arXiv:2601.08562v1 [math.CO] 13 Jan 2026

关于 Maker-Breaker 支配博弈的参数化复杂性 *

Guillaume Bagan[1],Mathieu Hilaire[2],Nacim Oijid[3],和 Aline Parreau[1]

[1]里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂第一大学、里昂国立应用科学学院、LIRIS、UMR5205，法国维勒班 F-69622[2]波尔多大学、波尔多国立综合理工学院、LaBRI 法国国家科学研究中心 UMR 5800，法国塔朗斯 F-33400。[3]于默ᵒ奥大学，瑞典

摘要

自 Duchˆene 于 2020 年将其引入为一种 Maker-Breaker 位置博弈以来，Maker-Breaker 支配博弈已成为研究最广泛的顶点位置博弈之一。在此博弈中，两位玩家——支配者和 Staller——轮流认领给定图 G 中一个未认领的顶点。如果某一时刻支配者所认领的顶点集构成一个支配集，她便获胜；否则，也就是说，如果 Staller 通过认领某个顶点的整个闭邻域使该顶点孤立，Staller 就获胜。

给定一个图 G，先手玩家支配者或 Staller 必定有一套必胜策略。我们关注的是判定哪位玩家拥有此类策略的计算复杂性。已知该问题在有界度二分图和分裂图上是 PSPACE 完全的；在余图、外平面图和块图上可在多项式时间内解决；在区间图上则属于 NP。

本文研究这一博弈的参数化复杂性。首先，我们考虑以双方玩家的步数作为参数。我们证明，对于超图上的 Maker-Breaker 位置博弈这一一般框架，判定 Breaker 能否在 k 步内占领该超图的一个横截集是 W[2]-完全的。相比之下，判定 Maker 能否在 k 步内占领某条超边的所有顶点这一问题，自 2017年以来已知是 W[1]-完全的。随后，我们将这两个困难性结果应用于 Maker-Breaker 支配博弈，证明判定支配者能否在 k 步内支配该图是 W[2]-完全的，而判定 Staller 能否在 k 步内使一个顶点孤立是 W[1]-完全的。接下来，我们为以邻域多样性、模宽、 P_4-稀少性、到簇图的距离以及反馈边数为参数的 Maker-Breaker 支配博弈提供固定参数可处理算法。

1 引言

Maker-Breaker 支配博弈 [15] 在图 G上进行。两名玩家——支配者和 Staller——轮流占领图的顶点。如果在某个时刻，支配者占有的顶点构成一个支配集，她就获胜；否则，也就是说，如果 Staller 成功占有某个顶点及其所有邻点，则 Staller 获胜。该博弈属于*Maker-Breaker* 位置博弈这一类，这类博弈由 Hales 和 Jewett 于 1963年 [23]提出，Erd¨os 和 Selfridge 也于 1973年 [16]独立提出。Maker-Breaker 位置博弈在超图 $\mathcal{H}$上进行。两名玩家 Maker 和 Breaker 轮流占领 $\mathcal{H}$的顶点。若在某个时刻，Maker 占有了 $\mathcal{H}$中某条超边的所有顶点，则 Maker 获胜；否则 Breaker 获胜。若要将图 G 上的 Maker-Breaker 支配博弈建模为 $\mathcal{H}$上的位置博弈，则 $\mathcal{H}$ 的顶点就是 G 的顶点，而超边可以是 G 的支配集（此时支配者扮演 Maker 的角色），也可以是 G 的闭邻域（此时支配者扮演 Breaker 的角色）。

*本研究得到法国国家研究署项目 P-GASE（ANR-21-CE48-0001-01）和瑞典 Kempe基金会 JCSMK24-515 号资助。

作为两人参与、有限、信息完美、无随机因素且无平局的博弈，在给定的 Maker-Breaker 位置博弈中，其中一名玩家必有必胜策略。因此，可以考虑以下判定问题 MB Dom Game：给定一个图 G以及先手玩家（支配者或 Staller），谁在 G上进行的 Maker-Breaker 支配博弈中拥有必胜策略？已有研究证明，即使将范围限制为二分图或弦图，该问题仍为 PSPACE 完全；这一结论在最初介绍该博弈的论文 [15], 中得到证明，之后又推广到有界度图 [32]。在正面结果方面，已有研究证明该问题在森林和余图上可于多项式时间内解决 [15]，后来又将这一结果扩展到块图、外平面图、正则图和单位区间图 [4]。对于区间图，已证明 MB Dom Game 属于 NP，但 MB Dom Game 是否实际上可在多项式时间内解决，仍是一个悬而未决的问题 [4]。

