贝塔分布 布及关联第二类斯特林数

JakubGismatullin*[1] 和 Patrick Tardivel†[1,2]

[1]弗罗茨瓦夫大学数学研究所，格伦瓦尔茨基广场 2/4，50-384 弗罗茨瓦夫[2]勃艮第数学研究所，CNRS联合研究单位5584，勃艮第大学，法国第戎

arXiv:2601.08453v1 [math.PR] 13 Jan 2026

摘要

本文基于具有贝塔分布的独立随机变量之和的矩，给出了关联第二类斯特林数的一个公式。利用概率方法，我们从该公式推导出这些数的下界和上界。

1 引言

经典第二类斯特林数 $S(p,m)$ 统计将 $\{1,\dots,p\}$ 划分为 m个非空子集的所有划分数，其中 $p\in\mathbb{N}_{>0}$ 且 $m\in\mathbb{N}$。更一般地， $r-$关联斯特林数 $S_r(p,m)$（其中$r\in\mathbb{N}_{>0}$）表示将 $\{1,\dots,p\}$划分为 m 个子集，且每个子集至少包含 r个元素 [3, p. 221]的所有划分数。显然， $S(p,m)=S_1(p,m)$。多重数列 $\{S_r(p,m)$ 的一些子数列：$p, m,r\in\mathbb{N}_{>0}, p\geq rm\}$ 收录于整数数列在线大全（OEIS） [11]。具体而言，数组 $\{S_1(p,m)\}_{\{p,m\}}$、 $\{S_2(p,m)\}_{\{p,m\}}$、 $\{S_3(p,m)\}_{\{p,m\}}$ 在 OEIS 中分别对应 A008277、A008299、A059022。此外，数列 $\{S_2(k+6,3)\}_{\{k\}}$、$\{S_2(k+8,4)\}_{\{k\}}$表示将 $k+6$ 或 $k+8$ 个有标号的球放入 3 个或 4 个不可区分的盒子中，且每个盒子至少有 2 个球的放置方式数；它们在 OEIS 中分别对应 A000478 、 A058844。

第二类斯特林数与概率论之间存在众所周知的联系。例如，当 p 趋于 $+\infty$ [6, 4]时，序列 $S_1(p,\ m)$ 和 $S_2(p,\ m)$ 渐近正态。更准确地说，当 $r\in\{1,2\}$时，会出现以下依分布收敛

$$\frac{Y_p-\mathbb{E}(Y_p)}{\sqrt{\operatorname{var}(Y_p)}}\xrightarrow[p\to+\infty]{d}\mathcal{N}(0,1)\text{ where }\mathbb{P}(Y_p=m)=\frac{S_r(p,m)}{\sum_{k=1}^{p}S_r(p,k)},\text{ for all }m\in\mathbb{N}_{>0}.$$

否则，根据 Dobi´nski 公式，参数为 $\lambda\geq 0$ 的泊松分布的 p 阶矩为 $\sum_{m=1}^{p}S_1(p,\ m)\lambda^m$ （例如，参见 [3, 第 211]页）。然而，据我们所知，文献中尚无基于一组独立同分布（i.i.d）随机变量之和的矩，为 $S_r(k,\ m)$ 给出的简洁公式。本文的主要结果是定理 2.1，它给出了以下新的恒等式

$$S_r(p,m)=\frac{p!}{m!(r!)^m(p-rm)!}\mathbb{E}\left[(X_1+\cdots+X_m)^{p-rm}\right]\tag{1}$$

其中 X_1、.....、 X_p 是服从参数为 (1，r) 的贝塔分布的独立同分布随机变量。注意，参数为 (1，1) 的贝塔分布是 $[0,1]$上的均匀分布。因此，当 $r=1$时，上述公式相当简单：

$$S_1(p,m)=\binom{p}{m}\mathbb{E}\left(Z^{p-m}\right)$$

其中， $Z=\sum_{i=1}^{m}X_i$ 服从 $[0,m]$上的欧文-霍尔分布。命题 3.1、3.2 和 3.3 给出了 $\mathbb{E}\left[(X_1+\cdots+X_m)^{p-rm}\right]$的上界和下界。当参数 m、 r或 $p-rm$ 趋于$+\infty$时，这些界是紧的，因此可以准确近似 $r-$相关的斯特林数。

*jakub.gismatullin@uwr.edu.pl orcid：0000-0002-4711-3075

†Patrick.Tardivel@u-bourgogne.fr orcid：0000-0002-8496-3909

2 斯特林数与随机变量矩的闭式公式

参数为 (1，r) 的贝塔分布的密度 g_r 为

$$g_r(x) = \begin{cases} r(1-x)^{r-1} & \text{if } x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{2}$$

