arXiv:2601.08473v1 [math.FA] 13 Jan 2026

作用于某些解析函数空间上的希尔伯特型算子

Pengcheng Tang*, [a]

[a]湖南科技大学数学与统计学院,

中国湖南省湘潭市 411201

摘要

设 $H(\mathbb{D})$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}$内所有解析函数构成的空间。对于 $g \in H(\mathbb{D})$，广义希尔伯特算子 $\mathcal{H}_g$ 定义为

$$\mathcal{H}_g(f)(z) = \int_0^1 f(t)g'(tz)dt, \ \ z \in \mathbb{D}, f \in H(\mathbb{D}).$$

本文研究算子 $\mathcal{H}_g$ 在 $\mathbb{D}$中的一些解析函数空间上的作用。具体而言，我们完整刻画了所有满足算子 $\mathcal{H}_g$ 从 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}^2_\alpha$ 到 $\mathcal{D}^2_\beta$ 有界（或紧）的 $g \in H(\mathbb{D})$，其中指标 α， $\beta \in \mathbb{R}$ 取遍所有可能值。我们还研究了算子 $\mathcal{H}_g$ 在有界解析函数空间 H^∞上的作用，这推广了经典 Hilbert 算子 $\mathcal{H}$ 作用于 H^∞时的已知结果。特别地，我们考察了具有非负泰勒系数符号的算子 $\mathcal{H}_g$ 在对数 Bloch 空间和 Korenblum 空间上的有界性。本文推广了经典 Hilbert 算子的相应结果。

关键词： 希尔 伯特型算子。狄利克雷空间。有界解析函数。布洛赫空间 .

1 引言

设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘， $H(\mathbb{D})$表示 $\mathbb{D}$中所有解析函数构成的空间。

布洛赫型空间 $\mathcal{B}^\alpha$ 由满足以下条件的函数 $f \in H(\mathbb{D})$组成：

$$||f||_{\mathcal{B}^\alpha} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| < \infty.$$

空间 $\mathcal{B}^1$ 就是经典布洛赫空间，通常记作 $\mathcal{B}$。

*通讯作者 Pengcheng Tang:
www.tang-tpc.com@foxmail.com

设 $0 < p \leq \infty$，经典 Hardy 空间 H^p 由满足以下条件的函数 $g \in H(\mathbb{D})$ 组成：

$$||g||_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, g) < \infty,$$

其中

$$M_p(r, g) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \ 0 < p < \infty,$$

$$M_\infty(r, g) = \sup_{|z|=r} |g(z)|.$$

对于 $0 < p \leq \infty$，导数 Hardy 空间 S^p 由满足以下条件的函数 $g \in H(\mathbb{D})$组成：

$$||g||_{S^p}^p = |g(0)|^p + ||g'||_{H^p}^p < \infty.$$

空间 S^2 是一个希尔伯特空间，且如果 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$，那么

$$||g||_{S^2}^2 = |b_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2.$$

对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们用 $\mathcal{D}_\alpha^2$ 表示满足以下条件的函数空间 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$：

$$||g||_{\mathcal{D}_\alpha^2}^2 = |b_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\alpha} |b_n|^2 < \infty.$$

特别地， $\mathcal{D}_1^2 = H^2$ 和 $\mathcal{D}_{-1}^2 = S^2$。空间 $\mathcal{D}_0^2$ 是经典 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}$ ，我们将 $||g||_{\mathcal{D}}$ 记作 $||g||_{\mathcal{D}_0^2}$。

解析 Wiener 代数 $\mathcal{W}$ 由满足以下条件的函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{D})$组成：

$$||f||_{\mathcal{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

令 $1 \leq p < \infty$ 和 $0 < \alpha \leq 1$，平均 Lipschitz 空间 Λ_α^p 由满足以下条件的函数 $f \in H(\mathbb{D})$组成：它们几乎处处存在非切向极限，且当 $t \to 0$时， $\omega_p(t, f) = O(t^\alpha)$。这里，$\omega_p(\cdot, f)$是函数 $f(e^{i\theta})$的 p阶积分连续模。已知（见 [13]），Λ_α^p 是 H^p 的子集，并且

$$\Lambda_\alpha^p = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : M_p(r, f') = O\left(\frac{1}{(1-r^2)^{1-\alpha}} \right), \ \text{as } r \to 1 \right\}.$$

满足以下条件的 $f \in H(\mathbb{D})$所构成的空间

$$M_p(r, f') = o\left(\frac{1}{(1-r^2)^{1-\alpha}} \right), \quad \text{as } r \to 1^-,$$

记作 λ_α^p。

希尔伯特矩阵 $\mathcal{H}$ 是一个无限矩阵，其元素为 $a_{n,\ k} = (n+k+1)^{-1}$。

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

矩阵 $\mathcal{H}$ 通过作用于泰勒系数，在 $H(\mathbb{D})$ 上诱导出一个算子:

$$a_n \to \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{n,k} a_k,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$_\infty$希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 定义在 $H(\mathbb{D})$ 上如下：若 $f(z) = \sum a_n z^n \in H(\mathbb{D})$，则

$_{n=0}$

$$\mathcal{H}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1} \right) z^n,\ \ z \in \mathbb{D},$$

只要右侧有意义，并且在 $\mathbb{D}$ 中定义了一个解析函数。

Diamantopou- los 和 Siskakis 在 [9] 首次研究了希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 在解析函数空间上的性质。他们证明了 $\mathcal{H}$： $H^p \to H^p$ 当 $1 < p < \infty$ 时有界，而 $\mathcal{H}$ 在 H^1 上无界。随后，Diamantopoulus [10] 也研究了 $\mathcal{H}$ 在伯格曼空间 A^p 上的有界性。他证明了 $\mathcal{H}$： $A^p \to A^p$ 当 $2 < p < \infty$ 时有界，而 $\mathcal{H}$ 在 A^2 上无界。Jevti´c 和 Karapretovi´c [17]研究了 $\mathcal{H}$ 在混合范数空间上的有界性。关于希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 在解析函数空间上的更多内容，请参阅 [2, 3, 6, 12] 。

若 $f \in H^1$，则 Fej´er-Riesz 不等式（见 [13, 第 46] 页）表明 $\int_0^1 |f(t)|dt < \infty$。这意味着 $\mathcal{H}(f)$ 具有积分形式

$$\mathcal{H}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 t^n f(t) dt \right) z^n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz} dt,\ \ z \in \mathbb{D}.$$

或者，也可以将其视为

$$\mathcal{H}_g(f)(z) = \int_0^1 f(t) g'(tz) dt \ \text{ with } \ g(z) = \log \frac{1}{1-z}.$$

受这一积分表示的启发，Galanopoulos 等人考虑了以下广义希尔伯特算子 $\mathcal{H}_g$ [14]。对于任意给定的 $g \in H(\mathbb{D})$，广义希尔伯特算子 $\mathcal{H}_g$定义为

$$\mathcal{H}_g(f)(z) = \int_0^1 f(t) g'(tz) dt. \tag{1}$$

对于任意 $g \in H(\mathbb{D})$，若 $f \in H^1$，则式（1）中的积分绝对收敛，因此 $\mathcal{H}_g(f)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中定义良好的解析函数。因此，若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$ 且 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$，则 $\mathcal{H}_g(f)$ 可用泰勒系数表示如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_g(f)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) b_{n+1} \int_0^1 t^n f(t) dt \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) b_{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1} \right) z^n. \end{aligned} \tag{2}$$

在 [14], 中，作者研究了 $\mathcal{H}_g$ 在 Hardy 空间 H^p、伯格曼空间 A^p_α 和 Dirichlet 型空间 $\mathcal{D}^p_\alpha$上的有界性。Pel´aez 和 R¨atty¨a [21] 还研究了广义希尔伯特算子 $\mathcal{H}_g$ 在加权 Bergman 空间 A^p_ω上的作用，其中 ω 属于一类特定的正则径向权函数。平均 Lipschitz 空间在这些研究中发挥着基础性作用。

