{\mathbf{a},\mathbf{h}}(\mathbf{x}) u\left(L(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x})\right) \tag{6.25}$$

根据命题 6.2，它在 $OPSH$ $\mathbf{x} \in B^2$ 中是

$$J_{\mathbf{a},\mathbf{h}}(\mathbf{x}) := \left| \frac{\Psi_{\mathbf{a}+\mathbf{h}}(L(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}))}{\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})} \right|^6$$

根据命题 6.3 (2) 和推论 6.3 (2)，当 $(\mathbf{a},\mathbf{h}) \in B(\mathbf{0},1-\varepsilon) \times B(\mathbf{0},\varepsilon/2)$ 时，它关于 $\mathbf{x} \in B^2$ 连续。令

$$V(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}) := \frac{1}{2}(U(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}) + U(\mathbf{a},-\mathbf{h},\mathbf{x})).$$

它在 B^2 上也是 $OPSH$。特别地，对于 $\mathbf{h} = 0$,

$$L(\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \qquad V(\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}).$$

注意，$\mathbf{a}+\mathbf{h} \in B(\mathbf{0},1-\varepsilon/2)$ 以及 $T^{-1}{}_{\mathbf{a}+\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \in \partial B^2$，若 $\mathbf{x} \in \partial B^2$。对于 $\mathbf{x} \in \partial B^2$，根据命题 6.3 (3) 和推论 6.2 (3)，我们看到 $V(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x})$ 是 $C^2(\overline{B}(\mathbf{0},1-\varepsilon) \times \overline{B}(\mathbf{0},\varepsilon/2))$，其 C^2 范数仅取决于 ε。因此，对变量 $\mathbf{h}$ 应用泰勒展开，我们得到

$$|V(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}) - V(\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{x})| \le \frac{C_\varepsilon}{2}|\mathbf{h}|^2, \tag{6.26}$$

对于 $\mathbf{a} \in \overline{B}(\mathbf{0},1-\varepsilon)$,$\mathbf{h} \in \overline{B}(\mathbf{0},\varepsilon/2)$ 以及 $\mathbf{x} \in \partial B^2$，其中

$$C_\varepsilon := \sup\left\{ \left| \frac{\partial^2 V(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x})}{\partial h_{\alpha p} \partial h_{\beta p'}} \right| ; \mathbf{a} \in \overline{B}(\mathbf{0},1-\varepsilon), \mathbf{h} \in \overline{B}(\mathbf{0},\varepsilon/2), \mathbf{x} \in \partial B^2, \alpha,\beta = 1,2, p,p' = 0,\dots,7 \right\} < +\infty.$$

因此，我们有

$$V(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}) - \frac{C_\varepsilon}{2}|\mathbf{h}|^2 \le V(\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{for} \quad \mathbf{x} \in \partial B^2.$$

另一方面，对于固定的 $\mathbf{a},\mathbf{h}$，根据命题 6.3 (2) 和推论 6.2 (2)，$V(\mathbf{a},\mathbf{h}\ \cdot)$ 在 B^2 上连续。因此，对于固定的 $\mathbf{a},\mathbf{h}$，我们有 $V(\mathbf{a},\mathbf{h}\ \cdot) - \frac{C_\varepsilon}{2}|\mathbf{h}|^2 \in \mathscr{B}(B^2,\overline{\varphi})$。因此，

$$V(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}) - \frac{C_\varepsilon}{2}|\mathbf{h}|^2 \le u(\mathbf{x}), \tag{6.27}$$

对所有 $(\mathbf{a},\mathbf{h},\mathbf{x}) \in \overline{B}(\mathbf{0},1-\varepsilon) \times \overline{B}(\mathbf{0},\varepsilon/2) \times \overline{B^2}$。在 (6.25) 中令 $\mathbf{a} = \mathbf{x} \in B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$，得到

$$U(\mathbf{x},\mathbf{h},\mathbf{x}) = J(\mathbf{h},\mathbf{x}) u(\mathbf{x}+\mathbf{h}), \qquad \text{with} \quad J(\mathbf{h},\mathbf{x}) := \left| \frac{\Psi_{\mathbf{x}+\mathbf{h}}(\mathbf{x}+\mathbf{h})}{\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})} \right|^6, \tag{6.28}$$

根据 $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$以及 $T^{-1}{}_{\mathbf{x}+\mathbf{h}}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}+\mathbf{h}$根据（6.3）。因此，（6.27）表明，对于（$\mathbf{h},\mathbf{x}$）$\in B(\mathbf{0},\varepsilon/2) \times B(\mathbf{0},1-\varepsilon)$，

$$J(\mathbf{h},\mathbf{x})u(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + J(-\mathbf{h},\mathbf{x})u(\mathbf{x}-\mathbf{h}) - 2u(\mathbf{x}) \le C_\varepsilon|\mathbf{h}|^2. \tag{6.29}$$

注意到，根据 J 的表达式 (6.28)，由命题 6.3 (1)-(2)，$J(\mathbf{0},\ \mathbf{x}) = 1$ 和 $J(\mathbf{h},\overline{\ \mathbf{x}})$ 在 $B(\mathbf{0},\overline{\ \varepsilon/2}) \times B(\mathbf{0},\ 1-\varepsilon)$ 上光滑。因此，

$$|J(\mathbf{h},\mathbf{x}) - 1 - \nabla J(\mathbf{0},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}| \le C'_\varepsilon |\mathbf{h}|^2$$

对于某个仅依赖于 ε 的常数 C'_ε。因此，对于 $(\mathbf{h},\ \mathbf{x}) \in B(\mathbf{0},\ \varepsilon/2)\times B(\mathbf{0},\ 1-\varepsilon)$，我们有

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}+\mathbf{h})+u(\mathbf{x}-\mathbf{h})-2u(\mathbf{x}) \leq & C_\varepsilon|\mathbf{h}|^2+|\nabla J(\mathbf{0},\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}|\cdot|u(\mathbf{x}+\mathbf{h})-u(\mathbf{x}-\mathbf{h})| \\ & + C'_\varepsilon|\mathbf{h}|^2(|u(\mathbf{x}+\mathbf{h})|+|u(\mathbf{x}-\mathbf{h})|)=O(|\mathbf{h}|^2), \end{aligned}$$

根据 (6.29) 和命题 6.5 的 $u \in Lip(B^2)$，估计 (6.24) 得证。 □

对于 $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个域，定义 u 的平滑化

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\tau_N \varepsilon^N}\int_{|\mathbf{y}|<\varepsilon} u(\mathbf{x}+\mathbf{y})dV(\mathbf{y}) \qquad \text{and} \qquad T_\varepsilon u := 2(N+2)\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon^2},$$

其中 τ_N 是单位球的体积。

定理 6.2。假设 $\varphi \in C^2(B^2)$ 且 $u = \Psi_{B^2,\ \varphi}$。那么，u 的弱二阶导数属于 L^∞_{loc}，即 $u \in C^{1,\ 1}_{loc}(B^2)$。

证明。由于 u 是 $OPSH$，

$$\begin{aligned} 0 \leq T_\varepsilon u =& \frac{36}{\tau_{16}\varepsilon^{18}}\int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)} (u(\mathbf{x}+\mathbf{t})-u(\mathbf{x}))\,dV(\mathbf{t}) \\ =& \frac{36}{\tau_{16}\varepsilon^{18}}\int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)} \frac{1}{2}\left(u(\mathbf{x}+\mathbf{t})+u(\mathbf{x}-\mathbf{t})-2u(\mathbf{x})\right)dV(\mathbf{t}) \\ \leq & \frac{18}{\varepsilon^{18}}\int_0^\varepsilon Cr^2 r^{15}dr \leq C, \end{aligned} \tag{6.30}$$

根据命题 6.6。另一方面，直接可见

$$\int_{\mathbb{O}^2} T_\varepsilon u\cdot\varphi dV = \int_{\mathbb{O}^2} u\cdot T_\varepsilon\varphi dV \to \int_{\mathbb{O}^2} u\cdot\Delta\varphi dV,$$

对于 $\varphi \in C^2_c(B^2)$。结合估计 (6.30) 可得 $\triangle u \in L^\infty_{loc}(B^2)$。回顾一下，对于 $\mathbb{R}^N$ 的域 Ω，如果 u 是次调和的且 $\triangle u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$，那么在 $L^\infty_{loc}(\Omega)$ 中 $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon u = \triangle u$ [17, 推论 4.2.3]。

通过使用 Riesz 变换，我们看到对于任意 ~~$1<p<\infty$~~，有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha k}\partial x_{\beta l}} \in L^p_{loc}(B^2)$。但是，如果 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{1k}} \in L^p_{loc}(B^2)$，则总有

$$\frac{u(\mathbf{x}_1+\delta e_k,\mathbf{x}_2)+u(\mathbf{x}_1-\delta e_k,\mathbf{x}_2)-2u(\mathbf{x})}{\delta^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{1k}}(\mathbf{x})$$

