arXiv:2601.08561v1 [math.NA] 13 Jan 2026

由积分算子定义的类上的采样恢复，以及利用自适应字典进行稀疏逼近

V. Temlyakov

摘要

本文继续发展以下一般方法。我们研究采样恢复误差的渐近行为，研究对象不是通常所做的单个光滑度类，而是由核来自给定函数类的积分算子定义的一族类。此前，这种方法已用于研究柯尔莫哥洛夫宽度，最近又用于研究熵数。事实证明，上述问题与相对于不同冗余字典的稀疏逼近问题密切相关。具体而言，采样恢复问题与相对于自适应字典的稀疏非线性逼近有关，这意味着字典取决于待逼近的函数。

1 引言

本文是对近期论文 [27] 的后续研究。我们继续发展在 [15] 中提出的以下一般框架。典型的光滑度类可以借助具有特殊核的积分算子来定义。例如，对于周期函数，可以使用伯努利核。在 [15] 中，我们提出研究渐近特征量（柯尔莫哥洛夫宽度），其研究对象不是单个光滑度类，而是由积分算子定义的一类函数类，这些算子的核来自给定的函数类。在 [27] 中，我们沿用了 [15] 的框架，并在所研究的渐近特征量为

熵数的情形下，得到了若干结果。本文继续遵循在 [15] 中发展出的上述研究模式，并证明了渐近特征量为采样恢复误差时的相应结果。

现在我们开始详细介绍。设 (Ω, μ) 为一个概率空间。我们将 L_p, $1 \le p < \infty$ 范数理解为

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

我们将 L_∞-范数理解为连续函数的一致范数

$$\|f\|_\infty := \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|$$

并且，为了简化记号，我们有时用 $L_\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上连续函数空间$C(\Omega)$。我们将由 v 个变量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_v)$ 构成的函数的向量 $L_{\mathbf{p}}$- 范数 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_v)$ 定义为

$$\|f(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}} := \|f(\mathbf{x})\|_{(p_1,\dots,p_v)} := \|f(\mathbf{x})\|_{p_1,\dots,p_v} := \|\cdots\|f(\cdot, x_2, \dots, x_v)\|_{p_1}\cdots\|_{p_v}.$$

1.1 采样恢复

我们首先阐述一般问题的表述，并在采样恢复的一个特殊情形下进行研究。我们针对 d-元类 $\mathbf{W}_q^K$（见下文）给出这一表述，并指出本文主要研究单变量情形（$d = 1$）。我们强调，该问题对于所有维数 d 都具有重要的研究价值和意义。在 $d > 1$ 情形下，该问题似乎甚至比 $d = 1$ 情形下更难，而后者尚未得到完全解决。

问题 K。一般情形下的表述。 设 Ω^i, $i = 1,2$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的紧集，其上分别赋有概率测度 μ_i。设 $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是 $\Omega^1 \times \Omega^2 \subset \mathbb{R}^{2d}$ 上关于 $\mu_1 \times \mu_2$ 可测的函数。假设对于所有 $\varphi \in L_q(\Omega^2, \mu_2)$，积分

$$I_K(\varphi) := \int_{\Omega^2} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}) d\mu_2$$

对所有 $\mathbf{x} \in \Omega^1$ 均存在。

设 $1 \le q \le \infty$ 和 $q' := q/(q-1)$ 是 q 的对偶。接下来我们定义类

$$\mathbf{W}_q^K := \left\{ f : f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega^2} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}) d\mu_2, \quad \|\varphi\|_{L_q(\Omega^2,\mu_2)} \le 1 \right\}. \tag{1.1}$$

显然，类 $\mathbf{W}_q^K$是积分算子 I_K 将空间 $L_q(\Omega^2, \mu_2)$ 的单位球映射得到的像。

我们关注在 [27] （另见[15]）中提出的以下问题。假设给定一类（一个集合）$\mathbf{K}$ 核 K 。考虑类$\mathbf{W}_q^K$在空间$L_p(\Omega^1, \mu_1)$ $1 \le q, p \le \infty$中的一个特定渐近特征量 $ac_n(\mathbf{W}_q^K, L_p)$。我们希望估计集合$\mathbf{K}$的以下特征量

$$ac_n(\mathbf{K}, L_q, L_p) := \sup_{K \in \mathbf{K}} ac_n(\mathbf{W}_q^K, L_p).$$

上述问题包含两个重要要素——积分算子的核集合$\mathbf{K}$以及渐近特征量 $ac_n(\cdot, \cdot, \cdot)$。当渐近特征量 ac_n 为柯尔莫哥洛夫宽度 d_n时，上述问题的研究相对充分。读者可在 [15], [16], 和 [18]中找到相应结果。其中一些结果的简要介绍见 [26]。下面给出其中一个结果作为示例。以下结果引自 [16]。对于$1 \le q, p \le \infty$，我们需要以下记号

$$\xi(q, p) := \left(\frac{1}{q} - \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\right)\right)_+, \quad (a)_+ := \max(a, 0). \tag{1.2}$$

我们还使用以下便于表达的记号。用 C、 C' 和 c、 c' 表示各种正常数。它们的自变量表明了它们可能依赖的参数。通常，这些常数不依赖于函数 f 以及通常记作 m、 n、 k的变化参数。为简洁起见，我们使用以下符号。对于两个非负数列 $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$和 $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，关系 $a_n \ll b_n$ 表示存在一个数 C（a， b），使得对所有 n 都有 $a_n \le C$（a， b）b_n。关系 $a_n \gg b_n$ 表示$b_n \ll a_n$ ，而 $a_n \asymp b_n$ 表示 $a_n \ll b_n$ 和 $a_n \gg b_n$。对于实数 x, 用 $[x]$ 表示 x的整数部分。

下面给出一个关于柯尔莫哥洛夫宽度的已知结果。设 X 是一个巴拿赫空间, $\mathbf{F} \subset X$ 是 X的一个紧子集。量

$$d_n(\mathbf{F}, X) := \inf_{\{u_i\}_{i=1}^n \subset X} \sup_{f \in \mathbf{F}} \inf_{c_i} \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i u_i \right\|_X, \quad n = 1, 2, \dots,$$

称为柯尔莫哥洛夫宽度，它属于$\mathbf{F}$ 在 X中的宽度。

定理 1.1 ([16])。 设 $d = 1$ 和$\mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}$ 表示二元函数的类$\mathbf{W}_1^{\mathbf{r}}$ 或$\mathbf{H}_1^{\mathbf{r}}$中的一个（定义见下文第 *2* 节）。那么，对于$1 \le q, p \le \infty$ 和$\mathbf{r} > (1, 1 + \max(1/2, 1/q))$，有

$$\sup_{K \in \mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}} d_n(\mathbf{W}_q^K)_p \asymp n^{-r_1 - r_2 + \xi(q,p)}$$

其中 $\xi(q, p)$ 定义见式 *(1.2)*。

本文研究渐近特征量为采样恢复误差的情形，其中集合 $\mathbf{K}$是具有混合光滑性的 $2d$ 变量多元周期函数类。回顾在 [19]中引入的最优线性恢复设定。对于固定的 m 和点集 $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$，令 Φ 为从 $\mathbb{C}^m$ 到 $L_p(\Omega\ \mu)$的线性算子。对于类 $\mathbf{F}$ （通常是$L_p(\Omega\ \mu)$中的中心对称紧子集），记

$$\varrho_m(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\xi} \inf_{\text{linear } \Phi} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \Phi(f(\xi^1), \dots, f(\xi^m))\|_p.$$

上述恢复过程是一个线性过程。

现在我们陈述本文的主要结果。相应的证明见第 **4** 节。

定理 1.2。 设 $d = 1$ 和 $\mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}$ 表示函数类 $\mathbf{W}_1^{\mathbf{r}}$ 或 $\mathbf{H}_1^{\mathbf{r}}$ 中的一类（定义见下文第 *2* 节），它们由二元函数构成。那么对于$1 \le q \le 2 \le p \le \infty$，且当 $\mathbf{r} > (1,\ 1 + 1/q)$ 时，有

$$\sup_{K \in \mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}} \varrho_m(\mathbf{W}_q^K, L_p) \asymp m^{-r_1 - r_2 + 1/q - 1/p}.$$

