arXiv:2601.08542v1 [math.CO] 13 Jan 2026

关于基数为 $\aleph_0$ 的强稠密偏序集的分裂性质的注记

Mirna Dˇzamonja
数学学院 东英吉利大学
诺里奇，NR4 7TJ，英国
M.Dzamonja@uea.ac.uk

发表于 Radovi Matematiˇcki，8，第 2 期（1998 年），第 321–326 页

摘要

我们证明，并非每个可数无限强稠密偏序集都具有分裂性质，从而回答了 R. Ahlswede、P.L. Erd¨os 和 N.Graham 提出的问题。[1]

[1]我们感谢 P´eter L. Erd¨os 和 Niall Graham 就这一问题展开讨论，也感谢 Mary-Ellen Rudin 和 Jean-Marc Vanden-Broeck 倾听了证明。

1 引言

定义 1.1. 设 $\mathcal{P} = \langle P, \leq_P = \leq \rangle$ 是一个偏序集，且 $H \subseteq P$。我们定义

(1)

$$\mathcal{D}(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P : (\exists s \in H)(x \leq s)\}$$

and

$$\mathcal{U}(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P : (\exists s \in H)(x \geq s)\}.$$

(2) H 称为 P 的反链或斯佩纳系统，如果 H 中任意两个元素都不可比较。

(3) P 的反链 A 是极大的，当且仅当

$$[P \supseteq A' \supseteq A \ \& \ A' \text{ an antichain of } P] \implies A' = A.$$

(4) 若存在A的一个划分 $\{D, U\}$，使得 $P = \mathcal{D}(D) \cup \mathcal{U}(U)$，则称 P的反链 A 分裂。

(5) P 具有分裂性质，当且仅当P 的每个极大反链都分裂。

记号 1.2. 在偏序集 $\mathcal{P} = \langle P, \leq_P \rangle$:

(1) 对于 x, $y \in P$，若 $x \leq_P y$、 x 和 y 不相等，则记作 $x <_P y$。 (2) 对于 x, $y \in P$

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in P : x <_P z <_P y\},$$

形如 (x, y) 且满足 $x <_P y \in P$ 的集合称为 P 的开区间。

(3) 如果 x, $y \in P$ 不可比，即既非 $x \leq_P y$ 也非 $y \leq_P x$，则记作 $x >< y$。

定义 1.3。 如果对于 P 的每个非空开区间 (x, y)，都存在 z_1, $z_2 \in$ （x, y）使得$z_1 >< z_2$，则称偏序集 $\mathcal{P} = \langle P, \leq_P \rangle$ 是强稠密的。

在 [1], 中，已经证明每个有限强稠密偏序集都具有分裂性质。有人猜想，可数无限

强稠密偏序集也具有分裂性质。我们给出一个例子，说明这个猜想并不成立。在第2节中，我们将对该例子进行形式化构造，并证明它符合要求。不过，思路非常简单：取二叉树${}^{<\omega}2$。考察树中的极大反链 $A = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\}$，它不能分裂。但二叉树并非强稠密。为了解决这个问题，我们用 ${}^{<\omega}2$的一个副本替换树中的每个节点，并以此方式继续 ω 次，同时自然地扩展偏序。最后取并集，便得到一个强稠密偏序；构造第二层上的 A版本可作为一个不能分裂的极大反链的例子。

文献 [2] 进一步讨论了任意偏序集的分裂性质，并给出了分裂的一项充分条件。关于这一问题的历史及更多参考文献，可参见 [2] 或 [1]。

2 这个例子

记号 2.1. (1) ${}^{<\omega}2 \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n<\omega}\{s \mid s\colon n \to \{0,1\} \text{ 是一个函数}\}$，按初始段关系排序。

(2) 对于 $s, t \in {}^{<\omega}2$，我们令 $s \trianglelefteq t$ 当且仅当 s 是 t 的初始段。(3) $\langle\rangle$ 表示空序列。

定理 2.2. 存在一个可数无限强稠密偏序集 $\langle C, \leq\rangle$，它不具有分裂性质。

(此外，偏序集 $\langle C, \leq\rangle$ 具有下文断言 2.5(3) 的陈述中所描述的性质)。

证明。 我们首先定义该偏序集：

定义 2.3。 （1）我们通过对 $n < \omega$ 进行归纳法来定义 C_n：

$\underline{n = 0}$。

$$C_0 \overset{\text{def}}{=} \{\langle \emptyset, s, 0\rangle : s \in {}^{<\omega}2\}$$