最近，Galanopoulos 和 Girela 在 [15] 中使用 Suchur 判别法，证明了 $\mathcal{H}_g$ 在 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}$上的有界性和紧性。本文将完整刻画使算子 $\mathcal{H}_g$ 从 $\mathcal{D}^2_\alpha$ 到 $\mathcal{D}^2_\beta$ 有界（紧）的所有 $g \in H(\mathbb{D})$，其中指标 α，$\beta \in \mathbb{R}$取遍所有可能值。这将是第 2 节的主要结果。第 3 节将主要研究 $\mathcal{H}_g$ 作用于有界解析函数 H^∞空间时的值域。在第 4 节中，我们考察系数非负且符号为 $\mathcal{H}_g$ 的算子在对数 Bloch 空间和 Korenblum 空间上的有界性。这些工作推广了关于经典 Hilbert 算子的相应结果。

全文中，字母 C 表示一个绝对常数，其值取决于括号中标出的参数，并且在不同位置可能取不同的值。我们将使用记号“$P \lesssim Q$”表示存在常数 $C = C(\cdot)$ 使得“$P \le CQ$”，而“$P \gtrsim Q$”的含义类似。特别地，如果“$P \lesssim Q$”且“$P \gtrsim Q$”，那么我们写作“$P \asymp Q$”。

2 在 Dirichlet 型空间之间作用的算子 $\mathcal{H}_g$

如果 $\gamma > \alpha$，那么 $\mathcal{D}^2_\alpha \subset \mathcal{D}^2_\gamma$。这表明，对于每个 $\gamma \ge 2$，都有 $\mathcal{D}^2_2 \subset \mathcal{D}^2_\gamma$。由下式给出的函数 f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\log(n+1)}, \quad z \in \mathbb{D},$$

属于 $\mathcal{D}^2_2$。然而，我们很容易看出，如果 g 是单项式 $g(z) = z^n (n \in \mathbb{N})$，那么$\mathcal{H}_g(f)$ 就没有定义。因此，对于所有 $\gamma \ge 2$，$\mathcal{H}_g(f)$ 在 $\mathcal{D}^2_\gamma$ 上都没有定义。

如果 $\alpha > -1$，已知 $f \in \mathcal{D}^2_\alpha$ 当且仅当

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dA(z) < \infty. \tag{3}$$

下面，我们将利用 (3) 证明，对于 $0 < \alpha < 2$，$\mathcal{H}_g$ 在 $\mathcal{D}^2_\alpha$ 上定义良好。

命题 2.1。设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$，并设 $0 < \alpha < 2$。则积分 $\mathcal{H}_g(f)$ 是定义良好的解析函数，在 $\mathbb{D}$ 中对每个 $f \in \mathcal{D}^2_\alpha$ 都成立，且 *(2)* 成立。

证明。只需证明 $\int_0^1 |f(t)|dt < \infty$。对于 $f \in \mathcal{D}_\alpha^2$，利用 (3) 和众所周知的逐点估计，可得

$$|f'(z)| \lesssim \frac{1}{(1-|z|)^{\frac{\alpha+2}{2}}}.$$

这意味着

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq |f(0)| + \int_0^1 |zf'(tz)|dt \\ &\lesssim 1 + |z| \int_0^1 \frac{1}{(1-t|z|)^{1+\frac{\alpha}{2}}} dt \\ &\lesssim 1 + \frac{1}{(1-|z|)^{\frac{\alpha}{2}}}.\end{aligned}$$

由于$0 < \frac{\alpha}{2} \prec 1$，这意味着

$$\int_0^1 |f(t)|dt \lesssim 1 + \int_0^1 (1-t)^{-\frac{\alpha}{2}} dt \lesssim 1.$$

证明完毕。 □

对于 $0 < \alpha < 2$，根据 Diamantopoulos [11, 定理 1.2], ，我们知道希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha^2$上有界。接下来，我们将运用这一结果来刻画那些使得 $\mathcal{H}_g$ 从 $\mathcal{D}_\alpha^2$ 到 $\mathcal{D}_\beta^2$ 有界（分别为紧）的 $g \in H(\mathbb{D})$，其中 $0 < \alpha < 2$且 $\beta \in R$。

定理 2.2. 设 $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。若 $0 < \alpha < 2$ 且 $\beta \in \mathbb{R}$，则以下条件等价:

(1) 算子 $\mathcal{H}_g: \mathcal{D}_\alpha^2 \to \mathcal{D}_\beta^2$ 有界。*(2)* $\sum_{n=2^N-1}^{2^{N+1}} |b_{n+1}|^2 = O\left(2^{N(\beta-\alpha-1)}\right)$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。 假设 $\mathcal{H}_g: \mathcal{D}_\alpha^2 \to \mathcal{D}_\beta^2$ 有界。对于 $\frac{1}{2} < a < 1$，令

$$f_a(z) = (1-a)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^\infty (n+1)^{\alpha-1} a^n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

于是，对所有 $\frac{1}{2} < a < 1$，都有$||f_a||_{\mathcal{D}_\alpha^2} \asymp 1$。对于 $N \geq 2$，我们有

$$\begin{aligned}||\mathcal{H}_g(f_a)||_{\mathcal{D}_\beta^2}^2 &\gtrsim (1-a)^\alpha \sum_{n=0}^\infty (n+1)^{3-\beta} |b_{n+1}|^2 \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(k+1)^{\alpha-1}a^k}{n+k+1}\right)^2 \\ &\gtrsim (1-a)^\alpha \sum_{n=2^N-1}^{2^{N+1}} (n+1)^{3-\beta} |b_{n+1}|^2 \left(\sum_{k=0}^{2^{N+1}} \frac{(k+1)^{\alpha-1}a^k}{n+k+1}\right)^2 \\ &\gtrsim (1-a)^\alpha \sum_{n=2^N-1}^{2^{N+1}} 2^{(1-\beta)N} |b_{n+1}|^2 \left(\sum_{k=0}^{2^{N+1}} (k+1)^{\alpha-1}\right)^2 a^{2^{N+1}}\end{aligned}$$

$$\gtrsim (1-a)^{\alpha}2^{N(2\alpha-\beta-1)}a^{2^{N+1}}\sum_{n=2^N-1}^{2^{N+1}}|b_{n+1}|^2.$$

取 $a=1-\frac{1}{2^N}$，则有

$$||\mathcal{H}_g(f_a)||^2_{\mathcal{D}^2_\beta}\gtrsim 2^{N(\alpha-\beta-1)}\sum_{n=2^N-1}^{2^{N+1}}|b_{n+1}|^2.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)。取 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{D}_{\alpha\circ}$ 令

$$f_+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|z^n,\quad z\in\mathbb{D}.$$

我们有 $f_+\in\mathcal{D}^2_\alpha$ 和 $||f||_{\mathcal{D}_\alpha}=||f_+||_{\mathcal{D}^2_\alpha\circ}$ 现在，

$$\begin{aligned}||\mathcal{H}_g(f)||^2_{\mathcal{D}^2_\beta}&\asymp\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right|^2\\&\le\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2\\&\le\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}}(k+1)^{3-\beta}|b_{k+1}|^2\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|}{2^n+j}\right)^2\right)\\&\lesssim\sum_{n=0}^{\infty}2^{n(3-\beta)}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|}{2^n+j}\right)^2\left(\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}}|b_{k+1}|^2\right)\end{aligned}$$

由于 $\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}}|b_{k+1}|^2=O(2^{n(\beta-\alpha-1)})$，这意味着

$$\begin{aligned}||\mathcal{H}_g(f)||^2_{\mathcal{D}^2_\beta}&\lesssim\sum_{n=0}^{\infty}2^{n(2-\alpha)}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|}{2^n+j}\right)^2\\&\lesssim\sum_{n=0}^{\infty}2^{n(1-\alpha)}\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|}{k+j+1}\right)^2\\&\asymp\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\mathcal{H}(f_+)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)z^n,\ \ z\in\mathbb{D}.$$

由于希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha^2$ 上有界，条件是 $0<\alpha<2$（见 [11, 定理 1.2]），这意味着

$$||\mathcal{H}(f_+)||_{\mathcal{D}_\alpha^2}^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2.$$

因此，我们得到

$$||\mathcal{H}_g(f)||_{\mathcal{D}_\beta^2}^2 \lesssim ||\mathcal{H}(f_+)||_{\mathcal{D}_\alpha^2}^2 \lesssim ||f_+||_{\mathcal{D}_\alpha^2}^2 = ||f||_{\mathcal{D}_\alpha}^2.$$