当 $\delta\to 0$ 时，在 $L^p_{loc}(B^2)$ 中。因此，存在一个子列，对于固定的 $\varepsilon>0$，在 $B(\mathbf{0},\ 1-\varepsilon)$ 中几乎处处收敛。于是，根据估计 (6.24)，对于某个常数 ~~$C>0$~~，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{\alpha k}} \leq C$ 在 $B(\mathbf{0},\ 1-\varepsilon)$ 上几乎处处成立。因此，$0 \leq \triangle_\alpha u \leq 8C$。这也意味着 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{\alpha k}}$ 也有下界，因为

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{\alpha p}} \leq \sum_{k\neq p}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{\alpha k}} \leq 7C.$$

为了证明混合偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha k}\partial x_{\beta l}}$ 局部有界~~，令 $X = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha k}} + \frac{\partial}{\partial x_{\beta l}}$~~。由上述论证可知，~~$X^2 u$~~ 由 C 局部有界。但是

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha k}\partial x_{\beta l}} = X^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{\alpha k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{\beta l}}.$$

因此~~$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha k}\partial x_{\beta l}}$~~ 局部有界。 □

以下由 Bedford-Taylor [10, 定理 7.3] 得出的结果，在证明 Perron–Bremermann 函数满足齐次 Monge-Amp`ere 方程的过程中起着关键作用。

命题 6.7. 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的有界开子集。设 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 是一个次调和函数，满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_a\partial x_b}\in L^\infty_{loc}(\Omega)$，其中 a、$b=1$、...、N。设 $\eta>0$，并设 $\{\varepsilon_j\}$ 是一个收敛到零的正数序列。那么存在一个紧集 $K\subset\Omega$ 和一个自然数 j_0，使得；

(i) $|\Omega\setminus K|<\eta$; *(ii)* $\frac{\partial^2 u}{\partial x_a\partial x_b}\Big|_K\in C(K)$，

其中 a、$b=1$、...、N; *(iii)* 对所有 $x\in K$、$j>j_0$ 以及 $y\in B(x、\varepsilon_j)$,

$$\left|T_{\varepsilon_j}u(y)-\triangle u(x)\right|\le\eta,\qquad \left|\frac{\partial^2 u_{\varepsilon_j}}{\partial x_a\partial x_b}(y)-\frac{\partial^2 u}{\partial x_a\partial x_b}(x)\right|\le\eta,\qquad a,b=1,\dots,N.$$

定理 *1.2* 的证明。由于 $u\in L^\infty_{2,loc}(B^2)$，根据定理 6.2，我们可以将 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(u))$ 写为 $=gdV$，其中 $g\in L^\infty_{loc}(B^2)$ 是一个非负函数。假设 g 不为零。那么存在某个常数$c\in(0,1)$，使得

$$|\{\mathbf{x}\in B^2;g(\mathbf{x})>c\}|>20\tau_{16}c.$$

设 $\{\varepsilon_j\}$ 是一个收敛于零的正数列，并设

$$M:=\operatorname{esssup}\left\{|\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{y})|;|\mathbf{y}|\le 1-\frac{c}{2},\alpha,\beta=1,2\right\},\qquad a<\frac{c}{2M+1},\qquad \eta<\frac{a}{5}. \tag{6.31}$$

于是，由命题 6.7，存在一个紧集 $K\subset B^2$ 和一个自然数 j_0，使得 *(i)* $|\overline{B^2}\setminus K|<\eta$，*(ii)* $\partial_\alpha\partial_\beta u\in C(K)$，并且对于所有 $\mathbf{x}\in K$, $j>j_0$ 以及 $\mathbf{y}\in B(\mathbf{x}\ \varepsilon_j)$，都有 *(iii)*,

$$\begin{aligned}&\left|T_{\varepsilon_j}u(\mathbf{y})-\triangle u(\mathbf{x})\right|\le\eta,\\ &\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta u_{\varepsilon_j}(\mathbf{y})=\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x})+\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\qquad \text{with}\quad |\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})|\le\eta,\qquad \alpha,\beta=1,2.\end{aligned} \tag{6.32}$$

这里 $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ 由第二个恒等式定义。由于 $|B(\mathbf{0},1)\setminus B(\mathbf{0},1-c)|<16\tau_{16}c$，(6.31) 中对 η 的选取意味着我们有 $|K\cap B(\mathbf{0},1-c)\cap\{\mathbf{x}\in B^2;\ g(\mathbf{x})>c\}|\neq 0$，且 $g\in C(K)$。因此，存在一点 $\mathbf{x}_0\in K\cap B(\mathbf{0},1-c)$，使得 u 在该点二阶可微，$g(\mathbf{x}_0)>c$，并且$|\partial_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x}_0)|<M$。现在令

$$v_j(\mathbf{x})=u_{\varepsilon_j}(\mathbf{x})-(a-2\eta)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2/8+(a-4\eta)\varepsilon_j^2/8-\varepsilon_j^2\frac{\triangle u(\mathbf{x}_0)}{36},$$

对于 $\mathbf{x}\in B(\mathbf{x}_0,\varepsilon_j)$。那么对于 $\mathbf{x}\in B(\mathbf{x}_0,\varepsilon_j)$,

$$\left(\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta v_j(\mathbf{x})\right)=\left(\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x}_0)\right)-aI+(\mathcal{E}_{\alpha\beta})+2\eta I \tag{6.33}$$

由 (6.32) 得。设 $\lambda_2\ge\lambda_1$ 是$\left(\partial_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x}_0)\right)$的两个特征值，即它们是下列方程的解

$$\lambda^2-\operatorname{tr}\left(\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x}_0)\right)\lambda+\det\left(\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x}_0)\right)=0.$$

由于 $\left(\partial_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x}_0)\right)$ 非负，根据命题 2.1，我们必有 $\lambda_2\ge\lambda_1>0$，

nd

$$\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2=tr\left(\overline{\partial}_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x}_0)\right)\le 2M,$$

由（6.31）可得。因此，$\det\left(\partial_\alpha\partial_\beta u(\mathbf{x}_0)\right)=g(\mathbf{x}_0)>c>0$ 意味着

$$2M\lambda_1\ge\lambda_1\lambda_2=g(\mathbf{x}_0)>c.$$

因此， $\lambda_1 \geq \frac{c}{2M} > a$，从而 $\left(\partial_\alpha \partial_\beta u(\mathbf{x}_0)\right) - aI$ 也是正的。 consequently，（6.33）为正，因此 $v_j \in OPSH(\overline{B}(\mathbf{x}_0,\ \varepsilon_j))$。但我们可以写成

$$v_j(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) = \frac{1}{36}(T_{\varepsilon_j} u(\mathbf{x}) - \triangle u(\mathbf{x}_0))\varepsilon_j^2 - (a-2\eta)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2/8 + (a-4\eta)\varepsilon_j^2/8. \tag{6.34}$$

因此，如果 $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{x}_0, \varepsilon_j)$，则有

$$v_j(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_j^2 \left(\frac{1}{36}\eta - \frac{1}{4}\eta\right) < 0,$$

因此 $v_j \leq$ u 在 $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon_j)$ 上成立，这是由 B^2 上的 u 的极大性得出的。但由 (6.34) 和 (6.32) 可知

$$v_j(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{x}_0) \geq \frac{\varepsilon_j^2}{8}\left(a - 4\eta - \frac{2}{9}\eta\right) > 0,$$

由 (??) 得出。这是矛盾。 □

定理 1.2 可以推广到一般的严格八元数伪凸域，正如复 Monge-Ampere 方程的 [10, 定理 8.2-8.3] 所示。细节从略。

定理 6.3。 设Ω 是 $\mathbb{O}^2$ 中的严格八元数伪凸域。对于 $\varphi \in C(\Omega)$，*Perron–Bremermann* 函数 $\Psi_{\Omega,\varphi}$ 属于 $C(\Omega)$，并且是狄利克雷问题的唯一解

$$\begin{cases} u \in OPSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), & \\ \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) = 0, & \text{on} \quad \Omega, \\ u = \varphi, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.35}$$

注 6.1。 四元数 *Monge-Amp`ere* 算子的加权变换公式可见 [32]。因此，单位球上齐次四元数 *Monge-Amp`ere* 方程解的 $C^{1,\frac{1}{loc}}$ -正则性同样成立。

7. Octonionic relative extremal function and octonionic capacity

7.1. **八元数相对极值函数**。 设 Ω 是 $\mathbb{O}^2$ 中的一个域，且 $E \subset\subset \Omega$，令

$$\mathcal{U}(E,\Omega) := \{u \in OPSH(\Omega), u|_\Omega \leq 0, u|_E \leq -1\}, \tag{7.1}$$

并且 $\omega(\mathbf{x}\ E,\Omega) := \sup\{u(\mathbf{x});\ u \in \mathcal{U}(E,\Omega)\}$, 其上半连续正则化 $\omega^*(\mathbf{x}\ E,\Omega)$ 称为集合 E 在 Ω 中的（八元数）相对极值函数。根据命题 2.5 (6)，它是 $OPSH$。