设 X_1，……，X_m 为具有相同 beta (1，r) 分布的独立随机变量。这些变量之和的 $k \in \mathbb{N}$ 阶矩定义如下

$$\mathcal{M}_r(k,m) = \mathbb{E}\left[(X_1 + \cdots + X_m)^k\right]. \tag{3}$$

定理 2.1 给出了基于矩$\mathcal{M}_r(k,\ m)$ 的第二类斯特林数闭式公式。

定理 2.1. 设 m、$r \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $p \in \mathbb{N}$，其中 $p \geq rm$。第二类斯特林数满足以下恒等式

$$S_r(p,m) = \frac{p!}{m!(r!)^m(p-rm)!}\mathcal{M}_r(p-rm,m). \tag{4}$$

由定理 2.1 可推得，$\mathbb{E}(Z^k) = S_1(m+k,m)/\binom{m+k}{m}$，其中 Z服从定义在 $[0,m]$ $[8,\ 7]$上的 Irwin-Hall 分布。注意，Z的矩生成函数为 $\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(Z^k)t^k/k! = ((\exp(t)-1)/t)^m$，因此我们得到了众所周知的第二类斯特林数指数生成函数$\sum_{p\geq m} S_1(p,m)t^p/p! = (\exp(t)-1)^m/m!$（参见 [9] 第 52 页的定理 3.3）。上述 $S_r(p,m)$ 的表达式，除了需要计算矩 $\mathcal{M}_r(k,m)$ 外，都是显式的。尽管显式计算 $\mathcal{M}_r(k,m)$ 可能比较繁琐，但如下一节所示，$\mathcal{M}_r(k,m)$ 的下界、上界和近似值都易于求得。

3 上界与下界

下文将采用概率方法，推导矩 $\mathcal{M}_r(k,m)$ 的上界与下界。

3.1 当 m 较大时的精确上界与下界

设 $\overline{X}_m = (X_1 + \cdots + X_m)/m$，由詹森不等式可得以下下界

$$\mathcal{M}_r(k,m) = m^k\mathbb{E}\left(\overline{X}_m{}^k\right) \geq m^k\mathbb{E}\left(\overline{X}_m\right)^k = \frac{m^k}{(r+1)^k}. \tag{5}$$

该不等式依赖于函数 $q(x) = x^k$ 在 $x_0 = \mathbb{E}(X_m) = \frac{1}{r+1}$ 处的线性化。具体而言，对所有 $x \in [0,1]$，以下不等式均成立

$$x^k = q(x) \geq q(x_0) + q'(x_0)(x-x_0) = \frac{1}{(r+1)^k} + \frac{k}{(r+1)^{k-1}}\left(x - \frac{1}{r+1}\right). \tag{6}$$

此外，可以选取 $c \geq 0$，使得对所有 $x \in [0,1]$，以下不等式均成立（见引理 5.2）

$$x^k \leq q(x_0) + q'(x_0)(x-x_0) + c(x-x_0)^2. \tag{7}$$

下面的命题 3.1 是不等式 (6) 和 (7) 的推论。

命题 3.1. 设 r、$m \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。以下不等式成立

$$\frac{m^k}{(r+1)^k} \leq \mathcal{M}_r(k,m) \leq \frac{m^k}{(r+1)^k} + m^{k-1}\frac{(r+1)^k - 1 - kr}{(r+1)^k r(r+2)}. \tag{8}$$

当 m 较大时，上界和下界中的首项均为 $m^k/(r+1)^k$。因此，当 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ 和 $r \in \mathbb{N}_{>0}$ 固定且 m 趋于 $+\infty$ 时，上下界渐近等价。当 m 较大时，这些界是准确的，因为 X_m 收敛到 $\mathbb{E}(X_m)$，且不等式 (6) 和 (7) 在 $\mathbb{E}(X_m)$ 的邻域内均准确。

当 k 较大时的精确上界和下界

当 k 较大时，矩的渐近行为取决于 $X_1+\cdots+X_m$ 在尾部的密度，即在 m 的邻域内的密度。这促使我们引入下面这个由推论 5.4 证明的不等式：

$$g_r^{*m}(x) \le \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}(m-x)^{mr-1}, \text{ for all } x\in[0,m] \tag{9}$$

其中 g_r 由式 (2) 给出，g_r^{*m} 是 g_r 的 m 阶卷积。此外，当 $x\in[m-1,m]$ 时，该不等式取等号。由此可得下文命题 3.2 中给出的 $\mathcal{M}_r(k,\ m)$ 的下界和上界。

命题 3.2。对于任意 $r\in\mathbb{N}_{>0}$、$k\in\mathbb{N}$ 和 $m\in\mathbb{N}_{>0}$，以下不等式成立 .