本文研究 MB Dom Game 的参数化复杂性：哪些参数会使问题变难或变易？在位置博弈中，最自然的参数是步数。相应的判定问题是：给定玩家能否在至多 k 步内获胜？对于 Maker-Breaker 位置博弈，Bonnet 等人 [5] 利用一阶逻辑的一个新片段证明，判定 Maker 能否在至多 k 步内获胜是 W[1] 完全问题。对于一些特定博弈，也已有相关结果： Generalized Hex 也是 W[1] 完全问题 [5]，但 Hex、short k-connect 和星形游戏在以 Maker 的步数为参数时是固定参数可处理的 [5, 34, 14] 。似乎尚无研究以 Breaker 的步数为参数的情形，也就是说，Breaker 是否必须在有限步数内于每条超边中占据一个顶点。仅考虑结构参数时，已有研究考察超边的大小。对于超边大小为 3 的 Maker-Breaker 位置博弈，判定胜者可在多项式时间内完成 [19]；但当超边大小为 4 [18] 时，问题已经是 PSPACE 完全问题，因此不应期待关于此参数的固定参数可处理结果。对于特定的支配博弈，已知有适用于 k-嵌套区间图的 XP 算法 [4]。本文考虑算法图论中用于固定参数可处理算法的经典图参数，即模块宽度 [30, 24]、 P_4-稀疏性 [2, 7], 、到簇图的距离 [20], 和反馈边数 [29]

1.1 结果。

本文将 Staller 视为位置博弈中的 Maker 玩家，证明了以 Staller 的步数为参数时， MB Dom Game 是 W[1]-完全的。然而，以 Dominator 获胜所需的步数为参数时，该问题则是 W[2]-完全的。为证明这一结果，我们扩展了 Bonnet 等人给出的逻辑片段 [5]。事实上，我们证明了一个更强的结果：判定 Breaker 能否在 k 步内赢得 Maker-Breaker 位置博弈是 W[2]-完全的。与其对应问题（以 Maker 的步数为参数时，该问题是 W[1]-完全的）相比，这一结果令人意外。这可以用以下事实解释：检查 Maker 是否获胜属于局部性质（Maker 占据了某条超边），而检查 Breaker 是否获胜则属于全局性质（每条超边都包含一个属于 Breaker 的顶点）。

接下来，我们考察结构图参数。自然可以考虑支配集的大小，但这个参数并不相关，因为即使对于支配集大小为 1 的图，计算其结果也已经是 PSPACE 完全的。由于在森林和余图这两类图中，MB Dom Game 是多项式的，我们考虑能够推广这两类图的参数。特别是，余图可以很容易地求解，因为该博弈对于并运算和联运算的表现良好。我们通过证明一个模可以被至多含三个顶点的图替代，来强调这一性质。由此可推得，当问题以图的邻域多样性为参数时存在一个线性核，并且存在一个以模块宽度为参数的固定参数可处理算法。余图的另一个性质是它们不包含 P_4 作为诱导子图。通过考虑图 [3] 的 P_4-少性，可以推广这一性质。我们利用该参数得到一个固定参数可处理算法。随后，我们考察到簇图的距离，即删除多少个顶点才能得到若干团的并。如果该参数相对于图的大小较小，就会出现许多孪生顶点，这使我们能够将图约化为一个核，从而得到该参数对应的固定参数可处理算法。最后，由于森林可以在线性时间内求解，我们考虑反馈边集的最小大小。当该参数较小时，图中会出现较长的诱导路径。我们证明，可以将诱导路径缩短至长度至多为 7 的路径，而不改变结果；由此再次得到一个核，以及一个针对反馈边数的固定参数可处理算法。

1.2 论文概要。

本文结构如下。我们先在第2节给出形式化定义和预备知识。第3节聚焦于步数。在第4节中，我们考察模块。在给出一个用于替换图中模块且不改变结果的一般引理后，我们给出针对邻域多样性、模块宽度和 P_4-少性的固定参数可处理算法。第5节和第6节分别讨论“到簇图的距离”和“反馈边数”这两个参数。图1中的示意图总结了我们关于结构参数的结果。

