arXiv:2601.08474v1 [cs.LO] 13 Jan 2026

带对合的保度 G¨odel 逻辑：中间逻辑与（理想）次协调性*

Marcelo E. Coniglio[1], Francesc Esteva[2], Joan Gispert[3] 和 Lluis Godo[2]

[1] 哲学系——IFCH 及逻辑、认识论与科学史中心，坎皮纳斯大学，巴西 coniglio@unicamp.br[2] 人工智能研究所（IIIA）——CSIC，巴塞罗那，西班牙{esteva,godo}@iiia.csic.es[3] 数学与计算机科学系，巴塞罗那大学，西班牙 jgispertb@ub.edu

摘要

本文研究逻辑 $\mathbf{G}^{\leq}_{\sim}$（带对合的 G¨odel 模糊逻辑 $\mathbf{G}_{\sim}$ 的保度伴随逻辑）与经典命题逻辑 CPL 之间的中间逻辑，以及它们的有限值对应逻辑 $\mathbf{G}^{\leq}_{n\sim}$的中间逻辑。尽管 $\mathbf{G}^{\leq}_{\sim}$ 和 $\mathbf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 相对于 G¨odel 否定 $\neg$具有爆炸性，但相对于对合否定 $\sim$，它们是次协调的。我们引入饱和次协调性的概念，其弱于理想次协调性，并完整刻画了 $\mathbf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 与 CPL 之间的理想次协调逻辑和饱和次协调逻辑。我们还在保度有限值卢卡西维奇逻辑 $\mathbf{L}_n$ 的中间逻辑族中，确定了一大类饱和次协调逻辑。

1 引言

科学理论以及哲学论证中经常会出现矛盾。在计算机科学中，需要在逻辑程序设计、信念修正、

*本文谨以此文向我们的朋友和同事 Arnon Avron 致以谦逊的敬意，感谢他在非经典逻辑、证明论和数学基础方面作出的杰出贡献。**本文已发表于 Ofer Arieli 与 Anna Zamansky（编），《*Arnon Avron* 论非经典逻辑的语义与证明论》。尚：施普林格出版社，第 107–139 页（2021）**

语义网和人工智能等领域发展处理矛盾信息的技术。由于经典逻辑——以及许多其他非经典逻辑——在不一致性存在时会变得平凡化，因此，为了形式化此类情形，考虑能够容忍矛盾的逻辑系统可能是有益的。

若逻辑 L包含一个 $\neg$-矛盾但非平凡的理论，则称其相对于否定联结词$\neg$ 是次协调的。假设 L至少是塔斯基式的，那么这等价于说， $\neg$-爆炸规则

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\psi}$$

在 L 中无效。次协调逻辑学家的主要挑战，是定义这样的逻辑系统：矛盾不仅不一定会导致平凡化，还能从这些不一致信息中推导出有用的结论。

从形式逻辑的角度对次协调性进行的首次系统研究归功于 da Costa，他于1963年提出了一个次协调系统层级，称为 C_n。因此，da Costa 被视为次协调性的奠基人之一。在他的观点下，次协调语境中的命题是“可疑的”，意思是通常情况下，一个句子及其否定可以同时成立而不导致平凡化。也就是说，可以考虑矛盾但非平凡的理论。此外，在每个系统 C_n 中，都可以表达给定句子 φ 在爆炸律方面具有经典行为这一事实。卡涅利和马科斯通过形式不一致逻辑（简称一**致性形式逻辑**，LFI）的概念，将这种以受控方式恢复爆炸律的次协调性方法推广到了 [23] 。一**致性形式逻辑**是一种相对于否定 $\neg$而言的次协调逻辑，此外还具有一个原始或定义的一元联结词 $\circ$ （一致性算子），使得任何形如 $\{\varphi, \neg\varphi, \circ\varphi\}$ 的理论都是平凡的，尽管 $\{\varphi, \neg\varphi\}$ 不一定如此。当然，与 da Costa 的系统 C_n 相比，主要的新意在于一致性算子（对应于良态算子）现在可以是原始联结词，从而能够构建一个更一般、表达能力更强的次协调性理论。此后，一**致性形式逻辑**得到了广泛研究（一般性参考资料见 [23, 22, 21]）。Avron 与其合作者通过引入若干新系统（此外还有 [23, 22, 21], 中提出的系统），并为一**致性形式逻辑**提供基于非确定性矩阵（非确定性矩阵）的简单、有效且模块化的语义，以及优雅的根岑式证明方法，为一**致性形式逻辑**的发展作出了重要贡献，例见 [1, 2, 3, 4, 12, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14]。

根据 da Costa 的观点，次协调逻辑应具备的主要性质之一，是尽可能接近经典逻辑。也就是说，次协调逻辑应尽可能保留经典推理，同时仍允许存在非平凡的矛盾理论。将这一要求形式化的一种自然方式，是借助逻辑相对于另一逻辑的极大性这一概念。若一个（塔斯基式且结构性的）逻辑 L_1 与另一逻辑 L_2 定义在相同的签名上，且

L_1 的后承关系包含于 L_2 的后承关系之中（即， L_2 是L_1的一个扩张），并且，若 L_2 的一个定理 φ 无法在 L_1 中推导出来，那么，将 φ（以及它在一致替换下的所有实例）作为定理加入 L_1 所得的扩张与 L_2相同，则称该逻辑 L_2 相对于另一逻辑 L_2 是极大的。因此，一个“良好”的次协调逻辑 L应相对于经典逻辑 CPL（在与 L相同的签名上呈现）为极大。正如 [26], 中所指出的，当两个逻辑（L_1 和 L_2）具有相同的定理时，极大性这一概念可能会被空洞地满足。

在 [2], Arieli、Avron 和 Zamansky 提出了一个关于次协调性的有趣的极大性概念：如果一个次协调逻辑不存在任何真扩张仍为次协调逻辑，那么它就是极大次协调的。因此，他们证明了若干著名的三值逻辑，例如 Sette 的 P1 以及 da Costa 和 D'Ottaviano 的 J_3 ，都是极大次协调的。请注意，P1 和 J_3 相对于经典命题逻辑也都是极大的。

P1 和 J_3 等逻辑所具备的这些突出特征，促使 Arieli、Avron 和 Zamansky 在 [4] 引入了理想次协调逻辑的概念。简而言之，若一个逻辑 L 既是极大次协调的，又相对于经典逻辑 CPL 极大，则称其为理想次协调逻辑（理想次协调性的正式定义将在第 5 节回顾）。一个有趣的问题是如何找到理想次协调逻辑；在这方面， [4] 提供了种类繁多的理想次协调有限值逻辑实例，P1 和 J_3也在其中。

如上所述，da Costa 对合理的次协调逻辑提出的要求之一，是相对于经典命题逻辑而言具有极大性。许多次协调逻辑学家（可能包括 Avron 及其合作者）都会认同这一特征的重要性。然而，这一立场绝非毫无争议。在 [37],Wansing 和 Odintsov 对这一要求进行了广泛批评。依照这两位作者的观点，相对于经典逻辑而言具有极大性并非一个好的选择。一方面，次协调现象应从信息视角加以诠释，而非诉诸认识论或本体论术语。事实上，作者声称：“逻辑应尽可能避免本体论承诺。”[1] 为此，他们指出，按照定义，逻辑“承诺语言的存在，但不一定承诺语言使用者的存在”。[2] 这意味着，尽管逻辑的模型无法避开语言实体，有效推理却不应涉及诸如“知识”、其他认识主体或信念主体的“信念状态”等概念。因此，最好从信息的角度来阐释一个次协调逻辑系统，而不诉诸诸如语言使用者、拥有心理状态的认识主体等认识论或本体论承诺。例如，如果将推理过程中的公式视为信息，那么在次协调逻辑中， $\{A, \neg A\}$ 不蕴涵 B这一事实可以解读为：“并非 $\{A, \neg A\}$ 提供了 B这一信息。”以下是摘自 [37] 的若干段落：

“经典逻辑并不是用于推理信息和信息结构的自然参照逻辑。另一方面，

[1] [37], 第179页。[2] 同上，第180页。

正是对信息的推理引出了次协调推理。”[3]

“人们或许会想知道，为什么一种非经典次协调逻辑若是正确的，就应当因其“尽可能”忠实于经典逻辑而享有特殊地位。”[4]

“次协调性确实偏离了逻辑正统，但经典逻辑是否真是次协调逻辑应当尽可能少偏离的逻辑正统，这一点并不明朗。”[5]

尽管可以对这一强调性的观点提出反驳，但似乎以经典命题逻辑为背景的极大性，不应成为一种“理想”（意为“最优”）次协调逻辑的必要条件。[6] 因此，本文提出饱和次协调逻辑这一概念；它只是放宽了理想次协调逻辑的概念，取消了相对于经典命题逻辑的极大性要求。正如我们将在本文中看到的，饱和次协调逻辑有若干有趣的实例。

次协调性处理的是过量或可疑的信息，而模糊逻辑则是为运用不精确信息进行推理而设计的；特别是针对包含模糊谓词的命题进行推理。鉴于这两种范式都能够处理信息——次协调逻辑处理不可靠的信息，模糊逻辑处理不精确的信息——考虑兼具这两种特征的逻辑，即超一致模糊逻辑，似乎是合理的。沿着这一方向迈出的第一步见于 [27], , 其中在若干模糊逻辑中， $\circ$一致性算子被定义为其他联结词的函数（例如，使用 Monteiro-Baaz Δ-算子）。在 [24] 中，这一方法被推广到扩展了预线性（积分、交换、有界）剩余格逻辑 MTL 的模糊一**致性形式逻辑**，其中一致性算子是原始算子。

我们在多篇论文中研究了由数学模糊逻辑这一类逻辑衍生出的次协调逻辑，参见例如 [27, 24, 25, 26]。特别是，在 [27] 中，作者指出，尽管所有保真模糊逻辑L 都是爆炸的，但它们的保度伴随逻辑 $L^{\leq}$ （如 [19]中所引入）在许多情况下都是次协调的。这就形成了一个庞大的次协调模糊逻辑族。在 [25]中，作者研究了 n值-卢卡西维奇逻辑 -$\mathbf{L}_n$ 与其保度伴随逻辑 -$\mathbf{L}_n^{\leq}$之间的逻辑格。尽管对于每个 n都有许多次协调逻辑，但其中没有一个是理想的。不过，在 [26] 中，本文作者考察了 -$\mathbf{L}_n^{\leq}$ 与经典命题逻辑之间的一大类逻辑，并确实找到了一个理想次协调逻辑族，并对其进行了公理化刻画。

[3]同上，第 181 页。[4]同上，第 181 页。[5]同上，第 183 页。[6]值得注意的是，近来作者已将 [4] 中的术语“理想次协调逻辑”改为“完全极大且正规的次协调逻辑”，例如见 [12]。据他们所说，选择后者是“为了使用一种更中性的术语”（见 [12, 脚注 9，第 57]页）。

本文研究了由扩展了对合否定 $G_\sim$ 的 G¨odel 模糊逻辑（该逻辑在 [29], 中引入）及其有限值扩张 $G_{n\sim}$ 所衍生出的次协调逻辑。众所周知，G¨odel 逻辑 G 与其保度伴随逻辑一致（因为 G 具有演绎分离定理），但 $G_\sim$ 并非如此。事实上，$G_\sim$ 和 $G^{\leq}_{\sim}$ 是不同的逻辑；此外，尽管相对于 G¨odel 否定 $\neg$，$G^{\leq}_{\sim}$ 是爆炸的，但相对于对合否定 $\sim$，它是次协调的。[7] 我们还研究了 $G^{\leq}_{n\sim}$（带有对合否定的有限值 G¨odel 逻辑）与经典命题逻辑之间的逻辑，并发现该逻辑族中的理想次协调逻辑只有上述三值逻辑 J_3 及其四值版本 J_4, ，这两者均在 [26]中引入。此外，我们全面刻画了 $G^{\leq}_{n\sim}$与经典命题逻辑之间的理想次协调逻辑和饱和次协调逻辑。

本文结构如下。在本引言之后，我们将介绍全文所需的一些基本定义和已知结果。第 3 节证明，介于 $G^{\leq}_{\sim}$ 与经典命题逻辑之间的逻辑可由基于带格滤子的 $G_\sim$-代数的矩阵定义；特别地，我们研究由基于带序滤子的 $[0,1]_\sim$ 定义的矩阵所刻画的逻辑。第 4 节研究带对合的有限值 G¨odel 逻辑 $G_{n\sim}$，并指出 $G_{3\sim}$ 和 $G_{4\sim}$ 分别与 $\dot{L}_3$ 和 $\dot{L}_4$（已在 [26]中研究过的 3 值和 4 值 Lukasiewicz 逻辑）重合。我们证明，在一般情形下，每个有限 $G_{n\sim}$-代数都是$\mathbf{GV_{n\sim}}$的子代数的直积；其中$\mathbf{GV}$是具有 n 个元素的 G¨odel 链，其上可定义的对合唯一，即 $\sim$。这一结果使我们能够刻画介于 $G^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间的逻辑。第 5 节正式引入饱和次协调逻辑的定义，并证明介于 $G^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间只有三种饱和次协调逻辑：其中两种（J_3 和 J_4）早已为人所知，且实际上是理想次协调的；只有一种是饱和但非理想次协调的，我们将其称为 $J_3 \times J_4$。最后，第 6 节回到对有限值 Lukasiewicz 逻辑的研究，并证明在这一框架下，存在一大类饱和但非理想次协调逻辑。最后一节讨论一些总结性评述。

2 预备知识

2.1 真值保持的 G¨odel 逻辑

本节介绍 G¨odel 模糊逻辑 G 及其公理扩张，以及带有对合否定的扩展所需的预备知识。我们将介绍它们的语法和语义、主要逻辑性质，以及全文采用的记号。

[7]事实上，$G^{\leq}_{\sim}$ 因而是 Arieli 和 Avron [1], 意义下的一个 *paradefinite* 逻辑（关于 $\sim$），因为它既是次协调的，又是次完备的；排中律 $\varphi \vee {\sim}\varphi$ 不成立，这与所有模糊逻辑的情况一样。文献中早已用不同名称研究过具有既次协调又次完备的否定的逻辑： *non-alethic* 逻辑（da Costa）和*paranormal* 逻辑（Beziau）。

G¨odel 命题逻辑的语言通常由一个可数的命题变量集 V、常元 $\bot$ 和二元联结词 $\wedge$ 和 $\rightarrow$ 构成。析取和否定分别定义为 $\varphi \vee \psi := ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ 和 $\neg\varphi := \varphi \rightarrow \bot$，等价定义为 $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$，而常元 $\top$ 取为 $\bot \rightarrow \bot$。

以下是 G 的公理：[8]

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{A1}) & (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\
(\mathrm{A2}) & (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi \\
(\mathrm{A3}) & (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi) \\
(\mathrm{A4a}) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \\
(\mathrm{A4b}) & ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \\
(\mathrm{A5}) & ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi) \rightarrow \chi) \\
(\mathrm{A6}) & \bot \rightarrow \varphi \\
(\mathrm{A7}) & \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \varphi)
\end{array}
$$

G 的推理规则 是肯定前件。

作为一种多值逻辑，G¨odel 逻辑是 H´ajek 的基础模糊逻辑 BL [34]（即连续三角范数及其剩余的逻辑）的公理扩张，它通过收缩公理 (A7) 得到。

由于唯一的幂等连续三角范数是最小值，因此 G¨odel 逻辑相对于其标准模糊语义是强完备的；该语义将公式解释在结构 $[0,1]_{\mathrm{G}} = ([0,1], \min, \Rightarrow_{\mathrm{G}}, 0, 1)$，[9] 上，即通过公式 e 在 $e[0,1]$ 上的真值赋值来定义语义，其中 1 是唯一指定的真值，并且满足 $e(\psi) = e(\bot) = 0$。($\varphi \wedge \psi$) $\min(e(\varphi), e(\psi))$，$(\varphi \rightarrow \psi)$ $e(\varphi) \Rightarrow_{\mathrm{G}} e(\psi)$，其中 $\Rightarrow_{\mathrm{G}}$ 是定义在 $[0,1]$ 上的二元运算，定义如下

$$
x \Rightarrow_{\mathrm{G}} y = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq y \\ y, & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

因此，$e(\varphi \vee \psi) = \max(e(\varphi), e(\psi))$，且 $e(\neg\varphi) = \neg_{\mathrm{G}} e(\varphi) = e(\varphi) \Rightarrow_{\mathrm{G}} 0$。根据定义，$\Gamma \models_{\mathrm{G}} \varphi$ 当且仅当，对于 $[0,1]_{\mathrm{G}}$ 上的每个赋值 e，若对每个 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $e(\gamma) = 1$，则 $e(\varphi) = 1$。