我们引入一些更多的记号。对于 $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$，$1 \le q_1,\ q_2 \le \infty$，记作

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) := \begin{cases} (1/q_1, 1/q_2), & 2 \le q_1 \le \infty, \\ (1/q_1, \max(1/2, 1/q_2)), & 1 \le q_1 < 2. \end{cases}$$

定理 1.3。 令 $d = 1$ 和 $\mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 表示二元函数的类 $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 或 $\mathbf{H}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 之一（定义见下文第 *2* 节）。那么对于$1 \le q_1$、 $q_2 \le \infty$、 $2 \le p \le \infty$以及 $\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{q})$，有

$$\sup_{K \in \mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}} \varrho_m(\mathbf{W}_1^K, L_p) \ll m^{-r_1 - r_2 + (1/q_1 - 1/2)_+ + 1/2 - 1/p}.$$

现在我们给出最优采样恢复的以下特征量的下界。令 Ω 为 $\mathbb{R}^d$ 的紧子集，其上配有概率测度 μ。对于函数类 $W \subset \mathcal{C}(\Omega)$，我们定义（见 [28]）

$$\varrho_m^o(W, L_p) := \inf_{\xi} \inf_{\mathcal{M}} \sup_{f \in W} \|f - \mathcal{M}(f(\xi^1), \dots, f(\xi^m))\|_p,$$

$\mathcal{M}$ 遍历所有映射 $\mathcal{M} : \mathbb{C}^m \to L_p(\Omega, \mu)$，而 ξ 遍历 Ω 中所有由 m 个点组成的子集 $\{\xi^1, \cdots, \xi^m\}$。这里，我们用指标 o 表示最优性。显然，

$$\varrho_m^o(W, L_p) \le \varrho_m(W, L_p) \tag{1.3}$$

因此，ϱ_m^o 的下界就是ϱ_m 的下界，而 ϱ_m 的上界就是 ϱ_m^o的上界。

定理 1.4. </style}设 和 $\mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 表示二元函数的类 $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 或 $\mathbf{H}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 之一（定义见第 *2* 节）。那么，对于$1 \le q_1, q_2 \le \infty$, $1 \le q \le p \le \infty$以及 $\mathbf{r} > (1/q_1, 1/q_2)$，有

$$\sup_{K \in \mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}} \varrho_m^o(\mathbf{W}_q^K, L_p) \gg m^{-r_1 - r_2 - 1 + 1/q_1 + 1/q - 1/p}.$$

注意，在 $q_1 = 1$ 的情况下，定理 1.4 给出了定理 1.2 所需的下界。在特殊情况下，$q = 1$ 定理 1.4 给出

$$\sup_{K \in \mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}} \varrho_m^o(\mathbf{W}_1^K, L_p) \gg m^{-r_1 - r_2 + 1/q_1 - 1/p}.$$

该下界与情形$1 \le q_1 \le 2$下定理 1.3 中的上界一致。因此，情形 $1 \le q_1 \le 2$下定理 1.3 是紧的。我们将其表述为一个单独的结论。

定理 1.5. 设 $d = 1$ 和 $\mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 表示二元函数类 $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 或 $\mathbf{H}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 之一（定义见第 *2* 节）。那么对于$1 \le q_2 \le \infty$、 $1 \le q_1 \le 2 \le p \le \infty$和 $\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{q})$，有

$$\sup_{K \in \mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}} \varrho_m^*(\mathbf{W}_1^K, L_p) \asymp m^{-r_1 - r_2 + 1/q_1 - 1/p},$$

其中，ϱ_m^* 同时表示 ϱ_m 和ϱ_m^o。

1.2 自适应字典

事实证明，问题 K 与针对不同冗余字典的稀疏逼近问题密切相关。下面我们介绍非线性稀疏逼近中的一些概念，并解释两者之间的联系。

E. Schmidt 在 [12], 中研究了相对于冗余字典进行稀疏逼近的首个实例：他研究了用双线性形式逼近两个变量的函数 $f(x, y)$。

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(x)v_i(y),$$

见 $L_2([0,1]^2)$。在这种情况下，我们使用以下字典（双线性字典）

$$\Pi := \{u(x)v(y) : u, v \in L_2([0,1])\}, \tag{1.4}$$

其中，函数 u 和 v 都是单变量函数。这个问题与积分算子的性质密切相关

$$(I_f g)(x) := \int_0^1 f(x,y)g(y)dy$$

其核为 $f(x, y)$。关于这种联系的详细讨论，读者可参见 [21],第 2 章。

一般而言，我们在巴拿赫空间 X 中研究由元素组成的冗余系统 $\mathcal{D}$（字典 $\mathcal{D}$）。若元素（函数、信号） $f \in X$ 具有表示 $h = \sum_{i=1}^{m} c_i g_i$, $g_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, \ldots\ldots, m$，其中 $\{c_i\}$ 为实数或复数，则称其相对于 $\mathcal{D}$ 是 m-稀疏的。所有 m-稀疏元素组成的集合记为 $\Sigma_m(\mathcal{D})$。对于给定元素 f，我们引入最佳 m 项逼近误差

$$\sigma_m(f, \mathcal{D}) := \inf_{h \in \Sigma_m(\mathcal{D})} \|f - h\|.$$

现在我们来说明一下术语。在贪心逼近文献中，我们将字典 $\mathcal{D}$ 定义为由元素 $g \in X$ 组成的系统 $\{g\}$，并满足以下两个性质

$$\|g\| \le 1 \quad \text{for all} \quad g \in X \quad \text{and the closure of } \operatorname{span}(\mathcal{D}) = X.$$

为方便起见，我们施加归一化条件 $\|g\| \leq 1$。显然，特征量 $\sigma_m(f, \mathcal{D})$ 与归一化无关。本文主要使用这一特征量。下面讨论第二个条件。假设系统 $\mathcal{S} \subset X$ 不满足该条件。那么，我们不考虑巴拿赫空间 X，而是考虑 X 的一个子空间 $X_{\mathcal{S}}$，它是 $\operatorname{span}(\mathcal{S})$ 在 X中的闭包。这样，系统 $\mathcal{S}$ 便成为巴拿赫空间$X_{\mathcal{S}}$中的一个字典。因此，出于这个原因，有时我们会稍微宽泛地使用系统 和字典 这两个术语来指称一般系统。在贪婪逼近理论中，有一些定理保证，对于任意字典 $\mathcal{D}$ 和任意元素$f \in X$，某些贪婪算法都能收敛。显然，在处理系统的情况下，我们只能将这些定理应用于 $f \in X_{\mathcal{S}}$。

我们强调，双线性字典 Π 不依赖于待近似的函数。从这个意义上说，它不是自适应的——我们用它来近似所有函数。事实证明，在问题 K的某些版本中，我们需要研究相对于某个由 K确定的字典，对给定核 $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的近似。现在我们给出双线性字典（系统）更一般的定义，并定义三个自适应系统。设$\mathbf{p} = (p_1, p_2)$、$1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ 为已知。

双线性字典 $\Pi(\mathbf{p})$。定义

$$\Pi(\mathbf{p}) := \{g : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x})v(\mathbf{y}),\, u \in L_{p_1}(\Omega^1),\, v \in L_{p_2}(\Omega^2)\}.$$

$\mathcal{LK}(\mathbf{p})$**-系统**。假设 $K \in L_{\mathbf{p}}(\Omega^1 \times \Omega^2)$ 满足以下性质。对于任意 $\mathbf{z} \in \Omega^1$，有 $K(\mathbf{z}\ \cdot) \in L_{p_2}(\Omega^2)$。定义

$$\mathcal{LK}(\mathbf{p}) := \{g : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x}, \mathbf{z})K(\mathbf{z}, \mathbf{y}),\, \forall \mathbf{z}\, \text{we have}\, u(\cdot, \mathbf{z}) \in L_{p_1}(\Omega^1)\}.$$

$\mathcal{KL}(\mathbf{p})$**-系统**。假设 $K \in L_{\mathbf{p}}(\Omega^1 \times \Omega^2)$ 满足以下性质。对于任意 $\mathbf{z} \in \Omega^2$，有 $K(\cdot,\ \mathbf{z}) \in L_{p_1}(\Omega^1)$。定义

$$\mathcal{KL}(\mathbf{p}) := \{g : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{z})v(\mathbf{z}, \mathbf{y}),\, \forall \mathbf{z}\, \text{we have}\, v(\mathbf{z}, \cdot) \in L_{p_1}(\Omega^1)\}.$$