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_r(k,m) &\le \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}\int_0^m x^k(m-x)^{mr-1}dx = \frac{k!(r!)^m m^{k+rm}}{(k+mr)!}.\\
\mathcal{M}_r(k,m) &\ge \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}\int_{m-1}^m x^k(m-x)^{mr-1}dx\\
&\ge \frac{k!(r!)^m m^{k+mr}}{(k+mr)!}\left(1-\frac{(m-1)^k}{m^{k+mr}}\sum_{i=1}^{mr}\binom{k+mr}{k+i}(m-1)^i\right).
\end{aligned}$$

由于 k 较大时

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(m-1)^k}{m^{k+mr}}\sum_{i=1}^{mr}\binom{k+mr}{k+i}(m-1)^i = 0.$$

根据命题 3.2，我们发现 $S_r(p,\ m)\le m^p/m!$。此外，当 k 趋于 $+\infty$ 时，上下界渐近等价，因此当 p 较大时，$S_r(p,\ m)\sim m^p/m!$。当 $r=1$ 时，这一近似是众所周知的（见 [2]），而当 $r>1$ 时仍然成立。

3.3 当 r 较大时的精确上界

命题 3.3 证明，矩 $\mathcal{M}_r(k,\ m)$ 有一个显式表达式的上界，该上界由若干个具有相同标准指数分布的独立随机变量之和的矩给出。

命题 3.3。设 $k\in\mathbb{N}$、$m\in\mathbb{N}_{>0}$、$r\in\mathbb{N}_{>1}$ 和 $\mathcal{E}_1$、...、$\mathcal{E}_m$ 是具有密度为 $\exp(-x)$ 的标准指数分布的独立同分布随机变量。

i) 以下不等式成立

$$r^k\mathcal{M}_r(k,m) \le \left(\frac{r}{r-1}\right)^{2k}\mathbb{E}\left(\mathcal{E}_1+\cdots+\mathcal{E}_m\right)^k = \left(\frac{r}{r-1}\right)^{2k}\frac{(m-1+k)!}{(m-1)!}. \tag{10}$$

ii) i) 中给出的上界是精确的，因为以下极限成立

$$\lim_{r\to+\infty} r^k\mathcal{M}_r(k,m) = \mathbb{E}\left(\mathcal{E}_1+\cdots+\mathcal{E}_m\right)^k = \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!}. \tag{11}$$

作者似乎很难找到在 r 趋于 $+\infty$ 时精确的下界。最后，我们在此总结 $r-$ 关联的第二类斯特林数的下界和上界：

- 命题 3.1 给出了以下下界和上界

$$\begin{cases} S_r(p,m) \ge \frac{p!m^{p-rm}}{m!(r!)^m(p-rm)!(r+1)^{p-rm}} \\ S_r(p,m) \le \frac{p!m^{p-rm}}{m!(r!)^m(p-rm)!(r+1)^{p-rm}}\left(1+\frac{(r+1)^{p-rm}-1-r(p-rm)}{mr(r+2)}\right). \end{cases} \tag{12}$$

当 $p-rm$、r 固定且 m 趋于 $+\infty$ 时，这些界是等价的。

- 命题 3.2 给出了以下下界和上界

$$\begin{cases} S_r(p,m) \geq \frac{m^p}{m!} - \frac{(m-1)^{p-rm}}{m!} \sum_{i=1}^{mr} \binom{p}{p-rm+i}(m-1)^i \\ S_r(p,m) \leq \frac{m^p}{m!}. \end{cases} \tag{13}$$

  当 m，r 固定且 p 趋于 $+\infty$ 时，这些界是等价的。

- 命题 3.3 在 $r \geq 2$ 时给出以下上界

$$S_r(p,m) \leq \frac{p! r^{2(p-rm)}(m-1+p-rm)!}{m!(r!)^m (p-rm)!(r-1)^{2(p-rm)}(m-1)!}. \tag{14}$$

  当 $p-rm$，m 固定且 r 趋于 $+\infty$ 时，这个上界等价于 $S_r(p,\ m)$。

4 数值实验

4.1 第二类斯特林数的上界和下界

根据命题3.1和3.2，对于所有 $m \in \mathbb{N}$ 和所有 $p \in \mathbb{N}_{>0}$，第二类斯特林数确实满足以下不等式：

$$\begin{aligned} S_1(p,m) &\leq \underbrace{\min\left\{\frac{m^p}{m!}, \binom{p}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{p-m}\left(1+\frac{2^{p-m}+m-p-1}{3m}\right)\right\}}_{U(p,m)} \\ S_1(p,m) &\geq \underbrace{\max\left\{\frac{m^p}{m!} - \frac{(m-1)^{p-m}}{m!}\sum_{i=1}^{m}\binom{p}{m-i}(m-1)^i, \binom{p}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{p-m}\right\}}_{L(p,m)}. \end{aligned}$$

首先，我们将把这些界 $U(m,\ p)$ 和 $L(p,\ m)$ 与 Rennie 和 Dobson 给出的界进行比较[10]，如下所示：

$$\underbrace{\frac{1}{2}(m^2+m+2)m^{p-m-1}-1}_{L_{\mathrm{rd}}(p,m)} \leq S_1(p,m) \leq \underbrace{\frac{1}{2}\binom{p}{m}m^{p-m}}_{U_{\mathrm{rd}}(p,m)}. \tag{15}$$

由于以下关系成立，因此比较 $U(p,\ m)$ 和 $U_{\mathrm{rd}}(p,\ m)$ 在数值上并无意义：

$$\frac{1}{2}\binom{p}{m}m^{p-m} \geq \binom{p}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{p-m}\left(1+\frac{2^{p-m}+m-p-1}{3m}\right)$$