G¨odel 逻辑也可以看作是通过预线性公理对直觉主义命题逻辑进行的公理扩张

$$
(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi).
$$

因此，其代数语义由预线性海廷代数构成的簇给出，这些代数也称为 G¨odel 代数。因此，G¨odel 代数是一种（有界、整、交换的）剩余格 $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, \Rightarrow, 0, 1)$，其中幺半群运算 $*$ 与格的交 $\wedge$ 重合，并且满足预线性方程

$$
(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1
$$

[8] 这一公理化是通过在 H´ajek 的 BL 逻辑公理 [34] 中加入公理 (A7) 得到的。后来有研究表明，公理 (A2) 和 (A3) 实际上是冗余的，详细论述及相关参考文献见 [15]。[9] 称为 *standard* G¨odel 代数。

成立，其中 $x \vee y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$. G¨odel 代数是局部有限的，也就是说，给定一个 G¨odel 代数$\mathbf{A}$ 和一个有限集合 $F \subseteq A$，由 F 生成的 G¨odel 子代数也是有限的。

众所周知，哥德尔逻辑的公理扩张与其有限值对应逻辑相对应。如果将单位区间 $[0,1]$ 替换为真值集 $GV_n = \{0, 1/(n-1). . . , (n-2)/(n-1)\ 1\}$，那么在标准哥德尔代数 $[0,1]_G$ 中，结构 $\mathbf{GV_n} = (GV_n, \min \Rightarrow_{\mathrm{G}}, 0, 1)$ 就成为 n值哥德尔逻辑 G_n的“标准”代数，也就是 G 加上如下公理所得的公理扩张：

$$(\mathrm{A}_{\mathrm{G}_n}) \quad (\varphi_1 \to \varphi_2) \vee \ldots \vee (\varphi_n \to \varphi_{n+1})$$

根据定义，$\Gamma \models_{\mathrm{G}_n} \varphi$ 当且仅当：对于 GV_n上的每个赋值 e，如果对每个 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $e(\gamma) = 1$，那么 $e(\varphi) = 1$。事实上，逻辑 G_n 都是 G 的公理扩张；并且对于每个 n，G_n 都是 G_{n+1}的公理扩张，其中 G_2 与经典命题逻辑重合。因此，G 的公理扩张集合构成一条逻辑链（以及相应的代数簇链），其逻辑强度严格递增：

$$\mathrm{G} < \ldots < \mathrm{G}_{n+1} < \mathrm{G}_n < \ldots < \mathrm{G}_3 < \mathrm{G}_2 = \mathrm{CPL}$$

其中 $L < L'$ 表示 L' 是 L的公理扩张。

由于 G¨odel 逻辑中的否定是伪补而非对合， [29] 中的作者研究了由不含非平凡零因子的连续三角范数导出的剩余模糊逻辑，并为其加入对合否定。特别是，他们考察了带有对合否定 $\sim$的 G¨odel 逻辑 G 的扩张，记作 $\mathrm{G}_\sim$，并为其建立了公理化。

$\sim$ 联结词在实单位区间 $[0,1]$ 上的预期语义是任意的保序反转对合 $n\colon [0,1] \to [0,1]$，即满足 $n(n(x)) = x$ 且 $n(x) \leq n(y)$，只要 $x \geq y$。

事实证明，在同时具有两种否定 $\neg$ 和 $\sim$的 $\mathrm{G}_\sim$中，Monteiro-Baaz 投影联结词 Δ 可定义为

$$\Delta\varphi := \neg\sim\varphi,$$

其在 $[0,1]$ 上的语义由映射 $\delta\colon [0,1] \to [0,1]$ 给出，定义为 $\delta(1) = 1$ 和 $\delta(x) = 0$，其中 $x < 1$。

$\mathrm{G}_\sim$ 的公理是 G 的公理加上：[10]

$$\begin{array}{lll}
(\sim 1) & \sim\sim\varphi \leftrightarrow \varphi & \textit{(Involution)} \\
(\sim 2) & \neg\varphi \to \sim\varphi & \\
(\sim 3) & \Delta(\varphi \to \psi) \to \Delta(\sim\psi \to \sim\varphi) & \textit{(Order Reversing)} \\
(\Delta 1) & \Delta\varphi \vee \neg\Delta\varphi & \\
(\Delta 2) & \Delta(\varphi \vee \psi) \to (\Delta\varphi \vee \Delta\psi) & \\
(\Delta 5) & \Delta(\varphi \to \psi) \to (\Delta\varphi \to \Delta\psi) &
\end{array}$$

[10]这些是原始公理，参见 [29], ；另请参阅 [15] 及其中的参考文献，以了解更简短的公理化。

$\mathbf{G}_\sim$ 的推理规则是肯定前件 和必然化规则，适用于 Δ:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi} \qquad \frac{\varphi}{\Delta\varphi}$$

$\mathbf{G}_\sim$ 是一种可代数化逻辑，其等价代数语义是按自然方式定义、由其线性有序成员类生成的 $\mathbf{G}_\sim$-代数拟簇。其中，所谓的 标准$\mathbf{G}_\sim$-代数记作 $[0,1]_{\mathrm{G}_\sim}$，是定义在实数区间 $[0,1]$ 上的代数，其 G¨odel 真值函数扩展了对合否定 $\sim x = 1 - x$。这个 $\mathbf{G}_\sim$-链生成了整个 $\mathbf{G}_\sim$-代数拟簇。事实上，对于 $\mathbf{G}_\sim$，我们有一个强标准完备性结果，见 [29, 30]: 对于任意 $\mathbf{G}_\sim$-公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\}$， $\Gamma \vdash_{\mathrm{G}_\sim} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models_{\mathrm{G}_\sim} \varphi$; 后者的含义是：对于 $[0,1]_{\mathrm{G}_\sim}$上的每个赋值 e，若对每个 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $e(\gamma) = 1$，则 $e(\varphi) = 1$。

最后需要指出，虽然 G 具有通常的演绎分离定理（即 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathrm{G}} \psi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$），但 $\mathbf{G}_\sim$并非如此，它只有以下形式的 Δ-演绎定理： $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathrm{G}_\sim} \psi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{\mathrm{G}_\sim} \Delta\varphi \to \psi$。关于 $\mathbf{G}_\sim$的更多性质，另请参见手册章节 [30] 。

另一方面，与 G¨odel 逻辑的情形一样，也可以考虑每个 $n \geq 2$对应的逻辑 $\mathbf{G}_{n\sim}$，即 $\mathbf{G}_\sim$的有限值对应逻辑。具体而言，$\mathbf{G}_{n\sim}$可通过在 $\mathbf{G}_\sim$ 上加入公理 $(\mathbf{A}_{\mathrm{G}_n})$[11] 而得到，且可以证明它相对于其预期代数语义是完备的；该语义是由线性有序代数 $\mathbf{GV_n}_\sim$ 生成的代数簇，而 $\mathbf{GV_n}_\sim$ 则是通过在 $\mathbf{GV_n}$ 上加入对合否定 $\sim x = 1 - x$得到的扩展；$\sim x = 1 - x$是可在 GV_n上定义的唯一对合反序映射。因此，对于任意 $\mathbf{G}_{n\sim}$-公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\}$， $\Gamma \vdash_{\mathrm{G}_{n\sim}} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models_{\mathrm{G}_{n\sim}} \varphi$; 后者的含义是：对于 $\mathbf{GV_n}$ 在 $\sim$下的扩展上的每个赋值 e，若对每个$\gamma \in \Gamma$ 都有 $e(\gamma) = 1$，则 $e(\varphi) = 1$。显然，$\mathbf{G}_{2\sim}$ =是经典命题逻辑。$\mathbf{G}_{n\sim}$ 的公理扩张图见图 1，其中边表示扩张。可以看出，若 n 为偶数，则对任意 $m > n$，$\mathbf{G}_{m\sim}$ 都是 $\mathbf{G}_{m\sim}$ 的扩张；若 n 为奇数，则只有当 $m > n$ 也为奇数时，$\mathbf{G}_{m\sim}$ 才是 $\mathbf{G}_{m\sim}$ 的扩张。另外请注意，图中 $\mathbf{G}_{\sim}$ 表示在 $\mathbf{G}_\sim$ 上加入公理所得的扩张

$$\text{(NFP)} \quad \sim\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi)$$

它刻画了对合否定没有不动点这一条件，而所有 $\mathbf{G}_{n\sim}$ with n even 逻辑都满足该条件。

2.2 保持度的 G¨odel 对合逻辑

数学模糊逻辑主要研究的逻辑是（完全）保真模糊逻辑，例如上一节介绍的 G¨odel 逻辑。不过，文献中也有一些与之相伴的逻辑，它们保留真值度，

[11]等价地，它是 $\mathbf{G}_n$ with $\sim$ 的扩展，并包含公理 ($\sim$1)-($\sim$3)、(Δ1)-(Δ3)，以及针对 Δ 的必然化规则。

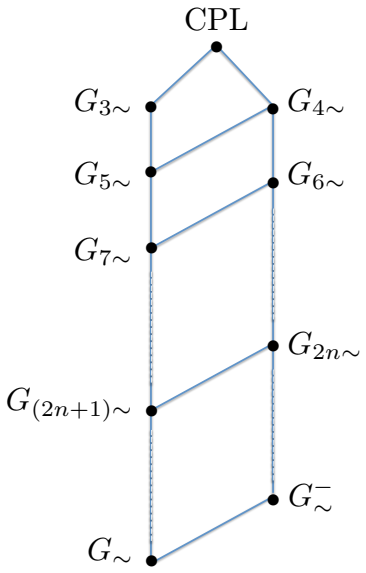

图 1：$\mathrm{G}_{\sim}$ 的公理扩张图。

例如参见 [32, 19]。 [31] 有人认为，这种方法更符合多值逻辑对真值度语义的承诺，因为在相应的后承关系概念中，所有真值都发挥同等重要的作用。具体而言，给定一个模糊逻辑 L，[12] 可以引入 L 的一个变体，通常记作 $\mathrm{L}^{\leq}$，其对应的可推导关系具有如下语义：对于任意公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\}$，

$\Gamma \vdash_{\mathrm{L}^{\leq}} \varphi$ 当且仅当对于每个 L-链 $\boldsymbol{A}$、每个 $a \in A$ 以及每个 $\boldsymbol{A}$-赋值 e，若对于每个 $\psi \in \Gamma$ 都有 $a \leq e(\psi)$，则 $a \leq e(\varphi)$。

因此，$\mathrm{L}^{\leq}$ 被称为一种保留真值度的模糊逻辑，或称为 L 的保度伴随逻辑。不难证明，L 和 $\mathrm{L}^{\leq}$ 具有相同的定理，并且对于每个有限公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\}$:

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{L}^{\leq}} \varphi \text{ iff } \vdash_{\mathrm{L}} \Gamma^{\wedge} \to \varphi$$

[12]为便于实际处理，本文可以假设 L 是 H´ajek 的 BL 逻辑的公理扩张。

其中 $\Gamma^\wedge$ 表示 $\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k$，适用于 $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$（当 Γ 为空时，$\Gamma^\wedge$ 为 $\top$）。

注 1. 值得注意的是，保程度后承关系的思想早已出现在（经典）模态逻辑的语境中。众所周知，在通常的克里普克关系语义下，模态逻辑中可以考虑两种后承关系概念：一种是局部的，另一种是全局的。[13] 不过，模态逻辑也通过所谓的模态代数赋予了代数语义。给定这样的模态代数，可以用与上述给定线性有序 L-代数类似的方式，定义相应的保真后承关系和保程度后承关系。显然，对于模态逻辑，局部克里普克语义对应于保程度代数语义，而全局语义对应于保真语义，参见例如 [16, 定义 1.35 和 1.37]。

至于公理化，逻辑 $\mathrm{L}^{\leq}$ 具有一种希尔伯特式公理化，其公理与 L 相同，并采用以下推理规则 [19]:

(相邻-$\wedge$) 由 φ 和 ψ 推出 $\varphi \wedge \psi$

(肯定前件-r) 若 $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$，则由 φ 和 $\varphi \to \psi$推出 ψ

请注意，**(MP-r)** 是肯定前件规则的一种受限形式，仅当 $\varphi \to \psi$ 是 L 的一个定理时才适用。

由于 G¨odel 逻辑 G 具有演绎分离定理，一个关键观察是 $\mathrm{G}^{\leq}$ =G。然而，对于带有对合否定的 G 的扩展，情况则有所不同，因为 $\mathrm{G}_{\sim}$ 不满足通常的演绎分离定理，因此 $\mathrm{G}_{\sim}$ 和 $\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 是不同的逻辑。此外，虽然 $\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 仍然是 ⊣⊢-爆炸的，但它是 $\sim$-次协调的。事实上，存在 φ，ψ 使得 $\varphi \wedge \sim\varphi \nvdash_{\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}} \psi$。例如，取 φ 和 ψ 作为两个不同的命题变量，并取 e 作为 $[0,1]_{\mathrm{G}_{\sim}}$ 上的一个真值赋值，使得 $e(\varphi) = \frac{1}{2}$ 且 $e(\psi) < \frac{1}{2}$。

至于 $\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 的公理化，我们需要考虑一条关于Δ的额外规则。如 [27], 所示，$\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 的完备希尔伯特式公理化可由 $\mathrm{G}_{\sim}$ 的公理、先前的规则 **(Adj-$\wedge$)** 和 **(MP-r)**，[14] 以及下述针对 Δ 的通常必然化规则的限制形式构成:

(ΔNec-r) 若 $\vdash_{\mathrm{G}_{\sim}} \varphi$，则由 φ 推出 $\Delta\varphi$

最后，我们来考察逻辑 $\mathrm{G}^{\leq}_{n\sim}$，即有限值逻辑 $\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 的保度伴随逻辑，其定义方式与上文对 $L = \mathrm{G}_{n\sim}$ 的定义方式相同。与 $\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 类似，$\mathrm{G}^{\leq}_{n\sim}$ 也有如下希尔伯特式公理化：$\mathrm{G}^{\leq}_{n\sim}$ 的公理为 $\mathrm{G}_{n\sim}$ 的公理，推理规则则包括规则 **(Adj-$\wedge$)** 以及以下受限规则:

[13]给定一类 Kripke 模型，若对该类中的任意 Kripke 模型 M 及其中的每个世界 w，只要 Γ 中的每个公式在 $\langle M, w\rangle$ 中都为真，公式 φ 就在 $\langle M, w\rangle$ 中为真，则称公式 φ 可由公式集 Γ 推出。另一方面，若对每个 Kripke 模型 M，只要Γ 中的每个公式对每个 w 都在 $\langle M, w\rangle$ 中为真，则对每个 w，φ 都在 $\langle M, w\rangle$ 中为真，便称在该类中 φ 可由 Γ 推出 *globally*。[14]对于 $\mathrm{L} = \mathrm{G}_{\sim}$。

(MP-r) 若 $\vdash_{\mathrm{G}_{n\sim}} \varphi \to \psi$，则由 φ 和 $\varphi \to \psi$推出 ψ**(ΔNec-r)** 若 $\vdash_{\mathrm{G}_{n\sim}} \varphi$，则由 φ 推出 $\Delta\varphi$

3 通过序滤子定义的 $[0,1]_{G\sim}$ 上的矩阵逻辑

我们将一对 $\langle \mathbf{A}\ F\rangle$ 称为一个逻辑矩阵，其中$\mathbf{A}$是一个代数，而F 是$\mathbf{A}$ 的域 A 的子集。由矩阵$M = \langle \mathbf{A}\ F\rangle$ 定义的逻辑 $L(M)$，通过规定对于任意公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\}$，

$\Gamma \vdash_{L(M)} \varphi$ 若对 $\mathbf{A}$ 上的每个赋值 e，只要对每个 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $e(\gamma) \in F$，那么 $e(\varphi) \in F$。

另一方面，由矩阵类 $\mathcal{M}$ 确定的逻辑 $L(\mathcal{M})$，定义为该族中所有矩阵所定义的逻辑的交。若某个逻辑具有 $L(\mathcal{M})$ 的形式，其中 $\mathcal{M}$ 是某个矩阵类，则称其为矩阵逻辑。

记号： 在本文余下部分，为避免混淆并简化记号，我们通常将矩阵 M 或矩阵集 $\mathcal{M}$ 与其对应的逻辑 $L(M)$ 和 $L(\mathcal{M})$。视为相同。