$\mathcal{KK}$（$\mathbf{p}$）**-系统**。假设 $K \in L_{\mathbf{p}}(\Omega^1 \times \Omega^2)$ 满足以下性质。对于任意 $\mathbf{a} \in \Omega^1$，我们有 K（$\mathbf{a}\ \cdot$）$\in L_{p_2}$（Ω^2）；对于任意 $\mathbf{b} \in \Omega^2$，我们有 K（$\cdot,\ \mathbf{b}$）$\in L_{p_1}$（Ω^1）。定义

$$\mathcal{KK}(\mathbf{p}) := \{g : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{b})K(\mathbf{a}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega^1 \times \Omega^2\}.$$

请注意，在文献中（见 [1]），函数 $K_{ab}(x,\ y) := K(x,\ b)K(a,\ y)$，$(x,\ y)$，$(a,\ b) \in [0,1]^2$ 被称为函数 $K(x,\ y)$ 的交叉函数，而系统 $\mathcal{KK}(\infty)$ 被称为交叉函数系统。

众所周知（见 [16]），估计类 $\mathbf{W}_q^K$ 的柯尔莫哥洛夫宽度的问题（在情形 $d = 1$ 下）可视为一个线性问题，并且与针对双线性字典 Π 对核 K 进行最佳稀疏逼近这一非线性问题密切相关。请注意，双线性字典 Π 不依赖于核 K。

本文（见第 4 节）将说明，估计类$\mathbf{W}_q^K$的线性恢复最优误差这一问题，与针对系统（字典） $\mathcal{LK}$ 对核 K 进行最佳稀疏逼近这一非线性问题相关。这里，系统 $\mathcal{LK}$ 由核 K 确定。因此，我们将这种逼近称为“相对于自适应系统（字典）的稀疏逼近”。

事实证明，相对于自适应系统进行稀疏逼近并非新问题，而且有着一段有趣的历史，下面我们将简要介绍（更多详情见 [1]，另一个例子见第 5 节）。它涉及通过函数 $K(x,y)$ 的交叉函数的线性组合来逼近二元函数——即相对于系统 $\mathcal{KK}$ 进行稀疏逼近。设 $K(x,y)$ 是 $[0,1]^2$ 上的连续函数。对于点 $(a,b) \in [0,1]^2$，我们定义 $K_{ab}(x,y) := K(a,y)K(x,b)$，并称其为函数 $K(x,y)$ 的交叉函数。

1936 年，Mazur 提出了如下问题（见 [10], 问题 153）。(M) 每个连续的 $[0,1]^2$ 函数 K 是否都能用其交叉函数的线性组合，在一致范数下任意精确地逼近 $\{K_{ab},\ (a,\ b) \in [0,1]^2\}$?

1955 年，Grothendieck（见 [5]）指出，Mazur 问题 (M) 与其他基本问题有关。具体而言，他证明了以下三个命题等价。

G1. 每个巴拿赫空间 E 都具有逼近性质，这意味着对任意紧集 $S \subset E$ 和任意 $\epsilon > 0$，都存在一个有限维算子 T，使得对所有 $x \in S$，$\|Tx - x\| < \epsilon$。

G2. 对于任意具有以下性质的无限矩阵 $U := [u_{kj}]_{k,j=1}^{\infty}$

$$\forall k \quad \lim_{j\to\infty} u_{kj} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \max_j |u_{kj}| < \infty, \qquad U^2 = 0$$

我们有

$$\mathrm{tr}(U) := \sum_{k=1}^{\infty} u_{kk} = 0.$$

G3. 对于 $[0,1]^2$ 上的任意连续函数 K，等式

$$\int_0^1 K_{ab}(t,t)dt = 0, \quad \text{for all} \quad (a,b) \in [0,1]^2$$

蕴含

$$\int_0^1 K(t,t)dt = 0.$$

1973 年，Enflo（见 [4]）给出了一个不具有逼近性质的巴拿赫空间的例子，因此，根据 Grothendieck 关于**G1** 与**G3** 等价性的结果，Mazur 问题 (M) 的答案是否定的。关于用其交叉函数的线性组合逼近函数的结果，请读者参阅最新论文 [1]。

本文证明定理 1.3 的以下推论。

定理 1.6. 设 $d = 1$ 和$\mathbf{F}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 分别表示二元函数的类 $\mathbf{W}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 或 $\mathbf{H}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$（定义见下文第 *2* 节）。那么对于 $1 \le q_1$、$q_2 \le \infty$、$2 \le p \le \infty$，以及$\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{q})$，有

$$\sup_{K \in \mathbf{F}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}} \sigma_m(K, \mathcal{LK}(\infty))_\infty \ll m^{-r_1 - r_2 + (1/q_1 - 1/2)_+ + 1/2}.$$

此外，我们还证明以下下界。

定理1.7。设 $d = 1$ 和 $\mathbf{F}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 表示函数类$\mathbf{W}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 或$\mathbf{H}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 中的一个（定义见下文第 *2* 节），这些类由二元函数构成。那么对于$1 \le q_1$、$q_2 \le \infty$、$1 \le p_1$、$p_2 \le \infty$和$\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{q})$，我们有

$$\sup_{K \in \mathbf{F}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}} \sigma_m(K, \mathcal{LK}(\mathbf{p}))_{\mathbf{p}} \gg m^{-r_1 - r_2 + 1/q_1 - 1/p_1 - 1/p_2}.$$

定理 1.6 和定理1.7 在$\mathbf{p} = \infty$ 和 $1 \le q_1 \le 2$的情形下，推出以下右阶结果。

定理 1.8。令 $d = 1$ 和 $\mathbf{F}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 表示二元函数的类 $\mathbf{W}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 或 $\mathbf{H}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$（见下文第 *2* 节中的定义）之一。则对于 $1 \le q_1 \le 2$、$1 \le q_2 \le \infty$ 以及 $\mathbf{r} > \mathbf{r}(\mathbf{q})$，我们有

$$\sup_{K \in \mathbf{F}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}} \sigma_m(K, \mathcal{LK}(\infty))_\infty \asymp m^{-r_1 - r_2 + 1/q_1}.$$

双线性逼近（非自适应情形）比上述系统 $\mathcal{LK}$ （自适应情形）的情况得到了更充分的研究。已知以下结果。

定理 1.9 ([16], 定理 2)。 令 $d = 1$ 和 $\mathbf{F}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 表示类$\mathbf{W}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$ 或 $\mathbf{H}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}$之一。那么对于 $\mathbf{r} > \mathbf{1}$ 和 $1 \le q_1 \le p_1 \le \infty, 1 \le q_2, p_2 \le \infty$ ，有

$$\sup_{K\in\mathbf{F}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}} \sigma_m(K, \Pi(\mathbf{p}))_{\mathbf{p}} \asymp m^{-r_1-r_2+\xi(q_1,p_1)}$$

其中 $\xi(q, p)$ 定义见 *(1.2)*。

在$\mathbf{p} = \infty, 1 \le q_1 \le 2$的情况下，定理 1.9 给出的收敛速率为 $m^{-r_1-r_2+1/q_1-1/2}$，优于定理 1.8。对此并不意外，因为系统$\mathcal{LK}(\mathbf{p})$ 是双线性系统 $\Pi(\mathbf{p})$ 的子系统。

新颖性。逼近理论在数值分析和应用数学中发挥着重要作用。在大数据分析、图像/信号处理、机器学习和人工智能等应用的推动下，逼近理论已经发展到一个新的层次：我们力求以尽可能一般的形式来解决问题。研究对象已从单变量函数扩展到多变量函数，从有限维空间扩展到无限维空间，从三角函数系和代数函数系等经典系统扩展到巴拿赫空间中的基，甚至进一步扩展到巴拿赫空间中的任意冗余字典。本文正是秉持这一思路。我们研究采样恢复误差的渐近行为，但不同于通常针对单个光滑度类进行研究的做法，我们考察的是一族类，这些类由核来自给定函数类的积分算子定义（见上文问题 K ）。显然，这比以往研究的情形一般得多。在这一过程中，我们发现，对于采样恢复问题 K ，它与一个关于冗余字典的新问题——稀疏非线性逼近——密切相关，具体而言，就是利用自适应字典进行稀疏逼近（见上文第1.2小节）。我们在核来自给定函数类的积分算子所定义的类上的采样恢复，以及利用自适应字典进行稀疏逼近这两个方面，都取得了新的结果。此外，本文的另一目标是引起研究人员对上述两个重要新方向的关注。