由 $\leq_0$ 给出的序

$$\langle \emptyset, s, 0\rangle \leq_0 \langle \emptyset, t, 0\rangle \iff s \trianglelefteq t.$$

$\underline{n+1}$。给定 C_n 和 C_n 上的偏序 $\leq_n$。我们定义：

$$C_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} C_n \bigcup \{\langle x, s, n+1\rangle : s \in {}^{<\omega}2 \setminus \{\langle\rangle\} \ \&\ x \in C_n\},$$

按以下规则排列：$\langle a_1, b_1, c_1\rangle \leq_{n+1} \langle a_2, b_2, c_2\rangle$ 当且仅当出现以下情况之一：

(i) $c_1,\ c_2 \leq n$ 且 $\langle a_1,\ b_1,\ c_1\rangle \leq_n \langle a_2,\ b_2,\ c_2\rangle$,

(ii) $c_1 \leq n$ & $c_2 = n+1$ & $\langle a_1,\ b_1,\ c_1\rangle \leq_n a_2$,

(iii) $c_1 = n+1$ & $c_2 \leq n$ & $a_1 <_n \langle a_2,\ b_2,\ c_2\rangle$,

(iv) $c_1 = c_2 = n+1$ & $a_1 = a_2$ & $b_1 \trianglelefteq b_2$,

(v) $c_1 = c_2 = n+1$ & $a_1 <_n a_2$。

(2) 我们令 $C \overset{\text{定义}}{=} \bigcup_{n<\omega} C_n$，其序关系为

$$x \leq y \iff x \leq_n y \text{ 使其最小的 } n\text{，满足 } x,\ y \in C_n.$$

注 2.4. 注意，在定义 2.3(2) 中，对于 $x,\ y \in C$，我们有

$$x \leq y \iff x \leq_n y \text{ for any } n \text{ such that } x, y \in C_n,$$

这是因为定义 2.3(1) 中的条目 (i)。 $\bigstar_{2.4}$

断言 2.5. (1) C 是可数的。

(2) $\leq$ 是 C 上的偏序。(3) $\langle C,\ \leq\rangle$ 是强稠密的；此外，

对每个 $x,\ y \in P$

$$x < y \implies (\exists Z \subseteq (x,y))\,[|Z| = \aleph_0 \ \&\ z_1 \neq z_2 \implies z_1 >< z_2].$$

断言的证明。 (1) 显然，对 n 作归纳法即可证明 C_n 是可数的。

(2) 唯一需要检查的是 $\leq$ 是传递的。由于 $\leq = \bigcup_{n<\omega} \leq_n$ 是递增并，因此只需证明每个 $\leq_n$ 都是传递的。我们对 n 作归纳法来证明这一点。

$\underline{n=0}$。显然。

$n+1$。给定 $\langle a_l,\ b_l,\ c_l\rangle$，其中 $l\in\{0,1,2\}$ 满足

$$\langle a_l,b_l,c_l\rangle \leq_{n+1} \langle a_{l+1},b_{l+1},c_{l+1}\rangle \text{ for } l\in\{0,1\}.$$

我们将通过考虑若干种情形来证明 $\langle a_0,\ b_0,\ c_0\rangle \leq_{n+1} \langle a_2,\ b_2,\ c_2\rangle$。

情形 1. $c_l\leq n$ 对于 $l\in\{0,1,2\}$。

由归纳假设可得。

情形 2. $c_0\leq n$ 且 $c_1=c_2=n+1$。

因此我们有 $\langle a_0,\ b_0,\ c_0\rangle \leq_n a_1\leq_n a_2$（根据定义 2.3(1) 的情形 (ii)、(iv)、(v)），故由定义 2.3(1) 的情形 (ii) 和归纳假设可得结论。

情形 3. $c_0,\ c_2\leq n$ 且 $c_1=n+1$。

因此 $\langle a_0,\ b_0,\ c_0\rangle \leq_n a_1<_n \langle a_2,\ b_2,\ c_2\rangle$（根据定义 2.3(1) 的 (ii) 和 (iii)），故由归纳假设可得结论。