正如 [19] 针对剩余格逻辑所证明的那样，我们可以证明，$\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$（即 $\mathrm{G}_{\sim}$的保度伴随逻辑）按照 Block 和 Pigozzi 的意义并非可代数化，因此没有代数语义。不过，它具有矩阵语义。事实上，$\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 是由矩阵集定义的逻辑

$$\mathcal{M}_{\mathrm{G}_{\sim}} = \{\langle \mathbf{A}, F\rangle : \mathbf{A} \text{ is a } \mathrm{G}_{\sim}\text{-algebra and } F \text{ is a lattice filter of } \mathbf{A}\}.$$

运用与 [19, 定理2.12], 证明中类似的论证，事实上我们还可以证明，$\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 相对于 $\mathcal{M}_{\mathrm{G}_{\sim}}$的一个子集是完备的，即基于标准 $\mathrm{G}_{\sim}$-代数的矩阵集

$$\mathcal{M}_{[0,1]} = \{\langle [0,1]_{\mathrm{G}_{\sim}}, F\rangle : F \text{ is an order filter of } [0,1]\}.$$

接下来，我们研究由 $\mathcal{M}_{[0,1]}$中的矩阵定义的所有逻辑之间的关系，也就是通过序滤子在代数 $[0,1]_{\mathrm{G}_{\sim}}$ 上构造的矩阵所定义的逻辑，并确定其中哪些是次协调的。实际上，$[0,1]_{\mathrm{G}_{\sim}}$ 上的序滤子为以下集合：$F_{[a} = \{x \in [0,1] :$ 对所有 $a \in$，$x \geq a\}$ $(0,1]$, 以及 $F_{(a} = \{x \in [0,1] :$ 对所有 $a \in [0,1,\ x > a\}$ ）。为简化记法，我们将相应的逻辑记为

$$\mathrm{G}^{[a}_{\sim} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}_{\sim}}, F_{[a}\rangle \text{ and } \mathrm{G}^{(a}_{\sim} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}_{\sim}}, F_{(a}\rangle.$$

这些逻辑对应的后承关系将分别记为 $\vdash_{[a}$ 和 $\vdash_{(a}$，，而 $\vdash^{f}_{[a}$ 和 $\vdash^{f}{}_{(a}$ 将分别表示其有限伴随逻辑

$\vdash_{[a}$ 和 $\vdash_{(a}$, 。我们将分别用 $\vdash_1$ 和 $\vdash_1^f$ 代替 $\vdash_{[1}$ 和 $\vdash_{[1}^f$。

其中一些逻辑 $\vdash_{[a}$ and $\vdash_{(a}$ 实际上是有有限性的。下一个引理将证明这一点。

引理 1。 逻辑 $\vdash_1$ 是有有限性的。此外，逻辑 $\vdash_{(1/2}, \vdash_{[1/2}$ 和 $\vdash_{(0}$作为演绎系统等价于 $\vdash_1$，因此它们也都是有有限性的。因此，所有这些逻辑都与各自的有限伴随逻辑 $\vdash_1^f, \vdash^f{}_{(1/2}, \vdash_{[1/2}^f$和 $\vdash^f{}_{(0}$ 一致。

证明。• 由于 $\mathbf{G}_\sim$ 具有有限公理化（见前文第 2.1 节），且相对于 $\vdash_1$强标准完备，因此 $\vdash_1$ 是有有限性的，并且与 $\vdash_1^f$ 一致。

• 我们证明，事实上，$\vdash_{(1/2}, \vdash_{[1/2}$ 和 $\vdash_{(0}$ 都等价于 $\vdash_1$，这里的等价是指 Blok 和 Pigozzi [17]意义下的等价。具体而言，对于每个公式 φ，定义如下变换：- $\varphi^{*_1} := (\sim\varphi \to \varphi) \wedge \neg\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi)$，$\varphi^{*_2} := \sim\varphi \to \varphi$, $\varphi^{*_3} := \neg\neg\varphi$。此外，若 Γ是一个公式集，则对 $* \in \{*_1, *_2, *_3\}$定义 $\Gamma^* := \{\psi^* \mid \psi \in \Gamma\}$ 。容易验证，对于任意 $\mathbf{G}_\sim$-赋值 e，都有：- $e(\varphi) > 1/2$ 当且仅当 $e(\varphi^{*_1}) = 1$，- $e(\varphi) \geq 1/2$ 当且仅当 $e(\varphi^{*_2}) = 1$，- $e(\varphi) > 0$ 当且仅当 $e(\varphi^{*_3}) = 1$。

于是可以检验出以下三个条件得到满足：

（i）逻辑 $\vdash_{(1/2}, \vdash_{[1/2}$ 和 $\vdash_{(0}$ 可以在 $\vdash_1$ 中得到忠实解释，因为以下等价关系成立：$\Gamma \vdash_{(1/2} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma^{*_1} \vdash_1 \varphi^{*_1}$，$\Gamma \vdash_{[1/2} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma^{*_2} \vdash_1 \varphi^{*_2}$，以及 $\Gamma \vdash_{(0} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma^{*_3} \vdash_1 \varphi^{*_3}$。（ii）我们还可以利用 Δ 算子，将 $\vdash_1$ 解释为其他任一后承关系；事实上，有：$\Gamma \vdash_1 \varphi$ 当且仅当 $\Gamma^\Delta \vdash_{(1/2} \Delta(\varphi)$ 当且仅当 $\Gamma^\Delta \vdash_{[1/2} \Delta(\varphi)$ 当且仅当 $\Gamma^\Delta \vdash_{>0} \Delta(\varphi)$，其中 $\Gamma^\Delta = \{\Delta(\psi) : \psi \in \Gamma\}$。（iii）最后，以下相互可推导性表明，在相应的逻辑中，Δ 充当了每个 $*_i$ 的真正逆变换：$\psi \dashv\vdash_{(1/2} \Delta(\psi^{*_1})$ 以及 $\varphi \dashv\vdash_1 (\Delta\varphi)^{*_1}$，$\psi \dashv\vdash_{[1/2} \Delta\,\psi^{*_2}$　　$\varphi \dashv\vdash_1 \Delta\varphi^{*_2}$　（）和（），
$\psi \dashv\vdash_{(0} \Delta\,\psi^{*_3}$　　$\varphi \dashv\vdash_1 \Delta\varphi^{*_3}$　（）和（）

因此，逻辑 $\vdash_1$，$\vdash_{(1/2}, \vdash_{[1/2}$ 和 $\vdash_{(0}$ 等价；由于 $\vdash_1$ 是有限制的，其他逻辑也同样如此。

□

[15]回顾一下，逻辑 $(L, \vdash)$ 的有限伴随逻辑由 $(L, \vdash^f)$ 给出，其中，对于每个 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L$，$\Gamma \vdash^f \varphi$ 当且仅当存在一个有限的 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 使得 $\Gamma_0 \vdash \varphi$。

因此，根据前述引理，尚未解决的唯一问题是：对于 $a \in (0,\ 1/2) \cup (1/2,\ 1)$，逻辑 $\vdash_{[a}$ 和 $\vdash_{(a}$ 是否是有限制的。

下一个命题展示了由代数 $[0,1]_{\mathrm{G}_\sim}$ 上的序滤子所定义的其余逻辑之间的关系。

命题 1. 逻辑 $\mathrm{G}^{[a}_{\sim} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}_\sim}, F_{[a}\rangle$ 对 $a \in (0,1], \mathrm{G}^{(a}_{\sim} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}_\sim}, F_{(a}\rangle$ 对 $a \in [0,1)$及其有限伴随逻辑满足以下性质：[16]

P1. $\vdash_{[p} = \vdash_{[p'}$ 且对所有 $p, p' \in (1/2,1)$均成立。此外，$\vdash_{(p} \subseteq \vdash_{[p}$ 且 $\vdash^f_{[p} = \vdash^f{}_{(p}$ 对所有 $p \in (1/2,1)$均成立。*P2.* $\vdash_{[n} = \vdash_{[n'}$ 且对所有 $n, n' \in (0, 1/2)$均成立。此外，$\vdash_{(n} \subseteq \vdash_{[n}$ 且 $\vdash^f_{[n} = \vdash^f{}_{(n}$ 对所有 $n \in (0, 1/2)$均成立。

P3. 对任意 $p \in (1/2,1)</style\}$，$\vdash_{[p} \subsetneq \vdash_1$，。

P4. $\vdash_1$ 与 $\vdash_{[1/2}$ 不可比较。

P5. 对任意$p \in (1/2,1)$，$\vdash_{[p}$ 与$\vdash_{[1/2}$，以及$\vdash^f_{[p}$ 与$\vdash_{[1/2}$，均不可比较。

P6. 对任意 $p \in (1/2,1)$，$\vdash^f_{[p} \subsetneq \vdash_{(1/2}$，。

P7. 对任意 $p \in (1/2,1)$ 以及任意 $n \in (0, 1/2)$，$\vdash_{[p}$ 与 $\vdash_{[n}$ 不可比较。$\vdash^f_{[p}$ 与 $\vdash^f_{[n}$同样如此。

P8. 对任意 $n \in (0, 1/2)$，$\vdash_{[n} \subsetneq \vdash_{[1/2}$，。

P9. $\vdash_{(0}, \vdash_{[1/2}$ 和 $\vdash_{(1/2}$ 彼此不可比较。

P10. $\vdash^f_{[n} \subsetneq \vdash_{(0}$，对于任意 $n \in (0, 1/2)$。

证明。

P1. 我们将证明分为四个步骤：

(i) $\vdash_{[p} = \vdash_{[p'}$ 和 $\vdash_{(p} = \vdash_{(p'}$ 是一个简单的后承，这源于这样一个事实：对于每个 $p, p' \in (1/2, 1)$，都可以定义一个$[0,1]_{G\sim}$的自同构 f，使得 $f(p) = p'$。下面我们来证明，对于每个$p \in (1/2,1)$，$\vdash^f_{[p} = \vdash^f{}_{(p}$。

(ii) 假设 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash^f_{[p} \psi,$，其中 I 有限，且某个 $p \in$ 满足 $1/2,\ 1)$。设 q 满足 $1/2 < q < p$，并设 e 是一个赋值，使得对所有 $i \in I$，都有 $e(\varphi_i) > q$。令 $p' = \min_{i\in I} e(\varphi_i)$。显然 $p' > q$。于是，根据 (i)，我们还有 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash^f_{[p'} \psi,$，因此有 $e(\psi) \geq p' > q$，进而有 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash^f{}_{(q} \psi$。因此，对所有 $1/2 < q < p$，都有 $\vdash^f_{[p} \subseteq \vdash^f{}_{(q}$。

[16]下文中，我们用 p 和 n 表示 $[0,1]$ 中相对于否定 $\sim x = 1 - x$的正值和负值；换言之，$p > 1/2$ 和 $n < 1/2$。

(iii) 回顾 (i)， $\Gamma \vdash_{(p} \varphi$ 当且仅当对所有 $1/2 < p' < 1$ 都有 $\Gamma \vdash_{(p'} \varphi$ 。令 p_1， p_2，…， p_n，…为值 $p_i \in (1/2,\ p)$ 的递增序列，且 $\lim_n p_n = p$。假设 $\Gamma \vdash_{(p} \varphi,$，并进一步假设对所有 $\psi \in \Gamma$，都有 $e(\psi) \geq p$。显然，对每个 p_i，对所有 $\psi \in \Gamma$，都有 $e(\psi) > p_i$。由于对每个 p_i 都有 $\Gamma \vdash_{(p_i} \varphi$，因此对每个 p_i，都有 $e(\varphi) > p_i$。所以 $e(\varphi) \geq p$。

(iv) 假设 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash^f{}_{(q} \psi$，其中 I 有限，且对某个 $q \in (1/2,1)$ 成立。令 p 满足 $q < p < 1$，并令 e 为一个赋值，使得对所有 $i \in I$，$e(\varphi_i) \geq p$。令 $q' = \min_{i\in I} e(\varphi_i)$。显然 $q' \geq p$。于是，由 (i) 可知，我们还有 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash^f{}_{(q'} \psi$，因此有 $e(\psi) \geq q' \geq p$，进而有 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash^f_p \psi$。因此，对所有 $1/2 < q < p$，我们都有 $\vdash^f{}_{(q} \subseteq \vdash^f_{[p}$。

P2. 证明与 P1 的证明类似。

P3. 假设对给定的 $p \in (1/2,1)$，$\{\varphi_i : i \in I\} \vdash_{[p} \psi$ 成立，并令 e 为一个赋值，使得对所有 $i \in I$，$e(\varphi_i) = 1$。由于对所有 $p' \in (1/2,1)$，$e(\varphi_i) \geq p'$ 也成立，由 P1 可得，对所有 $p' \in (1/2,1)$，$\{\varphi_i : i \in I\} \vdash_{[p'} \psi$，因而对所有 $p' \in (1/2,1)$，$e(\psi) \geq p'$，从而 $e(\psi) = 1$。因此 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash_1 \psi$。

由于例如对任意 $p < 1$，都有 $\varphi \vdash_1 \Delta\varphi$but $\varphi \nvdash_{[p} \Delta\varphi$，因此很容易看出这是严格包含。

P4. 显然，一方面，$\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \vdash_{[1/2} \varphi$ but $\Delta(\varphi \leftrightarrow\sim\varphi) \nvdash_1 \varphi$；另一方面，$\varphi \vdash_1 \Delta\varphi$ but $\varphi \nvdash_{[1/2} \Delta\varphi$

P5. 注意到 $\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \wedge \varphi \vdash_{[p} \bot$ and $\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \wedge\varphi \nvdash_{[1/2} \bot,$，而 $\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \vdash_{[1/2} \varphi$ and $\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \nvdash_{[p} \varphi$，即可得出此结论。

P6. 假设对于给定的 $p \in (1/2,1)$，$\{\varphi_i : i \in I\} \vdash_{[p} \psi,$ 是有限的，并设 e 为一个赋值，使得对于所有 $i \in I$，$e(\varphi_i) > 1/2$。令 $p' = \min_{i\in I} e(\varphi_i)$。显然，$p' > 1/2$。于是，由 P1 还可得 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash_{[p'} \psi,$，因此有 $e(\psi) \geq p' > 1/2$，从而 $\{\varphi_i : i \in I\} \vdash_{(1/2} \psi$。因此，我们有 $\vdash_{[p} \subseteq \vdash_{(1/2}$。通过观察到 $\sim\Delta(\varphi \to \sim\varphi) \vdash_{(1/2}\varphi$，但 $\sim\Delta(\varphi \to \sim\varphi) \nvdash_{[p} \varphi$，即可得出该包含关系是严格的。

P7. 观察（i） $\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \vdash_{[n} \varphi$ 和 $\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \nvdash_{[p} \varphi$,以及（ii） $\varphi \vdash_{[p} \sim\Delta(\varphi \to \sim\varphi)$和 $\varphi \nvdash_{[n} \sim\Delta(\varphi \to \sim\varphi)$ 即可得出。

P8. $\vdash_{[n} \subseteq \vdash_{[1/2}$ 的证明与P3类似。严格包含关系可由以下事实得出：

（i） $\varphi \wedge \sim\varphi \vdash_{[1/2} \Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi)$

（ii） $\varphi \wedge \sim\varphi \nvdash_{[n} \Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi)$

注意，$e(\varphi \wedge \sim\varphi) \geq 1/2$ 当且仅当 $e(\varphi) = 1/2$ 当且仅当 $e(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) = 1$；而如果 $e(\varphi) = n$，那么 $e(\varphi \wedge \sim\varphi) = e(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) = n$，但 $e(\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi)) = 0$。

P9. 注意到例如 (i)$\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \vdash_{[1/2} \varphi$ ，但 $\Delta(\varphi \leftrightarrow \sim\varphi) \nvdash_{(1/2} \varphi,$ ，以及 (ii) $\varphi \vdash_{(1/2} \sim\Delta(\varphi \rightarrow\!\!\!\!\sim \sim\varphi)$，但 $\varphi \nvdash_{[1/2} \sim\Delta(\varphi \rightarrow \sim\varphi)$，即可得出 $\vdash_{[1/2}$ 和 $\vdash_{(1/2}$ 不可比较。