2 函数类

正如我们在第 1 节中指出的（从定理1.1–1.9可以清楚看出），我们研究的是情形 $d = 1$，其中核 $K(x,\ y)$是一个二元函数。然而，鉴于其对所有维数 d的重要性，我们给出了任意 $d \geq 1$情形下这些类的定义。为避免日后产生混淆（见下文第3节），这里采用记号 v。在定理1.1–1.9中，我们有 $v = 2d = 2$。

我们先定义类$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{a}}$（例如参见 [17], 第31页，在标量情形下的 q）。

定义 2.1. 在单变量情形下，对于 $a > 0$，令

$$F_a(x) := 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx - a\pi/2) \tag{2.1}$$

为伯努利核；在多变量情形下，对于 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_v) \in \mathbb{R}_+^v$，$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_v) \in \mathbb{T}^v$，令

$$F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{v} F_{a_j}(x_j). \tag{2.2}$$

D记作 $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} \leq \infty$（我们将向量不等式按坐标理解）

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{a}} := \{f : f = \varphi * F_{\mathbf{a}}, \quad \|\varphi\|_{\mathbf{q}} \leq 1\},$$

其中

$$(F_{\mathbf{a}} * \varphi)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-v} \int_{\mathbb{T}^v} F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

类 $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{a}}$ 是经典的函数类，具有 控制混合导数（具有混合光滑性的索博列夫型函数类）。

现在我们开始定义类 $\mathbf{H}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{a}} := \mathbf{H}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{a}\,v}$，即由 v 个变量构成的周期函数类，其定义基于混合差分（例如，参见 [17], 第 31 页，在标量 q 的情形下）。

定义 2.2. 令 $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_v)$ 和 $\Delta_{\mathbf{t}}^l f(\mathbf{x})$ 为变量 x_j中步长为 t_j 的 l 阶混合差分，即

$$\Delta_{\mathbf{t}}^l f(\mathbf{x}) := \Delta_{t_v,v}^l \cdots \Delta_{t_1,1}^l f(x_1, \ldots, x_v).$$

令 e 为 $[1,v]$中的自然数子集。记

$$\Delta_{\mathbf{t}}^{l}(e):=\prod_{j\in e}\Delta_{t_j,j}^{l},\qquad \Delta_{\mathbf{t}}^{l}(\varnothing):=Id\ -\ identity\ operator.$$

我们将类 $\mathbf{H}_{\mathbf{q},l}^{\mathbf{a}}B$, $l>\|\mathbf{a}\|_{\infty}$ 定义为满足以下条件的 $f\in L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{v})$ 的集合：对任意 e

$$\left\|\Delta_{\mathbf{t}}^{l}(e)f(\mathbf{x})\right\|_{\mathbf{q}}\le B\prod_{j\in e}|t_j|^{a_j}. \tag{2.3}$$

在 $B=1$ 的情况下，我们将其省略。众所周知（见下文定理 *2.1*），具有不同 $l>\|\mathbf{a}\|_{\infty}$ 的类 $\mathbf{H}_{\mathbf{q},l}^{\mathbf{a}}$ 是等价的。因此，为方便起见，我们在记号中省略 l 。

现在我们给出一个结果，它对类$\mathbf{H}_{\mathbf{q},l}^{\mathbf{a}}$提供了一种等价描述。我们需要一些经典的三角多项式。阶数为 $j-1$ 的单变量 Fej´er 核:

$$\mathcal{K}_j(x):=\sum_{|k|\le j}\big(1-|k|/j\big)e^{ikx}=\frac{(\sin(jx/2))^2}{j(\sin(x/2))^2}.$$

Fej´er 核是一个偶的非负三角多项式，阶数为$j-1$。它满足显然的关系

$$\|\mathcal{K}_j\|_1=1,\qquad \|\mathcal{K}_j\|_{\infty}=j. \tag{2.4}$$

令 $\mathcal{K}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}):=\prod_{i=1}^{v}\mathcal{K}_{j_i}(x_i)$ 为 $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_d)$ 和 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_v)$ 上的 v 元 Fej´er 核。

单变量 de la Vall´ee Poussin 核定义如下

$$\mathcal{V}_m:=2\mathcal{K}_{2m}-\mathcal{K}_m.$$

我们还需要以下特殊三角多项式。设 s 为非负整数。定义

$$\mathcal{A}_0(x):=1,\quad \mathcal{A}_1(x):=\mathcal{V}_1(x)-1,\quad \mathcal{A}_s(x):=\mathcal{V}_{2^{s-1}}(x)-\mathcal{V}_{2^{s-2}}(x),\quad s\ge 2,$$

其中， $\mathcal{V}_m$ 是上文定义的 de la Vall´ée Poussin 核。对于 $\mathbf{s}=(s_1、\dots\dots、s_v)\in\mathbb{N}_0^{v}$ 定义

$$\mathcal{A}_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}):=\prod_{j=1}^{v}\mathcal{A}_{s_j}(x_j),\qquad \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_v)$$

and

$$A_{\mathbf{s}}(f) := \mathcal{A}_{\mathbf{s}} * f.$$

以下结果是已知的（例如参见 [17], 第 32 页，其中标量情形为q ，向量$\mathbf{q}$情形为 [16] ）。

定理 2.1。设 $f \in \mathbf{H}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{q},\, l}$， $\mathbf{1} \le \mathbf{q} \le \infty$。那么，对于 $\mathbf{s} \ge \mathbf{0}$

$$\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_{\mathbf{q}} \le C(\mathbf{a}, v, l) 2^{-(\mathbf{a},\mathbf{s})}. \tag{2.5}$$

反过来，由 *(2.5)* 可知，存在 $B > 0$，它与 f 无关，使得 $f \in \mathbf{H}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{q},\, l^B}$。

读者可在著作 [17], [22], 和 [2] 中找到关于这些类的逼近性质的结果。本文考虑如下情形： $v = 2d$,$d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} \le \infty$，且 $\mathbf{a}$ 具有特殊形式：$a_j = r$ 当 $j = 1, \dots, 2d$。此时我们记作$\mathbf{W}^r_{\mathbf{q}}$ 和 $\mathbf{H}^{r\,2d}_{\mathbf{q},\, l}$ 。

3 采样恢复的一些已知结果

本节陈述情形 $d = 1$ 下的一个已知结果——定理 3.1，后文将用到。此外，为了展示此情形下问题的难度，我们还陈述情形 $d > 1$ 下的一些已知结果。形如

$$t(x) = \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikx} = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为阶数为 n 的三角多项式。此类多项式的集合记为 $\mathcal{T}(n)$。

阶数为 n 的狄利克雷核

$$\mathcal{D}_n(x) := \sum_{|k| \le n} e^{ikx} = e^{-inx}(e^{i(2n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)^{-1} = \frac{\sin(n + 1/2)x}{\sin(x/2)}$$

是一个偶三角多项式。记

$$x^j := 2\pi j/(2n + 1), \qquad j = 0, 1, ..., 2n.$$

显然，点 x^j、 $j=1$，……， $2n$ 是狄利克雷核 $\mathcal{D}_n$ 在$[0,2\pi]$上的零点。因此，对于任意连续的 f

$$I_n(f)(x) := (2n+1)^{-1}\sum_{j=0}^{2n} f(x^j)\mathcal{D}_n(x-x^j)$$

在点 x^j 处插值 f： $I_n(f)(x^j) = f(x^j)$， $j=0$，1，…， $2n$。

容易验证，对于任意 $t\in\mathcal{T}(n)$，都有 $I_n(t) = t$。利用这一点以及不等式

$$\left|\mathcal{D}_n(x)\right| \le \min\bigl(2n+1, \pi/|x|\bigr), \qquad |x|\le\pi,$$