如果存在连续函数 $\varrho \in OPSH(\Omega)$，使得 $\varrho < 0$ 在 Ω 中，$\lim_{\mathbf{x}\to\partial\Omega} \varrho(\mathbf{x}) = 0$ 且 $\{\mathbf{x} \in \Omega$；对任意 $c < 0$，$\varrho(\mathbf{x}) < c\}$ 在 Ω 中相对紧，则称域 Ω 为八元数超凸域。若存在满足上述条件的 $\varrho \in OPSH(G)$, 其中 $G \Subset$为 Ω 的某个开集，则称其为强八元数超凸域。相对极值函数具有以下简单性质。

命题 7.1。 *(1)*（单调性）如果 $E_1 \subseteq E_2 \subset \Omega$，则 $\omega^*(\mathbf{x}\ E_1,\Omega) \geq \omega^*(\mathbf{x}\ E_2,\Omega)$；如果 $E \subseteq \Omega_1 \subset\subset \Omega_2$, , 则 $\omega^*(\mathbf{x}\ E,\Omega_1) \geq \omega^*(\mathbf{x}\ E,\Omega_2)$ 对 $\mathbf{x} \in \Omega_1$成立。

(2) $\omega^*(\mathbf{x}\ E,\ \Omega) \equiv 0$ 当且仅当 E在Ω中是八元数极性的，即 E 包含于 $\{\mathbf{x};\ v(\mathbf{x}) = -\infty\}$对于某个 $OPSH$ 函数 v。

(3) 设Ω $= \{\varrho < 0\}$ 为八元数超凸。若 $E \Subset \Omega$，则 $\omega^*(\mathbf{x}\ E,\ \Omega) \to 0$ 当$\mathbf{x} \to \partial$趋于Ω时。

(4) 设Ω $= \{\varrho < 0\}$ 是强八元数超凸的。若 $E \Subset \Omega$，则 $\omega^*(\cdot, E, \Omega)$ 可延拓为Ω某个邻域上的 $OPHS$。

证明。 (2) 证明与复数情形 [17] 相同。

(3) 注意到，对于适当的 $M>0$， $M\varrho\in\mathcal{U}(E,\Omega)$，因为 $E\Subset\Omega$。于是

$$0\geq\omega^*(\cdot,E,\Omega)\geq M\varrho, \tag{7.2}$$

在 Ω 上，因此我们必有 $\omega^*(\mathbf{x},E,\Omega)\to 0$，当 $\mathbf{x}\to\partial\Omega$ 时。

(4) 根据上面的 (7.2)， $OPSH$ 函数

$$w(\mathbf{x})=\begin{cases}\omega^*(\mathbf{x},E,\Omega), & \mathbf{x}\in\Omega,\\ M\varrho, & \mathbf{x}\in\Omega^c,\end{cases}$$

给出了 Ω 的一个邻域上的延拓。 □

若紧子集 $K\Subset\Omega$ 中的点 $\mathbf{x}_0\in K$ 满足 $\omega^*(\mathbf{x}_0,K,\Omega)=-1$，则称其为一个（八元数）正则点。若紧子集 $K\Subset\Omega$ 中的每一点 K 都是八元数正则点，则称该紧子集在 Ω 中是（八元数）正则的。

命题 7.2. 设Ω是一个八元数超凸域。设 K 是Ω 的紧子集，且是一个闭球族的并。则 $\omega^*(\cdot,K,\Omega)$ 连续，且 $\omega^*(\cdot,K,\Omega)|_K\equiv -1$。

证明。 复数情形的证明见 [17]。我们断言， $\omega(\mathbf{x},B(\mathbf{a},r),B(\mathbf{a},R))$，即同心球$B(\mathbf{a},r)\subset B(\mathbf{a},R)$的相对极值函数，可表示为

$$u_0(\mathbf{x}):=\max\left\{\frac{1}{\frac{1}{r^6}-\frac{1}{R^6}}\left(-\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^6}+\frac{1}{R^6}\right),-1\right\}. \tag{7.3}$$

由命题 5.1，$-\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^6}$ 在 $\mathbb{O}^2$ 上是 $OPSH$，因此 u_0也如此。 $\mathbb{O}^2$ 中的八元数（右）直线集合可由$\mathbf{b}=(b_1,\mathbf{b}_2)$参数化，其中 $b_1\in\mathbb{R},\mathbf{b}_2\in\mathbb{O}$ 且 $b_1^2+|\mathbf{b}_2|^2=1$:

$$\{\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{t};\mathbf{t}\in\mathbb{O}\}, \tag{7.4}$$

注意，对于任意 $v\in OPSH(B(\mathbf{a},R))$，满足 $v|_{B(\mathbf{a},R)}\leq 0$和 $v|_{B(\mathbf{a},r)}\leq -1$，以及如上所述给定的 $\mathbf{b}$，函数 v 在八元数直线 (7.4) 上是次调和的。因此， $f(\mathbf{t})=v(\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{t})-u_0(\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{t})$ 在 $\mathbb{O}$ 中的环域 $D(\mathbf{0},R)\setminus D(\mathbf{0},r)$ 上是次调和的。这是因为

$$u_0(\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{t})=\frac{-\frac{1}{|\mathbf{t}|^6}+\frac{1}{R^6}}{\frac{1}{r^6}-\frac{1}{R^6}}$$

在 $\mathbb{O}\setminus D(0,r)$ 中是调和的。此外，根据 v 的假设，对于边界 $D(0,R)\setminus D(0,r)$ 上的每个 $\mathbf{c}$，$\limsup_{\mathbf{t}\to\mathbf{c}}f(\mathbf{t})\leq 0$。由次调和函数的最大值原理可知，$f\leq 0$在 $D(0,R)\setminus D(0,r)$ 上成立。由于 $B(\mathbf{a},R)\setminus B(\mathbf{a},r)$ 中的每个点都属于某条八元数直线 (7.4) 上的某个环域，因此我们得到，在 $B(\mathbf{a},R)\setminus B(\mathbf{a},r)$ 上， $v(\mathbf{x})\leq u_0(\mathbf{x})$。因此， u_0 正是相对极值函数 $\omega(\cdot,B(\mathbf{a},r),B(\mathbf{a},R))$。它是连续的。

设 $\mathbf{y}\in K$。根据假设，存在$\mathbf{a}\in K$ 和 $R>r>0$，使得$\mathbf{y}\in B(\mathbf{a},r)\subset K$ 且$\overline{B}(\mathbf{a},R)\subset\Omega$。现在，若$\mathbf{x}\in B(\mathbf{a},R)$，则有

$$\omega(\mathbf{x},K,\Omega)\leq\omega(\mathbf{x},\overline{B}(\mathbf{a},r),\Omega)\leq\omega(\mathbf{x},\overline{B}(\mathbf{a},r),B(\mathbf{a},R)),$$

由命题 7.2 中的单调性可得。但是,

$$\omega(\cdot,\overline{B}(\mathbf{a},r),B(\mathbf{a},R))|_{\partial B(\mathbf{a},r)}=-1\qquad\text{and}\qquad\omega(\cdot,\overline{B}(\mathbf{a},r),B(\mathbf{a},R))|_{\partial B(\mathbf{a},R)}=0,$$

由 (7.3) 可得。因此 $\limsup_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}}\omega^*(\mathbf{x},K,\Omega)\leq -1$。显然， $\omega^*(\mathbf{y},K,\Omega)\geq -1$。

为证明连续性，注意到我们可以选择超凸域的连续定义函数 ϱ 使得 $\varrho\leq u:=\omega^*(\cdot,K,\Omega)$ 位于 Ω 中。给定 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$使得 $u-\varepsilon<\varrho$在 $\Omega\setminus\Omega_\eta$上，并且 $K\subset\Omega_\eta:=\{\mathbf{x}\in\Omega;\ \mathrm{dist}(\mathbf{x},\partial\Omega)>\eta\}$。由 $OPSH$ 的光滑逼近， $u_\delta\downarrow u$ 当 $\delta\downarrow 0$时，以及

Dini 定理可知，当 $\delta > 0$ 足够小时，我们有 $u_\delta - 2\varepsilon < \varrho$ 在 $\partial\Omega_\eta$ 上，且 $u_\delta - 2\varepsilon < -1$在 K上。现在定义

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varrho, & \text{in} \quad \Omega \setminus \Omega_\eta, \\ \max\{u_\delta - 2\varepsilon, \varrho\}, & \text{in} \quad \Omega_\eta, \end{cases}$$

它也是连续的。因此 $v_\varepsilon \in \mathcal{U}(K, \Omega)$ 和 $u - 2\varepsilon \le v_\varepsilon \le u$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意选取的， u 是连续的。□

推论 7.1。对于开集 U 的任意紧子集 K，存在一个八元数正则紧子集 E，使得 $K \subset E \Subset U$。特别地，对于$\mathbf{x} \in E$，有 $\omega^*(\mathbf{x}, E, \Omega) = -1$。