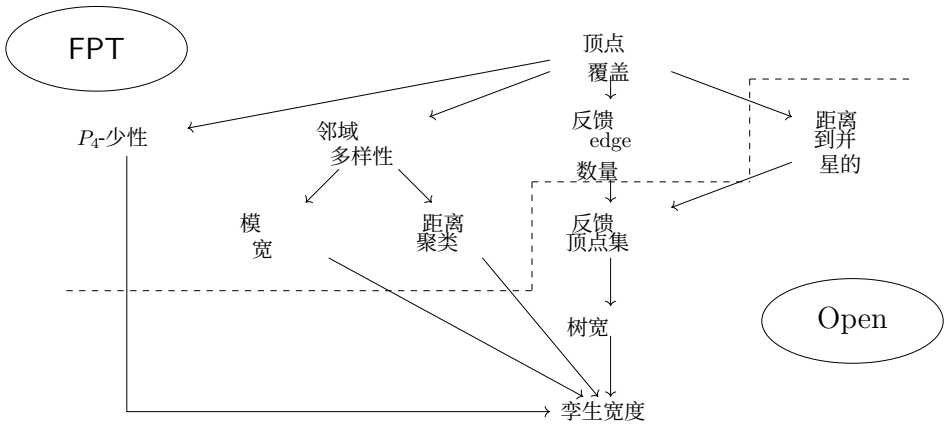


图1：结构参数方面结果的概述。若某个参数对于一类图有界，则它对于图示中该类的后代也有界。

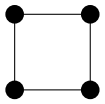
2 预备知识

本节首先给出本文所用图和博弈的形式化定义。随后，我们回顾有关 Maker-Breaker 支配博弈的一些有用结果，以及若干证明中需要用到的技术工具。

2.1 图

设 $G=(V,E)$ 是一个顶点集为 $V=V(G)$、边集为 $E=E(G)$ 的简单无向图。若$x\in V$ 是一个顶点，我们用 $N(x)$ 表示 x的开邻域，用 $N[x]$ 表示其闭邻域。形式化地说，有 $N(x)=\{y\in V|xy\in E\}$和 $N[x]=\{x\}\cup N(x)$。若 S是一个顶点集，我们用$N(S)$（分别用 $N[S]$）表示 S中各顶点的邻域之并，即有 $N(S)=\bigcup_{v\in S}N(v)$（分别有 $N[S]=\bigcup_{v\in S}N[v]$）。叶顶点是度为 1 的顶点。支撑顶点是与叶顶点相邻的顶点。设 S是 G的一个顶点子集。由 S诱导的 G 的子图记为 $G[S]$，其顶点集为 S，边集为 G 中连接 S中两个顶点的所有边，即集合 $E\cap(S\times S)$。若顶点子集 S 中的每个顶点都属于 G或与 S中的某个顶点相邻，则称 S 为支配集。换言之，若有 $N[S]=V$。 G 的最小支配集的大小记为 $\gamma(G)$。

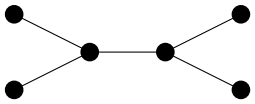
G的模 是满足以下条件的顶点子集 M：对于任意 $x,y\in M$，都有 $N[x]\setminus M=N[y]\setminus M$。由于模中所有顶点在 M之外具有相同的邻域，因此，如果顶点 $x\in V\setminus M$与 M中的所有顶点都相邻，我们就称 $x\in V\setminus M$与 M相邻。如果 $u,v\in V$是两个满足 $\{u,v\}$为模的顶点，我们称 u 和 v 具有相同类型，或称它们是孪生顶点。如果 M 是 G 的一个模，而 H 是一个图，那么，如果 G' 是通过从 G 中删除 M的顶点、添加 H的一个副本，并在 H 的顶点与和 M相邻的 $G\setminus M$ 的顶点之间添加所有边而得到的，我们就称 G' 是通过将 M 替换为 H 得到的。



(a) 一个具有 G $o(G)=\mathcal{D}$ 的图



(b) 一个具有 G $o(G)=\mathcal{N}$ 的图



(c) 一个具有 G $o(G)=\mathcal{S}$ 的图

图2： MB Dom Game中的不同结果

设 G 和 H 是两个图。 G 和 H的并 记作 $G\cup H$，是通过取 G 和 H的不相交副本得到的图。 G 和 H 的联接 记作 $G\bowtie H$，是通过分别取 G 和 H 的一个副本，并在它们之间添加所有边而得到的图。如果一个图可以仅通过并运算和联运算从孤立顶点构造而成，则称其为余图 。

我们用 K_n 表示具有 n 个顶点的完全图，用 P_n 表示具有 n 个顶点的路径。

2.2 博弈

设 $\mathcal{H}=(\mathcal{X},\ \mathcal{F})$ 是一个超图，其顶点集为 $\mathcal{X}=\mathcal{X}(\mathcal{H})$，超边集为 $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathcal{H})$。$\mathcal{H}$ 的横截集是与其每条超边都相交的顶点子集。 $\mathcal{H}$上的*Maker-Breaker* 位置博弈由 Maker 和 Breaker 两位玩家进行。Maker 和 Breaker 轮流认领 $\mathcal{X}$ 中尚未被认领的顶点。如果 Maker 认领了某条超边 $f\in\mathcal{F}$ 中的所有顶点，她便获胜。否则，也就是说，如果 Breaker 成功认领了 $\mathcal{H}$ 的一个横截集，则 Breaker 获胜。