对 $m < p$ 成立。与上界不同，下界 $L(p,\ m)$ 并非始终大于 Rennie 和 Dobson 给出的下界；例如，$31 = L_{\mathrm{rd}}(6,\ 2) > L(6,\ 2) = 28.5$。图 1 中的数值实验表明，对于大多数整数 p，m，$L(p,\ m)$ 比 $L_{\mathrm{rd}}(p,\ m)$ 更好地近似 $S_1(p,\ m)$。

图 2 对 $L(p,\ m)$ $U(p,\ m)$ 与 $S_1(p,\ m)$ 进行了比较。

4.2 贝尔数的上界

贝尔数 $B(p)$（其中 $p \in \mathbb{N}_{>0}$）表示 $\{1,\ldots,p\}$ 的划分数。由于贝尔数是第二类斯特林数之和 $B(p) = \sum_{m=1}^{p} S_1(p,\ m)$，因此有以下不等式：

$$B(p) \leq \underbrace{\sum_{m=0}^{p}\min\left\{\frac{m^p}{m!}, \binom{p}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{p-m}\left(1+\frac{2^{p-m}+m-p-1}{3m}\right)\right\}}_{=U(p)} \tag{16}$$

对所有 $p \in \mathbb{N}_{>0}$。在图3中，我们将 $U(p)$ 与 Berend 和 Tassa [1] 给出的上界：$B(p) \leq U_{\mathrm{bt}}(p) = \left(\frac{0.792p}{\ln() (p+1)}\right)^p$ 进行比较。

注意，$U(p) \leq \sum_{m=0}^{+\infty} m^p/m! = eB(p)$（最后一个等式源于 Dobi´nski 公式）。在图4中，我们展示了当 p 较大时，$U(p)/B(p)$ 与 e 非常接近。

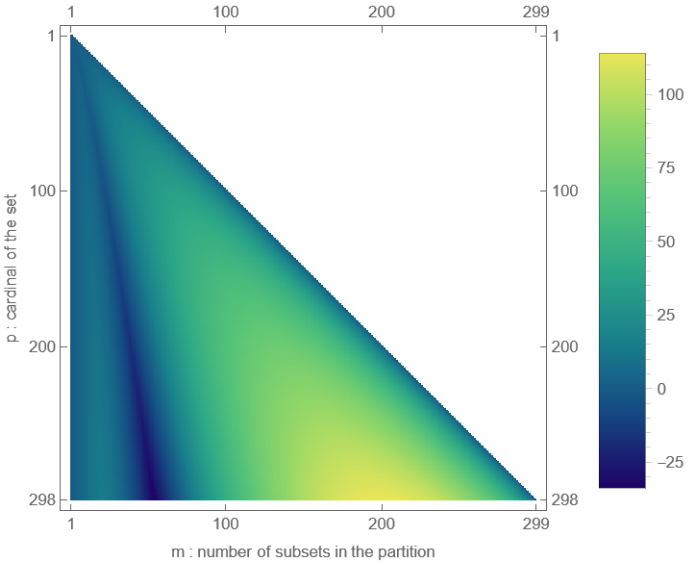


图 1：该图报告了 $\ln(L(p,m)) - \ln(L_{\mathrm{rd}}(p,m))$ 关于 m（在 $x-$ 轴上）和 p（在 $y-$ 轴上）的函数关系。可以观察到，对于大多数整数，下界 $L(p,m)$ 比 $L_{\mathrm{rd}}(p,m)$ 更好地近似 $S_1(p,m)$（因为 $\ln(L(p,m)) - \ln(L_{\mathrm{rd}}(p,m)) > 0$）。

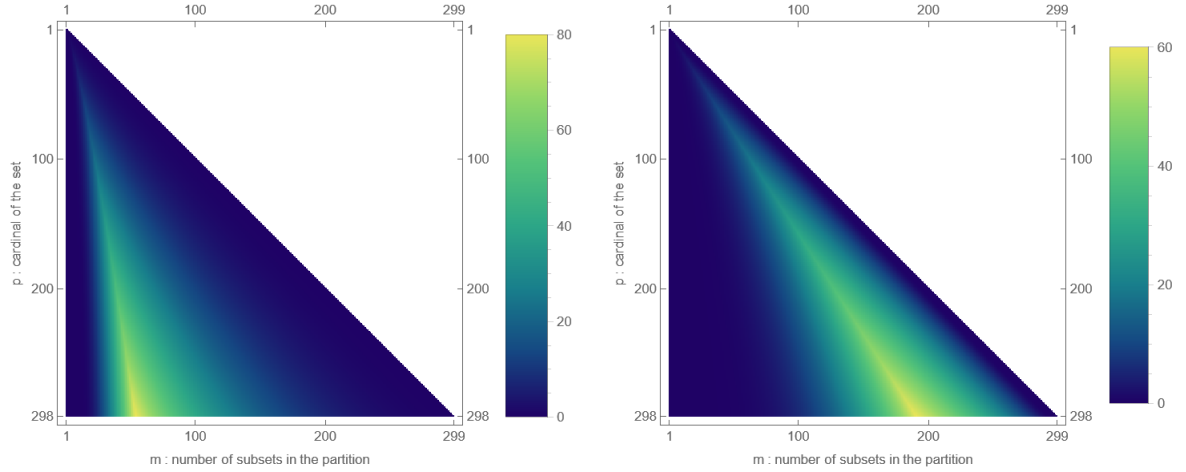


图 2：该图报告了 $\ln(S_1(p,m)) - \ln(L(p,m))$（左侧）以及 $\ln(U(p,m)) - \ln(S_1(p,m))$（右侧）关于 m 和 p 的函数关系。这些数值实验符合命题3.1和3.2，因为当 p 较大且 m 较小，或当 m 较大且 $p-m$ 较小时，下界和上界都能准确地近似 $S_1(p,m)$。