证明。取 E 为 $K_\eta := \{\mathbf{x} \in \Omega;$ 当 $\eta > 0$ 足够小时，$\mathrm{dist}(\mathbf{x}, K) \le \eta\} = \bigcup_{\mathbf{a}\in K} B(\mathbf{a}, \eta)$，并使用命题 7.2。□

命题 7.3。设 K 是八元数超凸域Ω中的八元数正则紧子集。那么，（*1*） $\omega^*(\cdot, K, \Omega) \in C(\Omega)$；（*2*）相对极值函数 $\omega^*(\cdot, K, \Omega)$在$\Omega \setminus K$中是极大的；（*3*）

$$\det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot, K, \Omega))) = 0 \qquad on \quad \Omega \setminus K. \tag{7.5}$$

证明。(1) 设 $\Omega_j := \{\mathbf{x} \in \Omega;\ \omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega) < -1/j\}$ 对正整数 j成立。于是，根据超凸域 Ω 上的 (7.2)，有 $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ 且 $\Omega_j \Subset \Omega$。固定一个 j_0，相对极值函数可以在 Ω_{j_0}上由光滑的 $OPSH$ 函数 $v_t \downarrow \omega^*(\cdot, K, \Omega)$ 逼近。对该序列两次应用 Hartogs 引理 [17, 定理 2.6.4] 关于次调和函数的结论，我们可知存在 t_0，使得当 $t \succeq t_0$时，在 Ω_{j_0} 上有$v_t \le 0$，并且同时在 K上有 $v_t \le -1 + 1/j_0$。于是函数

$$\widetilde{w}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \max\{v_t(\mathbf{x}) - 1/j_0, \omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega)\}, & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_{j_0}, \\ \omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega), & \text{if } \mathbf{x} \notin \Omega_{j_0}, \end{cases}$$

根据命题 2.5，是 $OPSH$，因此属于 $\mathcal{U}(K, \Omega)$。于是，

$$\omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega) - 1/j_0 \le v_t(\mathbf{x}) - 1/j_0 \le \widetilde{w}(\mathbf{x}) \le \omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega) \qquad \text{for} \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{j_0}.$$

因此， v_t 在 Ω 的紧子集上一致收敛于 $\omega^*(\cdot, K, \Omega)$。所以它是连续的。

(2) 假设 $\omega^*(\cdot, K, \Omega)$ 不是极大的。那么存在一个域 $G \Subset D \setminus K$和一个函数$v \in OPSH(G)$，使得 $\limsup_{\mathbf{x}\in\partial G}(\omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega) - v(\mathbf{x})) \ge 0$，但在某一点$\mathbf{x}_0 \in G$，$v(\mathbf{x}_0) > \omega^*(\mathbf{x}_0, K, \Omega)$。由 (1) 可知 $\omega^*(\cdot, K, \Omega)|_K \equiv -1$，函数

$$w(\mathbf{x}) = \begin{cases} \max\{v(\mathbf{x}), \omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega)\}, & \text{if } \mathbf{x} \in G, \\ \omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega), & \text{if } \mathbf{x} \notin G, \end{cases}$$

根据定义属于 $\mathcal{U}(K, \Omega)$，因此 $w \le \omega^*(\cdot, K, \Omega)$。这与 $w(\mathbf{x}_0) = v(\mathbf{x}_0) > \omega^*(\mathbf{x}_0, K, \Omega)$ 矛盾。

(3) 假设 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot, K, \Omega)))$ 在 $\Omega\setminus K$ 上不为零。存在一个球 $B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega\setminus K$，其中

$$\det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot, K, \Omega))) \neq 0 \tag{7.6}$$

作为一个测度。令 $v(\mathbf{x})$ 为具有连续边界值的狄利克雷问题的连续佩龙-布雷默曼解：

$$\begin{cases} \det(Hess_{\mathbb{O}}(v)) = 0, & \text{on} \quad B(\mathbf{x}_0, r), \\ v = \omega^*(\cdot, K, \Omega), & \text{on} \quad \partial B(\mathbf{x}_0, r), \end{cases}$$

由定理 6.3 给出。根据构造，它是极大的。特别地， $v \geq \omega^*(\cdot, K, \Omega)$ 在 $B(\mathbf{x}_0, r)$ 上成立。但根据 (7.6), $v \not\equiv \omega^*(\cdot, K, \Omega)$ 在 $B(\mathbf{x}_0, r)$ 上成立。因此，对于某个 $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{x}_0, r)$，有 $v(\mathbf{x}') > \omega^*(\mathbf{x}', K, \Omega)$。但是

$$w(\mathbf{x}) = \begin{cases} \omega^*(\mathbf{x}, E, \Omega), & \mathbf{x} \in \Omega \setminus B(\mathbf{x}_0, r), \\ \max\{v(\mathbf{x}), \omega^*(\mathbf{x}, E, \Omega)\}, & \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r), \end{cases}$$

属于 $\mathcal{U}(K, \Omega)$。那么 $w(\mathbf{x}') > \omega^*(\mathbf{x}', K, \Omega)$ 与 (2) 中 $\omega^*(\cdot, K, \Omega)$ 的极大性矛盾。 □

7.2. **八元数容量**。复容量参见 [22, 第 3] 节。集合 $E \subset \Omega$ 的八元数外容量定义为 $C^*(E) = \inf\{C(U); U \supset E\}$ 为开集。根据定义，它显然具有单调性。

命题 7.4。设 Ω 是 $\mathbb{O}^2$ 中的八元数超凸域。那么，

(1) 对任意八元数正则紧子集 $K \subset\subset \Omega$，(1.6) 成立。*(2)* 对任意紧子集 $K \subset \Omega$， $C(K) = \inf\{C(E); \Omega \supset E \supset K$，且 E 是八元数正则紧子集$\}$。特别地， $C^*(K) = C(K)$。

(3) 若 K 是八元数正则紧子集，则

$$C(K) = \sup_{u_1, u_2 \in \mathscr{L}} \int_K \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1), Hess_{\mathbb{O}}(u_2)), \tag{7.7}$$

其中 $\mathscr{L} := \{u \in OPSH(\Omega) \cap C(\Omega); -1 \leq u < 0\}$.

(4) 假设 Ω 是强八元数超凸的。若 $U \subset\subset \Omega$ 是一个开集，则

$$C(U) = \sup_{u_1, u_2 \in \mathscr{L}} \int_U \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1), Hess_{\mathbb{O}}(u_2)) = \sup_{u_1, u_2 \in \mathscr{L}_\infty} \int_U \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1), Hess_{\mathbb{O}}(u_2)), \tag{7.8}$$

其中 $\mathscr{L}_\infty := \{u \in OPSH(\Omega) \cap C^\infty(\Omega); -1 \leq u < 0\}$.

(5) 外容量具有单调性，即若 $E_1 \subseteq E_2$，则 $C^*(E_1) \leq C^*(E_2)$；并且具有可数次次可加性，即 $C^*(\cup_j E_j) \leq \sum_j C^*(E_j)$。

(6) 若 $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ 是Ω的开子集，则 $C\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j, \Omega\right) = \lim_{j \to \infty} C(U_j, \Omega)$。

(7) 如果 $E \subset D \subset \Omega$，则 $C^*(E, D) \leq C^*(E, \Omega)$。

证明。 (1) 对于 (1.5) 中任意的 $u \in \mathcal{U}^*(K, \Omega)$ 和任意 $0 < \varepsilon < 1$，考虑开集

$$O := \{\mathbf{x} \in \Omega; u(\mathbf{x}) < (1 - \varepsilon)\omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega) - \varepsilon/2\}.$$

由于 $\omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega) = -1$ 对 $\mathbf{x} \in K$ 成立，并且根据命题 7.3 连续，因此有 $O \supset K$。这里 $-\varepsilon/2$保证 O 在 Ω 中相对紧，即 $\Omega \Supset O \supset K$。然后应用比较原理可得

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon)^2 \int_K \det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot, K, \Omega))) &= (1 - \varepsilon)^2 \int_O \det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot, K, \Omega))) \\ &\leq \int_O \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \leq \int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(u))\end{aligned}$$

由 (7.5) 得。令 $\varepsilon \to 0$，可见 (1.4) 右端的下确界由 $\omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega)$ 取得。

(2) 由单调性得 $C(K) \leq C(E)$。反之，对于任意 $0 < \varepsilon < 1$，取 $u \in \mathcal{U}^*(K, \Omega)$，使得$\int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) < C(K) + \varepsilon$。由于 $U := \{\mathbf{x} \in \Omega; u(\mathbf{x}) < -1 + \varepsilon/2\}$ 是紧集 K的一个邻域，存在一个正则紧子集 E，使得 $K \subset E \Subset U$，由推论 7.1 得。考虑

$$O := \{\mathbf{x} \in \Omega; u(\mathbf{x}) < (1 - \varepsilon)\omega^*(\mathbf{x}, E, \Omega) - \varepsilon/2\}.$$