给定一个图 $G=(V,\ E)$， G 上的*Maker-Breaker* 支配博弈由 Dominator 和 Staller 两位玩家进行。Dominator 和 Staller 轮流认领 V 中尚未被认领的顶点。如果 Dominator 认领了 G 的一个支配集中的所有顶点，她便获胜。否则，Staller 获胜。在图 G 上进行的 Maker-Breaker 支配博弈，可以视为使用两个不同超图进行的 Maker-Breaker 位置博弈。一种做法是考虑超图 $\mathcal{H}_{\mathrm{dom}}(G)$，其顶点集为 V，超边是 G 的所有最小支配集： $\mathcal{F}(\mathcal{H}_{\mathrm{dom}}(G))=\{S\subset V|S$ 是 $G\}$ 的一个最小支配集。此时，Dominator 扮演 Maker，Staller 扮演 Breaker。另一种做法是让 Staller 扮演 Maker。事实上，当且仅当 Staller 成功认领了某个顶点及其所有邻点时，她才获胜。对应的超图 $\mathcal{H}_N(G)$ 的顶点集同样为 V，但其超边是所有闭邻域：$\mathcal{F}(\mathcal{H}_N(G))=\{N[x]|x\in V\}$。值得注意的是，相较于顶点数，一个图的最小支配集数量可能呈指数级增长，因此 $\mathcal{H}_{\mathrm{dom}}(G)$ 的规模可能是指数级的，而 $\mathcal{H}_N(G)$ 的超边数始终至多为 $|V|$ 。

设 D和 S是顶点的不相交子集。局面 $(D,\ S)$ 是在 G 进行的 Maker-Breaker 支配博弈的状态，其中支配者已占据顶点 D ，而 Staller 已占据顶点 S。

作为一种双人完全信息有限博弈，在 Maker-Breaker 位置博弈的给定局面中，玩家拥有必胜策略：无论对手采取何种步数，他都能获胜。此外，在 Maker-Breaker 位置博弈中，后手玩家拥有必胜策略意味着同一玩家先手时也有一种策略（证明见 [25]）。因此，对于 Maker-Breaker 支配博弈的任意局面 $(G,\ D,\ S)$，都有三种可能的结果：支配者可以确保先手或后手获胜（结果 $\mathcal{D}$）；或者 Staller 可以确保先手或后手获胜（结果 $\mathcal{S}$）；或者下一位行动的玩家可以确保获胜（结果 $\mathcal{N}$）。局面的结果记作 $o(G,\ D,\ S)$。如果该局面是初始局面，即 $D=S=\emptyset$，我们就将结果简记为 $o(G)$。图2给出了一些示例。

2.3 计算博弈结果

与 Maker-Breaker 支配博弈相关的判定问题如下。

问题2.1 (MB Dom Game)。输入：一个图 G，以及先手玩家（支配者或 *Staller*）。问题：在所考虑的玩家先手的情况下，于 G 上进行的 *Maker-Breaker* 支配博弈的结果是什么？

MB Dom Game 已被证明即使对于受限的图类也是 PSPACE 完全的 :

定理 2.2 ([15, 32])。 MB Dom Game 是PSPACE-完全的，即使限制在二分图、分裂图或有界度图中也成立。

本文使用多个参数研究该问题的参数化复杂性。关于参数化复杂性的定义和一般框架，请读者参阅相关标准著作（例如 [11, 22]）。注意，仅凭关于 G 的支配集大小的假设，并不足以确定一个 Maker-Breaker 支配博弈实例的结果。事实上，即使 G具有大小为 1 的支配集，判断结果是 $\mathcal{N}$ 还是 $\mathcal{D}$ 仍然很困难。不可能是 $\mathcal{S}$，因为当支配者先手时，她可以一步获胜。

命题 2.3。 MB Dom Game 是PSPACE-完全的，即使限制在满足 $\gamma(G) = 1$的 G 图中也成立。

证明。 我们将一般图中的 MB Dom Game 归约到我们的问题。设 G 为一个图。令 G' 为从 G 添加一个全邻顶点 v_0 到 G所得的图，因此 $\gamma(G') = 1$。于是，在 G' 中由 Staller 先手时，Staller 获胜，当且仅当在 G中由支配者先手时，支配者获胜。事实上，如果 Staller 在 G'中先手，那么他必须首先占据 v_0，否则支配者将占据该顶点，并在她的第一步中获胜。因此，在这一步之后，博弈在 G' 上进行，其过程与支配者在 G 中先手时相同。注意， v_0 将在支配者的第一步中被支配。 □