证明完毕。 □

定理 2.3. 设 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\in H(\mathbb{D})$。若 $0<\alpha<2$ 且 $\beta\in\mathbb{R}$，则下列条件等价:

(1) 算子 $\mathcal{H}_g:\mathcal{D}_\alpha^2\to\mathcal{D}_\beta^2$ 是紧的。*(2)* $\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1}|b_{n+1}|^2=o\left(2^{N(\beta-\alpha-1)}\right)$。

证明。(2) $\Rightarrow$ (1)。对于 $N\in\mathbb{N}$，令 $\mathcal{H}_g^N$：$\mathcal{D}_\alpha^2\to\mathcal{D}_\beta^2$ 为如下定义的算子：若$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{D}_\alpha^2$,

$$\mathcal{H}_g^N(f)(z)=\sum_{n=0}^{N}(n+1)b_{n+1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right)z^n.$$

算子 $\mathcal{H}_g^N$是从 $\mathcal{D}_\alpha^2$ 到 $\mathcal{D}_\beta^2$的有限秩算子。

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得

$$\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}}|b_{n+1}|^2\le\varepsilon 2^{n(\beta-\alpha-1)},\quad \text{for all } n\ge N. \tag{4}$$

对于 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{D}_\alpha^2$，仿照定理 2.2 中蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1) 的证明，并利用 (4)，我们得到

$$\begin{aligned}
||\mathcal{H}_g(f)-\mathcal{H}_g^N(f)||_{\mathcal{D}_\beta^2} &\lesssim \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2\\
&\le \sum_{n=N}^{\infty}\left(\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}}(k+1)^{3-\beta}|b_{k+1}|^2\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|}{2^n+j}\right)^2\right)\\
&\lesssim \varepsilon\sum_{n=N}^{\infty}2^{n(1-\alpha)}\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|}{k+j+1}\right)^2\\
&\lesssim \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}2^{n(1-\alpha)}\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|}{k+j+1}\right)^2\\
&\lesssim \varepsilon||\mathcal{H}(f_+)||_{\mathcal{D}_\alpha^2}^2\lesssim\varepsilon||f||_{\mathcal{D}_\alpha^2}.
\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{H}_g$ 是有限秩算子 $\mathcal{H}_g^N$在算子范数下的极限，所以 $\mathcal{H}_g$:$\mathcal{D}_\alpha^2 \to \mathcal{D}_\beta^2$ 是紧的。

(1) $\Rightarrow$ (2)。 与定理 2.2 的证明相同，对于$\frac{1}{2} <a < 1$，令

$$f_a(z) = (1-a)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{\alpha-1} a^n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

于是，当 $a \to 1^-$时， $||f_a||_{\mathcal{D}_\alpha^2} \asymp 1$ 和 $f_a \to 0$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致成立。由此可得

$$\lim_{a \to 1^-} ||\mathcal{H}_g(f_a)||_{\mathcal{D}_\beta^2}^2 = 0. \tag{5}$$

定理 2.2 中蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明表明

$$||\mathcal{H}_g(f_a)||_{\mathcal{D}_\beta^2}^2 \gtrsim (1-a)^\alpha 2^{N(2\alpha-\beta-1)} a^{2^{N+1}} \sum_{n=2^N-1}^{2^{N+1}} |b_{n+1}|^2.$$

取 $a = 1 - \frac{1}{2^N}$ 并利用 (5)，可得

$$\sum_{n=2^N-1}^{2^{N+1}} |b_{n+1}|^2 = o\left(2^{N(\beta-\alpha-1)}\right).$$

证明完毕。 □

推论 2.4。 假设 $0 < \alpha < 2$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$。那么，算子 $\mathcal{H}$： $\mathcal{D}_\alpha^2 \to \mathcal{D}_\beta^2$ 有界当且仅当 $\beta \geq \alpha$。

对于 Fot $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$，已知（例如参见 [20, 定理 3.1]）， $g \in \Lambda_{1/2}^2$（分别为 $g \in \lambda_{1/2}^2$）当且仅当

$$\sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}} |b_k|^2 = O(2^{-n}), \quad (\text{resp.} \sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}} |b_k|^2 = o(2^{-n})).$$

因此，我们可以得到以下推论。

推论 2.5. 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$，并设 $0 < \alpha < 2$。那么，算子 $\mathcal{H}_g$ 在 $\mathcal{D}_\alpha^2$ 上有界（分别为紧）当且仅当 $g \in \Lambda_{1/2}^2$ （分别为 $g \in \lambda_{1/2}^2$）。

对于 $\alpha < 0$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$， $\mathcal{H}_g$: $\mathcal{D}_\beta^2 \to \mathcal{D}_\beta^2$ 的有界性和紧性是等价的。如下述定理所示。

定理 2.6. 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。若 $\beta \in \mathbb{R}$，则以下条件等价:

(1) 算子 $\mathcal{H}_g$： $\mathcal{W} \to \mathcal{D}_\beta^2$ 是有界的。*(2)* 算子 $\mathcal{H}_g$： $\mathcal{W} \to \mathcal{D}_\beta^2$ 是紧的。*(3)* $\mathcal{H}_g(1) \in \mathcal{D}_\beta^2$。*(4)* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\beta} |b_n|^2 < \infty$.

证明。 (1) $\Rightarrow$ (3)、(2) $\Rightarrow$ (1) 和 (3) $\Leftrightarrow$ (4) 显然成立。

只需证明 (4) $\Rightarrow$ (2)。对于 $N \in \mathbb{N}$，令

$$A_N = \sum_{n=N}^{\infty} n^{1-\beta}|b_n|^2. \tag{6}$$

于是，$\{A_N\} \to 0$，因为 $N \to \infty$。对于 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{W}$，我们有

$$\begin{aligned} ||\mathcal{H}_g(f) - \mathcal{H}_g^N(f)||_{\mathcal{D}_\beta^2} &\leq \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2 \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{1-\beta}|b_{n+1}|^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)^2 \\ &= ||f||_{\mathcal{W}}^2 A_{N+1} \to 0, \ (N \to \infty.) \end{aligned}$$

因此，$\mathcal{H}_g$ 是有限秩算子 $\mathcal{H}_g^N$在算子范数下的极限。因此，$\mathcal{H}_g: \ \mathcal{W} \to \mathcal{D}_\beta^2$是紧的。证明完毕。 □

注 2.7。 对于 $\alpha < 0$，若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{D}_\alpha^2$，则由柯西-施瓦茨不等式可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 n^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim ||f||_{\mathcal{D}_\alpha^2}.$$

这意味着 $\mathcal{D}_\alpha^2 \subset \mathcal{W}$。此外，对于 $1 \leq p < \infty$，若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in S^p$，则$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n \in H^p \subset H^1$。由哈代不等式可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n+1}| \leq \pi||f'||_{H^1} \lesssim ||f'||_{H^p}.$$

这表明 $S^p \subset \mathcal{W}$。这两个事实引出了以下两个推论。◀

推论 2.8。 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。若 $\alpha < 0$ 且 $\beta \in \mathbb{R}$，则以下陈述等价：

(1) 算子 $\mathcal{H}_g: \ \mathcal{D}_\alpha^2 \to \mathcal{D}_\beta^2$ 是有界的。*(2)* 算子 $\mathcal{H}_g: \ \mathcal{D}_\alpha^2 \to \mathcal{D}_\beta^2$ 是紧的。*(3)* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\beta}|b_n|^2 < \infty.$

推论 2.9。 设 $1 \leq p < \infty$ 且设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。以下陈述等价：

(1) 算子 $\mathcal{H}_g: \ S^p \to S^2$ 是有界的。*(2)* 算子 $\mathcal{H}_g: \ S^p \to S^2$ 是紧的。*(3)*$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_n|^2 < \infty.$

推论 2.9 也是以下定理与 $q = 2$ 的结果。

定理 2.10。设 $1 \le p < \infty$，并设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。