我们得到下面的勒贝格不等式

$$\|f - I_n(f)\|_\infty \le C(\ln(n+1))E_n(f)_\infty,$$

其中， $E_n(f)_p$ 是由 $\mathcal{T}(n)$ 中的多项式在 L_p 范数下对 f 的最佳逼近。

上面定义的 de la Vall´ee–Poussin 核也可以写成如下形式

$$\mathcal{V}_n(x) := n^{-1}\sum_{k=n}^{2n-1}\mathcal{D}_k(x) = \frac{\cos nx - \cos 2nx}{n(\sin(x/2))^2}.$$

de la Vall´ee–Poussin 核 $\mathcal{V}_n$ 是阶数为 $2n-1$ 的偶三角多项式，并且具有上界

$$|\mathcal{V}_n(x)| \le C\min\left(n,\ 1/(nx^2)\right),\ |x|\le\pi.$$

考虑以下恢复算子（参见 [14]和 [19]）

$$R_n(f) := (4n)^{-1}\sum_{j=1}^{4n} f\left(x(j)\right)\mathcal{V}_n\left(x-x(j)\right), \qquad x(j) := \frac{\pi j}{2n}.$$

令 I_n 和 R_n 为上述定义的恢复算子， W_q^r 表示单变量情形中的 $\mathbf{W}_q^r$。

定理 3.1 ([19])。令 $1\le q,p\le\infty$ 和 $r>1/q$。则

$$\varrho_{4m}(W_q^r, L_p) \asymp \sup_{f\in W_q^r}\|f - R_m(f)\|_p \asymp m^{-r+(1/q-1/p)_+}.$$

在 $1<p<\infty$ 的情况下，上述估计对于算子 I_m成立，而不是对于算子 R_m 成立。

现在我们继续讨论 $d > 1$ 的情形，并简要介绍经典的 Smolyak恢复算子。关于这些算子及相关算子的详细讨论，读者可参阅书籍 [20], [22], 和 [2]。设对于 $i = 1$，……， d算子 R_n^i 是关于变量 x_i作用的算子 R_n。记

$$\Delta_s^i := R_{2^s}^i - R_{2^{s-1}}^i, \quad R_{1/2} = 0,$$

并且对于 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}_0^d$

$$\Delta_{\mathbf{s}} := \prod_{i=1}^{d} \Delta_{s_i}^i.$$

考虑恢复算子（Smolyak 算子）

$$T_n := \sum_{\mathbf{s}:\|\mathbf{s}\|_1 \le n} \Delta_{\mathbf{s}}.$$

算子 T_n 使用 m 函数值和 $m \ll \sum_{k=1}^{n} 2^k k^{d-1} \ll 2^n n^{d-1}$。

以下界由 S. Smolyak 在 [13] 中得到。

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_\infty^r} \|f - T_n\|_\infty \ll 2^{-rn} n^{d-1}, \quad r > 0.$$

它在 [14] 中被推广到 $p < \infty$ 的情形:

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_p^r} \|f - T_n\|_p \ll 2^{-rn} n^{d-1}, \quad r > 1/p.$$

以下是一些进一步的结果。我们有（[19]）

$$\varrho_m(\mathbf{W}_2^r)_\infty \asymp m^{-r+1/2} (\log m)^{r(d-1)}, \quad r > 1/2.$$

上述情形下最优恢复的阶由 Smolyak 算子 T_n 结合适当的 n 给出。此外，我们还知道，对于 $q \in (1, \infty)$，有 ([19])

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_q^r} \|f - T_n(f)\|_\infty \asymp 2^{-(r-1/q)n} n^{(d-1)(1-1/q)}.$$

关于最优采样恢复的大多数已知结果都涉及线性恢复方法。现在，我们简要介绍该方向的近期结果；关于这一方向以往结果的讨论，请参阅著作 [2], [22] 和综述论文 [6] 。我们关注的是将一般函数类的采样恢复误差与柯尔莫哥洛夫宽度联系起来的结果。我们先从 [24] 中的一个结果开始。

定理 3.2 （[24]）。 存在两个正常数 b 和 B，使得对于任意紧子集$\Omega \subset \mathbb{R}^d$、其上的任意概率测度 μ 以及 $\mathcal{C}$的任意紧子集 $\mathbf{F}$ （Ω），都有

$$\varrho_{bn}(\mathbf{F}, L_2(\Omega,\mu)) \le B d_n(\mathbf{F}, L_\infty). \tag{3.1}$$

以下是定理 3.2 在 $2 < p \le \infty$ 情形下的推广，见 [9]。

定理 3.3 ([9])。 设 $2 \le p \le \infty$。存在一个正的绝对常数C，使得对于任意紧子集 Ω（属于 $\mathbb{R}^d$）、其上的任意概率测度 μ，以及 $\mathcal{C}(\Omega)$ 的任意紧子集$\mathbf{F}$，我们有

$$\varrho_{4n}(\mathbf{F}, L_p(\Omega,\mu)) \le C n^{1/2-1/p} d_n(\mathbf{F}, L_\infty). \tag{3.2}$$

注意，在 (3.1) 的右侧我们有 $d_n(\mathbf{F}\ L_\infty)$，它大于 $d_n(\mathbf{F}\ L_2)$。然而，众所周知，对于许多函数类，我们有$d_n(\mathbf{F}\ L_\infty) \asymp d_n(\mathbf{F}\ L_2)$。对于特殊集合$\mathbf{F}$（在再生核希尔伯特空间的情形下），已证明以下不等式（见 [3], [11], [7], 和 [8]）：

$$\varrho_{cn}(\mathbf{F}, L_2) \le \left(\frac{1}{n} \sum_{k \ge n} d_k(\mathbf{F}, L_2)^2 \right)^{1/2} \tag{3.3}$$

其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。这里， $d_k(\mathbf{F}\ L_2)$ 是$\mathbf{F}$ 在空间 L_2中的柯尔莫哥洛夫宽度。

d_k（$\mathbf{W}_q^r$， L_2）上的已知结果（例如参见 [22], 第216页）：对于 $1 < q \le 2$， $r > 1/q - 1/2$ 以及 $2 < q < \infty$， $r > 0$

$$d_k(\mathbf{W}_q^r, L_2) \asymp \left(\frac{(\log k)^{d-1})}{k} \right)^{r-(1/q-1/2)_+}, \quad (a)_+ := \max(a, 0), \tag{3.4}$$

结合（3.3），对于 $1 < q \le \infty$， $r > \max(1/q,\ 1/2)$，可得以下界

$$\varrho_m(\mathbf{W}_q^r, L_2) \ll \left(\frac{(\log m)^{d-1})}{m} \right)^{r-(1/q-1/2)_+},$$

这给出了序列 ϱ_m（$\mathbf{W}_q^r$， L_2）在 $1 < q < \infty$ 且 $r > \max(1/q,\ 1/2)$ 情况下的正确衰减阶，因为显然， ϱ_m（$\mathbf{W}_q^r$， L_2） $\ge d_m$（$\mathbf{W}_q^r$， L_2）。

上述不等式 (3.3) 只有在其右侧的级数收敛时才能使用。即使相应的级数发散，上述定理 3.2 仍然有用。

4 证明

我们分别讨论上界和下界。首先给出两个结果，它们将采样恢复误差 $\varrho_m(\mathbf{W}_q^K, L_p)$ 与稀疏逼近误差联系起来。

4.1 一些联系

命题 4.1. 设 $1 \le q, p \le \infty$。假设对于每个 $\mathbf{z} \in \Omega^1$，都有$K(\mathbf{z}\ \cdot) \in L_{q'}(\Omega^2)$，$q' := q/(q-1)$。那么我们有

$$\varrho_m(\mathbf{W}_q^K, L_p) \le \sigma_m(K, \mathcal{LK}(p, q'))_{p,q'}. \tag{4.1}$$

证明。 考虑一个线性恢复算子 Ψ_m

$$\Psi_m(f, \xi, \mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{m} f(\xi^j)\psi_j(\mathbf{x}).$$

那么对于 $f \in \mathbf{W}_q^K$，我们有

$$\|f(\mathbf{x}) - \Psi_m(f, \xi, \mathbf{x})\|_p \le \int_{\Omega^2} \left\| K(\cdot, \mathbf{y}) - \sum_{j=1}^{m} K(\xi^j, \mathbf{y})\psi_j(\cdot) \right\|_p |\varphi(\mathbf{y})| d\mu_2.$$