于是， $E \subset O \Subset \Omega$ 如上所述，因此

$$C(E) = \int_E \det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\mathbf{x}, E, \Omega))) \le \int_O \det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\mathbf{x}, E, \Omega)))$$
$$\le \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \int_O \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \le \frac{C(K)+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2},$$

对正则紧子集 E 使用 (1.6) 和比较原理。令$\varepsilon \to 0$，即可得到结论。

(3) 通过使用 (1.6)， $C(K)$ 小于或等于 (7.7) 式右端。另一方面，对于任意满足 $-1 \le u_j < 0$ 的 $u_j \in OPSH(\Omega) \cap C(\Omega)$，考虑

$$v_j(\mathbf{x}) := \max\left\{(1+\varepsilon)\omega^*(\mathbf{x}, K, \Omega), (1-\varepsilon)u_j(\mathbf{x}) - \varepsilon/2\right\}.$$

于是， $v_j \in OPSH(\Omega) \cap C(\Omega)$ 满足 $-1 \le v_j < 0$， $\lim_{\mathbf{x}\to\partial\Omega} v_j(\mathbf{x}) = 0$，并且在边界附近有 $v_j \equiv (1+\varepsilon)\omega^*(\cdot, K, \Omega)$。我们得到

$$(1+\varepsilon)^2 \int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot, K, \Omega))) = \int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(v_1), Hess_{\mathbb{O}}(v_2))$$
$$\ge (1-\varepsilon)^2 \int_K \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1), Hess_{\mathbb{O}}(u_2)).$$

通过推论 4.2 以及在 K 上的 $v_j \equiv (1-\varepsilon)u_j - \varepsilon/2$。令 $\varepsilon \to 0$，我们得到不等式的另一个方向，因为在 Ω 上 $\det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*)) = 0 \setminus K$。

(4) 对于任意满足 $-1 \le u_1, u_2 < 0$ 的 $u_1, u_2 \in OPSH(\Omega) \cap C(\Omega)$，我们有

$$C(U) \ge C(K) \ge \int_K \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1), Hess_{\mathbb{O}}(u_2))$$

由 (3) 得。于是 $C(U) \ge \int_U \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1)\ Hess_{\mathbb{O}}(u_2))$，因为 K 可以任意选取为正则紧子集。因此， $C(U)$ 大于或等于 (7.8) 式的右端。

另一方面，由于 Ω 是强双曲凸域，根据命题 7.1 (4)，相对极值函数 $\omega^*(\mathbf{x}\ K,\Omega)$ 可延拓为 Ω 某个邻域上的 $OPSH$，因此它可以在 Ω 的某个邻域内由函数 $\overline{O}PSH \cap C^\infty(\widetilde{v}_j \downarrow \omega^*(\cdot, K, \Omega))$ 逼近。于是由定理 A,

$$C(K) = \int_K \det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot, K, \Omega))) = \int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(\omega^*(\cdot, K, \Omega)))$$
$$\le \overline{\lim}_{j\to\infty} \int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{v}_j)) = \overline{\lim}_{j\to\infty} (1-\varepsilon)^{-2} \int_\Omega \det(Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{w}_j))$$

若记 $\widetilde{w}_j = (1-\varepsilon)\widetilde{v}_j - \varepsilon$。这里，当 j 较大时， $-1 \le \widetilde{w}_j < 0$。因此， $C(K)$ 受 (7.8) 式右端乘以 $(1-\varepsilon)^{-2}$ 所控制。由于 K 是任意选取的紧子集，令 $\varepsilon \to 0$ 即得结论。

(5) 对于紧子集 K， $C^*(E)$ 的单调性由 $C(K)$ 的单调性推出。若 E_j 是开集，则利用 (4)，我们有

$$C^*(\cup_j E_j) = \sup_{u\in\mathscr{L}} \int_{\bigcup_j E_j} \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \le \sup_{u\in\mathscr{L}} \sum_j \int_{E_j} \det(Hess_{\mathbb{O}}(u)) \le \sum_j C^*(E_j).$$

一般而言，我们可以找到一个开集 $U_j \supset E_j$，使得对于每个 j， $C(U_j) - C^*(E_j) \le \varepsilon/2^j$。于是

$$\varepsilon + \sum_j C^*(E_j) \ge \sum_j C(U_j) \ge C(\cup_j U_j) \ge C(\cup_j E_j).$$

令 $\varepsilon \to 0$，即可得到该结果。

(6)-(7) 根据定义显然成立。 □

由 (4) 和 (5)，我们得到一个有用的估计：对于八元数强双曲凸域 Ω，存在一个邻域 Ω′ ⊃Ω，使得

$$\int_U \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_1), Hess_{\mathbb{O}}(u_2)) \le C(U) \tag{7.9}$$

对于任意 $u_j \in OPSH(\Omega') \cap C(\Omega')$，其中 $-1 \le u_j < 0$ 在 Ω 上且 $|u_j| \le 1$ 在 Ω′ 上，，2。

备注 7.1. *Sadullaev-Abdullaev* [22,23] 中关于相对极值函数和容量的若干结果，也可以仅利用复 m-海森矩阵的 *Chern-Levine-Nirenberg*不等式（参见 *Nguyen* [20]）来证明。这种方法不依赖于球上的狄利克雷问题的解。八元数情形也是如此。

8. The quasicontinuity of locally bounded $OPSH$ functions

引理 8.1. [28, 推论 3.1] 如果 u, (Ω) 且令 ω 为一个非负连续的 $\mathcal{H}^2(\mathbb{O})$值函数。那么

$$\left|\int_\Omega \det\left(\mathcal{T}(du \otimes dv), \omega\right)\right|^2 \le \int_\Omega \det\left(\mathcal{T}(du \otimes du), \omega\right) \cdot \int_\Omega \det\left(\mathcal{T}(dv \otimes dv), \omega\right). \tag{8.1}$$

证明。 注意，映射 $(u, v) \to \det(\mathcal{T}(du \otimes dv)\ \omega)$ 是实双线性且对称的，并且由命题 2.2 (1) 和命题 2.4 (1)，$\det(\mathcal{T}(du \otimes du)\ \omega)$ 非负。因此它满足柯西-施瓦茨不等式。□

定理*1.3*的证明。 (1) 由于容量根据命题 7.4 (5) 具有可数次可加性，因此只需对单位球 $B^2 \subset \Omega$ 证明该定理，并证明对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个开集$U \subset B^2$，使得 $C(U \cap B', B) < \epsilon$，且 u在 $B' \setminus U$,上连续，其中 $B' = B(\mathbf{0}, 1/2)$。假设 $-1 \le u \le 0$。与命题 4.1 的证明类似，若将 u替换为 $\max\{u, v\}$，其中 $v(\mathbf{x}) = 2(|\mathbf{x}|^2 - \frac{3}{4}),$，则$B'$ 内的值保持不变，而 $u \equiv v$ 在球面的某个邻域内成立。令 $u_p \downarrow u$, $v_p \downarrow v$ 为标准逼近。注意，对于 $p > p_0$， $u_p \equiv v_p$ 在 ∂B 的某个邻域内成立。我们可以假设

$$\lim_{p \to +\infty} \int_B u_p \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p)) \tag{8.2}$$

如有必要，可通过取子列得到，因为根据命题 4.1，它们有界。对于固定的$\sigma > 0$，考虑

$$U_{p,N}(\sigma) := \{\mathbf{x} \in B' : \varphi_{p,N}(\mathbf{x}) := u_p(\mathbf{x}) - u_{p+N}(\mathbf{x}) > \sigma\},$$

于是有$U_{p,\ N}(\sigma) \subset U_{p,\ N+1}(\sigma)$，以及$\bigcup_{N=1}^{\infty} U_{p,\ N} = U_p(\sigma) := \{\mathbf{x} \in B' :\ u_p(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) > \sigma\}$. 于是，根据命题 7.4 (6)，有 $C(U_p(\sigma)) = C(\bigcup_{N=1}^{\infty} U_{p,\ N}(\sigma)) = \lim_{N \to \infty} C(U_{p,\ N}(\sigma))$。

考虑类 $\mathcal{L} := \{u \in OPSH \cap C^\infty(B(\mathbf{0},\ 1 + \delta));\ |u| \le 1\}$ 对于固定的 $\delta > 0$。由于开集$U_{p,\ N}(\sigma) \subset B' \Subset B^2$，由命题 7.4 (4) 可得

$$C(U_{p,N}(\sigma)) \le \sup_{\widetilde{u} \in \mathcal{L}} \int_{U_{p,N}(\sigma)} \det(Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u})) \le \sup_{\widetilde{u} \in \mathcal{L}} \frac{1}{\sigma} \int_{B^2} \varphi_{p,N} \det(Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u})). \tag{8.3}$$