2.4 并与联接

在 [15]，中证明了， MB Dom Game 可以在线性时间内计算余图上的结果。该证明依赖于以下引理：根据两个图各自的结果，计算它们的不交并或联接的结果。

引理 2.4 ([15])。 设 G 和 H 是两个图。

- 如果 $o(G) = \mathcal{S}$ 或 $o(H) = \mathcal{S}$，那么 $o(G \cup H) = \mathcal{S}$。
- 如果 $o(G) = o(H) = \mathcal{N}$，那么 $o(G \cup H) = \mathcal{S}$。
- 如果 $o(G) = o(H) = \mathcal{D}$，那么 $o(G \cup H) = \mathcal{D}$。
- 否则， $o(G \cup H) = \mathcal{N}$。

引理 2.5 ([15])。 设 G 和 H 是两个图。

- 如果 $G = K_1$ 和 $o(H) = \mathcal{S}$ （或 $H = K_1$ 和 $o(G) = \mathcal{S}$），那么 $o(G \bowtie H) = \mathcal{N}$。
- 否则， $o(G \bowtie H) = \mathcal{D}$。

2.5 简化局面

位置博弈的一个重要性质是，将一个顶点交给某位玩家只会对他有利。由此得到以下观察:

观察2.6。 设 $P = (G, D, S)$ 是一个局面，且 $v \in V(G) \setminus D \cup S$ 是 P的一个未认领顶点。如果支配者在(G, D, S)中获胜，那么她在$(G, D \cup \{v\}, S)$中也获胜。同样，如果 *Staller* 在(G, D, S)中获胜，那么他在$(G, D, S \cup \{v\})$中也获胜。

为简化某些实例，可能需要移除局面中的顶点或边，同时保持获胜集合不变。以下观察对此进行了形式化表述。

观察 2.7. 设 $P = (G, D, S)$ 和 $P' = (G', D', S')$ 为两个局面，且未占有顶点集合之间存在一个双射f：$V(G) \setminus D \cup S \to V(G') \setminus D' \cup S'$。假设在 P和 P' 中，依照双射 f构成支配集所需的顶点相同，即，$X \cup D$ 是 G的支配集，当且仅当 $f(X) \cup D'$ 是 G'的支配集。那么 P和 P' 的结果相同。

利用观察 2.7，可以移除已被支配者支配的、由 Staller 占据的顶点。

引理 2.8。 设 (G, D, S) 是一个局面。设 $v \in S$ 在 D中有一个邻点。则(G, D, S) 和$(G\setminus\{v\}, D, S\setminus\{v\})$ 具有相同的结果。

证明。 设 (G, D, S) 是一个局面。设 $X \subset G \setminus (D \cup S)$ 是一个顶点集合。 $D \cup X$ 是 G 的支配集，当且仅当 $X \cup D$ 是 $G \setminus \{v\}$ 的支配集。因此，(G, D, S) 和 $(G \setminus \{v\}, D, S \setminus \{v\})$ 的获胜集合相同，所以根据观察 2.7，它们具有相同的结果。 □

不能以相同的方式移除由支配者占据的顶点，因为它们可能被用于支配当前未被占据的其他顶点。然而，下一个引理通过拆分 支配者已占据的某些顶点，给出了一种转换实例的方法。参见图 3 的示意图。

引理 2.9。 设(G, D, S) 是一个局面。设 $v \in D$ 的度为 d，v_1、……、v_d 是 v的邻点。设 G' 是由 $G \setminus \{v\}$ 添加 d 个新顶点 u_1、……、u_d（分别是v_1、……、v_d的私有邻点）后得到的图。那么(G, D, S) 与$(G',$ $D \cup \{u_1, \ldots, u_d\} \setminus \{v\}, S)$ 的结果相同。若此情况成立，我们称为对顶点 v进行拆分 。

证明。 设(G, D, S)是一个局面。设 $X \subset G \setminus （D \cup S）$ 是一个顶点集合。 $D \cup X$ 是 G的支配集，当且仅当 $X \cup G \cup \{u_1, \ldots, u_d\} \setminus \{v\}$ 是 G'的支配集。因此，(G, D, S)和$(G', D \cup \{u_1, \ldots, u_d\} \setminus \{v\}, S)$的获胜集合相同，所以根据观察 2.7，它们的结果相同。 □