这意味着

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_q^K} \|f(\mathbf{x}) - \Psi_m(f, \xi, \mathbf{x})\|_p \le \left\| K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{j=1}^{m} K(\xi^j, \mathbf{y})\psi_j(\mathbf{x}) \right\|_{p,q'}.$$

现在，我们对点集 $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ 和函数集 $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ 取下确界，从而完成证明。

□

为了表示下面这个简单关系，我们需要引入一个新记号。定义 p_1, p_2

$$\|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{L^*_{p_1,p_2}} := \|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|^*_{p_1,p_2} := \|\|f(\mathbf{x}, \cdot)\|_{p_2}\|_{p_1},$$

这意味着我们首先对$\mathbf{y}$ 取范数，然后再对$\mathbf{x}$取范数。

命题 4.2. 设 $1 \le q \le \infty$。假设对每个$\mathbf{z} \in \Omega^1$，都有$K(\mathbf{z}\ \cdot) \in L_{q'}(\Omega^2)$，$q' := q/(q-1)$。那么我们有

$$\varrho_m(\mathbf{W}_q^K, L_\infty) = \sigma_m(K, \mathcal{LK}(\infty, q'))_{L^*_{\infty,q'}}. \tag{4.2}$$

证明。按照命题 4.1 证明中的相同方法，我们得到对于 $f \in \mathbf{W}_q^K$

$$\|f(\mathbf{x}) - \Psi_m(f, \xi, \mathbf{x})\|_\infty$$

$$= \sup_{\mathbf{x}\in\Omega^1} \left| \int_{\Omega^2} \left(K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{j=1}^m K(\xi^j, \mathbf{y})\psi_j(\mathbf{x}) \right) \varphi(\mathbf{y}) d\mu_2 \right| =: \sup_{\mathbf{x}\in\Omega^1} E(\mathbf{x}, \varphi).$$

因此，

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_q^K} \|f(\mathbf{x}) - \Psi_m(f, \xi, \mathbf{x})\|_\infty = \sup_{f\in\mathbf{W}_q^K} \sup_{\mathbf{x}\in\Omega^1} E(\mathbf{x}, \varphi) = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega^1} \sup_{f\in\mathbf{W}_q^K} E(\mathbf{x}, \varphi)$$

$$= \left\| K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{j=1}^m K(\xi^j, \mathbf{y})\psi_j(\mathbf{x}) \right\|^*_{\infty,q'}.$$

现在我们对点集 $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ 和函数集 $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ 取下确界，证明即告完成。

□

4.2 上界

定理 1.2 中上界的证明。 我们先考虑 L_2 范数下的采样恢复。我们关注的是满足 K 来自某个二元函数类的类 $\mathbf{W}_q^K$。定理 3.2 给出了上界

$$\varrho_{bn}(\mathbf{F}, L_2(\Omega, \mu)) \le B d_n(\mathbf{F}, L_\infty), \tag{4.3}$$

该结论对任意类 $\mathbf{F}$ 都成立。因此，我们需要一个关于柯尔莫哥洛夫宽度上界的结果。以下结果证明见 [16]。

定理 4.1 ([16], 定理 4.2)。设 $d = 1$ 和 $\mathbf{F}_1^\mathbf{r}$ 表示类 $\mathbf{W}_1^\mathbf{r}$ 或 $\mathbf{H}_1^\mathbf{r}$之一。那么，对于 $1 \le q, p \le \infty$ 和 $\mathbf{r} > (1, 1+\max(1/2, 1/q))$，我们有

$$\sup_{K\in\mathbf{F}_1^\mathbf{r}} d_m(\mathbf{W}_q^K)_p \asymp m^{-r_1-r_2+\xi(q,p)}$$

其中 $\xi(q, p)$ 定义于 *(1.2)* 中。

现在，我们将定理 4.1 应用于 $p=\infty$，并由 (4.3) 得到 $\varrho_m(\mathbf{W}_q^K, L_2)$ 的以下上界。

定理 4.2。 设 $d=1$ 和 $\mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}$ 表示类 $\mathbf{W}_1^{\mathbf{r}}$ 或 $\mathbf{H}_1^{\mathbf{r}}$之一。那么对于 $1\le q\le\infty$ 和 $\mathbf{r}>(1,1+\max(1/2,1/q))$，有

$$\sup_{K\in\mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}}\varrho_m(\mathbf{W}_q^K,L_2)\ll m^{-r_1-r_2+\xi(q,\infty)}=m^{-r_1-r_2+(1/q-1/2)_+}.$$

注意，使用不等式 (3.3) 代替定理 3.2，将得到相同的上界。

在使用 L_p 范数测量恢复误差且 $2<p\le\infty$的情况下，我们应用定理 4.1 和定理 3.3，得到以下结果。

定理 4.3。 设 $d=1$ 和 $\mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}$ 表示类 $\mathbf{W}_1^{\mathbf{r}}$ 或 $\mathbf{H}_1^{\mathbf{r}}$之一。那么对于 $1\le q\le\infty$、$2<p\le\infty$和 $\mathbf{r}>(1,1+\max(1/2,1/q))$，有

$$\sup_{K\in\mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}}\varrho_m(\mathbf{W}_q^K,L_p)\ll m^{-r_1-r_2+(1/2-1/p)+(1/q-1/2)_+}.$$

定理 4.2 和定理 4.3 涵盖了 $1\le q\le\infty$ 和 $2\le p\le\infty$的情况。在定理 1.2 讨论的 $1\le q\le 2$ 和 $2\le p\le\infty$情况下，定理 4.2 和定理 4.3 给出了定理 1.2 所需的上界。

定理 1.3 的证明。 该证明与上面对定理 1.2 的证明类似。我们使用以下关于柯尔莫哥洛夫宽度的已知结果。

对于 $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$、$\mathbf{p}=(p_1,p_2)$，$1\le q_1\le p_1\le\infty, 1\le q_2,p_2\le\infty$ 表示

$$\mathbf{r}(\mathbf{q},\mathbf{p}):=\begin{cases}(1/q_1-1/p_1,(1/q_2-1/p_2)_+), & 1\le q_1\le p_1\le 2,\\ (1/q_1,1/q_2), & 2\le q_1\le p_1\le\infty, p_1>2,\\ (1/q_1,\max(1/2,1/q_2)), & 1\le q_1<2<p_1\le\infty.\end{cases}$$

定理 4.4 ([16], 定理 4.1)。 设 $d=1$ 和 $\mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 表示以下类之一：$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$ 或 $\mathbf{H}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$。那么对于 $\mathbf{p}=(p,\infty)$，$1\le q_1\le p\le\infty, 1\le q_2\le\infty$ 以及$\mathbf{r}>\mathbf{r}(\mathbf{q},\mathbf{p})$，有

$$\sup_{K\in\mathbf{F}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}}d_m(\mathbf{W}_1^K)_p\asymp m^{-r_1-r_2+\xi(q_1,p)}$$

其中 $\xi(q,p)$ 定义于 *(1.2)* 中。

现在，我们对 $p=\infty$ 使用定理 4.4，应用定理 3.2、3.3，并得到定理 1.3。

定理 1.6 的证明。我们从定理 1.3 推导出该结论，而定理 1.3 已在上文证明。为此，我们使用命题 4.2 和 $q=1$。由此可得

$$\varrho_m(\mathbf{W}_1^K, L_\infty) = \sigma_m(K, \mathcal{LK}(\infty))_{L^*_{\infty,\infty}} = \sigma_m(K, \mathcal{LK}(\infty))_{L_{\infty,\infty}}. \tag{4.4}$$

现在我们应用定理 1.3 和 $p=\infty$，完成证明。

4.3 下界

定理 1.2 中下界的证明。正如我们在第 1 节中指出的，定理 1.2 中的下界可由定理 1.4 推出。现在我们给出一个独立的证明。记 $r := r_1 + r_2$ 为 $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$。已知（参见[15]），且不难验证，带有 $r>2$ 的 $F_r(x-y)$ 属于 $\mathbf{W}_1^{\mathbf{r}}$ 的闭包（一致范数下）。因此，

$$\sup_{K\in\mathbf{F}_1^{\mathbf{r}}} \varrho_m(\mathbf{W}_q^K, L_p) \geq \varrho_m(\mathbf{W}_q^r, L_p)$$