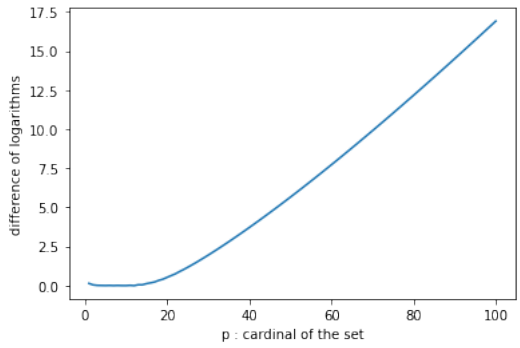


图3：该图报告了 $\ln(U_{bt}(p)) - \ln(U(p))$ 关于 p 的函数关系。可以观察到，当 $p \geq 13$ 时，$U(p)$ 是 $S_1(p,m)$ 的更精确的上界，而不是 $U_{\mathrm{bt}}(p)$（因为对于 $p \geq 13$，$\ln(U_{bt}(p)) - \ln(U(p)) > 0$）。

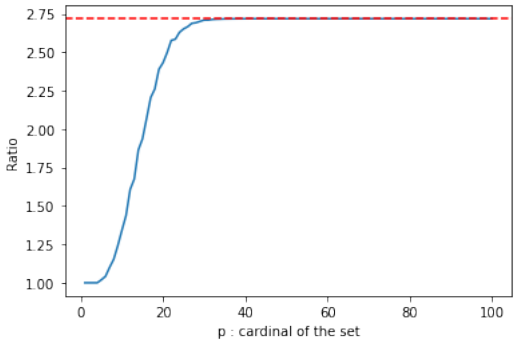


图4：该图展示了 $U(p)/B(p)$ 随 p 变化的情况。可以观察到，当 p 较大时， $U(p)/B(p)$ 约等于 e 。

5 证明

5.1 定理 2.1 的证明

结合多项式定理，下面引理 5.1 中给出的恒等式使我们得以完成定理 2.1 的证明。

引理5.1. 设 m、 $r \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $p \in \mathbb{N}$ ，其中 $p \geq rm$。 r-关联第二类斯特林数满足以下等式

$$S_r(p,m) = \frac{p!}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=p-rm} \frac{1}{(r+i_1)! \times \ldots \times (r+i_m)!}$$

其中求和为 对满足 $i_1 + \cdots + i_m = p - rm$ 的所有整数 i_1，……， $i_m \in \{0, \ldots, p - rm\}$ 进行计算 .

证明。给定 i_1，……， $i_m \in \mathbb{N}$，使得 $i_1 + \cdots + i_m = p - rm$，我们来计算 $\{1, \ldots\ldots, p\}$ 分成 m 个部分，其中第一部分有 $r + i_1$ 个元素，第二部分有 $r + i_2$ 个元素，依此类推。

第一部分有 $\binom{p}{r+i_1}$ 种可能。第二部分有 $\binom{p-r-i_1}{r+i_2}$ 种可能，依此类推。因此，第一部分有 $r + i_1$ 个元素、第二部分有 $r + i_2$ 个元素，依此类推的有序划分数量为

$$\frac{p!}{(r+i_1)! \times \ldots \times (r+i_m)!}.$$

因此 因此， $\{1, \ldots, p\}$ 被划分为 m 个部分且每部分至少有 r 个元素的有序划分数 is

$$\sum_{i_1+\cdots+i_m=p-rm} \frac{p!}{(r+i_1)! \times \ldots \times (r+i_m)!}.$$

最后，不考虑顺序时，将其除以 $m!$，即可推得

$$S_r(p,m) = \frac{p!}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=p-rm} \frac{1}{(r+i_1)! \times \ldots \times (r+i_m)!}.$$

□

证明。 定理 2.1回顾一下多项式定理。给定 $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$(x_1 + \cdots + x_m)^k = \sum_{i_1+\cdots+i_m=k} \frac{k!}{i_1! \times \cdots \times i_m!} x_1^{i_1} \times \ldots \times x_m^{i_m}.$$