(1) 如果 $1 \le q \le 2$ 且算子 $\mathcal{H}_g: \ S^p \to S^q$ 有界，那么 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2q-2}|b_n|^q < \infty$。*(2)* 如果 $2 \le q < \infty$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2q-2}|b_n|^q < \infty$，那么算子 $\mathcal{H}_g: \ S^p \to S^q$ 是紧的。

为了证明定理 2.10，我们需要一些记号。

The Hardy-Littlewood 空间 $HL(p)$ 由满足以下条件的函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 构成:

$$||h||_{HL(p)}^p = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|\widehat{h}(n)|^p < \infty.$$

众所周知（见 [13]），

$$D_{p-1}^p \subset H^p \subset HL(p), \ \ 0 < p \le 2, \tag{7}$$

$$HL(p) \subset H^p \subset D_{p-1}^p, \ \ 2 \le p < \infty. \tag{8}$$

定理 2.9 的证明 (1)。设 $f(z) \equiv 1 \in S^p$，则 $\mathcal{H}_g(1)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} z^n \in S^q$。根据 S^p 的定义可知 $\mathcal{H}_g(1)' \in H^q$。由 (7) 可得 $\mathcal{H}_g(1)' \in H^q \subset HL(q)$。这意味着

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2q-2}|b_n|^q < \infty.$$

(2). 对于每个 $f \in S^p$，如定理 2.6 的证明所示，只需证明

$$||\mathcal{H}_g(f) - \mathcal{H}_g^N(f)||_{S^q} \to 0, \quad \text{as} \quad N \to \infty. \tag{9}$$

由于 $2 \le q < \infty$，由 (8) 可得 $HL(q) \subset H^q$。要证明 (9)，只需证明 t

$$||\mathcal{H}_g(f)' - \mathcal{H}_g^N(f)'||_{HL(q)} \to 0, \quad \text{as} \quad N \to \infty.$$

容易验证

$$\mathcal{H}_g(f)'(z) - \mathcal{H}_g^N(f)'(z) = \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)(n+2)b_{n+2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+2}\right)z^n.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
||\mathcal{H}_g(f)' - \mathcal{H}_g^N(f)'||_{HL(q)}^q &\lesssim \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{3q-2}|b_{n+2}|^q\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+2}\right|^q \\
&\lesssim \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{2q-2}|b_{n+2}|^q\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)^q \\
&\lesssim ||f||_{S^p}^q \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{2q-2}|b_{n+2}|^q \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}$$

证明完成。 □

注 2.11. 通过模仿定理 *2.6* 的证明，我们可以容易地得到，当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\beta}|b_n|^2 \log^2(n+1) < \infty.$ 时， $\mathcal{H}_g:\ \mathcal{B} \to D_\beta^2(\beta \in \mathbb{R})$ 有界（等价地，紧）。

定理 2.12. 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。以下条件等价:

(1) 算子 $\mathcal{H}_g: \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 是有界的。*(2)*

算子 $\mathcal{H}_g: \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 是紧的。*(3)* $g \in \mathcal{W}$。

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty.$

证明. 只需证明 (4) $\Rightarrow$ (1)。仿照定理 2.6 的证明，我们有

$$\begin{aligned} ||\mathcal{H}_g(f) - \mathcal{H}_g^N(f)||_{\mathcal{W}} &\leq \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)|b_{n+1}| \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right| \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty}|b_{n+1}| \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right) \\ &= ||f||_{\mathcal{W}} \sum_{n=N}^{\infty}|b_{n+1}| \to 0 \ \ (N \to \infty). \end{aligned}$$

证明完毕。 □

在 [15], 中，作者研究了 $\mathcal{H}_g:\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}$的有界性和紧性。这里，我们将目标空间 $\mathcal{D}$ 推广到 $\mathcal{D}_\beta^2$，对所有 $\beta \in \mathbb{R}$均成立。我们的方法改编自 [15], 并作了若干修改。

引理 2.13. *[24,* 第 *814]* 页设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{D}$。则存在一个正数常量$C$，它与 f 无关，使得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|a_l||a_m|}{\log(l+m+1)} \leq C||f||_{\mathcal{D}}^2.$$

定理 2.14。令 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。若 $\beta \in \mathbb{R}$，则以下条件等价:

(1) 算子 $\mathcal{H}_g:\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}_\beta^2$ 有界。*(2)*

$\sum_{n=N}^{\infty} n^{1-\beta}|b_n|^2 = O\left(\frac{1}{\text{对数 } N}\right)$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。对于 $0 < b < 1$，令

$$f_b(z) = \left(\log\frac{1}{1-b}\right)^{-\frac{1}{2}} \log\frac{1}{1-bz} = \left(\log\frac{1}{1-b}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b^k}{k}z^k.$$

于是显然　可知，对于所有 $b \in (0,\ 1)$ 和 $||f_b||_{\mathcal{D}} \asymp 1.$，$f_b \in \mathcal{D}$。简单计算可得　t

$$\mathcal{H}_g(f_b)(z) = \left(\log\frac{1}{1-b}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b^k}{k(n+k+1)}\right)z^n.$$

由于 $\mathcal{H}_g:\ \mathcal{D}\to\mathcal{D}^2_\beta$ 有界，因此我们有

$$||\mathcal{H}_g(f_b)||^2_{\mathcal{D}^2_\beta}\gtrsim\left(\log\frac{1}{1-b}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(k+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b^k}{k(n+k+1)}\right)^2. \tag{10}$$

对于 $N\in\mathbb{N}$ 和 $N\geq 2$，令 $b_N=1-\frac{1}{N}$。由 (10) 可得

$$\begin{aligned}
1&\gtrsim||f_b||^2_{\mathcal{D}}||\mathcal{H}_g||^2_{\mathcal{D}\to\mathcal{D}^2_\beta}\gtrsim||\mathcal{H}_g(f_{b_N})||^2_{\mathcal{D}^2_\beta}\\
&\geq\frac{1}{\log N}\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{b_N^k}{k(n+k+1)}\right)^2\\
&\geq\frac{1}{\log N}\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\frac{b_N^N}{(n+N+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)^2\\
&\geq\frac{1}{\log N}\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{1-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)^2\\
&\gtrsim(\log N)\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{1-\beta}|b_{n+1}|^2.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)^{1-\beta}|b_{n+1}|^2\lesssim\frac{1}{\log N}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)。假设 (2) 成立，则显然 $g\in\mathcal{D}^2_{\beta^\circ}$。令 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{D}_\circ$。我们有

$$\begin{aligned}
||\mathcal{H}_g(f)||^2_{\mathcal{D}^2_\beta}&\leq\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2\\
&\lesssim|a_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\beta}|b_{n+1}|^2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2\\
&\lesssim||f||^2_{\mathcal{D}}||g||^2_{\mathcal{D}^2_\beta}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Set

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2:=S_1+S_2 \tag{11}$$

其中

$$S_1:=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2,$$

$$S_2 := \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^2.$$

接下来，我们分别估计 S_1 和 S_2。对于 S_1，利用 $\max\{l,m\} \asymp l+m+1(l,\ \ m \in\mathbb{N})$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}|a_l||a_m|\right) \\
&= \sum_{l,m=0}^{\infty}|a_l||a_m|\sum_{n=\max\{l,m\}}(n+1)^{1-\beta}|b_{n+1}|^2 \\
&\lesssim \sum_{l,m=0}^{\infty}\frac{|a_l||a_m|}{\log(l+m+1)}.
\end{aligned}$$

由引理 2.13 可得

$$S_1 \lesssim ||f||^2_{\mathcal{D}}.$$

对于 S_2，利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k|k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}(n+k+1)}\right)^2 \\
&\leq ||f||^2_{\mathcal{D}}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{3-\beta}|b_{n+1}|^2\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(n+k+1)^2}\right).
\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(n+k+1)^2} \asymp \int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{x(x+n+1)}.$$

经简单计算可得

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(n+k+1)^2} \asymp \frac{1}{(n+1)^2}.$$

因此，我们有

$$S_2 \lesssim ||f||^2_{\mathcal{D}}||g||^2_{\mathcal{D}^2_\beta}.$$

因此，我们推得

$$||\mathcal{H}_g(f)||^2_{\mathcal{D}^2_\beta} \lesssim ||f||^2_{\mathcal{D}}.$$

证明完毕。 □

定理 2.15。 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。若 $\beta \in \mathbb{R}$，则以下条件等价：