(2) 为了估计（8.3）的右端，我们首先为 $\mathcal{L}$ 中的函数建立一个积分估计。令$\varrho := (|\mathbf{x}|^2 - 1)/2$ 为单位球 B^2 的定义函数。考虑满足以下条件的函数 $\widetilde{v}, \widetilde{u}, \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2 \in \mathcal{L}$

$\varphi_0 = \widetilde{v} - \widetilde{u} \geq 0$ 属于 B^2，且在球面 ∂B^2 上为常数。那么

$$
\begin{aligned}
&\int_{B^2} \varphi_0 \det(Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_1), Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2)) \\
=&\varphi_0|_{\partial B^2} \int_{\partial B^2} \det\left(\mathcal{T}(d\widetilde{u}_1 \otimes d\varrho), Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2)\right) dS - \int_{B^2} \det\left(\mathcal{T}(d\varphi_0 \otimes d\widetilde{u}_1), Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2)\right) \\
=&\varphi_0|_{\partial B^2} \int_{B^2} \det\left(Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_1), Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2)\right) - \int_{B^2} \det\left(\mathcal{T}(d\varphi_0 \otimes d\widetilde{u}_1), Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2)\right) \\
\leq&C\|\varphi_0\|_{C(\partial B^2)} - \int_{B^2} \det\left(\mathcal{T}(d\varphi_0 \otimes d\widetilde{u}_1), Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2)\right)
\end{aligned} \tag{8.4}
$$

利用引理 1.1 中的分部积分以及 $|\mathrm{grad}\varrho| = 1$ on ∂B^2，其中 C 是与 $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2 \in \mathcal{L}$ 无关的绝对常数（由命题 4.1 得出）。将引理 8.1 应用于 $u = \varphi_0, v = \widetilde{u}_1$ 和光滑闭非负函数 $\omega = Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2)$，并两次使用分部积分 (1.1)，得到

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{B^2} \det\left(\mathcal{T}(d\varphi_0 \otimes d\widetilde{u}_1), \omega\right)\right|^2 &\leq \int_{B^2} \det\left(\mathcal{T}(d\widetilde{u}_1 \otimes d\widetilde{u}_1), \omega\right) \int_{B^2} \det\left(\mathcal{T}(d\varphi_0 \otimes d\varphi_0), \omega\right) \\
&\leq C\left(\varphi_0|_{\partial B^2} \int_{\partial B^2} \det\left(\mathcal{T}(d\varphi_0 \otimes d\varrho, \omega\right) dS - \int_{B^2} \varphi_0 \det(Hess_{\mathbb{O}}(\varphi_0), \omega)\right) \\
&= C\left(\varphi_0|_{\partial B^2} \int_{B^2} \det(Hess_{\mathbb{O}}(\varphi_0), \omega) - \int_{B^2} \varphi_0 \det(Hess_{\mathbb{O}}(\varphi_0), \omega)\right) \\
&\leq C\left(2C\|\varphi_0\|_{C(\partial B^2)} + \int_B 2\varphi_0 \det\left(Hess_{\mathbb{O}}\left(\frac{\widetilde{u}+\widetilde{v}}{2}\right) - Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{v}), \omega\right)\right) \\
&\leq 2C\left(C\|\varphi_0\|_{C(\partial B^2)} + \int_{B^2} \varphi_0 \det(Hess_{\mathbb{O}}(\varphi_0^+), \omega)\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\varphi_0^+ = \frac{\widetilde{u}+\widetilde{v}}{2} \in \mathcal{L}$。第二个不等式由命题 4.1 中的局部一致估计以及 $\varphi_0|_{\partial B^2} = \|\varphi_0\|_{C(\partial B^2)}$ 得出，而第三个等式成立是因为

$$
\left|\int_{B^2} \det(Hess_{\mathbb{O}}(\varphi_0), \omega)\right| \leq \int_{B^2} \det(Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}+\widetilde{v}), \omega) \leq 2C,
$$

而上述最后一个不等式是由事实 $\varphi_0 \geq 0$ and $Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}+\widetilde{v})\ \omega = Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2) \geq 0$ 得出的。再次应用这一过程，我们得到

$$
\int_{B^2} \varphi_0 \det(Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_1), Hess_{\mathbb{O}}(\widetilde{u}_2)) \leq C''\left(\|\varphi_0\|_{C(\partial B^2)} + \int_{B^2} \varphi_0 \det(Hess_{\mathbb{O}}(\varphi_0^+))\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{8.5}
$$

其中 $C'' > 0$ 为某个绝对常数。

(3) 将估计 (8.5) 应用于 (8.3)，取 $\varphi_0 = u_p - u_{p+N}$，得到

$$
C(U_{p,N}(\sigma)) \leq \frac{C''}{\sigma}\left(\|v_p - v_{p+N}\|_{C(\partial B^2)} + \int_{B^2} \varphi_{p,N} \det\left(Hess_{\mathbb{O}}\left(\varphi_{p,N}^+\right)\right)\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{8.6}
$$

由 $u_p - u_{p+N} = v_p - v_{p+N}$ 在 ∂B^2 上为常数，其中 $\varphi_{p,N}^+ := (u_p + u_{p+N})/2$. 注意

$$
\begin{aligned}
4\det(Hess_{\mathbb{O}}(\varphi_{p,N}^+)) &= \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p + u_{p+N})) \\
&= \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p)) + 2\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p), Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N})) + \det(Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N})).
\end{aligned} \tag{8.7}
$$

下面证明

$$\int_{B^2}(u_p-u_{p+N})\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p),Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N}))\to 0, \tag{8.8}$$

当 $N\to\infty$，然后 $p\to\infty$ 时一致地。如果记 $\omega=Hess_{\mathbb{O}}(u_p)$，则有

$$\begin{aligned}\int_{B^2}u_p\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N}),\omega)=&\int_{\partial B^2}u_p\det\left(\mathcal{T}(du_{p+N}\otimes d\varrho),\omega\right)dS-\int_{B^2}\det\left(\mathcal{T}(du_p\otimes du_{p+N}),\omega\right)\\=&\int_{\partial B^2}u_p\det\left(\mathcal{T}(du_{p+N}\otimes d\varrho),\omega\right)dS-\int_{\partial B^2}u_{p+N}\det\left(\mathcal{T}(du_p\otimes d\varrho),\omega\right)dS\\&+\int_{B^2}u_{p+N}\det\left(Hess_{\mathbb{O}}(u_p),\omega\right)\\\leq&A_{p,N}+\int_{B^2}u_p\det\left(Hess_{\mathbb{O}}(u_p),Hess_{\mathbb{O}}(u_p)\right),\end{aligned}$$

在（1.1）中利用分部积分，其中

$$A_{p,N}:=\int_{\partial B^2}v_p\det\left(\mathcal{T}(dv_{p+N}\otimes d\varrho),Hess_{\mathbb{O}}(v_p)\right)dS-\int_{\partial B^2}v_{p+N}\det\left(\mathcal{T}(dv_p\otimes d\varrho),Hess_{\mathbb{O}}(v_p)\right)dS, \tag{8.9}$$

因为 $u_p=v_p$ 在 $p>p_0$ 的某个邻域内成立，其中 ∂B^2。类似地，交换 p 和 $p+N$，我们得到 t

$$\begin{aligned}\int_{B^2}u_{p+N}\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p),Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N}))=&B_{p,N}+\int_{B^2}u_p\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N}),Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N}))\\\geq&B_{p,N}+\int_{B^2}u_{p+N}\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N}),Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N})),\end{aligned} \tag{8.10}$$

由 $u_p\geq u_{p+N}$ 和 $Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N})\geq 0$，其中

$$B_{p,N}:=\int_{\partial B^2}v_{p+N}\det\left(\mathcal{T}(dv_p\otimes d\varrho),Hess_{\mathbb{O}}(v_{p+N})\right)dS-\int_{\partial B^2}v_p\det\left(\mathcal{T}(dv_{p+N}\otimes d\varrho),Hess_{\mathbb{O}}(v_{p+N})\right)dS.$$

最后我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{B^2}(u_p-u_{p+N})\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p),Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N})))\\\leq&A_{p,N}-B_{p,N}+\int_{B^2}u_p\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p))-\int_B u_{p+N}\det Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N})).\end{aligned} \tag{8.11}$$

由于序列 $\{v_p\}$ 在 $C^2(B^2)$ 中收敛，我们有

$$A_{p,N}\to\int_{\partial B^2}v_p\det\left(\mathcal{T}(dv\otimes d\varrho),Hess_{\mathbb{O}}(v_p)\right)-\int_{\partial B^2}v\det\left(\mathcal{T}(dv_p\otimes d\varrho),Hess_{\mathbb{O}}(v_p)\right)\to 0, \tag{8.12}$$

当 $N\to\infty$ 时，$p\to\infty$，于是 $p\to\infty$。类似地，$B_{p,\ N}\to 0$。由于 (8.2) 中的序列 $\int_{B^2}u_p$det$(Hess_{\mathbb{O}}($ $u_p))$ 在 $p\to\infty$ 时有极限，(8.11) 的右端趋于 0，即 (8.8) 成立。类似地，我们可以证明

$$\begin{aligned}&\int_{B^2}(u_p-u_{p+N})\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_p),Hess_{\mathbb{O}}(u_p))\to 0,\\&\int_{B^2}(u_p-u_{p+N})\det(Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N}),Hess_{\mathbb{O}}(u_{p+N}))\to 0,\end{aligned} \tag{8.13}$$