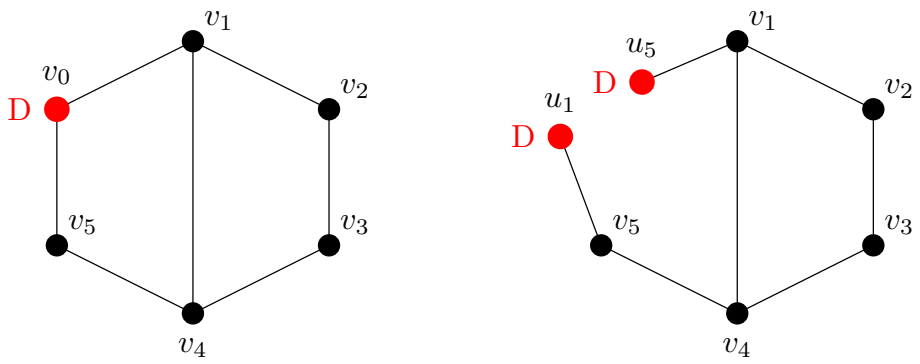


图 3：对顶点 v_0 应用引理 2.9 进行拆分。这两个图的结果相同。

2.6 一些基本策略

叶节点或支撑顶点在 Maker-Breaker 支配博弈中扮演着特殊角色。它们可以用来迫使对方走棋。下面的引理表明，Staller 总是乐于选择支撑顶点，从而迫使支配者回应并占据与之相邻的叶顶点。

引理 2.10 ([15, 命题 20])。 设(G, D, S) 是一个局面。设 v_0 是 G 的一个未被认领的叶顶点，v_1 是它的支撑顶点。若轮到 *Staller* 行动且 v_1 未被认领，则认领 v_1 是最优步。特别地，局面(G, D, S) 和$(G \setminus \{v_0, v_1\}, D, S)$ 的结果相同。

当顶点的闭邻域彼此包含时，这个引理可以推广。在这种情况下，双方玩家都倾向于认领邻域最大的顶点。该结果在 [4], 中仅针对支配者给出，但同样的证明也适用于 Staller。

引理 2.11 ([4, 引理 2.6])。 设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 (G, D, S) 是 G 上的一个局面。设 $u, v \in V \setminus (D \cup S)$ 是 G 中两个满足 $N[u] \subset N[v]$ 的未占有顶点。对于任何一个 u 和 v 均未占有的博弈局面，如果某位玩家在走 u 时有必胜策略，那么他在走 v 时也有必胜策略。

一种常用的基本策略是配对策略。这种策略已用于求解树上的 MB Dom Game [15] ，并证明其在区间图上属于 NP [4]。配对策略包括选取互不相交的顶点配对；当对手占有某一配对中的一个顶点时，就占有该配对中的另一个顶点。如此一来，便能保证从每一对中至少占有一个顶点。

最后，下一个引理也称为“超级引理”，它指出，如果两个未占有顶点在给定局面中的表现相同，那么可以假设每位玩家恰好占有这两个顶点中的一个，并且可以立即占有它们。特别是，如果两个顶点具有相同的闭邻域，那么在初始局面中就会出现这种情况。Oijid 的博士论文 [31], 中以一般形式陈述了这一引理，适用于位置博弈；此处则针对 Maker-Breaker 支配博弈陈述。

引理 2.12 ([31, 超级引理])。 设(G, D, S) 是 *Maker-Breaker* 支配博弈的一个局面。设$V' = V(G) \setminus (D \cup S)$ 为未占有顶点的集合。设 $u, v \in V'$ 是 G 的两个顶点，使得对于任意集合 $X \subset V' \setminus \{u, v\}$， $X \cup D \cup \{u\}$ 是 G 的支配集，当且仅当 $X \cup D \cup \{v\}$ 是 G的支配集。

那么(G, D, S) 和$(G, D \cup \{u\}, S \cup \{v\})$ 的结果相同。

3 步数

本节将玩家获胜所需的步数作为参数进行考察。我们将考虑更一般的 Maker-Breaker 位置博弈背景。将步数作为参数会改变所研究问题的性质。由于经过 k 步后，可能还没有玩家获胜，因此我们将考虑以下问题。

问题 3.1 ($\text{Short}_{\text{Dominator}}$ MB Dom Game)。输入： *A graph G, the first p layer (D*支配者或 S较高者），以及一个整数 k。参数： k。问题：支配者是否 能采用一种策略，在至多 k 步内占据一个包含 G 个顶点的支配集?

问题 3.2 ($\text{Short}_{\text{Staller}}$ MB Dom Game)。输入：一个图 G、先手玩家（支配者或 *Staller*）以及一个整数 k。参数： k。

问题：*Staller* 是否有一种策略，能在至多 k 步内占据某个顶点在 G 中的邻域?