情形 4。$c_0=n+1$ 和 $c_1,\ c_2\leq n$。

因此 $a_0<_n\langle a_1,\ b_1,\ c_1\rangle\leq_n\langle a_2,\ b_2,\ c_2\rangle$（根据定义 2.3(1) 的 (ii)、(iv) 和 (v)），故由定义 2.3(1) 的情形 (iii) 可得结论。

情形 5。$c_0=c_2=n+1$ 和 $c_1\leq n$。

因此 $a_0<_n\langle a_1,\ b_1,\ c_1\rangle\leq_n a_2$（根据定义 2.3(1) 的 (iii) 和 (ii)），故由定义 2.3(1) 的情形 (v) 可得结论。

情形 6. $c_0,\ c_1\leq n$ 和 $c_2=n+1$。

因此，$\langle a_0,\ b_0,\ c_0\rangle\leq_n\langle a_1,\ b_1,\ c_1\rangle\leq_n a_3$，（由定义 2.3(1) 的 (i) 和 (ii)），故由定义 2.3(1) 的情形 (ii) 可得结论。

情形 7. $c_0=c_1=c_2=n+1$。

根据定义 2.3(1) 的情形 (iv) 和 (v)，以下情况之一成立：

(α) $a_0=a_2=a_3$ 和 $b_0\trianglelefteq b_1\trianglelefteq b_2$,

或 (β) $a_0=a_1<_n a_2$，或 (γ)

$a_0<_n a_1=a_2$，或 (δ)

$a_0<_n a_1<_n a_2$。

无论哪种情况，均可由定义 2.3(1) 的情形 (iv) 和 (v) 得出结论。

情形 8. $c_0=c_1=n+1$ 和 $c_2\leq n$。

因此 $a_0 \leq_n a_1 <_n \langle a_2,\ b_2,\ c_2\rangle$（根据定义 2.3(1) 的情形 (iv)、(v) 和 (iii)），故由定义 2.3(1) 的情形 (v) 可得结论。

(3) 设 $x = \langle a_0,\ b_0,\ c_0\rangle \neq y = \langle a_1,\ b_1,\ c_1\rangle \in C$ 满足 $x \leq y$。令 n 为满足 $x,\ y \in C_n$ 的最小者，因此 $c_0,\ c_1$ 中至少有一个是 n。我们对 n 进行归纳。

$\underline{n = 0}$。因此，$a_0 = a_2 = \emptyset$ 和 $c_0 \leq c_1 = 0$，而 $b_0 \trianglelefteq b_1$ 和 $b_0 \neq b_1$。对于所有 $s \in {}^{<\omega}2 \setminus \{\langle\rangle\}$，我们有

$$x < \langle x, s, 1\rangle < y,$$

根据定义 2.3(1) 的规则 (ii) 和 (iii)。若 $s,\ t \in {}^{<\omega}2 \setminus \{\langle\rangle\}$ 在 ${}^{<\omega}2$ 中不可比较，则根据定义 2.3(1) 的规则 (iv) 和 (v)，有

$$\langle x, s, 1\rangle >< \langle x, t, 1\rangle,$$

因此，令 Z 由所有序列 $\langle x,\ s,\ 1\rangle$ 组成，其中 s 是形如 $1 \ldots 10$ 的有限序列，即可满足要求。

$\underline{n + 1}$。与传递性的讨论类似，我们考虑几种可能性。为求完整起见，我们给出完整的讨论。

$\underline{\text{情形 1}}$。$c_0 \leq n$ 和 $c_1 = n + 1$ 以及 $x <_n a_1$。

根据归纳假设，存在 $\langle C,\ \leq\rangle$ 的一个无限反链 Z，使得对所有 $z \in Z$，都有 $x < z < a_1$。根据定义 2.3(1) 的规则 (ii)，有 $a_1 \leq y$，因此由传递性即可得证。

$\underline{\text{情形 2}}$。$c_0 \leq n$ 和 $c_1 = n + 1$ 以及 $a_1 = x$。

对于 $s \in {}^{<\omega}2 \setminus \{\langle\rangle\}$，考虑 $\langle x,\ s,\ n+2\rangle$，它是 C_{n+2} 的一个元素。对于任何这样的 s，我们有

$$x \leq_{n+2} \langle x, s, n + 2\rangle \leq_{n+2} y,$$

分别根据定义 2.3(1) 的规则 (ii) 和 (iii)。最后由传递性得出结论，注意到对于在 ${}^{<\omega}2$ 中不可比较的 $s, t \in {}^{<\omega}2 \setminus \{\langle\rangle\}$，$\langle x, s, n + 2\rangle$ 和 $\langle x, t, n + 2\rangle$ 在 C 中不可比较。