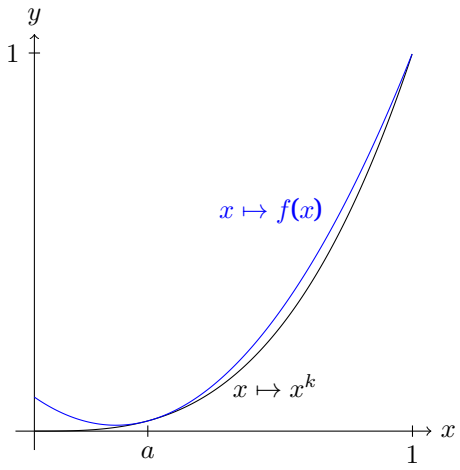


图5：引理 5.2 中给出的不等式示意图。

令 $k = p - rm$。由于 $\mathbb{E}(X_1^s) = \frac{s!}{r!(s+r)!}$，由多项式定理和引理5.1可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_1 + \cdots + X_m)^k\right] &= \sum_{i_1+\cdots+i_m=k} \frac{k!}{i_1! \times \cdots \times i_m!} \mathbb{E}(X_1^{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{E}(X_m^{i_m}) \\
&= (r!)^m k! \sum_{i_1+\cdots+i_m=k} \frac{1}{(r+i_1)! \times \cdots \times (r+i_m)!} \\
&= \frac{m!(r!)^m k!}{(k+rm)!} S_r(k+rm, m) \\
&= \frac{m!(r!)^m (p-rm)!}{p!} S_r(p, m)
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

5.2 命题 3.1 的证明

命题 3.1 是以下引理的推论。

引理 5.2。令 $k \geq 2$, $a \in (0,1)$ 且 $f\colon\ x \in [0,1] \to a^k + ka^{k-1}(x-a) + c(x-a)^2$，其中 $c \geq 0$ 满足 $f(1) = 1$（即 $c = \frac{a^{k-1}(ak-a-k)+1}{(1-a)^2}$）。则对于所有 $x \in [0,1]$，都有 $f(x) \geq x^k$。

证明。首先注意，对于所有 $x \in [0,1]$，条件 $f(x) \geq x^k$ 等价于

$$ka^{k-1}(x-a) + c(x-a)^2 \geq x^k - a^k = (x-a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1}).$$

注意，当且仅当.....时，这个不等式成立

$$\begin{aligned}
ka^{k-1} + c(x-a) &\geq x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1} \text{ for all } x \in [a,1] \text{ and} \\
ka^{k-1} + c(x-a) &\leq x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1} \text{ for all } x \in [0,a].
\end{aligned}$$

设 $d(x) = ka^{k-1} + c(x-a)$ 且 $p(x) = x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1}$。因此，根据 c 的构造，$p(a) = d(a)$ 且 $p(1) = d(1)$。由于 p 是凸函数而 d 是仿射函数，可以推得，当 $x \in [0,a]$ 且 $d(x) \geq p(x)$ 时，$d(x) \leq p(x)$，其中 $x \in [a,1]$，由此完成证明。 □

Proof. 命题 3.1 根据引理 5.2，对于 $a = \mathbb{E}(X_m) = \frac{1}{r+1}$, $r > 0$，对所有 $x \in [0,1]$，我们得到

$$\begin{aligned}
x^k &\leq \mathbb{E}(\overline{X}_m)^k + k\mathbb{E}(\overline{X}_m)^{k-1}\left(x - \mathbb{E}(\overline{X}_m)\right) + c\left(x - \mathbb{E}(\overline{X}_m)\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{(r+1)^k} + \frac{k}{(r+1)^{k-1}}\left(x - \frac{1}{r+1}\right) + c\left(x - \frac{1}{r+1}\right)^2
\end{aligned}$$

其中 $c = (1+\frac{1}{r})^2\left(1-\frac{kr+1}{r+1}()^k\right)$。这个不等式意味着

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r(k,m) = m^k\mathbb{E}(\overline{X}_m^k) &\leq m^k\left(\mathbb{E}(\overline{X}_m)^k + c\mathrm{var}(\overline{X}_m)\right)\\ &\leq \frac{m^k}{(1+r)^k} + c\frac{rm^{k-1}}{(1+r)^2(2+r)}\\ &\leq \frac{m^k}{(r+1)^k} + \frac{(r+1)^k - 1 - kr}{(r+1)^k r(r+2)}m^{k-1}.\end{aligned}$$

□

5.3 命题 3.2 的证明

证明中我们使用一个众所周知的贝塔积分（例如，见 [5]）：令 $a, b \in \mathbb{N}$ 且 $x \in \mathbb{R}_{>0}$，则有

$$\int_0^x (x-t)^a t^b dt = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}x^{a+b+1}. \tag{17}$$

为显式计算 $X_1 + \cdots + X_m$ 在尾部 $[m-1, m]$ 上的密度，我们使用以下技术引理。令 h_r 为如下密度

$$h_r(x) = \begin{cases} rx^{r-1} & \text{if } x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{18}$$

实际上，h_r 是 $1-X$ 的密度，其中密度 X 为 g_r(2)。与 g_r 相比，使用 h_r 进行卷积计算稍微容易一些。

引理 5.3. 令 $m \in \mathbb{N}_{>0}$，则以下等式和不等式成立

$$h_r^{*m}(x) = \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}x^{mr-1},\ \textit{for all } x \in [0,1]. \tag{19}$$

$$h_r^{*m}(x) \leq \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}x^{mr-1},\ \textit{for all } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{20}$$