以及 $N\to\infty$，然后 $p\to\infty$。将 (8.8) 和 (8.13) 应用于 (8.6)-(8.7)，得到

$$\lim_{p\to\infty}C(U_p(\sigma))=\lim_{p\to\infty}\lim_{N\to\infty}(U_{p,N}(\sigma))=0.$$

现在固定 $\epsilon > 0$，对于 $\sigma = \frac{1}{j}$，存在 $p_j > 0$，使得若记 $U_{p_j} := U_{p_j}(1/j)$，则有$C(U_{p_j}) \leq \frac{\epsilon}{2^j}$。由于对于集合 U_{p_j} 外的 $p > p_j$， $u_p(x) - u(x) < \frac{1}{j}$，因此我们看到， u_p 在开集 $U = \cup_{j=1}^{\infty} U_{p_j}$ 外一致收敛到 u。由于 $u_p \in C^\infty(B^2)$ u 在 U 外连续，且$C(U) = C\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_{p_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} C(U_{p_j}) \leq \epsilon.$定理得证。 □

Appendix A. Automorphisms of the unit ball of $\mathbb{O}^2$

八元数海森堡群 $\mathscr{H}$是 $\mathbb{O} \oplus \mathrm{Im}\ \mathbb{O}$，其乘法定义如下:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x}', \mathbf{t}') = (\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{t} + \mathbf{t}' + 2\mathrm{Im}(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{x}')), \tag{A.1}$$

其中 (x, t)、(x′, t′) $\in \mathbb{O} \oplus$ Im $\mathbb{O}$.。我们有 $\mathscr{H}$ 的以下变换：(1) 膨胀： D_δ(x, t) =(δx δ^2t)，其中给定正数 δ；(2) 左平移：$\tau_{(\mathbf{x}',\mathbf{t}')}$(x, t) =(x′, t′) ·(x, t)，其中给定 (x′, t′) $\in \mathscr{H}$；(3) 旋转： S_μ(x, t) =(μx μt $\bar{\mu}$)，其中给定单位纯虚八元数 μ；(4) 反演。众所周知，这些变换生成例外群 $\mathrm{F}_{4(-20)}$。它们可自然扩展为八元数西格尔上半空间 (6.2) 的自同构（参见例如 [9, 24]）。特别地，左平移可扩展为映射 τ_ζ : $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$，其 $\zeta \in \partial\mathcal{U}$ 由 (6.7) 给出。这是因为

$$2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{y}_2 - |\mathbf{y}_1|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{x}_2 + 2\,\mathrm{Re}\,\zeta_2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{\zeta}_1\mathbf{x}_1) - |\mathbf{x}_1 + \zeta_1|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{x}_2 - |\mathbf{x}_1|^2,$$

这意味着映射 τ_ζ 将边界 $\partial\mathcal{U}$ 映到自身。八元数海森堡群可与八元数西格尔上半空间的边界 $\partial\mathcal{U}$ 等同。令

$$\delta_{\mathbf{a}} := \frac{|1 + \mathbf{a}_2|}{(1 - |\mathbf{a}|^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{A.2}$$

并令 $\zeta_{\mathbf{a}}$ 为 C(a) 在 $\partial\mathcal{U}$ 上的投影， 即

$$\zeta_{\mathbf{a}} := \left(-[C(\mathbf{a})]_1, \frac{1}{2}|[C(\mathbf{a})]_1|^2 - \mathrm{Im}[C(\mathbf{a})]_2\right) = \left(-\sqrt{2}\mathbf{a}_1(1 + \mathbf{a}_2)^{-1}, \frac{|\mathbf{a}_1|^2}{|1 + \mathbf{a}_2|^2} + \frac{2\,\mathrm{Im}\,\mathbf{a}_2}{|1 + \mathbf{a}_2|^2}\right). \tag{A.3}$$

直接可验证

$$\tau_{\zeta_{\mathbf{a}}}(C(\mathbf{a})) = \left(0, \frac{1 - |\mathbf{a}|^2}{|1 + \mathbf{a}_2|^2}\right), \tag{A.4}$$

由 (6.5) 得，因此 $D_{\delta_{\mathbf{a}}} \circ \tau_{\zeta_{\mathbf{a}}} \circ C$(a) =(0,1)。于是，由 (6.8) 得 $T_{\mathbf{a}}$(a) = **0**。

由于对于 $\mathbf{a} \in B^2$， $D_{\delta_{\mathbf{a}}}$ 和 $\tau_{\zeta_{\mathbf{a}}}$ 是八元数西格尔上半空间 $\mathcal{U}$ 到其自身的微分同胚，而 C 是从球 B^2 到 $\mathcal{U}$ 的微分同胚，因此由 (6.3) 定义的 $T_{\mathbf{a}}$ 显然是单位球 B^2 到其自身的微分同胚。根据定义 (6.3),

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = C^{-1}\left(\delta_{\mathbf{a}}\left(\sqrt{2}\mathbf{x}_1(1 + \mathbf{x}_2)^{-1} + [\zeta_{\mathbf{a}}]_1\right), G_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) - 1\right), \tag{A.5}$$

其中

$$G_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := 1 + \delta_{\mathbf{a}}^2\Big((1 - \mathbf{x}_2)(1 + \mathbf{x}_2)^{-1} + [\zeta_{\mathbf{a}}]_2 + \overline{[\zeta_{\mathbf{a}}]}_1\sqrt{2}\left(\mathbf{x}_1(1 + \mathbf{x}_2)^{-1}\right)\Big). \tag{A.6}$$

我们发现

$$\begin{aligned} [T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})]_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{\mathbf{a}}\left\{\sqrt{2}\mathbf{x}_1(1 + \mathbf{x}_2)^{-1} + [\zeta_{\mathbf{a}}]_1\right\}\left[(1 + \mathbf{x}_2)\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})^{-1}\right], \\ [T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})]_2 &= -1 + 2(1 + \mathbf{x}_2)\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})^{-1}, \end{aligned} \tag{A.7}$$

根据（6.13）中 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 的定义，由此可见

$$\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = G_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})(1+\mathbf{x}_2), \tag{A.8}$$

由 (A.5) 可知。容易看出

$$\operatorname{Re} G_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 1 + \delta_{\mathbf{a}}^2 \frac{1-|\mathbf{x}|^2}{|1+\mathbf{x}_2|^2} + \delta_{\mathbf{a}}^2 \left|\mathbf{x}_1(1+\mathbf{x}_2)^{-1} - \mathbf{a}_1(1+\mathbf{a}_2)^{-1}\right|^2 \geq 1. \tag{A.9}$$

*P*命题 *6.3* 的证明。 (1) 根据 $\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 的表达式 (A.8) 和 (A.6)，我们可以写成

$$\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = (1+\delta_{\mathbf{a}}^2) + (1-\delta_{\mathbf{a}}^2)\mathbf{x}_2 + \delta_{\mathbf{a}}^2[\zeta_{\mathbf{a}}]_2(1+\mathbf{x}_2) + \mathcal{R}(\mathbf{x}), \tag{A.10}$$

其中

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) := \sqrt{2}\delta_{\mathbf{a}}^2 \left(\overline{[\zeta_{\mathbf{a}}]}_1 \left(\mathbf{x}_1(1+\mathbf{x}_2)^{-1}\right)\right)(1+\mathbf{x}_2). \tag{A.11}$$

对于 $\mathbf{a} \in \overline{B}(\mathbf{0},\ 1-\varepsilon)$，根据 (A.3) 中的表达式，$\zeta_{\mathbf{a}}$ 属于 $\partial\mathcal{U}$ 的一个有界子集，因此它关于 $\mathbf{a}$ 连续。$\delta_{\mathbf{a}}$ 也如此。根据表达式 (A.10)- (A.11)，当 $\mathbf{a},\ \mathbf{x} \in B(\mathbf{0},\ 1-\varepsilon)$ 时，$\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 显然是光滑的。

(2) 设 $\mathcal{R}(\mathbf{0},\ -1) = 0$。注意到

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_{2p}} = -\delta_{\mathbf{a}}^2 \left(\overline{[\zeta_{\mathbf{a}}]}_1 \left(\mathbf{x}_1((1+\mathbf{x}_2)^{-2}e_p)\right)\right)(1+\mathbf{x}_2) + \delta_{\mathbf{a}}^2 \left(\overline{[\zeta_{\mathbf{a}}]}_1 \left(\mathbf{x}_1(1+\mathbf{x}_2)^{-1}\right)\right)e_p$$