根据定理 3.1，我们继续

$$\geq m^{-r+(1/q-1/p)_+}.$$

定理 1.4 的证明。本小节需要更一般的伯努利核及与之相关的积分算子（参见 [22],第 1.4 节）。在单变量情形下，对于 $a>0$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$，令

$$F_{a,\alpha}(x) := 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx - \alpha\pi/2)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}(e^{i\alpha\pi/2}e^{-ikx} + e^{-i\alpha\pi/2}e^{ikx}) \tag{4.5}$$

为广义伯努利核。显然，我们有 $F_a(x) = F_{a,\ a}(x)$，其中$F_a(x)$ 定义于 (2.1) 中。定义作用于三角多项式 $\phi(x)$ 上的积分算子为

$$(I^{(a,\alpha)}\phi)(x) := (I_x^{(a,\alpha)}\phi)(x) := (F_{a,\alpha} * \phi)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_{a,\alpha}(x-z)\phi(z)dz. \tag{4.6}$$

算子 $I^{(a,\alpha)}$ 是乘子算子:

$$(I^{(a,\alpha)}\phi)(x) = \hat{\phi}(0) + \sum_{k<0} |k|^{-a} e^{i\alpha\pi/2}\hat{\phi}(k)e^{ikx} + \sum_{k>0} k^{-a}e^{-i\alpha\pi/2}\hat{\phi}(k)e^{ikx}. \quad (4.7)$$

现在定义算子 $I^{(a,\alpha)}$ 的逆算子，该逆算子作用于 $\mathcal{T}(2n)$ 中的三角多项式（为便于今后使用，我们取 $2n$ ）。定义

$$\mathcal{D}_{2n}^{(a,\alpha)}(x) := 1 + 2\sum_{k=1}^{2n} k^a \cos(kx + \alpha\pi/2)$$

以及算子（对于 $g \in \mathcal{T}(2n)$）

$$(D^{(a,\alpha)}g)(x) := (D_x^{(a,\alpha)}g)(x) := (\mathcal{D}_{2n}^{a,\alpha} * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mathcal{D}_{2n}^{a,\alpha}(x-z)g(z)dz. \quad (4.8)$$

算子 $D^{(a,\alpha)}$ 是乘子算子:

$$(D^{(a,\alpha)}g)(x) = \hat{g}(0) + \sum_{k<0} |k|^{a} e^{-i\alpha\pi/2}\hat{g}(k)e^{ikx} + \sum_{k>0} k^{a}e^{i\alpha\pi/2}\hat{g}(k)e^{ikx}. \quad (4.9)$$

容易看出，对于 $g \in \mathcal{T}(2n)$，我们有

$$I^{(a,\alpha)}D^{(a,\alpha)}g = g. \quad (4.10)$$

此外，对于 $g \in \mathcal{T}(2n)$，我们有

$$(D_y^{(b,\beta)}D_x^{(a,\alpha)})g(x-y) = (D^{(a+b,\alpha-\beta)}g)(x-y). \quad (4.11)$$

对于周期 $f \in L_q(\mathbb{T})$，任意 y 均有

$$\|f(\cdot - y)\|_q = \|f\|_q \quad \text{and} \quad \|f(x-y)\|_{(q_1,\infty)} = \|f\|_{q_1}. \quad (4.12)$$

现在考虑核 $K(x, y) := \mathcal{V}_n(x-y)$，其中 $\mathcal{V}_n$是第 2 节中定义的 de la Vall´ée Poussin 核。显然，对于任意 $\phi \in \mathcal{T}(n)$，我们有 $I_K(\phi) = \phi$。给定 $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ 和 $\mathbf{q} = (q_1, \infty)$，我们对核 $K(x, y)$ 进行归一化，使其属于 $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}$。我们有 $\mathcal{V}_n \in \mathcal{T}(2n)$，因此可以应用上述关系式 (4.10)–(4.12)。定义

$$\varphi(x,y) := (D_y^{(r_2,r_2)}D_x^{(r_1,r_1)})K(x,y)$$

并使用 (4.11)

$$= (D^{(r_1+r_2,r_1-r_2)}\mathcal{V}_n)(x-y).$$

利用 (4.12)，我们得到

$$\|\varphi\|_{(q_1,\infty)} = \|D^{(r_1+r_2,r_1-r_2)}\mathcal{V}_n\|_{q_1}.$$

现在我们使用伯恩斯坦不等式（见 [22], 第 20 页）以及已知的 $\|\mathcal{V}_n\|_{q_1}$ 界（见 [22], 第 9 页），继续推导

$$\le Cn^{r_1+r_2+1-1/q_1}.$$

因此，存在一个正常数 c，使得

$$\|cn^{-(r_1+r_2+1-1/q_1)}\varphi\|_{(q_1,\infty)} \le 1. \tag{4.13}$$

由性质 (4.10)，我们得到

$$cn^{-(r_1+r_2+1-1/q_1)}K \in \mathbf{W}^{\mathbf{r}}_{(q_1,\infty)}. \tag{4.14}$$

为了在问题 K 的框架下得到一些下界估计，我们需要有关采样恢复的已知结果。尽管我们只需要其中一个特殊情形，但仍以最一般的形式陈述这些结果。记 $\mathbf{N} = (N_1,\dots,N_d)$，$N_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1,\dots,d$,

$$\Pi(\mathbf{N},d) := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \le N_j, j = 1,\dots,d\}$$

and

$$\mathcal{T}(\mathbf{N},d) := \left\{ f = \sum_{\mathbf{k}\in\Pi(\mathbf{N},d)} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right\}, \quad \vartheta(\mathbf{N}) := \prod_{j=1}^{d}(2N_j+1).$$

本节中，$\Omega = \mathbb{T}^d$ 和 μ 是 $\mathbb{T}^d$上的归一化勒贝格测度。下面的引理 4.1 已在 [25] 中证明。

引理 4.1 ([25])。设 $1 \le q \le p \le \infty$，并令 $\mathcal{T}(\mathbf{N}\ d)_q$ 表示子空间 $\mathcal{T}(\mathbf{N}\ d)$的单位$L_q$球。那么，对于 $m \le \vartheta(\mathbf{N})/2$，有

$$\varrho_m^o(\mathcal{T}(2\mathbf{N},d)_q, L_p) \ge c(d)\vartheta(\mathbf{N})^{1/q-1/p}.$$

结合引理 4.1 和上述论证，我们得到定理 1.4。

5 讨论

本节将介绍一个关于问题 K 与自适应字典稀疏逼近之间关系的已知结果（很可能也是唯一一个补充结果）。具体来说，我们将在此讨论数值积分与非线性逼近之间联系的一些已知结果。读者可在 [22], 第 6.3 节和 [23]中找到这些及其他相关结果。我们先给出必要的定义，并在一般框架下表述数值积分问题。数值积分旨在寻找有效的方法来逼近一个积分

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mu$$

形式为

$$\Lambda_m(f,\xi) := \sum_{j=1}^m \lambda_j f(\xi^j), \quad \xi = (\xi^1,\dots,\xi^m), \quad \xi^j \in \Omega, \quad j = 1,\dots,m. \tag{5.1}$$

显然，我们必须假设 f 可积，并且在点 $\xi^1,\dots,\xi^m$ 处有定义。表达式 (5.1) 称为具有节点 $\xi = (\xi^1,\dots,\xi^m)$ 和权重 $\Lambda := (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ 的求积公式 (ξ, Λ)（若 $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$），或求积公式 (ξ, Λ)（若 $\Omega \subset \mathbb{R}$）。

对于函数类 $\mathbf{W}$，我们通过下式引入求积公式误差 $\Lambda_m(\cdot,\xi)$ 的概念：

$$\Lambda_m(\mathbf{W},\xi) := \sup_{f\in\mathbf{W}} |\int_\Omega f d\mu - \Lambda_m(f,\xi)|. \tag{5.2}$$

为给定的函数类寻找阶意义下最优的求积公式这一问题尤为重要。这意味着我们要寻找一个求积公式 $\Lambda_m^{opt}(\mathbf{W}\ \xi)$，使得

$$\Lambda_m^{opt}(\mathbf{W},\xi) \asymp \inf_{\xi,\Lambda} \Lambda_m(\mathbf{W},\xi) =: \kappa_m(\mathbf{W}). \tag{5.3}$$