另一方面，很容易验证， $\bot$ 可由 $\varphi \wedge \Delta(\varphi \rightarrow\!\!\!\!\sim \sim\varphi) \wedge \neg\Delta(\sim\varphi \rightarrow \varphi)$推出，在 $\vdash_{(1/2}$ 和 $\vdash_{[1/2,}$ 中成立，但在 $\vdash_{(0}$中不成立。反之， $\neg\neg\varphi \wedge \neg\Delta\varphi \vdash_{(0} \varphi \wedge \sim\varphi,$ 成立，但 $\vdash_{(1/2}$ 和 $\vdash_{[1/2}$则都不是这种情况。

P10. 假设 $\{\varphi_i :$ 对于给定的 $n \in (0,\ 1/2)$和有限集 I，有 $i \in I\} \vdash_{[n} \psi$，并令$e$ 为一个赋值，使得对于所有 $i \in I$，$e(\varphi_i) > 0$ 。令 $n' = \min_{i\in I} e(\varphi_i)$。显然，对于所有 $i \in I$， $n' > 0$ 且 $e(\varphi_i) \geq n'$。于是，根据P1，我们还有 $\{\varphi_i :\ i \in I\} \vdash_{[n'} \psi,$ ，因此 $e(\psi) \geq n' > 0$。这意味着 $\{\varphi_i :\ i \in I\} \vdash_{(0} \psi$。因此，我们有 $\vdash^f_{[n} \subseteq \vdash_{(0}$。

另一方面， $\neg\neg\varphi \vdash_{(0} \varphi$ 但是 $\neg\neg\varphi \nvdash_{[n} \varphi,$ 因此我们已经证明$\vdash^f_{[n} \subsetneq \vdash_{(0}$。

□

上述命题中涉及的不同逻辑（后承关系）的图示见图2。

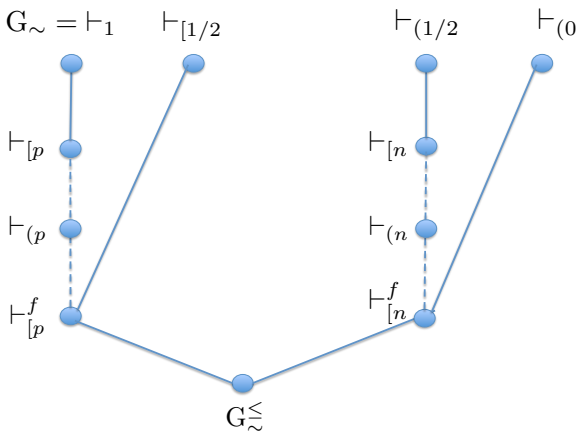

图2：由序滤子定义在 $[0,1]_{\mathrm{G}_\sim}$ 上的逻辑图，其中 $1/2 < p < 1$ 和 $0 < n < 1/2$，边表示包含关系（向上方向）。虚线表示相连的逻辑是否不同仍是一个未决问题。

显然，矩阵逻辑 $\mathrm{G}^{[a}_{\sim} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}_\sim}, F_{[a}\rangle$ （分别为 $\mathrm{G}^{(a}_{\sim} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}_\sim}, F_{(a}\rangle$）只有在 $a \leq 1/2$ （分别为 $a < 1/2$）的情况下才是次协调的。因此，

根据上述分类可知，其中只有三种不同的次协调逻辑。

推论1. 在逻辑族 $\{\mathrm{G}^{[a}_{\sim}\}_{a\in(0,1]}$ 和 $\{\mathrm{G}^{(a}_{\sim}\}_{a\in[0,1)}$ 中：

- 只有三种不同的次协调逻辑：对于任意 $a\in(0,1/2)$，$\mathrm{G}^{[a}_{\sim}$、$\mathrm{G}^{[1/2}_{\sim}$，和 $\mathrm{G}^{0}_{(\sim}$。

- 只有三种不同的爆炸逻辑：对于任意 $a\in(1/2,1)$，$\mathrm{G}^{[a}_{\sim}$、$\mathrm{G}^{1/2}_{(\sim}$ 和$\mathrm{G}^{[1}_{\sim}$。

类似于 [25, 定理 2]，，容易证明，每个介于 $\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 与经典命题逻辑之间的中间逻辑 L，实际上都是由矩阵子族 $\mathcal{M}'\subseteq\mathcal{M}_{\mathrm{G}_\sim}$ 定义的逻辑 $L(\mathcal{M}')$。不过请注意，$\mathrm{G}_\sim$代数及其格滤子的集合非常庞大。因此，要穷尽分析介于 $\mathrm{G}^{\leq}_{\sim}$ 与经典命题逻辑之间的中间逻辑集合，似乎是一项艰巨的任务。因此，在下一节中，我们将把讨论范围限定在具有对合否定 $\mathrm{G}_{n\sim}$ 的有限值 G¨odel 逻辑上。

备注2。在上一个推论中，我们已经证明，由标准 $\mathrm{G}_\sim$代数 $[0,1]_{\mathrm{G}_\sim}$ 和指定值滤子 $(0,1]$ 所定义的 $\mathrm{G}^{(0}_{\sim}$，矩阵逻辑是一种次协调逻辑。在 [8] 中，Avron 引入了 Anderson 和 Belnap 的逻辑T 的一个次协调扩展，称为 FT。该逻辑旨在成为“ ·Lukasiewicz 逻辑 ·L_∞ 的次协调对应物”（[8, 第 75] 页），首先在带有联结词 $\wedge$、$\vee$、 $\sim$、 $\to_{\mathrm{FT}}$、[17] 的命题语言中以公理方式定义，随后证明 FT 在语义上由有序代数 $\mathbf{M}^{[0,1]}=([0,1],\wedge,\vee,\sim,\to_{\mathrm{FT}},0,1)$ 以及指定值滤子 $(0,1]$ 所定义的逻辑矩阵刻画（这也是 Avron 将 FT 视为保留非假的逻辑的原因）。这里 $\wedge$、 $\vee$ 和 $\sim$ 的定义与 $[0,1]_{\mathrm{G}_\sim}$中的相同，而 $\to_{\mathrm{FT}}$ 的定义如下：

$$x\to_{\mathrm{FT}}y=\begin{cases}\max(1-x,y), & \text{if } x\leq y\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

现在注意到， $\to_{\mathrm{FT}}$ $\mathbf{M}^{[0,1]}$ 的蕴涵可在 $[0,1]_{\mathrm{G}_\sim}$ 中定义为$x\to_{\mathrm{FT}}y=\Delta(x\to_{\mathrm{G}}y)\wedge(\sim x\vee y)$。因此，逻辑 FT 可通过映射 $*$：$Fm_{\mathrm{FT}}\to Fm_{\mathrm{G}_\sim}$ 在 $\mathrm{G}^{(0}_{\sim}$中解释，该映射递归定义如下： $p^*=p$ 若 p 是命题变元；$(\sim\varphi)^*=\sim\varphi^*$；$(\varphi\wedge\psi)^*=\varphi^*\wedge\psi^*$；$(\varphi\vee\psi)^*=\varphi^*\vee\psi^*$；以及 $(\varphi\to_{\mathrm{FT}}\psi)$

$^*=\Delta\,\varphi^*\to_{\mathrm{G}}(\,)(\,)$。于是，对于每个，我们有：

$\psi^*\wedge\sim\varphi^*\vee\psi^*$ $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq Fm_{\mathrm{FT}}$

$$\Gamma\vdash_{\mathrm{FT}}\varphi\ \text{ iff }\ \Gamma^*\vdash_{(0}\varphi^*,$$

其中， Γ^* 表示集合 $\{\psi^*:\ \psi\in\Gamma\}$，而 $\vdash_{(0}$ 表示 $\mathrm{G}^{(0}_{\sim}$的后承关系。此外，在 [8, 例 3.4] 中，Avron 对每个 $n>1$都考虑了$\mathbf{M}^{\mathbf{n}}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$的有限子代数$\mathbf{M}^{[0,1]}$，其域为 $GV_n=\{0,1/(n-1)\ldots,(n-$

[17]在 [8] 中，使用了符号 $\neg$ 和 $\to$，而非 $\sim$和 $\to_{\mathrm{FT}}$。为使本文的记号保持统一，我们沿用这一记法。

2)/(n − 1) 1}。设 $\mathbf{FT^n}$ 为由代数$\mathbf{M^n_{[0,1]}}$ 及滤子 $F_{\frac{1}{n-1}} = \{a \in GV_n$ 定义的逻辑矩阵所刻画的逻辑:
$a > 0\} = GV_n \cap (0, 1]$个指定值。那么，上述解释 $*$ 也表明 $\mathbf{FT^n}$ 可在 $\langle \mathbf{GV_n}\sim, F_{\frac{1}{n-1}}\rangle$中解释，因为我们还有:

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{FT^n}} \varphi \text{ iff } \Gamma^* \vdash_{\{\frac{1}{n-1}\}} \varphi^*,$$

其中，$\vdash_{\{\frac{1}{n-1}\}}$是矩阵逻辑 $\langle \mathbf{GV_n}\sim,\ F_{\frac{1}{n-1}}\rangle$的后承关系。我们也将在第4.1小节使用这一记法。

事实上，可以观察到，$[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\mathrm{G}\sim}$ 的 Δ 运算符在 $\mathbf{M_{[0,1]}}$ 中可定义为 $\Delta x = 1 \to_{\mathrm{FT}} x$，因此，$[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\mathrm{G}\sim}$ 的哥德尔蕴涵 $\to_{\mathrm{G}}$ 在 $\mathbf{M_{[0,1]}}$ 中也可定义为 $x \to_{\mathrm{G}} y = \sim\Delta\sim(x \to_{\mathrm{FT}} y) \vee y$。但请注意，逻辑 FT 既没有底元，也没有顶元，[18] 因此 FT 中不存在能够表达 Δ 运算符的公式。令 $\mathbf{FT_0}$ 为由与 FT 相同的矩阵 $\langle \mathbf{M_{[0,1]}}, (\mathbf{0}, 1]\rangle$ 定义的逻辑，但现在其语言扩展为$Fm_{\mathrm{FT_0}}$ 包含常元 $\bot$，并添加如下要求：对于每个赋值 e，都有 $e(\bot) = 0$。我们用 $\vdash_{\mathrm{FT_0}}$ 表示其对应的后承关系。考虑映射 #：$Fm_{\mathrm{G}\sim} \to Fm_{\mathrm{FT_0}}$，按如下方式递归定义：$p^{\#} = p$ 若 p 是一个命题变元；$\bot^{\#} = \bot$；$(\sim\varphi)^{\#} = \sim\varphi^{\#}$；$(\varphi \wedge \psi)^{\#} = \varphi^{\#} \wedge \psi^{\#}$；以及 $(\varphi \to_G \psi)^{\#} = \sim\Delta\sim(\varphi^{\#} \to_{\mathrm{FT}} \psi^{\#}) \vee \psi^{\#}$（其中，对于每个 α，$\Delta\alpha = \sim\bot \to_{\mathrm{FT}} \alpha$）。于是，$\Gamma \vdash_{(0} \varphi$当且仅当 $\Gamma^{\#} \vdash_{\mathrm{FT_0}} \varphi^{\#}$，这表明逻辑 $\mathrm{G}^{(0}_{\sim}$ 可解释于 $\mathbf{FT_0}$中。由于对于每个 $\varphi \in Fm_{\mathrm{FT_0}}$，$\varphi$ 在 $\mathbf{FT_0}$ 中等价于 $\varphi^{*\#}$；并且对于每个 $\psi \in Fm_{\mathrm{G}\sim}$，$\psi$ 在 $\mathrm{G}^{(0}_{\sim}$ 中等价于 $\psi^{\#*}$（这里，

$*$ 通过加入 $\bot^* = \bot$)，将其扩展为 $Fm_{\mathrm{FT_0}}$，逻辑 $\mathrm{G}_{(\sim}^{0}$ 与 $\mathbf{FT_0}$ 在语言层面相同。$\langle \mathbf{GV_n}\sim, F_{\frac{1}{n-1}}\rangle$ 与由 $\mathbf{FT_n}$ 添加 $\bot$ 得到的逻辑 $\mathbf{FT_{n0}}$ 之间也存在相同的关系。

4 $\mathbf{G}\mathrm{G}^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间的逻辑

本节将研究 $\mathrm{G}^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间的中间逻辑，这对应一种自然的 $n > 2$。由于 $\mathrm{G}_{3\sim}$ 和 $\mathrm{G}_{4\sim}$ 分别与三值和四值的卢卡西维奇逻辑 L_3 和 L_4 重合，因此 $n = 3$ 和 $n = 4$ 两种情形很容易分析。

命题 2。$\mathrm{G}_{3\sim}$ 和 $\mathrm{G}_{4\sim}$ 分别与 L_3 和 L_4 在逻辑上等价。

证明。该证明采用代数方法，我们证明标准代数 $\mathbf{GV_3}\sim$ 和 $\mathbf{GV_4}\sim$ 分别与 Lukasiewicz 代数 L_3 和 L_4 逐项等价。首先，在代数 $\mathbf{GV_3}\sim$ 中，可以定义二元联结词 $x \to_{3\mathrm{L}} y = (x \to y) \vee (\sim x \vee y)$，它与三值卢卡谢维奇蕴涵一致，即对于任意 $x, y \in GV_3$，都有 $x \to_{3\mathrm{L}} y = \min(1, 1 - x + y)$。因此，在 $\mathbf{GV_3}\sim$ 中可以定义所有 Lukasiewicz 联结词，换言之，$(GV_3\sim, \to_{3\mathrm{L}}, \sim, 0, 1)$ 实际上就是

[18]事实上，在任何满足以下条件的赋值 e 中，公式 $\varphi \in Fm_{\mathrm{FT}}$ 的取值都是 $1/2$：该赋值在 $\mathbf{M_{[0,1]}}$ 上定义，且 e 将 φ 中出现的任意命题变元赋值为 $1/2$。

其次，在代数 $\mathbf{GV_{4\sim}}$ 中，我们也可以定义二元联结词

$$x \to_{4\text{Ł}} y = \sim x \vee [\Delta(\sim x \to x) \wedge (\sim \Delta x) \wedge (\neg\neg y) \wedge x)] \vee (x \to y)$$

这再次与四值 Łukasiewicz蕴涵相同，即对每个 $x, y \in GV_4$，$x \to_{4\text{Ł}} y = \min(1, 1 - x + y)$。

另一方面，在任何有限 MV-代数 $\mathbf{Ł V_n}$ 中，我们总能将 G¨odel 蕴涵定义为 $x \to_{\text{G}} y = \Delta(x \to_{\text{Ł}} y) \vee y$，并将 G¨odel 否定定义为 $\neg_{\text{G}} x = \Delta(\sim x)$。[19]

□

备注3。由最后一个结果可知，$\text{G}^{\leq}_{3\sim}$（分别为 $\text{G}^{\leq}_{4\sim}$）与经典命题逻辑之间的逻辑，与 $\text{Ł}^{\leq}_{3}$（分别为 $\text{Ł}^{\leq}_{4}$）和经典命题逻辑之间的逻辑相同，后者已在 [25] 和 [26]中研究。其中，著名的 da Costa 和 D'Ottaviano 的三值逻辑 J_3，，它与矩阵逻辑 $\langle \text{Ł}\mathbf{V_3}, \{1/2, 1\}\rangle$（在语言层面上）等价，是介于 $\text{Ł}^{\leq}_{3}$ 与经典命题逻辑之间的一种逻辑。类似地，其四值推广 J_4，，在 [26], 中定义为矩阵逻辑 $\langle \text{Ł}\mathbf{V_4}, \{1/3, 2/3, 1\}\rangle$，是介于 $\text{Ł}^{\leq}_{4}$ 与经典命题逻辑之间的一种逻辑。因此，我们也可以认为逻辑 J_3 和 J_4 分别等价于中间逻辑 $\langle \mathbf{GV_{3\sim}}, \{1/2, 1\}\rangle$ 和 $\langle \mathbf{GV_{4\sim}}, \{1/3, 2/3, 1\}\rangle$。

然而请注意，对于任意 $n > 4$，$\text{G}_{n\sim}$ 不再等价于 Ł_n。因此，我们需要研究 $\leq_{n\sim}$ 的中间逻辑，其中 $n > 4$；这正是下一小节的目标，而在第 4.2 节中，我们将更深入地考察 $n = 5$ 这一情形。

4.1 $n > 4$ 的 $\text{G}^{\leq}_{n\sim}$ 中间逻辑

在本节中，n 表示满足 $n > 4$ 的一个自然数。

沿用前几节中的相同论证，不难验证，$\text{G}^{\leq}_{n\sim}$ 实际上是由以下矩阵类在语义上定义的逻辑：

$$\{\langle \mathbf{A}, F\rangle : \mathbf{A} \text{ is a } \text{G}_{n\sim}\text{-algebra and } F \text{ is a lattice filter of } \mathbf{A}\}.$$