证明。我们用归纳法证明 (19)。当 $m = 1$ 时，可以注意到，无论 $x \in [0,1]$ 如何，我们都有 $h_r^{*m}(x) = h_r(x)$。令 $m \in \mathbb{N}_{>0}$ 使得

$$h_r^{*m}(x) = \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}x^{mr-1} \quad \forall x \in [0,1].$$

因此，对于 $x \in [0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}h_r^{*m+1}(x) &= \int_{\mathbb{R}} h_r^{*m}(x-t)h_r(t)dt = \int_0^x h_r^{*m}(x-t)rt^{r-1}dt\\ &= \frac{r(r!)^m}{(mr-1)!}\int_0^x (x-t)^{mr-1}t^{r-1}dt\\ &= \frac{r(r!)^m}{(mr-1)!}\frac{(mr-1)!(r-1)!}{((m+1)r-1)!}x^{(m+1)r-1}\\ &= \frac{(r!)^{m+1}}{((m+1)r-1)!}x^{(m+1)r-1}.\end{aligned}$$

用归纳法证明 (20) 的过程与证明 (19) 非常相似。当 $m = 1$ 时，结论显而易见。设 $m \in \mathbb{N}_{>0}$，使得

$$h_r^{*m}(x) \leq \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}x^{mr-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

因此，对于 $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们有

$$\begin{aligned} h_r^{*m+1}(x) &= \int_{\mathbb{R}} h_r^{*m}(x-t)h_r(t)dt = \int_0^x h_r^{*m}(x-t)h_r(t)dt \\ &\leq \frac{r(r!)^m}{(mr-1)!}\int_0^x (x-t)^{mr-1}t^{r-1}dt \\ &\leq \frac{r(r!)^m}{(mr-1)!}\frac{(mr-1)!(r-1)!}{((m+1)r-1)!}x^{(m+1)r-1} \\ &\leq \frac{(r!)^{m+1}}{((m+1)r-1)!}x^{(m+1)r-1}. \end{aligned}$$

□

注意到，(19) 与 (20) 的证明之间唯一的区别在于 $h_r(t)$ 被 rt^{r-1} 主序。现在我们可以证明 m 次卷积 g_r^{*m} 在 $[m-1,m]$ 上的显式公式，以及 $[0,m]$ 的一个上界。

推论 5.4。对于所有 $x \in [0,m]$，我们都有

$$g_r^{*m}(x) \leq \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}(m-x)^{mr-1}.$$

此外，若 $x \in [m-1,m]$，则

$$g_r^{*m}(x) = \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}(m-x)^{mr-1}.$$

证明。根据引理 5.3，只需证明对所有 $x \in [0,m]$，$g_r^{*m}(x) = h_r^{*m}(m-x)$。令 $x \in [0,m]$ 并设 $z = m-x$，由于 $(1-X_1)+\cdots+(1-X_m)$ 的密度为 h_r^{*m}，因此有以下等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\mathbb{P}((1-X_1)+\cdots+(1-X_m) \leq z) &= h_r^{*m}(z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_m \geq m-z) &= h_r^{*m}(z) \\ g_r^{*m}(m-z) &= h_r^{*m}(z) \\ g_r^{*m}(x) &= h_r^{*m}(m-x). \end{aligned}$$

□

可以注意到，若 $r=1$ 且 $x \in [m-1,m]$，则 $g_r^{*m}(x) = (m-x)^{m-1}/(m-1)!$ 这就是 Irwin–Hall 分布尾部的密度（见 [7, 8]）。

命题 3.2 中给出的上界和下界是推论 5.4 的直接结果。事实上，上界就是以下函数的贝塔积分

$$\int_0^m \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}(m-x)^{mr-1}x^k dx.$$

证明。命题 3.2 下界由以下计算得出

$$\begin{aligned} & \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}\int_0^{m-1} x^k(m-x)^{mr-1}dx \\ = & \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}\int_0^{m-1} x^k(1+(m-1)-x)^{mr-1}dx \\ = & \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}\int_0^{m-1} x^k\sum_{i=0}^{mr-1}\binom{mr-1}{i}(m-1-x)^i dx \\ = & \frac{(r!)^m}{(mr-1)!}\sum_{i=0}^{mr-1}\binom{mr-1}{i}\frac{k!i!(m-1)^{k+i+1}}{(k+i+1)!} \\ = & \frac{(r!)^m k!}{(k+mr)!}\sum_{i=1}^{mr}\binom{k+mr}{k+i}(m-1)^{k+i}. \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{M}_r(k,m) \geq \frac{}{(r!)^m\,(mr-1)!}\int_{m-1}^{m} x^k(m-x)^{mr-1}dx$，可得以下不等式

$$\mathcal{M}_r(k,m) \geq \frac{k!(r!)^m m^{k+mr}}{(k+mr)!}\left(1-\frac{(m-1)^k}{m^{k+mr}}\sum_{i=1}^{mr}\binom{k+mr}{k+i}(m-1)^i\right).$$