(1) 算子 $\mathcal{H}_g$： $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_\beta^2$ 是紧的。*(2)*
$\sum_{n=N}^{\infty} n^{1-\beta}|b_n|^2 = o(\frac{1}{\text{对数}N})$。

证明。 证明与 [15], 中的定理 2 类似，只需稍作修改，此处省略详细证明。

□

3 作用于 H^∞上的算子 $\mathcal{H}_g$ 的值域

本节旨在研究作用于 H^∞上的 $\mathcal{H}_g$ 的值域。我们先介绍一些函数空间的概念。

混合范数空间 $H^{p,q,\alpha}$， $0 < p$， $q \le \infty$， $0 < \alpha < \infty$，是由满足以下条件的所有函数$f \in H(\mathbb{D})$构成的空间

$$||f||_{p,q,\alpha} = \left(\int_0^1 M_p^q(r,f)(1-r)^{q\alpha-1}dr\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \text{ for } 0 < q < \infty,$$

and

$$||f||_{p,\infty,\alpha} = \sup_{0\le r<1}(1-r)^\alpha M_p(r,f) < \infty.$$

对于 $t \in \mathbb{R}$， $f(z)$的 t 阶分数阶导数 $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{D})$定义为 by

$$D^t f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^t a_n z^n.$$

若 $0 < p, q \le \infty, 0 < \alpha < \infty$，则我们用 $H^{p,q,\alpha}_t$,表示所有满足以下条件的解析函数$f \in H(\mathbb{D})$所构成的空间：

$$||D^t f||_{p,q,\alpha} < \infty.$$

众所周知（见 [22]），若 $f \in H(\mathbb{D})$、 $0 < p, q \le \infty, 0 < \alpha, \beta < \infty$和 $s, t \in \mathbb{R}$满足 $s - t = \alpha - \beta$，则

$$||D^s f||_{p,q,\alpha} \asymp ||D^t f||_{p,q,\beta}.$$

因此，我们有 $H^{p,q,\alpha}_s = H^{p,q,\beta}_t$,。结合混合范数空间之间的包含关系（见 [1]），可得

$$H_2^{1,\infty,1} = H_{1+\frac{1}{p}}^{1,\infty,\frac{1}{p}} \subsetneq H_{1+\frac{1}{p}}^{p,\infty,1} = \Lambda_{\frac{1}{p}}^p \quad \text{for } p > 1.$$

值得指出的是， $H^{p,\infty,1}_{1+\frac{1}{p}} = \Lambda^p_{\frac{1}{p}}$，对于 $p > 1$，以及 $H^{p,\infty,1}_{1+\frac{1}{p}} = H^{1,\infty,1}_2$，对于 $p = 1$。空间 Λ_1^1不等于空间 $H^{1,\infty,1}_2$，。我们很容易看出 $g(z) = \frac{1}{1-z} \notin \Lambda_1^1$。为简化记号，我们定义 X_p 如下；

$$X_p := \begin{cases} \Lambda_{\frac{1}{p}}^p, & \text{if } p > 1; \\ H_2^{1,\infty,1}, & \text{if } p = 1. \end{cases}$$

关于希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 在有界解析函数空间 H^∞上的作用，Łanucha、Nowak 和 Pavlovic [18] 证明了算子 $\mathcal{H}$ 是从 H^∞ 到 $BMOA$的有界算子。事实上，以下结论也成立

$$\mathcal{H}(H^\infty) \subset \bigcap_{1<p<\infty} X_p \subset BMOA \subset \mathcal{B}.$$

在 [4], Bellavita 和 Stylogiannis 研究了 $\mathcal{H}$ 从 H^∞ 到 Q_p 空间、平均利普希茨空间 Λ_1^p 以及某些共形不变狄利克雷空间的精确范数。本文作者还证明，算子 $\mathcal{H}$ 从 H^∞ 到 [16]中的空间 X_1 是有界的。容易验证，函数 $g(z) = \log \frac{1}{1-z}$ 属于 X_1，因此对每个 $p > 1$，它都属于 X_p。如前所述， $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}_g}$ 满足 $g(z) = \overline{\log \frac{1}{1-z}}$。算子 $\mathcal{H}_g$ 是算子 $\mathcal{H}$的自然推广。本节将讨论如何刻画那些$g \in H(\mathbb{D})$，使得 $\mathcal{H}_g$ 从 H^∞ 到空间 X_p （$p \geq 1$）是有界的。

定理 3.1. 设 $1 \leq p < \infty$ 且 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。则以下两个条件等价：*(1)* 算子 H_g 从 H^∞ 到 X_p是有界的。*(2)* $g \in X_p$。

为了证明定理 3.1，我们将使用以下初等结果。

引理 3.2. *[16,* 定理 *1.2]* 希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 是从 H^∞ 到 X_1的有界算子。

回忆一下，对于 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{D})$ 和 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$， $f, g \in H(\mathbb{D})$ 的阿达马乘积定义为

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

Lem引理 3.3. *[23,* 引理 *3.3]* 设 $1 \leq p < \infty$ 和 $0 \leq r < 1$。若 $f, g \in H(\mathbb{D})$，则

$$M_p(r^2, f * g) \leq M_p(r, f) M_1(r, f).$$

以下引理给出了混合范数空间上分数阶导数的刻画；参见 [5,定理A]。

引理 3.4. 设 $1 \leq p < \infty, 0 < q \leq \infty, \alpha, \beta > 0$ 和 $f \in H(\mathbb{D})$。则

$$f \in H^{p,q,\alpha} \Leftrightarrow D^\beta f \in H^{p,q,\alpha+\beta}.$$

定理 3.1 的证明 $(1) \Rightarrow (2)$。取 $f(z) \equiv 1 \in H^\infty$。则

$$\mathcal{H}_g(1)(z) = \int_0^1 g'(tz)dt = \frac{1}{z}\int_0^z g'(\xi)d\xi = \frac{1}{z}(g(z) - g(0)).$$

由于 $\mathcal{H}_g(1) \in X_p$，这意味着 $g(z) = z\mathcal{H}_g(1) + g(0) \in X_p$。

(2) $\Rightarrow$ (1)。假设 $g \in X_p$。对于任意 $f \in H^\infty$， $\mathcal{H}_g(f)$ 是在 $\mathbb{D}$ 中定义良好的解析函数，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_g(f)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)b_{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right)z^n \\ &= (g' * \mathcal{H}(f))(z).\end{aligned}$$

现在，我们将证明分为两种情况。

情况 $p = 1$。

显然，

$$D^3\mathcal{H}_g(f) = (Dg' * D^2\mathcal{H}(f))(z).$$

由引理 3.3 可知，

$$\begin{aligned}M_1(r, D^3\mathcal{H}_g(f)) &= M_1(r, Dg' * D^2\mathcal{H}(f)) \\ &\lesssim M_1(\sqrt{r}, Dg')M_1(\sqrt{r}, D^2\mathcal{H}(f)).\end{aligned} \tag{12}$$

由引理 3.2 可得，

$$M_1(\sqrt{r}, D^2\mathcal{H}(f)) \lesssim \frac{1}{1-r}. \tag{13}$$

对于 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$，容易验证，

$$\frac{g(z)-g(0)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}z^n \text{ and } Dg'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 b_{n+1}z^n.$$

令 $h(z) = \frac{g(z)-g(0)}{z}$，则 $h \in H(\mathbb{D})$ 和 $Dg'(z) = D^2h(z)$。注意到 $Dh(z) = (zh(z))' = h(z) + zh'(z)$，经过简单计算可得

$$Dg'(z) = D^2h(z) = h(z) + 3zh'(z) + z^2h''(z).$$

根据 h的定义，我们有

$$h'(z) = \frac{zg'(z) - (g(z)-g(0))}{z^2}.$$

and

$$h''(z) = \frac{g''(z)}{z} - \frac{2g'(z)}{z^2} + \frac{2(g(z)-g(0))}{z^3}.$$

由此可得

$$Dg'(z) = \frac{3(g(z)-g(0))}{z} + g'(z) + zg''(z).$$

由于 $g \in X_1$，这意味着

$$M_1(\sqrt{r}, zg'') \lesssim \frac{1}{1-r}.$$

包含关系 $X_1 \subsetneq \mathcal{B}$ 表明

$$|g'(z)| \lesssim \frac{1}{1-|z|} \text{ and } |g(z)| \lesssim \log \frac{e}{1-|z|}.$$