$\underline{\text{情形 3}}$。$c_0 = n + 1$ 和 $c_1 \leq n$ 和 $a_1 <_n y$。

对于满足 $b_1 \trianglelefteq s$ 的 $s \in {}^{<\omega}2$，根据定义 2.3(1) 的规则 (iv)，有 $x \leq \langle a_1, s, c_1\rangle$，并且根据规则 (iii)，有 $\langle a_1, s, c_1\rangle \leq y$。同样，对于在 ${}^{<\omega}2$ 中不可比较的 s, t，我们有 $\langle a_1, s, c_1\rangle$ 和 $\langle a_1, t, c_1\rangle$ 不可比较。

$\underline{\text{情形 3}}$. $c_0 = n + 1 = c_1$。

因此，对于所有 $s \in {}^{<\omega}2 \setminus \{\langle\rangle\}$，根据规则 (ii) 和 (iii)，我们分别有 $x \leq \langle x, s, n+2\rangle \leq y$。

注意到我们已经涵盖了所有可能性，至此断言的证明完成。 ★2.5

断言 2.6。集合

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle\emptyset, \langle\rangle, 0\rangle, \langle 0\rangle, 1\rangle, y \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle\emptyset, \langle\rangle, 0\rangle, \langle 1\rangle, 1\rangle\}$$

是 $\langle C, \leq\rangle$ 中的极大反链。

断言的证明。 A 显然是一个反链。给定 $z = \langle a, b, c\rangle \in C$。

若 $c = 0$，则 $a = \emptyset$；若 $b = \langle\rangle$，则根据规则 (ii) 有 $x < z$。否则，根据规则 (iii) 有 $x \leq z$。

对 $c \geq 1$ 作归纳法，我们证明 $x \leq z$ 或 $y \leq z$（或两者皆有）。

假设 $c = 1$。如果 $a = \langle\emptyset, \langle\rangle, 0\rangle$，则结论由定义 2.3(1) 的情形 (iv) 得出。否则，我们使用定义 2.3(1) 的情形 (v)。

对于 $c = n + 1$，根据归纳假设，我们知道 $x \leq a$ 或 $y \leq a$。根据规则 (v)，证明完成。 ★2.6

断言 2.7。 A来自断言 2.6，无法分裂。

断言的证明。由于 $\langle\langle\emptyset, \langle\rangle, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, 1\rangle \in \mathcal{U}(x) \setminus [\mathcal{U}(y) \cup \mathcal{D}(x)]$ 以及$\langle\langle\emptyset, \langle\rangle, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, 1\rangle \in \mathcal{U}(y) \setminus [\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{D}(y)]$,和 $\langle\emptyset, \langle\rangle, 0\rangle \notin \mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(y)$。 ★2.7

★2.2

注 2.8。 </style}上述结论可按显而易见的方式推广到长度超过 ω 步的归纳法。 ★2.8

参考文献

[1] R. Ahlswede、P. L. Erd¨os 和 N. Graham，《极大反链的分裂性质》，《组合数学》15 (4)，1995年，第 475–480 页。[2] P.L.Erd¨os，《无限偏序集中的分裂性质》，《离散数学》163 (1-3)，1997年，第 251–256 页。

目录

偏序集（P，$\leq$）称为强稠密的，如果在 P 的每个非空区间（a，b）中，都存在两个不可比较的元素。 A 的子集 P 称为 Sperner 系统，如果其中任意两个不同元素在 A 中都不可比较。如果 A 是相对于 $\subseteq$ 极大的 Sperner 系统，则称其为已分裂的，若 $A = D \bigcup U$，其中 D 和 U 不相交，并且 P 的每个元素要么 $\leq$ 某个 D 元素，要么 $\geq$ 某个 U 元素。R. Alshwede、P.L. Erd¨os 和 N. Graham 在其论文 [1]，中证明，每个有限强稠密偏序集都具有这样一种性质：其所有极大 Sperner 系统都是已分裂的。在同一篇论文中，作者猜想，对于无限强稠密可数偏序集，这一结论也成立。在本文中，我们通过构造一个无限强稠密偏序集，证明 [1] 中的猜想并不成立；该偏序集具有一个未分裂的极大 Sperner 系统´。