被 $C|1-\mathbf{x}_2|^{-\frac{1}{2}}$ 一致有界，因为 $|\mathbf{x}_1| \leq (1-|\mathbf{x}_2|^2)^{\frac{1}{2}}$，，其关于 ∂x_{1p} 的导数也如此。因此 $\mathcal{R}$ 是 $\underline{Lip^{\frac{1}{2}}}$。特别地，项 $\mathcal{R}$ 可以延拓为 B^2 上的连续函数，其中$\mathbf{a} \in B(\mathbf{0}, 1-\varepsilon)$。

注意，若 $|1+\mathbf{x}_2| < \eta_0 < 1$，则 $|\mathbf{x}_1|^2 \leq 1-|\mathbf{x}_2|^2 \leq 2(1-|\mathbf{x}_2|) \leq 2\eta_0$。因此，若 η_0 足够小，我们可以看到 $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ 很小，因而根据 (A.10)-(A.11)，$|\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})| > \delta_{\mathbf{a}}^2$。而若 $|1+\mathbf{x}_2| \geq \eta_0$，$\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 显然是光滑的。因此，它有一个与 $\mathbf{a} \in B(\mathbf{0}, 1-\varepsilon)$ 无关的下界。

(3) $\delta_{\mathbf{a}}$ 和 $\zeta_{\mathbf{a}}$ 根据定义 (A.2)-(A.3) 在 $\mathbf{a} \in B(\mathbf{0}, 1-\varepsilon)$ 上光滑。因此，对固定的 $\mathbf{x} \in \partial B^2$，$\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 根据定义 (A.10)-(A.11) 在 $\mathbf{a} \in B(\mathbf{0}, 1-\varepsilon)$ 上光滑。□

推论 6.3 由 $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 的表达式 (A.7) 和命题 6.3 得出。

注 A.1. $(\mathbf{x})$ 中的项 $\mathcal{R}$ 仅在 B^2 上为 $Lip^{\frac{1}{2}}$。这是因为，若将 $\mathbf{x} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ 写作两个四元数 $\mathbf{c}$、$\mathbf{d}$，那么根据八元数的乘法律 (2.1)，$(\mathbf{c}, \mathbf{d})^{-1} = (\mathbf{c}\ -\mathbf{d})$ 和

$$\begin{aligned}
\{(0,\alpha)[(0,r)(\mathbf{c},\mathbf{d})^{-1}]\}(\mathbf{c},\mathbf{d}) &= r\{(0,\alpha)(\overline{\mathbf{d}},\mathbf{c})\}(\mathbf{c},\mathbf{d})\frac{1}{|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2} \\
&= r(-\overline{\mathbf{c}}\alpha, \alpha\mathbf{d})(\mathbf{c},\mathbf{d})\frac{1}{|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2} \\
&= r(-\overline{\mathbf{c}}\alpha\mathbf{c} - \overline{\mathbf{d}}\alpha\mathbf{d}, -\mathbf{d}\overline{\mathbf{c}}\alpha + \alpha\mathbf{d}\overline{\mathbf{c}})\frac{1}{|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2}
\end{aligned}$$

对于 $r > 0$、$\alpha \in \mathbb{H}$，它在 $(\mathbf{c}$、$\mathbf{d}) = (\mathbf{0}$、$\mathbf{0})$ 处没有极限，对于 $\alpha = \mathbf{j}$。若取 $\mathbf{x}_1 = (0$、$r)$ $1+\mathbf{x}_2 = (\mathbf{c}$、$\mathbf{d})$满足 $(\mathrm{A.11})$，使得 $r = (1-|\mathbf{x}_2|^2)_{12}$，我们看到 $\mathcal{R}$ 只能在 $Lip^{\frac{1}{2}}(\vec{0}$、$-1)$处。

References

[1] Åhag、 P. and Czy˙z R.，《广义位势理论中的一族拟度量空间》， *J. Geom. Anal.* **32** （2022），论文编号 117。[2] Amal、 H.、 Asserda、 S. and Barloub、 M.，《四元数 Hessian 方程的变分方法》， *J. Geom.Anal.* **35** （2024），论文编号 107。[3] Alesker、 S.，《非交换线性代数与四元数变量的多重次调和函数》， *Bull. Sci.Math.* **127** （2003），1-35。[4] Alesker、 S.，《四元数 Monge-Amp`ère 方程》， *J. Geom. Anal.* **13** （2003），205-238。[5] Alesker、 S.，《四元数流形上的多重位势理论》， *J. Geom. Phys.* **62** （2012），1189-1206。[6] Alesker、 S.，《八元数平面上的多重次调和函数与凸集上的 Spin(9)-不变量赋值》， *J.Geom. Anal.* **18**，第 3 期（2008），651-686。[7] Alesker、 S. and Gordon、 P.，《八元数 Calabi-Yau 定理》， *J. Geom. Anal.* **34**（9）（2024），论文编号 293。[8] Alesker、 S. and Verbitsky、 M.，《超复流形上的多重次调和函数与 HKT 几何》， *J.Geom. Anal.* **16** （2006），375-399。[9] Allcock、 D.，《八元数双曲平面上的反射群》， *J. Algebra* **213** （1999），第 2 期，467-498。[10] Bedford、 E. and Taylor、 B.，《复 Monge-Amp`ère 方程的狄利克雷问题》， *Invent. Math.* **37**（1）（1976），1-44。[11] Bremermann、 H.J.，《关于多重次调和函数和伪凸域的广义狄利克雷问题：Shilov 边界的刻画》， *Trans. Amer. Math. Soc.* **91** （1959），246-276。[12] Boukhari、 F.，《四元数 Monge-Amp¨ère 方程的 Hölder 连续解》， *J. Math. Anal. Appl.* **477**（2019），747-768。[13] Do、 T. and Nguyen、 V.，《四元数多重次调和函数的有限能量类》， *J. Math. Anal. Appl.*541，第 1 期（2025），论文编号 128736。[14] Elkhadhra、 F.、 m-与一类 m-正闭流相关的广义勒隆数和容量， *ResultMath.* **74** （2019），论文编号 10。[15] Guedj、 V. and Zeriahi、 A.、 *Degenerate complex Monge-Ampère equations*，《EMS Tracts in Mathematics》第 26 卷，欧洲数学会，苏¨黎世，2017。[16] Harvey、 R. and Lawson、 B.，《黎曼流形上的狄利克雷对偶与非线性狄利克雷问题》， *J. Diff.Geom.* **88**，第 3 期（2011），395-482。[17] Klimek、 M.、 *Pluripotential Theory*，克拉伦登出版社，牛津，纽约，1991。[18] Kolodziej、 S. and Sroka、 M.，《四元数 Monge-Amp`ère 方程解的正则性》， *J. Geom. Anal.*30（2020），2852-2864。[19] Liu、 S . and Wang、 W.，《与四元数 m-次调和函数相关的多重位势理论》， *J. Geom. Anal.*33，第 5 期（2023），论文编号 143。[20] Nguyen、 N. C.，《复 Hessian 方程的次解定理》， *Univ. Jagiell. Acta Math.* **50** （2012），69-88。[21] Sadullaev、 A.，《复流形上的多重次调和测度与容量》， *Russ. Math. Surv.* **36**（1981），61-119。[22] Sadullaev、 A. and Abdullaev、 B.，《八元数次调和函数类中的位势理论》， *Pro. SteklovInst. Math.* **279** （2012），155-180。[23] Sadullaev、 A. and Abdullaev、 B，《 m-次调和函数类中的容量与 Hessian》， *Dokl.Akad.Nauk* **448**（2013），515-517。[24] Shi、 Y. and Wang、 W.，《八元数接触流形和凸余紧子群上的 Yamabe 算子与不变量》， $F_{4(-20)}$、 *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **200** （2021），第 6 期，2597-2630。[25] Wan、 D.，《四元数 Monge-Amp`ère 方程的变分方法》， *Ann. Mat. Pura Appl.* **199** （2020），2125-2150。[26] Wan、 D. and Kang、 Q.，《四元数多重次调和函数的位势理论》， *Mich. Math. J.* **66** （2017），3-20。[27] Wan、 D. and Wang、 W.，《关于四元数 Monge-Amp`ère 算子、闭正流以及四元数空间上的 Lelong-Jensen 型公式》， *Bull. Sci. Math.* **141** （2017），267-311。[28] Wan、 D. and Zhang、 W.，《四元数多重次调和函数的拟连续性与极大性》， *J. Math. Anal.Appl.* **424**（2015），86-103。[29] Walsh、 B.，《多重次调和函数包络的连续性》， *J. Math. Mech.* **18**（1968-69），143-148。[30] Wang、 W.，《 k-Cauchy-Fueter 复形、Penrose 变换与四元数 k-正则函数的 Hartogs 现象》， *J. Geom. Phys.* **60** （2010），513-530。

[31] Wang, W.，海森堡群上的四元数 Monge-Amp`ère 算子与多重次调和函数， *Math.Z.* **298**（2021），521-549。
[32] Wang, W.， k-Cauchy-Fueter 复形的四元数射影不变性及其应用 I， *Differ. Geom. Appl.***101** （2025），文章编号 102299。