因此，为了研究 $\text{G}^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间的中间逻辑，我们需要刻画（有限）$\text{G}_{n\sim}$-代数。

命题 3. 每个有限的 $\text{G}_{n\sim}$-代数都是有限个有限$\text{G}_{n\sim}$-链的有限直积。

证明。注意，对于每个 $\text{G}_{n\sim}$-链，项 $t(x, y, z) := (\Delta(x \leftrightarrow y) \wedge z) \vee (\neg\Delta(x \leftrightarrow y) \wedge x)$ 是一个判别项，[20] 因此每个 $\text{G}_{n\sim}$-簇都是一个判别簇。于是，该结果是泛代数中的一个结果的后承（例如参见 [20, 定理 9.4，第 (d) 项]）。

□

下文中我们需要考虑逻辑矩阵的乘积。

[19]请注意，Δ 联结词在任何代数 $\mathbf{Ł V_n}$ 中都是可定义的。[20]事实上，这是整个 $\text{G}_{\sim}$-代数簇中的一个判别项。关于判别项和判别簇的定义，参见 [20]。

定义 1. 设 $L_i = \langle \mathbf{A}_i, D_i \rangle$ (对于 $i \in I$) 是一族逻辑矩阵，其中每个 D_i 都是 $\mathbf{A_i}$ 中的序滤子。这些矩阵的乘积是逻辑矩阵 $L = \Pi_{i\in I} L_i = \langle \Pi_{i\in I} \mathbf{A}_i, \Pi_{i\in I} D_i \rangle$，其中 $\Gamma \vdash_L \varphi$ 当且仅当，对于每个赋值元组 $(e_i)_{i\in I}$，每个 $\mathbf{A_i}$ 上的 e_i，以下条件成立：若对于每个 $i \in I$ 和每个 $\psi \in \Gamma$，$e_i(\psi) \in D_i$，则对于每个 $i \in I$，$e_i(\varphi) \in D_i$。

注 4. 显然，如上所述的矩阵逻辑 L 是次协调的，当且仅当所有分量 L_i 都是次协调的。例如，若某个分量是 $\langle \mathbf{GV_2}_\sim, F_1 \rangle$，则该矩阵逻辑不是次协调的。

由于每个 $\mathsf{G}_\sim$-代数都是局部有限的，因此每个介于 $\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间的中间逻辑 L，都由一族乘积矩阵 $\langle \mathbf{A}\ F \rangle$ 所诱导，其中$\mathbf{A}$ 是$\mathbf{GV_n}_\sim$ 的子代数的有限直积，且 F 是与 L相容的格滤子 A[21]。

在 [25]和 [26] 中，研究了 $\cdot$Łukasiewicz有限值逻辑的逻辑矩阵乘积。例如， [25] 完整描述了由标准$\cdot\mathbf{L}_n$-代数上的矩阵乘积（集合）定义的逻辑集合$Int_\Pi(\cdot\mathbf{L}_n)$。此外，它还几乎完整地描述了由标准 $\cdot\mathbf{L}_n$-代数的子代数上的矩阵乘积集合所定义的逻辑集合$Int(\cdot\mathbf{L}_n)$；这些子代数是 $\cdot\mathbf{L}_n$的子逻辑，且 $n-1$ 为素数。

在本节余下部分，我们将考察 $\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 与 CPL 之间的一系列中间逻辑，其一般性依次递增。

首先，我们研究矩阵逻辑 $\langle \mathbf{GV_n}$，其中 F 是 $\mathbf{GV_n}$ 的一个序滤子。为简化记号，对于每个非空子集 $T \subseteq GV_n$，我们用 $L(\mathcal{M}_T)$ 表示由矩阵集 $\mathcal{M}_T = \{\langle \mathbf{GV_n}_\sim, F_t \rangle : t \in T\}$ 所定义的逻辑，其中 F_t 表示由 $t \in GV_n$ 在 GV_n 中生成的序滤子，即：若 $t = i/(n-1)$，则 $F_t = \{i/(n-1),\ (i+1)/(n-1) \ldots, (n-2)/(n-1)\ 1\}$.[22]注意 $F_1 = \{1\}$。所有形如 $L(\mathcal{M}_T)$ 且满足 $\emptyset \neq T \subseteq GV_n \setminus \{0\}$ 的逻辑组成的集合记为 $L(\mathbf{GV_n}_\sim)$。

命题 4. 逻辑 $L(\mathcal{M}_{\{t\}})$两两不可比较，其中 $t \in GV_n \setminus \{0\}$。此外，若 $\emptyset \neq T$、$R \subseteq GV_n \setminus \{0\}$ 满足 $T \neq R$、T 和 R 具有相同基数，则 $L(\mathcal{M}_T)$ 与 $L(\mathcal{M}_R)$ 不可比较。另外，逻辑集合 $L(\mathbf{GV_n}_\sim)$ 是一个交半格，其中逻辑 $L(\mathcal{M}_{\{t\}})$ $(t \in GV_n \setminus \{0\})$ 是其极大元。

证明。令 $\vdash_{\{t\}}$ 为由矩阵 $\langle \mathbf{GV_n}_\sim, F_t \rangle$定义的逻辑 $L(\mathcal{M}_{\{t\}})$ 的后承关系，其中 $t \in GV_n \setminus \{0\}$。注意，在这些逻辑中的任意一种里，由于我们有 Δ 算子，因此可以构造一个命题公式，其变量为

[21]代数 $\mathbf{A}$ 的滤子 F 与逻辑 L 相容，当且仅当在 $\Gamma \vdash_L \varphi$ 时，以下条件成立：对于每个 $\mathbf{A}$-赋值 e，若对每个 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $e(\gamma) \in F$，则 $e(\varphi) \in F$。[22]严格来说，如果 n 无法从上下文中明确，且我们将 $i/(n-1)$ 和 $i.k/(n-1)$ 等有理数视为相同，则这种记法会产生歧义：例如，1/2、2/4、3/6，等等。在这种情况下，记法 F_1 会产生问题，因为它可能分别表示 GV_3、GV_5、GV_7、.....中无限多个不同滤子中的任意一个。GV_n 中序滤子的正确记法应为 F^n_t。不过，只要不存在混淆的风险，就会省略上标 n。

n 变量 $\Phi(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$，使得对于公式的每个赋值 e，在$\mathbf{GV_n}\sim$上，

$$e(\Phi(p_0, p_1, \ldots, p_n)) = \begin{cases} 1, & \text{if } e(p_i) = \frac{i}{n-1} \text{ for all } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ 满足 $i < j$。那么，

- $\Phi(p_0, p_1, \ldots, p_n) \wedge p_i \vdash_{\{\frac{j}{n-1}\}} \bot$ 和 $\Phi(p_0, p_1, \ldots, p_n) \wedge p_i \nvdash_{\{\frac{i}{n-1}\}} \bot$
- $\Phi(p_0, p_1, \ldots, p_n) \wedge p_j \nvdash_{\{\frac{j}{n-1}\}} p_i$ 和 $\Phi(p_0, p_1, \ldots, p_n) \wedge p_j \vdash_{\{\frac{i}{n-1}\}} p_i$

因此，若 $0 < t < t' < 1$，则 $\vdash_{\{t\}}$ 和 $\vdash_{\{t'\}}$ 不可比较。由此很容易证明，对于任意具有相同基数且满足 $T \neq R$ 的子集 $\emptyset \neq T, R \subseteq GV_n \setminus \{0\}$，逻辑 $L(\mathcal{M}_T)$ 与 $L(\mathcal{M}_R)$ 不可比较。最后，若 $\emptyset \neq T, R \subseteq GV_n \setminus \{0\}$，则 $L(\mathcal{M}_T) \cap L(\mathcal{M}_R) = L(\mathcal{M}_{T \cup R})$。因此，$L(\mathbf{GV_n}\sim)$ 是一个交半格，其极大元恰好是逻辑 $L(\mathcal{M}_{\{t\}})$，其中 $t \in GV_n \setminus \{0\}$。

□

另一方面，正如 [25] 和 [26] 对 Łukasiewicz 有限值逻辑所做的那样，也可以考虑乘积矩阵。

定义 2. 给定一个非空集合 $T \subseteq GV_n \setminus \{0\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$（其中 $k \geq 1$ 且 $t_i < t_j$ 当 $i < j$ 时），我们用 $\mathbb{L}(T)$ 表示矩阵逻辑 $\langle (\mathbf{GV_n}\sim)^k, \Pi_{i=1}^k F_{t_i} \rangle$ 该逻辑定义在 $\mathbf{GV_n}\sim$ 的直积上，并通过序滤子构造。

按照 [25, 命题 11], 中的方法，可以证明 $\mathbb{L}(T)$ 可如下刻画：

$$\Gamma \vdash_{\mathbb{L}(T)} \varphi \text{ iff } \quad \text{either } \Gamma \vdash_{\{t_k\}} \bot \quad \text{or } \Gamma \vdash_{\{t\}} \varphi \text{ for all } t \in T.$$

请注意，第一个条件 $\Gamma \vdash_{\{t_k\}} \bot$ 相当于 Γ 的一种分级不一致性条件（其含义是，对于任意 $\mathbf{GV_n}$-赋值 e 以及任意 $\psi_i \in \Gamma$，都有 $e(\psi_i) < \max T$）。另一方面，第二个条件，即对所有 $t \in T$ 都有 $\Gamma \vdash_{\{t\}} \varphi$，相当于要求在由集合矩阵 $\mathcal{M}_T = \{\langle \mathbf{GV_n}\sim, F_t \rangle$ 所定义的逻辑中，φ 可由 Γ 推出：$t \in T\}$。因此，在以下任一情况下，φ 都可由 Γ 在 $\mathbb{L}(T)$ 中推出：Γ 不一致，或在某种程度上与某个命题矛盾（其程度为 T 的最大值）；或者 φ 可由 Γ 在 $\mathcal{M}_T$ 的逻辑中推出。由此可见，后者是乘积矩阵逻辑 $\mathbb{L}(T)$ 的一个子逻辑。

研究涉及由$\mathbf{GV_n}\sim$生成的簇中的有限子代数上的分量的矩阵逻辑时，结果会有所不同。尽管它们全都是$\mathbf{GV_n}\sim$的子代数的直积，但$\mathbf{GV_n}\sim$ 的子代数数量远多于 Łukasiewicz 情形。事实上：

- $\mathbf{GV_n}\sim$ 的子代数是指从 GV_n中移除一组元素对 $\{a_i, \sim a_i\}$（其中 $a_i \notin \{0, 1\}$）后得到的那些链。特别地，如果 n 是奇数，则可以只移除不动点。

• 因此，$\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间的逻辑，就是由矩阵定义的逻辑，这些矩阵取自$\mathbf{GV_{n\sim}}$ 的子代数的直积，并且带有积代数相应分量上的序滤子的直积。当然，我们必须避免这些直积中出现重复的分量。

例1. 回顾备注3中的逻辑 J_3 和 J_4。由于 $\mathbf{GV_3}$ 和 $\mathbf{GV_4}$ 是 $\mathbf{GV_5}$，的子代数，根据 $\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 的所有扩张的刻画，我们有 $\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 与 $\langle \mathbf{GV_{3\sim}} \times \mathbf{GV_{4\sim}}, F_{\frac{1}{2}} \times F_{\frac{1}{3}} \rangle$（语言意义下）一致，因此它是 $\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim}$ 的一个次协调扩张，且与 J_3 和 J_4 均不可比较。事实上，很容易看出，对于每个公式 φ，$\vdash_{\mathsf{J}_3\times\mathsf{J}_4} \varphi$ 当且仅当 $\vdash_{\mathsf{J}_3} \varphi$ 和 $\vdash_{\mathsf{J}_4} \varphi$。因此，由于 J_3 的定理与 J_4 的定理不可比较，$\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 既不是 J_3 的扩张，也不是 J_4 的扩张。

另一方面，也很容易验证，$\varphi \vdash_{\mathsf{J}_3\times\mathsf{J}_4} \bot$ 当且仅当 $\varphi \vdash_{\mathsf{J}_3} \bot$ 或 $\varphi \vdash_{\mathsf{J}_4} \bot$。现在考虑以下公式:

- $\alpha = \Delta(p \leftrightarrow \sim p)$ - $\beta = \neg((p_1 \to p_2) \vee (p_2 \to p_3) \vee (p_3 \to p_4))$

显然，$\alpha \nvdash_{\mathsf{J}_3} \bot$ 当 $\alpha \vdash_{\mathsf{J}_4} \bot$ 时，因此 $\alpha \vdash_{\mathsf{J}_3\times\mathsf{J}_4} \bot$ 也成立。类似地，我们还有 $\beta \nvdash_{\mathsf{J}_4} \bot$ 当 $\beta \vdash_{\mathsf{J}_3} \bot$ 时，因此 $\beta \vdash_{\mathsf{J}_3\times\mathsf{J}_4} \bot$。因此，$\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$, J_3 和 J_4 彼此不可比较。

最后，我们可以刻画满足关于 $\sim$的爆炸规则的逻辑:

$$\frac{\varphi \quad \sim\varphi}{\bot}$$

事实上，我们有:

• 按照 [25] 中对 n值 Lukasiewicz 情形所采用的相同推理，可以证明，满足爆炸规则的最小矩阵逻辑，即将上述规则扩展到 $\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 所得的逻辑，是逻辑 L_{exp}，其后承关系定义为

$$\Gamma \vdash_{L_{exp}} \varphi \text{ iff either } \Gamma \vdash_{\{\frac{i}{n-1}\}} \bot, \text{ or } \Gamma \vdash_{\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}} \varphi.$$

其中 i 是满足 $\frac{i}{n-1} > 1/2$的首个自然数。通过对上述条件右侧进行变形，$\Gamma \vdash_{L_{exp}} \varphi$ 可等价地表示为以下两个进一步的条件:

$\Gamma \vdash_{L_{exp}} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{\{\frac{i}{n-1}\}} \bot$ 或（$\Gamma \vdash_{T_1} \varphi$ 且 $\Gamma \vdash_{T_2} \varphi$）

$$\text{iff } [\Gamma \vdash_{\{\frac{i}{n-1}\}} \bot \text{ or } \Gamma \vdash_{T_1} \varphi] \text{ and } [\Gamma \vdash_{\{\frac{i}{n-1}\}} \bot \text{ or } \Gamma \vdash_{T_2} \varphi)]$$

但是，根据定义 2 后的段落，条件 $[\Gamma \vdash_{\{\frac{i}{n-1}\}} \bot$ 或$\Gamma \vdash_{T_1} \varphi]$ 就是说，在逻辑 $\mathbb{L}(T_1)$中，φ 可由 Γ 推出；而条件 $[\Gamma \vdash_{\{\frac{i}{n-1}\}} \bot$ 或 $\Gamma \vdash_{T_2} \varphi)]$ 显然等价于仅有 $\Gamma \vdash_{T_2} \varphi$。因此，

$$L_{exp} = \mathbb{L}(T_1) \cap L(\mathcal{M}_{T_2}),$$

或者换句话说，L_{exp} 是由以下矩阵集定义的逻辑:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n & = & \{\langle (\mathbf{GV_{n\sim}})^i, \Pi^i_{r=1} F_{\frac{r}{n-1}} \rangle\} \cup \\ & & \{\langle \mathbf{GV_{n\sim}}, F_1 \rangle, \langle \mathbf{GV_{n\sim}}, F_{\frac{n-2}{n-1}} \rangle, \ldots, \langle \mathbf{GV_{n\sim}}, F_{\frac{i+1}{n-1}} \rangle\}. \end{array}$$

• 因此，爆炸规则在所有扩展逻辑L_{exp}的逻辑中都有效。因此，它们都是爆炸的，而那些不扩展该逻辑的则是次协调的。

4.2 示例：n = 5 的情形

作为示例，我们研究矩阵逻辑集合 $Int(\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim})$的情形，该集合定义了介于 $\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim}$ 和经典命题逻辑之间的中间逻辑。回顾一下， GV_5 表示有序集 $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$。我们从一些基本事实开始:

• 考虑由矩阵集 $\mathcal{M}_T = \{\langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_t\rangle$ 定义的逻辑子集 $L(\mathbf{GV_{5\sim}}) \subset Int(\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim})$: 对于 $\emptyset \neq T \subseteq GV_5 \setminus \{0\}$，如第4.1小节所述。根据命题 4，由矩阵 $\langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_{i/4}\rangle$（对于 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$）定义的逻辑两两不可比；事实上，它们是 $L(\mathbf{GV_{5\sim}})$ 中的极大逻辑，而$\bigcap_{i\in\{1,2,3,4\}} \langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_{i/4}\rangle = \mathsf{G}^{\leq}_{5\sim}$ 是 $L(\mathbf{GV_{5\sim}})$ 的最小逻辑（显然也是 $Int(\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim})$ 的最小逻辑）。