假设 $k > mr$，那么 $\binom{k+mr}{k+i} \leq \binom{k+mr}{k}$，对于 $1 \leq i \leq mr$，因此

$$\begin{aligned}
&\frac{(m-1)^k}{m^{k+mr}}\sum_{i=1}^{mr}\binom{k+mr}{k+i}(m-1)^i \\
\leq\ & \frac{1}{m^{mr}}\left(1-\frac{1}{m}\right)^k\sum_{i=1}^{mr}\binom{k+mr}{k}(m-1)^i \\
\leq\ & \left(1-\frac{1}{m}\right)^k\binom{k+mr}{k}\frac{((m-1)^{mr+1}-(m-1)}{m-2} \\
\leq\ & \left(1-\frac{1}{m}\right)^k(k+mr)^{mr}\frac{(m-1)^{2mr}}{(mr)!} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

5.4 命题 3.3 的证明

证明。 命题 3.3 i) 注意到随机变量 $Y_i = (r-1)X_i$ 在 $[0, r-1]$ 上的密度为

$$f(x) = \frac{r}{r-1}\left(1-\frac{x}{r-1}\right)^{r-1}.$$

由于对于所有 $x \in [0, r-1]$，以下不等式成立

$$\frac{r}{r-1}\left(1-\frac{x}{r-1}\right)^{r-1} \leq \frac{r}{r-1}\exp(-x)$$

可以推得

$$\begin{aligned}
(r-1)^k\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)^k = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}Y_i\right)^k &\leq \left(\frac{r}{r-1}\right)^k\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\mathcal{E}_i\right)^k \\
&\leq \left(\frac{r}{r-1}\right)^k\frac{(m-1+k)!}{(m-1)!}
\end{aligned}$$

因为 $\sum_{i=1}^{m}\mathcal{E}_i$ 服从厄朗分布（$\sum_{i=1}^{m}\mathcal{E}_i$ 的密度为
$h(x) = \frac{x^{m-1}\exp(-x)}{(m-1)!}$），其 k 阶矩为 $\frac{(m-1+k)!}{(m-1)!}$。这个不等式完成了.....的证明 i).

ii) 随机变量 $(r-1)X_1$ 的密度逐点收敛于 $\mathcal{E}_1$ 的密度，即对所有 $x \in [0, +\infty)$，有 $\lim_{r\to+\infty} f(x) = \exp(-x)$。因此，以下极限成立

$$\lim_{r\to+\infty} x^k f^{*m}(x) = \frac{x^{m+k-1}\exp(-x)}{(m-1)!}.$$

最后，由控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to+\infty}(r-1)^k\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)^k &= \lim_{r\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^{m+k-1}\exp(-x)}{(m-1)!}dx \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\mathcal{E}_i\right)^k = \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!}.
\end{aligned}$$

□

资助

第一作者获得波兰国家科学中心（NCN）资助，项目编号为 2014/13/D/ST1/03491 和 2017/27/B/ST1/01467。勃艮第数学研究所（IMB）获得 EIPHI研究生院资助（合同编号 ANR-17-EURE-0002）。第二作者获得勃艮第-弗朗什-孔泰大区的资助（EPADM项目）。

参考文献

[1] D. BerendT. Tassa, 贝尔数及随机变量和的矩的改进界，《概率论与数理统计》30 (2010), 第 185–205 页。[2] W. E. Bleick P.C.C. Wang, 第二类斯特林数的渐近性质，《美国数学会会刊》42 (1974), 第 575–580 页。[3] L.Comtet,高级组合学：有限与无限展开的艺术，Springer, 1974。[4] E. Czabarka, P.L. Erd˝os, V. Johnson, A. Kupczok, L.A.Sz´ekely, 渐近正态分布

f

与系统发育学相关的若干树族，以及不含单元素块的划分，《莫斯科组合与数论杂志》1 (2011), 第 12–24 页。[5] A.K. Gupta S.Nadarajah, 贝塔分布及其应用手册，第 *1* 版，CRC 出版社，2004。[6] L.H. Harper,斯特林型渐近分布为渐近正态，《数理统计年刊》38 (1967), 第 410–414 页。[7] P.Hall, 从总体中抽取容量为 n 的样本，其变量在 *0* 到 *1* 之间取值且所有取值等可能时，样本均值的分布，《生物统计学》19 (1927), 第 240-244 页。[8] J.O.Irwin, 关于来自具有任意分布律的总体的样本均值的频率分布

f

具有有限矩的频数分布，特别讨论皮尔逊Ⅱ型分布，《生物统计学》。19（1927），第225–239页。[9] T.Mansour M.Schork，对易关系、正规排序与斯特林数，CRC出版社，2015年。[10] B.C. Rennie A.J. Dobson，关于第二类斯特林数，《组合理论杂志》，7（1969），第116–121页。[11] N.J.A. Sloane OEIS基金会，在线整数数列百科全书，（2024年）。