现在我们为$\mathbf{W}_q^K$类介绍这一问题的一种设定。令 $1 \leq q \leq \infty$。我们定义一组具有以下性质的核 $\mathcal{K}_q$。令 $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为 $\Omega^1 \times \Omega$ 上的可测函数。我们假设，对于任意$\mathbf{x} \in \Omega^1$，都有 $K(\mathbf{x}\ \cdot) \in L_q(\Omega^2)$；对于任意$\mathbf{y} \in \Omega^2$， $K(\cdot,\mathbf{y})$ 可积

在 Ω^1 上以及 $\int_{\Omega_1} K(\mathbf{x}\ \cdot)d\mathbf{x}\ \in L_q(\Omega^2)$ 上。如上所述，对于 $1 \le q \le \infty$ 和一个核 $K \in \mathcal{K}_{q'}$，$q' := q/(q-1)$，我们定义类

$$\mathbf{W}_q^K := \left\{ f : f = \int_{\Omega^2} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \|\varphi\|_{L_q(\Omega^2)} \le 1 \right\}. \tag{5.4}$$

那么，每个 $f \in \mathbf{W}_q^K$ 在 Ω^1 上都可积（根据富比尼定理），并且在 Ω^1 的每一点都有定义。为方便起见，我们记

$$J_K(\mathbf{y}) := \int_{\Omega^1} K(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}.$$

对于求积公式 $\Lambda_m(\cdot,\ \xi)$，我们有

$$\Lambda_m(\mathbf{W}_q^K,\xi) = \sup_{\|\varphi\|_{L_q(\Omega^2)}\le 1} \Big| \int_{\Omega^2} \big(J_K(\mathbf{y}) - \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu K(\xi^\mu,\mathbf{y})\big)\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}\Big| =$$

$$= \left\| J_K(\cdot) - \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu K(\xi^\mu,\cdot) \right\|_{L_{q'}(\Omega^2)}. \tag{5.5}$$

因此，我们得到以下关系。

命题 5.1。设 $1 \le q \le \infty$。假设 $K \in \mathcal{K}_{q'}$, $q' := q/(q-1)$。那么我们有

$$\kappa_m(\mathbf{W}_q^K) := \inf_{\lambda_1,\dots,\lambda_m;\xi^1,\dots,\xi^m} \Lambda_m(\mathbf{W}_q^K,\xi) = \sigma_m(J_K,\mathcal{D}(K)_{L_{q'}}, \tag{5.6}$$

其中 $\mathcal{D}(K) := \{K(\mathbf{z},\mathbf{y})\}_{\mathbf{z}\in\Omega^1}$。

在命题 5.1 中，我们有一个带自适应字典的稀疏逼近问题。也就是说，我们针对 $\mathcal{D}(K)$ 逼近 J_K。

致谢。本研究得到俄罗斯科学基金会项目资助，项目编号为 23-71-30001，https://rscf.ru/project/23-71-30001/；研究工作在莫斯科国立罗蒙诺索夫大学完成。

参考文献

[1] P.A. Borodin、Yu.A. Skvortsov，关于用交叉的线性组合逼近二元函数，《数学文集》（即将发表）。[2] Ding Dung、V.N. Temlyakov 和 T. Ullrich，《双曲交叉逼近》，巴塞罗那 CRM 数学高级课程，Birkh¨auser，2018；arXiv:1601.03978v2 [math.NA] 2 2016年12月。[3] M. Dolbeault、D. Krieg 和 M. Ullrich， L_2的采样数的尖锐上界，《应用与计算调和分析》**63**（2023），113–134；arXiv:2204.12621v1 [math.NA] 26 2022年4月。[4]P. Enflo，逼近问题的一个反例，《数学学报》，130（1973），309-317。[5]A. Grothendieck，拓扑张量积与核空间，《美国数学会回忆录》，16（1955）。[6] B.S. Kashin、E. Kosov、I. Limonova 和 V.N. Temlyakov，采样离散化及相关问题，《复杂性杂志》**71** （2022），论文编号 101653。[7]D. Krieg 和 M. Ullrich，函数值足以实现 L_2-逼近，《计算数学基础》，doi:10.1007/s10208-020-09481-w；arXiv:1905.02516v4 [math.NA] 19 2020年3月。[8]D. Krieg 和 M. Ullrich，函数值足以实现 L_2-逼近：第二部分，《复杂性杂志》，doi:10.1016/j.jco.2021.101569；arXiv:2011.01779v1 [math.NA] 3 2020年11月。[9] D. Krieg、K. Pozharska、M. Ullrich 和 T. Ullrich，一致范数下的采样投影，《数学分析及其应用杂志》**553(2)** （2025），129873；arXiv:2401.02220 [math.FA] 42024年1月。[10] R.D. Mauldin（编），《苏格兰书》：来自苏格兰咖啡馆的数学问题，附《新苏格兰书》中的精选问题，Birkha¨user，2015。

[11]N. Nagel, M. Sch¨afer, T. Ullrich，关于采样数的新上界，《计算数学基础》，发布日期：2021-04-26，DOI：10.1007/s10208-021-09504-0；arXiv:2010.00327v1 [math.NA] 30 2020年9月。[12] E. Schmidt，论线性与非线性积分方程理论。I, *Math. Annalen*，**63** (1906), 433–476。[13] S.A. Smolyak，某些函数类张量积的求积与插值公式，Dokl. Akad. Nauk SSSR，**148**(1963), 1042–1045；英文译本见《Soviet Math. Dokl.》，**4** (1963)。[14] V.N. Temlyakov，多变量周期函数的近似恢复，《数学文集》**128**(**170**) (1985), 256–268；英文译本见《Math. USSR Sb.》**56**(1987)。[15] V.N. Temlyakov，关于函数类的宽度，Dokl. Akad. Nauk SSSR，**294** (1987), 1069–1072；英文译本见《Soviet Math. Dokl.》**35**(1987), 639–642。[16] V.N. Temlyakov，二元函数最佳双线性逼近的估计及其若干应用，《数学文集》，**134** (1987), 93–107；英文译本见《Math. USSR-Sb》**62** (1989), 95–109。[17] V.N. Temlyakov，有界混合导数函数的逼近，《MIAN论文集》，**178**(1986), 1–112。英文译本见《Steklov数学研究所论文集》，**1**(1989)。[18] V.N. Temlyakov，双线性逼近及相关问题，《Steklov数学研究所论文集》，**194**(1992), 229–248；英文译本见《Steklov数学研究所论文集》，1993年第4期，245–265。[19]V.N. Temlyakov，关于有界混合导数函数的近似恢复，《复杂性杂志》**9** (1993), 41–59。[20] V.N. Temlyakov，周期函数逼近，Nova Science Publishes, Inc.，纽约，1993。[21]V.N. Temlyakov，贪心逼近，剑桥大学出版社，2011。

[22]V. Temlyakov，多元逼近，剑桥大学出版社，2018。[23] V. Temlyakov，数值积分、离散度、离散度量与通用离散化之间的联系，SMAI-JCM《SMAI计算数学杂志》，S5 (2019), 第185–209页。[24] V.N. Temlyakov，关于 L_2中的最优恢复，《复杂性杂志》65(2021), 101545；arXiv:2010.03103v1 [math.NA] 72020年10月。[25]V. Temlyakov，若干函数类在积分范数下的稀疏采样恢复，《数学文集》215(2024), 146–166；arXiv:2401.14670v1 [math.NA] 26 2024年1月。[26] V. Temlyakov，贪心逼近简介，《数学科学进展》80 (2025), 23–104；arXiv:2502.13432v1 [math.NA] 192025年2月。[27] V. Temlyakov，由积分算子定义的函数类的熵数，arXiv:2505.08572v1 [math.NA] 13 2025年5月。[28] J.F. Traub、G.W. Wasilkowski 和 H. Wo´zniakowski，《基于信息的复杂性》，学术出版社，1988。

V.N. Temlyakov, University of South Carolina, USA,
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Russia;
Lomonosov Moscow State University, Russia;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Russia.E-mail:
temlyakovv@gmail.com