• 令 $L_{\Pi}(\mathsf{G}_{5\sim}) \subset Int(\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim})$ 表示定义在$\mathbf{GV_{5\sim}}$ 的直积上、通过序滤子的直积构造的形如 $\mathbb{L}(T)$ 的矩阵逻辑集合（参见定义 2）。那么，这些逻辑满足以下条件（与 Łukasiewicz 逻辑的情形类似）:

– 若 $\emptyset \neq T, R \subseteq GV_5 \setminus \{0\}$ 满足 $\max T = \max R$，则$\mathbb{L}(T) \cap \mathbb{L}(R) = \mathbb{L}(T \cup R)$。– $L_{\Pi}(\mathsf{G}_{5\sim})$ 的极大元是形如$\langle (\mathbf{GV_{5\sim}})^2, F_{i/4} \times F_{j/4}\rangle$ 的矩阵逻辑，其中 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $i < j$。– 当 $0 < i < j$ 时，矩阵逻辑 $\langle (\mathbf{GV_{5\sim}})^2, F_i \times F_j\rangle$ 包含 $\langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_j\rangle$，且与 $0 < k \neq j$ 时的 $\langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_k\rangle$ 不可比较。

• 最后，我们来考察定义在$\mathbf{GV_{5\sim}}$ 的直积及其子代数，再结合序滤子的直积所构成的矩阵逻辑子集 $L_{\Pi^*}(\mathsf{G}_{5\sim}) \subset Int(\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim})$。$\mathbf{GV_{5\sim}}$ 的子代数（同构于）$\mathbf{GV_{2\sim}}$、$\mathbf{GV_{3\sim}}$ 和$\mathbf{GV_{4\sim}}$，因此$L_{\Pi^*}(\mathsf{G}_{5\sim})$中的矩阵逻辑数量会大幅增加。具体而言，构造矩阵逻辑时，可组合的分量包括：4 个代数，$\mathbf{GV_{5\sim}}$、$\mathbf{GV_{4\sim}}$、$\mathbf{GV_{3\sim}}$ 和$\mathbf{GV_{2\sim}}$；以及 10 个序滤子：$\mathbf{GV_{5\sim}}$上的 4 个、$\mathbf{GV_{4\sim}}$上的 3 个、$\mathbf{GV_{3\sim}}$ 上的 2 个，以及$\mathbf{GV_{2\sim}}$上的 1 个。因此，我们可以得到这 10 个分量所有可能的不重复乘积。

我们还可以将带有爆炸规则的 $\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim}$ 的最小扩张刻画为矩阵集 $\mathcal{M}_5$ 的逻辑 L

$$\mathcal{M}_5 = \{\langle (\mathbf{GV_{5\sim}})^3, F_{3/4} \times F_{2/4} \times F_{1/4}\rangle, \langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_1\rangle\}.$$

关于公理化，与 Łukasiewicz 逻辑的情形一样，我们可以给出 $L\Pi(\mathsf{G}_{5\sim})$ 逻辑的公理刻画。为此，首先，

注意，在 $\mathsf{G}_{5\sim}$ 中，对于每个值 $i/4 \in GV_5 \setminus \{0\}$，都存在一个单变量公式 $\varphi(p)$ 来刻画该值 $i/4$，也就是说，对于任意赋值 e，$e(\varphi(p)) = 1$ 当且仅当 $e(p) = i/4$，否则为 0。例如，对于值 $1/2$，该公式可以是 $\Delta(p \leftrightarrow {\sim}p)$。我们也可以定义一个公式来刻画值集 $\geq i/4, > i/4, \leq i/4$ 和 $< i/4$。

利用这一观察，很容易看出，所有类型为$\langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_{i/4}\rangle$ 或 $\mathbb{L}(T) \in L\Pi(\mathsf{G}_{5\sim})$ 的矩阵逻辑都可以公理化。例如，这里给出以下例子：

- 矩阵逻辑 $(\mathbf{GV_{5\sim}}, F_{i/4})$ 可通过在 $\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim}$ 的公理和规则中加入以下限制推理规则来公理化：

$$\text{if } \vdash_{\mathrm{G}_{5\sim}} (\varphi < i/4) \vee ((\varphi \geq i/4) \wedge (\psi \geq i/4)), \text{ from } \varphi \text{ derive } \psi$$

其他 $L\Pi(\mathsf{G}_{5\sim})$ 的矩阵逻辑也可以用类似的方式公理化。请注意，这些公理化之所以可行，是因为在 $\mathsf{G}_{5\sim}$中，每个元素 $a \in GV_5$都存在一个单变量特征公式。对于 $n > 5$，$\mathsf{G}_{n\sim}$中并非如此，因此先前的公理化结果无法推广到 $n > 5$所对应的 $\mathsf{G}_{n\sim}$。

5 $\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 的理想次协调扩张与饱和次协调扩张

如前所述，在$\mathbf{GV_{n\sim}}$的子代数的直积上、且带有序滤子直积的矩阵逻辑是 ∼-次协调的，当且仅当所有分量都是∼-次协调的。本节利用上一节的结果，研究$\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间的逻辑关于理想∼-次协调性的地位。具体而言，我们证明$\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 只有两个理想 ∼-次协调扩张。此外，我们还证明，$\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 存在另一个 ∼-次协调扩张；尽管它不是理想 ∼-次协调的，却具有一个显著性质：它没有任何真 ∼-次协调扩张。

我们在引言中已经简要讨论了由Arieli等人在 [4]引入的理想次协调逻辑这一概念。[23] 我们在此回顾这一概念。

定义 3 (参见 [4])。令 L 为定义在签名Θ （其后承关系为 $\vdash_L$）上的命题逻辑，且至少包含一个一元联结词 $\neg$ 和一个二元联结词 $\rightarrow$，满足：

[23]正如第1节所述，作者已将术语“理想次协调逻辑”改为“完全极大且正规的次协调逻辑”。然而，应当注意的是，根据 [12, 定义1，32]，“正规”意味着，该逻辑 L除了具有演绎蕴涵之外，还具有满足后承关系意义下通常性质的合取与析取。这里我们决定保留理想次协调性的原始定义。值得注意的是，本文以及 [26] 中所考察的所有理想（及饱和）逻辑，按照 [12]的意义都是正规的。

(i) L 相对于 $\neg$ 是次协调的（或简称为 $\neg$-次协调），也就是说，存在公式 φ、$\psi \in \mathcal{L}(\Theta)$，使得 φ、$\neg\varphi$、$\nvdash_L \psi$；(ii) $\rightarrow$ 是一个蕴涵，且演绎分离定理在 L中成立，也就是说，对于任意公式集$\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \mathcal{L}(\Theta)$，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_L \psi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_L \varphi \rightarrow \psi$。(iii) 存在经典命题逻辑的一个矩阵逻辑表示 $L' = \langle \mathbf{A}\ \{1\}\rangle$，其签名为 Θ，且$\mathbf{A}$ 的域为 $\{0, 1\}$，$\neg$ 和 $\rightarrow$ 分别解释为经典命题逻辑中通常的二值否定和蕴涵。(iv) L 是经典命题逻辑的一个子逻辑，具体而言，$\vdash_L \subseteq \vdash_{L'}$；也就是说，对于任意公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}(\Theta)$，$\Gamma \vdash_L \varphi$ 蕴涵$\Gamma \vdash_{L'} \varphi$。

于是，L 被称为理想 $\neg$-次协调逻辑，如果它相对于经典命题逻辑是极大的，并且 L 在 Θ上的每个真扩张都不是 $\neg$-次协调的。

满足上述条件 (ii) 的蕴涵联结词通常称为演绎蕴涵。

注 5。正如备注3中所论证的，J_3 等价于 $\langle \mathbf{GV}_{3\sim},\ F_{\frac{1}{2}}\rangle$因此，对于任意奇数 $n \geq 3$，J_3 都是任意$\mathrm{G}^{\leq}_{n\sim}$ 的扩张（回顾图2.1）。类似地，J_4 等价于 $\langle \mathbf{GV}_{4\sim},\ F_{\frac{1}{3}}\rangle$。因此，对于每个 $n \geq 4$，J_4 都是$\mathrm{G}^{\leq}_{n\sim}$ 的扩张。

在 [26, 命题6.3] 中证明了，J_3 和J_4 是理想 $\sim$-次协调逻辑，其中$\mathrm{G}_{\sim}$ 的签名中的演绎蕴涵是由项定义的蕴涵 $x \Rightarrow y := \neg x \vee y$。[24]

如第1节所述，要求一个次协调逻辑相对于经典命题逻辑是极大的，才能称其为“理想的”（即“最优的”），这是一个值得商榷的问题（见 [37]）。另一方面，定义 3 中的其他要求似乎颇有意义，具备这些特征的系统可被视为一种卓越的次协调逻辑。这促使我们给出以下定义。

定义4。若一个逻辑 L 满足前一定义中的所有条件（i）至（iv），且其在 Θ 上的每个真扩张 L都不是 $\neg$-次协调的，则称该逻辑为饱和 $\neg$-次协调逻辑。[25]

注 6. 在 [36, 第 273] 页中，引入了相对于推理规则 r 的逻辑 L 极大性的概念。具体而言，给定签名 Θ 上的塔斯基式结构命题逻辑 L，以及 Θ 上的推理规则 r，若 r 在 L 中不可推导，但 L 在 Θ 上的任何真扩张

[24]注意，在 [26]中，$\neg$ 表示卢卡西维奇否定，而 J_3 和 J_4 的 Gödel 否定分别记作$\sim_{\frac{1}{2}}$ 和$\sim_{\frac{1}{3}}$。[25]沿用 [12], 的术语，饱和次协调逻辑是指满足以下条件的逻辑：(i) 它具有蕴涵；(ii) 它是经典命题逻辑的$\mathbf{F}$-包含逻辑；(iii) 它是强极大的。

都能推导出 $r_\circ$[26] 显然，理想次协调逻辑和饱和次协调逻辑都是 r-极大逻辑的特例，其中 r 是爆炸规则。[27]

命题5。 $\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4 := \langle \mathbf{GV_{3\sim}} \times \mathbf{GV_{4\sim}}, F_{\frac{1}{2}} \times F_{\frac{1}{3}} \rangle$ 是饱和的 $\sim$-次协调逻辑，但不是理想的 $\sim$-次协调逻辑。

证明。由于 $\mathsf{GV_{3\sim}}$ 和 $VG_{4\sim}$ 是 $\mathsf{GV_{5\sim}}$ 的子代数，根据第**4.1**小节中给出的 $\mathsf{G}^{\leq}_{n\sim}$ 的所有扩张的刻画，$\langle \mathbf{GV_{3\sim}} \times \mathbf{GV_{4\sim}}, F_{\frac{1}{2}} \times F_{\frac{1}{3}} \rangle$ 是 $\mathsf{G}^{\leq}_{5\sim}$ 的一个扩张，满足条件（i）至（iv），因为每个分量都是 $\sim$-次协调的，并且 $x \Rightarrow y := \neg x \vee y$ 是项定义的演绎蕴涵。我们通过反证法证明，$\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 没有真 $\sim$-次协调扩张。假设存在 $\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 的一个真 $\sim$ 次协调扩张 L。在这种情况下，存在一个矩阵 $\langle \mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_k}, F_{i_1} \times \cdots \times F_{i_k} \rangle$，它是 L 的扩张，且每个 $\langle \mathbf{A_i}, F_{i_j} \rangle$ 都是 $\mathsf{J}_3, \mathsf{J4}, \langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_{\frac{1}{2}} \rangle$ 或 $\langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_{\frac{1}{4}} \rangle$。由于 J_3 与 $\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 不可比较，且 J_3 是 $\langle \mathbf{GV5}, F_{\frac{1}{2}} \rangle$ 的子矩阵，也是 $\langle \mathbf{GV_{5\sim}}, F_{\frac{1}{4}} \rangle$ 的子矩阵，因此存在一个分量 $\langle \mathbf{Aj0}, F_{j0} \rangle = \mathsf{J}_{4\circ}$ 同理，还应存在另一个不同的分量 $\langle \mathbf{Aj1}, F_{j1} \rangle \neq \mathsf{J}_{4,}$，否则 J_4 将是 $\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 的扩张。最后，若 $\langle \mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_k}, F_{i_1} \times \cdots \times F_{i_k} \rangle$ 有一个分量等于 J_4，另一个分量不同于 $\mathsf{J}_{4,}$，则 $\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 是 $\langle \mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_k}, F_{i_1} \times \cdots \times F_{i_k} \rangle$ 的子矩阵，这与 L 是 $\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 的真扩张这一事实矛盾。

设 φ 是 J_3 的一个定理，但不是 J_4 的定理。那么，矩阵逻辑 $J_2 \times \mathsf{J}_3 := \langle \mathbf{GV_{2\sim}} \times \mathbf{GV_{3\sim}}, \ F_1 \times F_{\frac{1}{2}} \rangle$ 是 $\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 的一个扩张，且不同于经典命题逻辑，并满足 $\vdash_{J_2 \times J_3} \varphi_\circ$ 因此，$\mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$ 相对于经典命题逻辑并非极大。

□

定理1。设 n 为一个整数，使得 $n > 4$，并设 L 为 $\mathrm{G}^{\leq}_{n\sim}$ 的一个扩张。

1. 若 n 为偶数，则以下条件等价：

- L 是饱和的 $\sim$-次协调逻辑 - L 是理想的 $\sim$-次协调逻辑 - $L = \mathsf{J}_4$

2. 若 n 为奇数，则以下条件等价：

- L *is saturated* $\sim$*-paraconsistent*
- $L = \mathsf{J}_3$, $L = \mathsf{J}_4$ *or* $L = \mathsf{J}_3 \times \mathsf{J}_4$.

3. 如果 n 是奇数，则以下命题等价：

- L *is ideal* $\sim$*-paraconsistent*
- $L = \mathsf{J}_3$ *or* $L = \mathsf{J}_4$.