由此可得

$$M_1(\sqrt{r}, g') \lesssim \frac{1}{1-r} \text{ and } M_1(\sqrt{r}, h) \lesssim \log \frac{e}{1-r}.$$

因此，我们得到

$$M_1(\sqrt{r}, Dg') \lesssim \frac{1}{1-r}.$$

由 (12) 和 (13) 可得

$$M_1(r, D^3\mathcal{H}_g(f)) \lesssim \frac{1}{(1-r)^2}.$$

这意味着 $D^3\mathcal{H}_g(f) = D(D^2\mathcal{H}_g(f)) \in H^{1,\infty,2}$。现在，由引理 3.4 可得 $D^2\mathcal{H}_g(f) \in H^{1,\infty,1}$。这等价于说 $\mathcal{H}_g(f) \in H^{1,\infty,2} = X_1$。

情形 $p > 1$显然

$$D^2\mathcal{H}_g(f) = (g' * D^2\mathcal{H}(f))(z).$$

对于 $p > 1$，由引理 3.3 可得

$$\begin{aligned} M_p(r, D^2\mathcal{H}_g(f)) &= M_p(r, g' * D^2\mathcal{H}(f)) \\ &\lesssim M_p(\sqrt{r}, g') M_1(\sqrt{r}, D^2\mathcal{H}(f)). \end{aligned}$$

由于 $g \in X_p$，所以我们有

$$M_p(\sqrt{r}, g') \lesssim \frac{1}{(1-r)^{1-\frac{1}{p}}}.$$

引理 3.2 表明

$$M_1(\sqrt{r}, D^2\mathcal{H}(f)) \lesssim \frac{1}{1-r}.$$

由此可得

$$M_p(r, D^2\mathcal{H}_g(f)) \lesssim \frac{1}{(1-r)^{2-\frac{1}{p}}}.$$

由引理 3.4 可得 $g \in \Lambda^p_{1/p} = X_p$。 □

定理 3.5. 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。那么，算子 H_g 从 H^∞ 到 $\mathcal{B}$ 有界，当且仅当 $g \in \mathcal{B}$。

证明。 必要性的证明与定理 3.1 类似。

另一方面，假设 $g \in \mathcal{B}$。对于 $f \in H^\infty$，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|\mathcal{H}_g(f)'(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left|\int_0^1 tf(t)g''(tz)dt\right|$$

$$\leq ||f||_\infty \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\int_0^1 |g''(tz)|dt$$
$$\lesssim ||f||_\infty ||g||_{\mathcal{B}} \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\int_0^1 \frac{dt}{(1-t|z|)^2}$$
$$\lesssim ||f||_\infty ||g||_{\mathcal{B}}.$$

证明完毕。 □

4 由泰勒系数非负的符号 $\mathcal{H}_g$ 诱导的算子

本节主要研究由泰勒系数非负的符号 $\mathcal{H}_g$ 诱导的算子，它们作用于对数加权 Bloch 空间和 Korenblum 空间。F

或 $\alpha \in \mathbb{R}$, we define the logarithmically weighted Bloch 空间 $\mathcal{B}_{\text{对数}^\alpha}$ 为 follows,

$$\mathcal{B}_{\log^\alpha} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : ||f||_{\mathcal{B}_{\log^\alpha}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\log^{-\alpha}\frac{e}{1-|z|^2}|f'(z)| < \infty \right\}.$$

特别地， $\mathcal{B}_{\log^0}$ 就是 Bloch 空间 $\mathcal{B}$。若 $\alpha = 1$，我们将 $\mathcal{B}_{\log^1}$ 记作 $\mathcal{B}_{\log}$。

由于对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$， $\int_0^1 \log\log\frac{e^2}{1-t}dt \leq \infty$ 且 $\int_0^1 \log^\alpha \frac{e}{1-t}dt < \infty$，这表明对于每个 $f \in \mathcal{B}_{\log^\alpha}$， $\int_0^1 |f(t)| < \infty$，因此 $\mathcal{H}_g$ 在 $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ 上定义良好。 $\mathcal{H}_g$ 在对数加权 Bloch 空间之间作用时的有界性如下所述。

定理 4.1. 设 $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n \in H(\mathbb{D})$ 满足对所有 $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 均有 $b_n \geq 0$。若 $\alpha > -1$，则以下陈述等价。

(1) 算子 $\mathcal{H}_g$： $\mathcal{B}_{\log^\alpha} \to \mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$ 有界。*(2)* $g \in \mathcal{B}$。*(3)* $\sum_{n=1}^N nb_n \log^{\alpha+1}(n+1) = O(N\log^{\alpha+1} N)$。*(4)* $\sum_{n=1}^N nb_n = O(N)$。

为了证明定理 4.1，我们需要一些辅助引理。以下积分估计由作者及其合作者在 [26] 中建立。

引理 4.2. 假设 $\delta > -1, c > 0$ 和 $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$。若 $0 \leq r < 1$，则

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^\delta}{(1-tr)^{1+\delta+c}}\log^\beta\frac{e}{1-t}\log^\gamma\frac{e}{1-tr}dt \asymp \frac{1}{(1-r)^c}\log^{\beta+\gamma}\frac{e}{1-r}.$$

以下引理刻画了具有非负系数的对数 Bloch 空间中的函数。

引理 4.3。 *[25, 定理 3.1]* 设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且设 $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \in H(\mathbb{D})$，其中 $a_n \geq 0$ 对所有 $n \geq 0$均成立。则 $f \in \mathcal{B}_{\log^\alpha}$ 当且仅当

$$\sum_{n=1}^N na_n = O(N\log^\alpha(N+1)).$$

我们还需要以下引理。

引理 4.4。 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为非负数列。假设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。则以下命题等价：

(1) $\sum_{n=1}^{N} a_n \log^{\alpha}(n+1) = O(N \log^{\beta} N)$。
(2) $\sum_{n=1}^{N} a_n = O\left(N \log^{\beta-\alpha} N\right)$.

证明。 (2) $\Rightarrow$ (1). </style>对于 $N \geq 2$，若 $\alpha \geq 0$ 且 $n \leq N$，则 $\log^{\alpha}(n+1) \leq \log^{\alpha}(N+1)$。因此，我们有

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \log^{\alpha}(n+1) \leq \log^{\alpha}(N+1) \sum_{n=1}^{N} a_n \lesssim N \log^{\beta} N.$$

若 $\alpha < 0$，令 $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$，则由阿贝尔求和公式可得

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \log^{\alpha}(n+1) = A_N \log^{\alpha}(N+1) + \sum_{n=1}^{N-1} A_n \left(\log^{\alpha}(n+1) - \log^{\alpha}(n+2)\right).$$

容易验证

$$\log^{\alpha}(n+1) - \log^{\alpha}(n+2) \asymp \frac{|\alpha| \log^{\alpha-1}(n+1)}{n}. \tag{14}$$

由于 $A_N = O\left(N \log^{\beta-\alpha} N\right)$，由 (14) 可得

$$\sum_{n=1}^{N-1} A_n \left(\log^{\alpha}(n+1) - \log^{\alpha}(n+2)\right) \lesssim \sum_{n=1}^{N-1} \log^{\beta-1}(n+1).$$

对于任意 $\beta \in \mathbb{R}$，有

$$\sum_{n=1}^{N-1} \log^{\beta-1}(n+1) = O(N \log^{\beta-1} N).$$

因此，我们得到

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \log^{\alpha}(n+1) = O(N \log^{\beta} N) + O(N \log^{\beta-1} N) = O(N \log^{\beta} N).$$

(1) $\Rightarrow$ (2)。 如果 $\alpha < 0$，那么对于 $1 \leq n \leq N$，$\log^{\alpha}(N+1) \leq \log^{\alpha}(n+1)$。我们有

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \log^{-\alpha}(N+1) \sum_{n=1}^{N} a_n \log^{\alpha}(n+1) = O\left(N \log^{\beta-\alpha} N\right).$$