问题 3.3 ($\text{Short}_{\text{Maker}}$ MB Pos Game)。输入：一个超图 $\mathcal{H}$、先手玩家（*Maker* 或 *Breaker*）以及一个整数 k。参数： k。

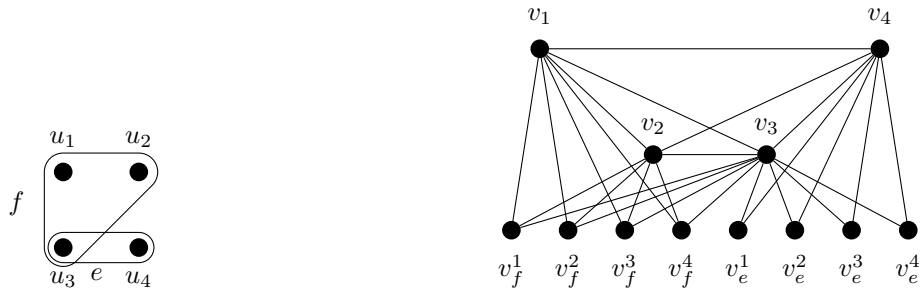
问题：*Maker* 是否有一种策略，能在至多 k 步内填满 $\mathcal{H}$ 的一条超边? ?

问题 3.4 ($\text{Short}_{\text{Breaker}}$ MB Pos Game)。输入：一个超图 $\mathcal{H}$、先手玩家（*Maker* 或 *Breaker*）以及一个整数 k。参数： k。问题：*Breaker* 是否有策略能在至多 k 步内占领 $\mathcal{H}$ 的一个横截集?

在这四个问题中，唯一得到研究的是 $\text{Short}_{\text{Maker}}$ MB Pos Game，Bonnet 等人已证明它是 W[1]-完全问题等。 [5]。

定理 3.5 (Bonnet等人 [5])。 $\text{Short}_{\text{Maker}}$ MB Pos Game 是 W*[1]*-完全问题。

本节其余部分将给出另外三个问题的复杂度。



(a) 一个超图 $\mathcal{H}$　　(b) 所得到的图。

图4：定理 3.6 中的归约，其中 $k = 2$

3.1 SHORT$_{\text{STALLER}}$ MB DOM GAME是 W[1]-完全的

由于 $\mathcal{H}_N(G)$（即 G 的闭邻域所构成的超图）相对于 G 的规模具有多项式大小， SHORT$_{\text{MAKER}}$ MB POS GAME 属于 W[1] 这一事实意味着 SHORT$_{\text{STALLER}}$ MB DOM GAME 属于 W[1]。我们将证明它甚至是 W[1]- 完全的。

定理 3.6. SHORT$_{\text{STALLER}}$ MB DOM GAME是W*[1]*-完全的。

证明。 为证明其属于 W[1], , 我们将 Maker-Breaker 支配博弈视为 Maker-Breaker 位置博弈，其中 Staller 扮演 Maker 的角色。设 G 是一个图。该位置博弈的超图即为闭邻域构成的超图， $\mathcal{H}_N(G)$，它有 $|V(G)|$ 个顶点和至多 $|V(G)|$ 条超边。因此，它有多项式数量的顶点和超边。由于 SHORT$_{\text{MAKER}}$ MB POS GAME 属于 W[1], , 判定 Staller 能否在 k 步内获胜也属于 W[1]。

现在，我们通过从 SHORT$_{\text{MAKER}}$ MB POS GAME 进行归约来证明完全性，所用思路与 [15] 中的类似，以证明 MB DOM GAME 是 PSPACE 完全的。

设 $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 为一个超图，且 k 为一个整数。不失一般性，假设 $\mathcal{H}$ 中的每个顶点都至少属于一条超边。我们按如下方式构造图 $G_{\mathcal{H}} = (V, E)$。

- 对于 $\mathcal{X}$ 中的每个顶点 u_i，我们在 V 中添加一个顶点 v_i。
- 对于 $\mathcal{F}$ 中的每条超边 f，我们在 V 中添加 $k+2$ 个新顶点 v_f^1、.....、v_f^{k+2}。
- 对于每一对顶点 u_i, $u_j \in \mathcal{X}$，我们在 E 中添加一条连接 v_i 和 v_j 的边。
- 如果顶点 u_i 属于 $\mathcal{X}$，且属于 $\mathcal{F}$ 中的超边 f，我们就添加这些边 $v_i v_f^1$) ....., $v_i v_f^{k+2}$ 到 E。