[26]这用 $L \in$**平凡逻辑**$_\Theta \perp \{r\}$ 表示，其中 [36], 中的 **平凡逻辑**$_\Theta$ 表示签名 Θ 上的平凡逻辑。[27]事实上，借助 *remainder set* $L \perp R$ 逻辑相对于规则集 R 的概念（该概念由 [36, 定义 7], ），文献中提出的若干与极大性相关的概念都可以轻松表示，参见 [36,第 273]页。

证明。1. 假设 n 是偶数。根据注 5 和命题5，我们只需证明：如果 L 是饱和的 $\sim$-次协调的，那么 L =J$_4$。由于 n 是偶数，正如第4.1小节中所观察到的，G$^{\leq}_{n\sim}$ 的每个扩张 L' 都由如下形式的矩阵族诱导：$\langle$A $F\rangle$ =$\langle$GV$_{\mathbf{n_1}\sim}\times\cdots\times$GV$_{\mathbf{n_k}\sim}$, $F_{\frac{i_1}{n_1-1}}\times\cdots\times F_{\frac{i_k}{n_k-1}}\rangle$ 其中每个 n_j 也是偶数。如果 L' 是 $\sim$-次协调的，那么该矩阵族中存在一个成员，例如 $\langle$GV$_{\mathbf{n_1}\sim}\times\cdots\times$GV$_{\mathbf{n_k}\sim}$, $F_{\frac{i_1}{n_1-1}}\times\cdots\times F_{\frac{i_k}{n_k-1}}\rangle$，使得 $2<n_j\leq n$，并且对于满足 $1\leq j\leq k$ 的每个 j，都有 $0<\frac{i_j}{n_j-1}\leq\frac{1}{2}$。于是，J$_4$ 是 G$^{\leq}_{n\sim}$ 的每个 $\sim$-容矛盾扩张的扩张。特别地，J_4 扩张了 L。因此 $L=$J$_4$,，因为 L 是极大矛盾容忍的。

2. 从右向左的蕴涵可由注 5 和命题5得出。为证明逆向蕴涵，设 L 是 G$^{\leq}_{n\sim}$ 的一个饱和 $\sim$次协调扩张。由于 L 是 $\sim$次协调的，且它没有真 $\sim$次协调扩张，因此 L 由一个单一的 $\sim$次协调矩阵 $\langle$A $F\rangle$ 诱导，该矩阵满足 $\langle$A $F\rangle=\langle$GV$_{\mathbf{n_1}\sim}\times\cdots\times$GV$_{\mathbf{n_k}\sim}$, $F_{\frac{i_1}{n_1-1}}\times\cdots\times F_{\frac{i_k}{n_k-1}}\rangle$ 其中 $2<n_j\leq n$，且对于每个满足 $1\leq j\leq k$的 j，都有 $0<\frac{i_j}{n_j-1}\leq\frac{1}{2}$。若所有 n_j 都为偶数，则如上一项所示，$L=J_4$。若所有 n_j 都为奇数，则 J$_3$ 是 L的一个$\sim$次协调扩张，因此 $L=$J$_3$。假设 n 为奇数，且有些n_j为偶数、有些为奇数，并且它们都大于 2。那么此时 J$_3\times$J$_4$:= $\langle$GV$_{\mathbf{3}\sim}\times$GV$_{\mathbf{4}\sim}$, $F_{\frac{1}{2}}\times F_{\frac{1}{3}}\rangle$ 是 L的一个 $\sim$次协调扩张，因此 $L=$J$_3\times$J$_4$。

3. 紧接命题5和条目2之后。

□

6 饱和次协调性与有限值-Lukasiewicz逻辑

在 [26] 中，我们研究经典命题逻辑与保度有限值 -Lukasiewicz逻辑之间的中间逻辑的极大性条件。特别地，我们刻画了这一族中的理想次协调逻辑。由于在上一节中，我们在带对合的保度 G¨ödel逻辑的框架下引入了较弱的饱和次协调性概念，因此我们认为，探索上述有限值-Lukasiewicz逻辑框架下的这一概念同样很有意义。本节将进行这项研究，首先简要回顾有关（保度）有限值 -Lukasiewicz逻辑的一些基本概念。

（$n+1$）值 -Lukasiewicz逻辑在语义上可以定义为矩阵逻辑

$$Ł_{n+1}=\langle \mathbf{ŁV}_{n+1},\{1\}\rangle,$$

其中 $\{0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\}$ $V_{n+1}=$ V_{n+1} $\neg\rightarrow$ $n+1$ $V_{n+1}=\mathbf{LV}$(-L,,) 是含有 - 个元素的 MV链，且 -L，运算定义如下：对于每个 ,L，$x\ y\in$ - V_{n+1}

$\neg x=1-x$ (-卢卡西维奇否定)

$x \to y =$ 最小$\{1, 1 - x + y\}$ （Ł卢卡谢维奇蕴涵）

事实上， ŁL_{n+1} 是可代数化的，其生成的拟簇 $MV_{n+1} := \mathcal{Q}$(Ł$\mathbf{LV}_{n+1}$) 是其等价代数语义。

（有限制的）保度（$n+1$）值卢卡西维奇逻辑，记作Ł$\mathrm{L}^{\leq}_{n+1}$，可按以下方式进行语义定义：对于每个有限公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\}$

$$\Gamma \models_{\mathrm{L}^{\leq}_{n+1}} \varphi \quad \text{if} \quad \begin{array}{l} \text{for every evaluation } e \text{ over } \mathbf{\L V}_{n+1} \text{ and every } a \in \L V_{n+1}, \\ \text{if } e(\gamma) \geq a \text{ for every } \gamma \in \Gamma, \text{ then } e(\gamma) \geq a. \end{array}$$

沿用 [26] 的记法，我们用 L^i_n 表示由矩阵 $\langle$Ł$\mathbf{LV}_{n+1}, F_{\frac{i}{n}}\rangle$所得到的逻辑，其中$F_{\frac{i}{n}}$是 L $\{x \in$ Ł上的序滤子：$x \geq i/n\}$。注意，采用此记法时， $n+1$值卢卡西维奇逻辑 ŁL_{n+1} 也记作 L^n_n。

正如 [26, 定理 5.2], 所证明的，对每个 $1 \leq i \leq n$， L^i_n 作为演绎系统都等价于 ŁL_{n+1} （参见 [17]，另见 [18]）。由于可代数化性在等价下保持， L^i_n 是可代数化的，而 MV_{n+1} 也是它的等价代数语义。因此， L^i_n 的有限制扩张格与 $MV_{n+1} = \mathcal{Q}$（Ł$\mathbf{LV}_{n+1}$）的子拟簇格同构。

MV_{n+1} 是一个局部有限簇，并且正如 [33], 中所证明的，每个子拟簇也都是局部有限的，且由有限个临界 [28] MV-代数生成。利用 MV_{n+1} 的子拟簇与 L^i_n的有限扩张之间的对应关系，我们在 [26] 中得到， L^i_n 的每个扩张 L 都由一族有限的 $\langle$型矩阵诱导：$\mathbf{A}$ $F\rangle$，其中$\mathbf{A}$ 是一个临界MV_{n+1}-代数，且 F 是$\mathbf{A}$ 中与 L相容的格滤子。更准确地说， [33, 26] 中证明了$\mathbf{A}$ 同构于MV_{n+1}个 Ł$\mathbf{LV}_{n_0+1} \times \cdots \times$ Ł$\mathbf{LV}_{n_{l-1}+1}$链的直积，其中

1. 对每个 $j < l$， $n_j | n$

2. 对每个 j， $k < l$， $k \neq j$ 蕴含 $n_k \neq n_j$。

3. 如果存在 $n_j, j < l$，使得对于某个 $k \neq j$， $n_k | n_j$，那么 n_j 是唯一的。

和 $F = (F_{\frac{i}{n}})^l \cap$ (Ł$\mathrm{L}V_{n_0+1} \times \cdots \times$ Ł$\mathrm{L}V_{n_{l-1}+1}$)。

因此，类比于 [25, 定理 3], ， L^i_n 的每个扩张都由一个有限矩阵族诱导，其中每个矩阵都是$\langle$Ł$\mathbf{LV}_{n+1}$， $F_{\frac{i}{n}}\rangle$的子矩阵的乘积。

如命题 2 所观察到的，$\mathbf{LV}$与$\mathbf{GV}$逐项等价，而$\mathbf{LV}$与$\mathbf{GV}$逐项等价，其中$\mathbf{GV}$和$\mathbf{GV}$中的对合否定实际上是MV-否定。接着，如注 5 所示，以卢卡西维奇逻辑的签名表示的矩阵逻辑 $\mathbf{JLV}_3$,和 $\mathbf{JLV}_4$,是理想次协调的。这里我们回顾一下，这可以按以下方式推广。

[28]如果一个代数是有限代数，且不属于由其所有真子代数生成的拟簇，则称它为 *critical* 。

命题6。 命题6。设为素数，并设满足。则，L是一个()值理想次协调逻辑。

事实上，在某些情况下，我们还可以证明逆命题也成立。 [26]中没有这一结果。

定理2. 设 $0 < i < n$ 满足 $\frac{i}{n} \leq \frac{1}{2}$。若 L 是 L_n^i 的扩张，则 L 是理想 $\neg$-次协调的，当且仅当 $L = \mathrm{L}_q^j$，其中某个素数 q 满足 $q|n$，且某个 $1 \leq j$ 满足 $j/q \leq 1/2$

证明。设 L 是 L_n^i 的理想 $\neg$-次协调扩张。由于 L 是极大的，它由单个矩阵 $\langle \mathbf{A}\ F\rangle$ 诱导，其中 $\mathbf{A}$ 是临界的，且 F 与 L 相容。事实上，如上所述，$\langle \mathbf{A}\ F\rangle$ 属于 $\langle \neg\mathbf{LV}_{n_1+1} \times \cdots \times \neg\mathbf{LV}_{n_k+1},\ (F_n^i)^k \cap (\neg\mathrm{L}V_{n_1+1} \times \cdots \times \neg\mathrm{L}V_{n_k+1})\rangle$，其中

1. 对每个 $1 \leq i \leq k$, $n_i|n$

2. 对每个 $1 \leq i,\ j \leq k, i \neq j$ 蕴含 $n_i \neq n_j$。

3. 如果存在 n_j, $1 \leq j \leq k$，使得对某个 $1 \leq i \neq j$有 $n_i|n_j$，那么 n_j是唯一的。

由于 L 是 $\neg$-次协调的，因此分量 $\neg\mathbf{LV}_{n_i+1}$ 都不可能是 $\neg\mathbf{LV}_2$（否则 L 就会是爆炸的），从而对所有 $1 \leq i \leq k,\ 1 < n_i$。如果 $k > 1$，那么

- 如果存在 n_j，且 $1 \leq j \leq k$，使得对某个 $1 \leq i \neq j$有 $n_i|n_j$，那么不失一般性地假设 $j = k$。在这种情况下，$\langle \neg\mathbf{LV}_{n_1+1} \times \cdots \times \neg\mathbf{LV}_{n_{k-1}+1},\ (F_n^i)^{k-1} \cap (\neg\mathrm{L}V_{n_1+1} \times \cdots \times \neg\mathrm{L}V_{n_{k-1}+1})\rangle$ 是 L 的一个 $\neg$-容矛盾扩展，这与 L 是理想的 $\neg$-次协调的这一假设矛盾。

- 如果不存在满足 $1 \leq j \leq k$ 的 n_j，使得对于某个 $1 \leq i \neq j,\ n_i|n_j$，那么 $n_k \neq n$。L 是 $\langle \neg\mathbf{LV}_2 \times \neg\mathbf{LV}_{n_k+1},\ (F_n^i)^2 \cap (\neg\mathrm{L}V_2 \times \neg\mathrm{L}V_{n_k+1})\rangle$ 是一个不同于经典命题逻辑的扩张，并且存在一个公式 φ，它在 $\langle \neg\mathbf{LV}_2 \times \neg\mathbf{LV}_{n_k+1},\ (F_n^i)^2 \cap (\neg\mathrm{L}V_2 \times \neg\mathrm{L}V_{n_k+1})\rangle$ 中有效，却在 L 中无效。再次得到矛盾。

因此 $k = 1$。在这种情况下，n 应当是素数，否则，对于任意满足 $p|n$ 的素数 p，$\langle \neg\mathbf{LV}_{p+1}, F_n^i \cap \neg\mathrm{L}V_{p+1}\rangle$ 都将是一个不同于经典命题逻辑的 L 的扩张，并且存在一个公式 φ，它在 $\langle \neg\mathbf{LV}_{p+1}, F_n^i \cap \neg\mathrm{L}V_{p+1}\rangle$ 中有效，却在 L 中无效。

□

关于饱和次协调性，我们得到了以下结果：

定理 3。 设 $0 < i < n$ 使得 $\frac{i}{n} \leq \frac{1}{2}$。令

$$X = \left\{p \ :\ p \text{ prime, } p|n,\ F_{\frac{i}{n}} \cap \mathrm{L}V_{p+1} = \left\{\frac{m}{p} \ :\ m \geq k\right\} \text{ and } \frac{k}{p} \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

对于每个有限子集 $\{p_1,\ldots,p_j\}\subseteq X$，由矩阵定义的逻辑

$$\langle \boldsymbol{Ł}\mathbf{V}_{p_1+1}\times\cdots\times\boldsymbol{Ł}\mathbf{V}_{p_j+1},(F_{\frac{i}{n}})^j\cap(Ł V_{p_1+1}\times\cdots\times Ł V_{p_j+1})\rangle$$

是饱和的 $\neg$次协调。

证明。 根据前述结果，$\langle \mathbf{L}_{p_1+1}\times\cdots\times \mathbf{L}_{p_j+1}\ F^j_{\frac{i}{n}}\cap V_{p_1+1}\times\cdots\times\mathbf{LVLV}$，$(\ )\ (\mathbf{L}\ \mathrm{L}V_{p_j+1})\rangle$ 是 L^i_n 的扩张。此外，它是 -次协调的，因为每个分量都是 $\neg$次协调的。令 $\Rightarrow^i_n$ 定义为 $\varphi\Rightarrow^i_n\psi:=\sim^i_n\varphi\vee\psi$，其中 $\sim^i_n(x)$ 是单变量 McNaughton 项，使得对于每个 $a\in \mathrm{L}V_{n+1}$，

$$\sim^i_n(a)=\begin{cases}0, & \text{if } a\geq\frac{i}{n}\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

类似于 [26, 命题6.2], 的证明，逻辑 $\langle \mathbf{LV}_{p_1+1}\times\cdots\times\mathbf{LV}_{p_j+1},(F_n)^j\cap(\mathrm{L}V_{p_1+1}\times\cdots\times\mathrm{L}V_{p_j+1})\rangle$ 满足定义 3 中的条件 (i) 至 (iv)，该定义给出了理想 $\neg$次协调性的定义。设 L 是 $\langle \mathbf{LV}_{p_1+1}\times\cdots\times\mathbf{LV}_{p_j+1},(F_n)^j\cap(\mathrm{L}V_{p_1+1}\times\cdots\times\mathrm{L}V_{p_j+1})\rangle$ 的一个 $\neg$次协调扩张，则 L 由有限矩阵族 $\langle \mathbf{A}\ F\rangle$ 诱导，其中 $\mathbf{A}_{n_0+1}$ 是临界的，且 F 与 L 相容。由于 L 是 $\cdots\times$ 次协调的，至少存在一个矩阵 $\langle \mathbf{LV}\ \mathbf{LV}_{n_{l-1}+1},(F_n)^l\cap(\mathrm{L}V_{n_0+1}\times\cdots\times\mathrm{L}V_{n_{l-1}+1})\rangle$，其中

1. 对每个 $m<l$, $n_m|n$

2. 对每个 $m,\ k<l, k\neq m$ 推出 $n_k\neq n_m$

3. 如果存在 n_m，使得 $m<l$ 满足条件 $n_m|n_k$，其中某个 $k\neq m$，那么 n_k 是唯一的，

它是 $\neg$次协调的。因此，对每个 $m<l$，都有 $2\leq n_m$。由于 $\langle \mathbf{LV}_{n_0+1}\times\cdots\times\mathbf{LV}_{n_{l-1}+1},\ (F_n)^l\cap(\mathrm{L}V_{n_0+1}\times\cdots\times\mathrm{L}V_{n_{l-1}+1})\rangle$ 是 $\langle \mathbf{L}_{p_1+1}\times\cdots\times\mathbf{L}_{p_j+1}\ F^j_n\cap V_{p_1+1}\times\cdots\times V_{p_j+1}\rangle$ $\langle \mathbf{L}_{n_0+1}\times\mathbf{LV}\ \cdots\times$ $\mathbf{LV}$，$(\ )\ (\mathbf{L}\ \mathrm{L})$ 的扩张，那么 $\mathbf{LV}\ \mathbf{LV}_{n_{l-1}+1}\ F^l_n\cap V_{n_0+1}\times\cdots\times V_{n_{l-1}+1}\rangle$ $\langle \mathbf{L}_{p_1+1}\times,(\ )\ (\mathbf{L}\ \mathrm{L})$ 是 $\mathbf{LV}\ \mathbf{LV}_{p_j+1},(F_n)^j\cap\cdots\times$ $(\mathrm{L}V_{p_1+1}\times\cdots\times\mathrm{L}V_{p_j+1})\rangle$ 的子矩阵。因此，根据 [26, 引理 .6],，对每个 $m<l$，存在一个 $0<k\leq j$ 使得 $n_m|p_k$；由于 $2\leq n_m$ 且 p_k是素数，所以 $n_m=p_k$。此外，对每个 $0<k\leq j$，都存在 $m<l$ 使得 $n_m|p_k$。因此 $\mathbf{LV}_{p_1+1}\times\cdots\times\mathbf{LV}_{p_j+1}\cong\mathbf{LV}_{n_0+1}\times\cdots\times\mathbf{LV}_{n_{l-1}+1}$ 且 $L=\langle \mathbf{LV}_{p_1+1}\times\cdots\times\mathbf{LV}_{p_j+1},(F_n)^j\cap(\mathrm{L}V_{p_1+1}\times\cdots\times\mathrm{L}V_{p_j+1})\rangle$，这证明了 $\langle \mathbf{LV}_{p_1+1}\times\cdots\times\mathbf{LV}_{p_j+1},(F_n)^j\cap(\mathrm{L}V_{p_1+1}\times\cdots\times\mathrm{L}V_{p_j+1})\rangle$ 的任何真扩张都不是 $\neg$次协调的。