对于 $\alpha \geq 0$，令 $M = [\ \frac{N}{\text{对数}^{\alpha} N}]$，则

$$\log M \lesssim \log\left(\frac{N}{\log^{\alpha} N}\right) \lesssim \log N$$

and

$$\log M \gtrsim \log \frac{N}{2\log^{\alpha} N} = \log N - \log(2\log^{\alpha} N) \gtrsim \log N.$$

这表明

$$\log M \asymp \log N.$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leq \frac{1}{\log^{\alpha} 2} \sum_{n=1}^{M} a_n \log^{\alpha}(n+1) \lesssim M \log^{\beta} M \lesssim \frac{N}{\log^{\alpha} N} \log^{\beta} N.$$

对于 $M+1 \leq n \leq N$，我们有

$$\log(n+1) \geq \log(M+1) \gtrsim \frac{1}{2} \log N.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=M+1}^{N} a_n &= \sum_{n=M+1}^{N} a_n \log^{\alpha}(n+1) \frac{1}{\log^{\alpha}(n+1)} \\ &\leq \frac{1}{\log^{\alpha}(M+1)} \sum_{n=M+1}^{N} a_n \log^{\alpha}(n+1) \\ &\lesssim \frac{1}{\log^{\alpha} N} N \log^{\beta} N. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = O(N \log^{\beta-\alpha} N).$$

证明完毕。 □

定理 4.1 的证明 (1) $\Rightarrow$ (3). 设 $f(z) = \log^{\alpha+1} \frac{e}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$。那么，根据经典专著第 192 页上的定理 2.31 [27]，我们知道

$$A_n \asymp \frac{\log^{\alpha}(n+1)}{n+1}.$$

根据引理 4.3，我们有 $f \in \mathcal{B}_{\log^{\alpha}}$。由于算子 $\mathcal{H}_g \colon \mathcal{B}_{\log^{\alpha}} \to \mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$ 有界，这意味着

$$\mathcal{H}_g(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} \left(\int_0^1 t^n \log^{\alpha+1} \frac{e}{1-t} dt \right) z^n \in \mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}.$$

No注意到 $\mathcal{H}_g(f)$ 的系数均为非负数，由引理 4.3 可知 t

$$\sum_{n=1}^{N} (n+1)^2 b_{n+1} \left(\int_0^1 t^n \log^{\alpha+1} \frac{e}{1-t} dt \right) = O\left(N \log^{\alpha+1}(N+1) \right).$$

计算表明

$$\int_0^1 t^n \log^{\alpha+1} \frac{e}{1-t} dt \asymp \frac{\log^{\alpha+1}(n+1)}{n+1}.$$

因此，我们有

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)b_{n+1}\log^{\alpha+1}(n+1) = O\left(N\log^{\alpha+1}(N+1)\right).$$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) 由引理 4.4 得出，而 (2) $\Leftrightarrow$ (4) 由引理 4.3 得出。

(2) $\Rightarrow$ (1)。设 $g \in \mathcal{B}$，则

$$|g'(z)| \lesssim \frac{||g||_{\mathcal{B}}}{1-|z|^2}.$$

这也意味着

$$|g''(z)| \lesssim \frac{||g||_{\mathcal{B}}}{(1-|z|^2)^2}. \tag{15}$$

对于 $f \in \mathcal{B}_{\log^\alpha}$，容易验证

$$|f(z)| \lesssim ||f||_{\mathcal{B}_{\log^\alpha}} \log^{\alpha+1} \frac{e}{1-|z|}.$$

由 (15) 和引理 4.2，我们有

$$\begin{aligned}
||\mathcal{H}_g(f)||_{\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}} &= |g'(0)|\left|\int_0^1 f(t)dt\right| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\log^{-(\alpha+1)}\frac{e}{1-|z|^2}|\mathcal{H}_g(f)'(z)| \\
&\lesssim ||g||_{\mathcal{B}}||f||_{\mathcal{B}_{\log^\alpha}} + ||f||_{\mathcal{B}_{\log^\alpha}} \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\log^{-(\alpha+1)}\frac{e}{1-|z|^2}\int_0^1 |g''(tz)|\log^{\alpha+1}\frac{e}{1-t}dt \\
&\lesssim ||g||_{\mathcal{B}}||f||_{\mathcal{B}}\left(1+\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\log^{-(\alpha+1)}\frac{e}{1-|z|^2}\int_0^1 \frac{\log^{\alpha+1}\frac{e}{1-t}}{(1-t|z|)^2}dt\right) \\
&\lesssim ||g||_{\mathcal{B}_{\log}}||f||_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

证明完成。 □

推论 4.5。对于 $\alpha > -1$，希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 是从 $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ 到 $\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$的有界算子。

推论 4.5 改进并推广了文献 [18] 中的命题 5.2。

注 4.6。若 $\alpha \le -1$，则希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 不是从 $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ 到$\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$的有界算子。对于 $\alpha = 1$，容易验证 $h(z) = \log\log\frac{e^2}{1-z} \in \mathcal{B}_{\log^{-1}}$。然而，我们有 ——

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|\mathcal{H}(h)'(z)| &\gtrsim \sup_{x\in[0,1)}(1-x)\int_0^1 \frac{\log\log\frac{e^2}{1-t}}{(1-tx)^2}dt \\
&\gtrsim \sup_{x\in[0,1)}(1-x)\int_x^1 \frac{\log\log\frac{e^2}{1-t}}{(1-tx)^2}dt \gtrsim \sup_{x\in[0,1)}\log\log\frac{e^2}{1-x} \to \infty.
\end{aligned}$$

这表明算子 $\mathcal{H}$ 不是从 $\mathcal{B}_{\log^{-1}}$ 到 $\mathcal{B}$的有界算子。对于 $\alpha < -1$，取 $h(z) = 1 \in \mathcal{B}_{\log^\alpha}$，则类似的论证表明，$\mathcal{H}$ 不是从 $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ 到 $\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$的有界算子。◀

定理 4.7. 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$ 满足对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$都有 $b_n \geq 0$。那么以下命题等价:

(1) 算子 $\mathcal{H}_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 是有界的。*(2)* $g \in \mathcal{B}_{\log^{-1}}$。*(3)* $\sum_{n=1}^{N} nb_n \log(n+1) = O(N)$。*(4)* $\sum_{n=1}^{N} nb_n = O\left(\frac{N}{\log N}\right)$。

证明。 证明与定理 4.1 类似，因此省略细节。 □

对于 $0 < \alpha < \infty$，Korenblum 空间 H_α^∞是由所有满足以下条件的函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 构成的空间

$$||f||_{H_\alpha^\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f(z)| < \infty.$$

希尔伯特算子 $\mathcal{H}$ 在 Korenblum 空间 H_α^∞上有界，当且仅当 $0 < \alpha < 1$。例如，参见 [8, 18, 19]。若 $0 < \alpha < 1$，则算子 $\mathcal{H}_g$ 在 H_α^∞上是良定义的。

命题 4.8。 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$。若 $0 < \alpha < 1$，则积分 $\mathcal{H}_g(f)$ 对每个 $f \in H_\alpha^\infty$都是 $\mathbb{D}$中的良定义解析函数，并且 *(2)* 成立。

证明。 如果 $0 < \alpha < 1$，那么对于每个 $f \in H_\alpha^\infty$，

$$\int_0^1 |f(t)| dt \lesssim \int_0^1 (1-t)^{-\alpha} dt \lesssim 1.$$

这意味着积分 $\mathcal{H}_g(f)$ 绝对收敛，因此 $\mathcal{H}_g(f)$ 是 $\mathbb{D}$中的一个定义良好的解析函数。

□

下面引理的证明与引理 4.4 的证明类似。

引理 4.9。 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一个非负数列。假设 $s \geq 0$ 且 $t \in \mathbb{R}$。那么$\sum_{n=1}^{N} n^s a_n = O(N^t)$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{N} a_n = O(N^{t-s})$。

定理 4.10。 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H(\mathbb{D})$ 满足对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$均有 $b_n \geq 0$。假设 $0 < \alpha < 1$ 且 $\beta > 0$。那么以下陈述等价:

(1) 算子 $\mathcal{H}_g : H_\alpha^\infty \to H_\beta^\infty$是有界的。*(2)* $g \in \mathcal{B}^{1+\beta-\alpha}$。*(3)* $\sum_{n=1}^{N} nb_n = O(N^{1+\beta-\alpha})$。

证明。 (2) $\Leftrightarrow$ (3)。 由于对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_n \geq 0$ 均成立，根据 [] 中的定理可知， $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{B}^{\beta+1-\alpha}$ 当且仅当

$$\sup_{N \geq 1} N^{\beta+1-\alpha} \sum_{n=1}^{N} nb_n < \infty.$$

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 $f_\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha} \in H_\alpha^\infty$, 则 $\mathcal{H}_g(f_\alpha) \in H_\beta^\infty$。显然,

$$\mathcal{H}_g(f_\alpha)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} \left(\int_0^1 t^n (1-t)^{-\alpha} dt \right) z^n.$$

由此可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}\left(\int_0^1 t^n(1-t)^{-\alpha}dt\right)r^n \lesssim \frac{1}{(1-r)^{\beta}}.$$

对于 $N\geq 2$，取 $r_N=1-\frac{1}{N}$。于是我们有

$$\begin{aligned}
N^{\beta} &\gtrsim \sum_{n=1}^{N}(n+1)b_{n+1}\left(\int_0^1 t^n(1-t)^{-\alpha}dt\right)r_N^n \\
&\geq \sum_{n=1}^{N}(n+1)b_{n+1}\left(\int_0^1 t^n(1-t)^{-\alpha}dt\right)r_N^N \\
&\gtrsim \sum_{n=1}^{N}(n+1)b_{n+1}\left(\int_0^1 t^n(1-t)^{-\alpha}dt\right) \\
&\asymp \sum_{n=1}^{N}(n+1)^{\alpha}b_{n+1}.
\end{aligned}$$

这表明

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^{\alpha}b_{n+1}=O(N^{\beta}).$$

现在，取 $a_n=(n+1)^{\alpha}b_n$、$t=\beta+1-\alpha$ 和 $s=1-\alpha$，由引理 4.9 即得所需结论。

(2) $\Rightarrow$ (1)。若 $g\in\mathcal{B}^{\beta+1-\alpha}$，则我们有

$$|g'(z)|\lesssim \frac{||g||_{\mathcal{B}^{\beta+1-\alpha}}}{(1-|z|)^{\beta+1-\alpha}}.$$

对于 $f\in H_{\alpha}^{\infty}$，由引理 4.2 可得

$$\begin{aligned}
||\mathcal{H}_g(f)||_{H_{\beta}^{\infty}} &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{\beta}\left|\int_0^1 f(t)g'(tz)dt\right| \\
&\leq ||f||_{H_{\alpha}^{\infty}}||g||_{\mathcal{B}^{\beta+1-\alpha}}\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{\beta}\int_0^1\frac{(1-t)^{-\alpha}}{(1-t|z|)^{\beta+1-\alpha}}dt \\
&\lesssim ||f||_{H_{\alpha}^{\infty}}||g||_{\mathcal{B}^{\beta+1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

推论 4.11。如果 $0<\alpha<1$ 和 $\beta>0$，则以下陈述等价：*(1)* 算子 $\mathcal{H}$：$H_{\alpha}^{\infty}\to H_{\beta}^{\infty}$是有界的。*(2)* $\beta\geq\alpha$。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

资助

作者受到湖南省教育厅科学研究基金（项目编号：24C0222）的资助。

数据和材料的可用性

本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集：本文完全描述理论研究。

参考文献

[1] I. Ar´evalo, 《混合范数空间之间包含关系的刻画》, 《数学分析与应用杂志》429（2015）942–955。[2] G. Bao、H. Wulan, 《作用于狄利克雷空间的汉克尔矩阵》, 《数学分析与应用杂志》409（2014）228–235。[3] C. Bellavita、V. Daskalogiannis、G. Stylogiannis, 《关于希尔伯特矩阵算子：简要综述》。载于：J. Ball、H. Tylli、J. Virtanen（编）, 《算子理论、相关领域及应用》。IWOTA 2023。《算子理论：进展与应用》, 第307卷。Birkh¨auser, Cham。[4] C. Bellavita、G. Stylogiannis, 《作用于共形不变空间的希尔伯特矩阵算子》, 《加拿大数学通报》68（2025）550–567。[5] O. Blasco, 《解析函数空间上的乘子》, 《加拿大数学杂志》47(1)（1995）44–64。[6] V. Bo˘zin、B. Karapetrovi´c, 《希尔伯特矩阵在伯格曼空间上的范数》, 《泛函分析杂志》274（2018）525–543。[7] S. Buckley、P. Koskela、D. Vukoti´c, 《分数阶积分、微分与加权伯格曼空间》, 《数学方法与应用科学》126(2)（1999）369–385。[8] J. Dai, 《希尔伯特矩阵算子在 Korenblum 空间上的范数》, 《数学分析与应用杂志》514（2022）, 论文编号126270。[9] E. Diamantopoulos、A. Siskakis, 《复合算子与希尔伯特矩阵》, 《数学研究》140（2000）191–198。[10] E. Diamantopoulos, 《伯格曼空间上的希尔伯特矩阵》, 《伊利诺伊数学杂志》48(3)（2004）1067–1078。[11] E. Diamantopoulos, 《狄利克雷空间上由汉克尔矩阵诱导的算子》, 《Analysis》24（2004）345–360。[12] M. Dostani´c、M. Jevti´c、D. Vukoti´c, 《希尔伯特矩阵在伯格曼空间与 Hardy 空间上的范数及 Nehari 型定理》, 《泛函分析杂志》254（2008）2800–2815。[13] P. Duren, 《H^p 空间理论》, 学术出版社，纽约，1970年。

[14] P. Galanopoulos、D. Girela、J. Pel´aez、A. Siskakis，《广义希尔伯特算子》，《芬兰科学院数学年刊》39(1)（2014）231–258。[15] P. Galanopoulos1、D. Girela，《作用于狄利克雷空间的希尔伯特型与 Ces`aro 型算子》，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报A辑：数学》119（2025），论文编号34。[16] Y. Guo、P. Tang，《作用于有界解析函数空间的希尔伯特矩阵算子》，《矩阵算子》19(3)（2025）393–410。[17] M. Jevti´c、B. Karapetrovi´c，《伯格曼型空间上的希尔伯特矩阵》，《数学分析与应用杂志》453（2017）241–254。[18] B. Łanucha、M. Nowak、M. Pavlovi´c，《解析函数空间上的希尔伯特矩阵算子》，《芬兰科学院数学年刊》37（2012）161–174。[19] M. Lindstr¨om、S. Miihkinen、N. Wikman，《与希尔伯特矩阵相关的加权复合算子的范数估计》，《美国数学会会刊》147（2019）2425–2435。[20] M. Mateljevi´c、M. Pavlovi´c，《解析函数积分平均的 L^p 行为》，《数学研究》77（1984）219–237。[21] J. Pel´aez、J. R¨atty¨a，《加权伯格曼空间上的广义希尔伯特算子》，《数学进展》240（2013）227–267。[22] M. Pavlovi´c，《单位圆盘上的函数类：入门》，《德·格鲁伊特数学研究丛书》第52卷，De Gruyter，柏林，2014年。[23] M. Pavlovi´c，《 Q_p 空间中的阿达马乘积》，《数学分析与应用杂志》305（2005）589–598。[24] A. Shields，《狄利克雷空间中 Fej´er-Riesz 定理的一个类似结果》，《纪念安东尼·齐格蒙德的调和分析会议》第I、II卷（伊利诺伊州芝加哥，1981年），第810–820页。沃兹沃思数学丛书，Wadsworth（1983）。[25] P. Tang、X. Zhang，《作用于加权布洛赫空间之间的广义积分型希尔伯特算子》，《数学方法与应用科学》46（2023）18458–18472。[26] X. Zhang、Y. Guo、H. Chen、P. Tang，《单位球上若干函数空间之间的广义福雷利-鲁丁型算子 $\mathbb{C}^n$》，《数学科学学报》44B(4)（2024）1301–1326。[27] A. Zygmund，《三角级数》，第I卷。剑桥大学出版社，伦敦，1959年。