□

注记 7。 人们可能会想知道，上述定理中所确定的饱和 $\neg$次协调逻辑实际上是否是理想次协调的。然而，很容易看出，除非它们属于定理2所描述的类型，否则情况并非如此。事实上，这是由于定理 3（以及下面的推论 2）中所考察的逻辑都是^i_n型逻辑的扩张，而在定理2中，我们恰好刻画了这些扩张中哪些是理想次协调的。

推论 2。 设 $\{p_1, \ldots, p_j\}$ 为任意有限的素数集合，则 $\langle \text{-}\boldsymbol{L}\mathbf{V}_{p_1+1} \times \cdots \times \text{-}\boldsymbol{L}\mathbf{V}_{p_j+1}, F_{\frac{1}{p_1}} \times \cdots \times F_{\frac{1}{p_j}} \rangle$ 是饱和的 ¬次协调。

与定理1中$\mathrm{G}^{\leq}_{\mathrm{n}\sim}$ 的情形不同，并非每个饱和的 ¬次协调逻辑L^{i}_{n} 扩张都属于上述推论所述的类型。例如，L^{7}_{15} 是饱和的 ¬次协调逻辑。事实上，它是一个 ¬次协调逻辑，其中 $\Rightarrow^{7}_{15}$ 是演绎蕴涵，且$\mathrm{L}^{1}_{1} = \mathrm{CPL}$是$\mathrm{L}^{7}_{15}$的一个子矩阵逻辑。此外，$\mathrm{L}^{7}_{15}$ 的每个真扩张 L 都由$\mathrm{L}^{7}_{15},$的一族类型为 $\langle \text{-}\mathbf{L}\mathbf{V}_{n_0+1} \times \cdots \times \text{-}\mathbf{L}\mathbf{V}^{n_{l-1}+1}, (F_{\frac{7}{15}})^{l} \cap (\text{-}\mathrm{L}V_{n_0+1} \times \cdots \times \text{-}\mathrm{L}V_{n_{l-1}+1})\rangle$的真子矩阵所诱导，其中至少存在某个 $j < l$ 使得 $n_j|15$ 且 $n_j \neq 15$。因此， n_j 只能是1、3或5；在这种情况下，第 j个分量 $\langle \text{-}\mathbf{L}\mathbf{V}^{n_j+1}, F_{\frac{7}{15}} \cap \text{-}\mathrm{L}V_{n_j+1}\rangle$不是 ¬次协调的。因此， L不是 ¬次协调的，故L^{7}_{15} 是饱和的 ¬次协调逻辑。

7 最后的评论：与形式不一致逻辑的关系

为结束本节，我们从次协调性的角度，对本文讨论的逻辑进行进一步分析。回顾第1节，形式不一致逻辑（LFI）是众所周知的一类次协调逻辑。不难看出，本文所考虑的所有次协调逻辑实际上都是一致性形式逻辑。

事实上， [27]中证明了：如果 $L_{\sim}$ 是带有对合否定 $\sim$ 的核心模糊逻辑L 的扩展，其中 Δ 可在 $L_{\sim}$中定义，[29] 那么 $L^{\leq}_{\sim}$ 相对于 $\sim$是一个一致性形式逻辑，并且一致性算子由 $\circ\varphi = \Delta(\neg\varphi \vee \varphi)$给出。这说明了以下命题。

命题7。 本文所考虑的所有基于带对合的哥德尔模糊逻辑$\boldsymbol{G}^{\ddot{}}\mathrm{G}_{\sim}$ 及其有限值扩张$\mathrm{G_n}\sim$ 的次协调逻辑，相对于 $\sim$ 都是**一致性形式逻辑**。

至于本节分析的基于有限值 -Lukasiewicz 逻辑的次协调逻辑，它们也是一**致性形式逻辑**，如下述结果所示。

命题8. 设 L 是命题*6*中的某个矩阵逻辑，或定理 *3* 中某个矩阵逻辑的乘积。那么， L 相对于 $\neg$ 是一**致性形式逻辑**。

证明。 关于命题6中的逻辑，根据 [26, 命题6.3] 我们知道，每个逻辑 L^{i}_{n} 对于 $i/n \leq 1/2$ 而言，都是相对于 $\neg$ 的一**致性形式逻辑**，其中一致性算子由 $\circ^{i}_{n}\alpha := \sim^{i}_{n}(\alpha \wedge \neg\alpha)$给出。这里， $\sim^{i}_{n}$ 是如定理 3 的证明中所定义的一元联结词。现在，令

$$L = \langle \mathbf{Ł}\mathbf{V}_{p_1+1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}\mathbf{V}_{p_j+1}, (F_{\frac{i}{n}})^{j} \cap (\mathrm{Ł}V_{p_1+1} \times \cdots \times \mathrm{Ł}V_{p_j+1})\rangle$$

[29]任何伪补逻辑 L 都属于这种情况，其中 Δ 可定义为 $\Delta\varphi := \neg\sim\varphi$；尤其是 G¨odel 模糊逻辑 $\mathrm{G}_{\circ}$。

为定理 3 中由矩阵逻辑的乘积给出的某个逻辑，其中 $\{p_1, \ldots, p_j\} \subseteq X$。根据 X的定义，对于每个 $1 \leq s \leq j$，都存在$1 \leq k_s < p_s$使得 $k_s/p_s \leq 1/2$且 $\langle \text{-}\mathbf{LV}_{p_s+1},\ F_{\substack{i\\n}} \cap \text{-}\mathrm{L}V_{p_s+1}\rangle = \mathrm{L}^{k_s}_{p_s}$。这意味着 $L = \mathrm{L}^{k_1}_{p_1} \times \cdots \times \mathrm{L}^{k_j}_{p_j}$。再次利用 [26, 命题6.3] 可知，每个 $\mathrm{L}^{k_s}_{p_s}$ 都是相对于 $\neg$的一**致性形式逻辑**，其一致性算子 $\circ^{k_s}_{p_s}$ 如上定义。显然，$\sim^i_n$ 限制在 $\text{-}\mathrm{L}V_{p_s+1}$ 上与 $\sim^{k_s}_{p_s}$一致，因此，对于每个 $1 \leq s \leq j$，$\circ^i_n$ 限制在 $\text{-}\mathrm{L}V_{p_s+1}$ 上与 $\circ^{k_s}_{p_s}$一致。因此，L 是相对于 $\neg$ 的一**致性形式逻辑**，其一致性算子由 $\circ\alpha := \circ^i_n\alpha$给出。

事实上，显然，对于任意公式 φ, ψ，都有 $\varphi, \neg\varphi, \circ\varphi \vdash_L \psi$。设 q和r 是两个不同的命题变元，并设 e 是 L上的一个赋值，使得 $e(q) = 1$ 且 $e(r) = 0$。这保证了 $q, \circ q \nvdash_L r$。另一方面，任何满足 $e'(q) = e'(r) = 0$ 的 L上的赋值 e'，都保证$\neg q, \circ q \nvdash_L r$。因此，关于 $\neg$ 和 $\circ$，L 是一个 一**致性形式逻辑**（回顾 [23, 22, 21] 中对一**致性形式逻辑**的定义）。

□

8 结论

本文从次协调性的角度研究了 G¨odel 模糊逻辑 G 及其加入对合否定 $\sim$ 后得到的扩张 G$_\sim$，以及它的有限值扩张 G$_{n\sim}$。为此，本文分析了相应的保度伴随逻辑 G$^{\leq}_{\sim}$ 和 G$^{\leq}_{n\sim}$，因为与 G$_\sim$ 和 G$_{n\sim}$不同，这些逻辑是 $\sim$-次协调的。注意，由于 G 满足演绎分离定理，G 与 G$^{\leq}$重合；因此，在 G 中加入对合否定 $\sim$，便可以开展这类研究。本文探讨了确定 G$^{\leq}_{\sim}$ 与经典命题逻辑之间的中间逻辑格，以及 G$^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间的逻辑。引入饱和次协调逻辑这一概念后（它弱于理想次协调性的概念），本文证明，在 G$^{\leq}_{n\sim}$ 与经典命题逻辑之间只有三种饱和次协调逻辑，其中两种（J$_3$ 和 J$_4$）实际上是理想次协调逻辑，另一种（即 J$_3$ ×J$_4$）则是饱和但非理想的。最后，本文重新探讨了我们在 [26] 中开始研究的有限值 -Lukasiewicz 逻辑，以寻找更多有趣的饱和但非理想次协调逻辑实例。

关于未来的工作，我们旨在对其他局部有限模糊逻辑开展类似研究，特别是幂零最小逻辑（NM） [28], ，它兼具并共有 G¨odel 逻辑和 -Lukasiewicz 逻辑的许多特征。事实上，当 NM 扩充了 Baaz-Monteiro 算子 Δ后，它在逻辑上等价于带对合的 G¨odel 逻辑。

致谢

作者谨向两位匿名审稿人致以谢意，感谢他们提出细致而富有洞见的建议和意见，这些建议和意见切实提升了本文的质量。Gispert 感谢西班牙 FEDER/MINECO 提供的部分资助

项目（MTM2016-74892 和 MDM-2014-044）以及加泰罗尼亚政府的 grant2017-SGR-95。Esteva 和 Godo 感谢西班牙 FEDER/MINECO 项目 TIN2015-71799-C2-1-P 提供的部分资助。

参考文献

[1] O. Arieli 和 A. Avron。《四值超矛盾逻辑》。《逻辑学研究》，105(6):1087–1122，2017。[2] O. Arieli、A. Avron 和 A. Zamansky。极大次协调三值逻辑。载于 F. Lin 等人（编），《知识表示与推理原理：第十二届国际会议论文集》（KR 2010），AAAI Press，第 9–13 页，2010。[3] O. Arieli、A. Avron 和 A. Zamansky。三值语义框架下的极大与预极大次协调性。《逻辑学研究》，97(1):31–60，2011。[4] O. Arieli、A. Avron 和 A. Zamansky。理想次协调逻辑。《逻辑学研究》，99(1-3):31–60，2011。[5] A. Avron。非确定性矩阵与规则的模块化语义。载于：J.-Y. Beziau（编），《普适逻辑》，第 149–167 页。Birkh¨auser Basel，2005。[6] A. Avron。带一致性算子的逻辑的非确定性语义。《近似推理国际期刊》，45:271–287，2007。[7] A. Avron。若干形式不一致基础逻辑的模块化语义。载于：W. A. Carnielli、M. E. Coniglio、I. M. L. D' Ottaviano（编），《逻辑的多面性》，第 15–26 页。《逻辑研究》第 21 卷，College Publications，2009。[8] A. Avron。保留非假的次协调模糊逻辑。《模糊集与系统》292:75–84，2016。[9] A. Avron。自扩张三值次协调逻辑。《普适逻辑》11(3):297–315，2017。[10] A. Avron。次协调性与无限语义的必要性。软计算，23:2167–2175，2019。[11] A. Avron、O. Arieli 和 A. Zamansky。论次协调有限值逻辑的强极大性。载于《第 *25* 届 *IEEE* 逻辑与计算机科学年度研讨会论文集，*LICS 2010，2010* 年 *7* 月 *11–14* 日，英国爱丁堡》，第 304–313 页。IEEE 计算机学会，2010。[12] A. Avron、O. Arieli 和 A. Zamansky。有效命题超一致逻辑理论。《逻辑研究》第 75 卷。College Publications，2018。

[13] A. Avron 和 I. Lev。典范命题式 Gentzen 系统。载于：《第一届自动推理国际联合会议论文集（*IJCAR 2001*）》，人工智能讲义第 2083 卷，第 529–544 页。施普林格出版社，2001。[14]A. Avron 和 A. Zamansky。逻辑系统的非确定性语义——综述。载于：D. M. Gabbay 和 F. Guenthner（编），《哲学逻辑手册》（第 *2* 版），第 16 卷，第 227–304 页。施普林格，2011。[15] L. B˘ehounek、P. Cintula 和 P. H´ajek。数学模糊逻辑导论。P. Cintula、P. H´ajek、C. Noguera（编）《数学模糊逻辑手册》第 I 章。《数学模糊逻辑手册》—第 1 卷，《逻辑研究、数理逻辑与基础》第 37 卷，College Publications，伦敦，第 1–101 页，2011。[16] P. Blackburn、M. de Rijke 和 Y. Venema。模态逻辑，剑桥大学出版社，2002。[17] W.J. Blok 和 D. Pigozzi。抽象代数逻辑与演绎定理。预印本（2001），网址：
http://www.math.iastate.edu/dpigozzi/papers/aaldedth.pdf[18] W.J. Blok 和 D. Pigozzi。代数逻辑中的局部演绎定理。载于《代数逻辑（布达佩斯，*1988*）》，第 54 卷《*Bolyai* 数学学会学术讨论会论文集》´卷，第 75–109 页。北荷兰，阿姆斯特丹，1991。[19] F. Bou、F. Esteva、J. M. Font、A. Gil、L. Godo、A. Torrens 和 V. Verd´u。由剩余格簇导出的保留真值度的逻辑。《逻辑与计算杂志》，19(6):1031–1069，2009。[20]S. Burris 和 H. P. Sankappanavar。《泛代数课程》，施普林格出版社，1981。[21] W. A. Carnielli 和 M. E. Coniglio。《次协调逻辑：一致性、矛盾与否定》。《逻辑、认识论与科学统一性》第 40 卷。施普林格，2016。[22] W. A. Carnielli、M. E. Coniglio 和 J. Marcos。《形式不一致逻辑》。载于 D. M. Gabbay 和 F. Guenthner（编），《哲学逻辑手册》（第 *2* 版），第 14 卷，第 1–93 页。施普林格，2007。[23]W. A. Carnielli 和 J. Marcos。*C* 系统分类。载于 W. A. Carnielli、M. E. Coniglio 和 I. M. L. D'Ottaviano（编），《次协调性：通往不一致的逻辑之路。第二届世界次协调性大会论文集（*WCP 2000*）》，纯粹与应用数学讲义第 228 卷，第 1–94 页。Marcel Dekker，纽约，2002。[24] M.E. Coniglio、F. Esteva 和 L. Godo。源自模糊逻辑系统的形式不一致逻辑。*IGPL* 逻辑杂志，22(6):880–904，2014。

[25] M. E. Coniglio、F. Esteva 和 L. Godo，《真值逻辑与保度 -卢卡西维奇逻辑之间的中间逻辑集》*IGPL*逻辑期刊24(3):288–320，2016。[26] M. E. Coniglio、F. Esteva、J. Gispert、L. Godo，《由序滤子定义的有限值-卢卡西维奇逻辑中的极大性》《逻辑与计算杂志》29(1):125–156，2019。[27] R.C. Ertola、F. Esteva、T. Flaminio、L. Godo、C. Noguera，《度保持模糊逻辑中的次协调性》。《软计算》19(3):531–546，2015。[28] Francesc Esteva 和 Llu´ís Godo，《单子 t-范数逻辑：迈向左连续 t-范数逻辑》。《模糊集与系统》，124(3):271–288，2001。[29] F. Esteva、L. Godo、P. H´ajek、M. Navara，《具有对合否定的剩余模糊逻辑》。《数学逻辑档案》，39:103–124，2000。[30] F. Esteva、L. Godo、E. Marchioni，《扩充语言模糊逻辑》。载于：P. Cintula、P. H´ajek 和 C. Noguera（编），《数学模糊逻辑手册》第二卷，第八章，第627–711页。《逻辑研究、数理逻辑与基础》第38卷。College Publications，2011。[31] J.M. Font，《认真对待真值度》。《逻辑学研究》91(3):383–406，2009。[32] J.M. Font、A. Gil、A. Torrens 和 V. Verd´u，《保留真值度的无限值-卢卡西维奇逻辑》。《数学逻辑档案》，45，839–868，2006。[33]J.Gispert 和 A. Torrens，《MV-代数的局部有限准簇》。《arXiv》，第1–14页，2014。在线 DOI：http://arxiv.org/abs/1405.7504。[34] P. H´ajek。《模糊逻辑的元数学》。《逻辑学趋势》第4卷。Kluwer Academic Publishers，1998。[35] S. P. Odintsov。《构造性否定与次协调性》。《逻辑学趋势》第26卷。施普林格，2008。[36] M.M. Ribeiro 和 M.E. Coniglio，《收缩逻辑》。载于：L. Ong 和 R. de Queiroz（编），《逻辑、语言、信息与计算。*WoLLIC 2012*》，第268–281页。《计算机科学讲义》第7456卷。施普林格，柏林，2012。[37]H. Wansing 和 S.P. Odintsov，《次协调逻辑的方法论》。载于：H. Andreas 和 P. Verd´ee（编），《科学与数学中次协调推理的逻辑研究》，第175–204页。《逻辑学趋势》第45卷。施普林格，2016。