该归约如图4所示。

我们证明，Staller 先手（分别为后手）时，能够在 $k+1$ 步内使 $G_{\mathcal{H}}$ 中的一个顶点孤立，当且仅当 Maker 先手（分别为后手）时，能够在 k 步内赢得 $\mathcal{H}$ 上的游戏。

假设 Maker 先手（分别为后手）时，在 $\mathcal{H}$ 上经过 k 步采用必胜策略 $\mathcal{S}$。我们为 Staller 构造如下必胜策略：在 $G_{\mathcal{H}}$ 上先手（分别为后手）时经过 $k+1$ 步：

- 如果 Maker 在 $\mathcal{H}$ 中先手并占据 u_i，Staller 首先占据顶点 v_i。
- 如果支配者占据一个顶点 v_i，Staller 就占据顶点 v_j 作为回应，使得 u_j 是在 Breaker 占据 $\mathcal{S}$ 中的顶点 u_i 后 Maker 的应对。
- 如果支配者在 $\mathcal{S}$ 中根据此步棋认领一个顶点 v_f^i，那么 Staller 会认为 Breaker 已认领一个任意的未认领顶点 u_j，并为 $i \in \{1, ..., k+2\}$ 认领一个顶点 v_j。

- 当 Staller 已认领 k 个顶点时，由于 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的必胜策略，因此存在一个已被 Maker 完全认领的超边 $f \in \mathcal{F}$。Staller 在其第（$k+1$）th 步认领一个顶点 v_f^i，该顶点具有 $1 \leq i \leq k+2$。注意，支配者至多认领了其中的 $k+1$ 个（如果 Staller 在 $\mathcal{H}$ 上先行，则为 k 个），因此其中有一个顶点尚未被认领。

按照构造，采用这一策略的 Staller 已认领一个顶点 v_f^i 及其所有邻点，因此在 $k+1$ 步内获胜。

现在假设 Breaker 有一个策略 $\mathcal{S}$，能在 $\mathcal{H}$ 中阻止 Maker 在 k步内填满一条超边。我们为 Dominator 提供一种策略，使其在 $G_{\mathcal{H}}$ 中阻止 Staller 在 $k+1$ 步内使一个顶点孤立，具体如下：

- 如果 Breaker 在 $\mathcal{H}$中先行，Dominator 首先认领顶点 v_i，使得 u_i 是在 $\mathcal{S}$中第一个被认领的顶点。

- 如果 Staller 认领一个顶点 v_i，Breaker 就回应，认领顶点 v_j，使得 u_j 是 Dominator 对 Staller 在 $\mathcal{S}$ 中认领的顶点 u_i 所作出的回应。
- 如果 Staller 为 $i \in \{1, ..., k+2\}$认领一个顶点 v_f^i，Dominator 就从图中任意认领一个顶点，并将这一步视为 Maker 尚未行动。
- 当 Staller 认领她的第 k^{th} 个顶点时，如果她尚未认领任何顶点 v_f^i，Dominator 就认领图中任意一个未认领顶点。如果她至少已认领一个顶点 v_f^i，她就认领与顶点 u_j 对应的顶点 v_j；按照 $\mathcal{S}$，该顶点本应被认领，因为在 $\mathcal{S}$中忽略了在 v_f^i 中的这一步。

按照这一策略，如果 Staller 在他的前 k 步中没有选择顶点 v_f^i，他就不可能占领对应于 $\mathcal{H}$ 中某条超边的所有顶点。因此，他无法在第 $(k+1)^{th}$ 步使某个顶点孤立。由于顶点 v_i 各自至少有 $k+2$ 个邻居（我们假设每个顶点都属于至少一条超边），即使他的最后一步填满了一条超边，他也没有占领任何顶点 v_f^i，因此无法使其中任何一个顶点孤立。如果 Staller 至少占领了一个顶点 v_f^i，她至多占领了 k 个顶点 v_j。由于支配者的应对遵循 $\mathcal{S}$，Staller 不可能占领某个顶点 v_f^i 的所有邻居。在这两种情况下，Staller 在前 $k+1$ 步中都没有使任何顶点孤立，支配者获胜。该归约显然是多项式的。

□

3.2 $\textsc{Short}_{\textsc{Breaker}}$ MB Pos Game 属于W[2]

要考虑支配者获胜所需的步数，情况就复杂得多。与 $\mathcal{H}_N(G)$ 不同，支配集的超图 $\mathcal{H}_{\mathrm{dom}}(G)$ 通常并非多项式规模。具体而言，关于限制 Maker 步数时 Maker-Breaker 位置博弈的已知结果无法应用。我们需要考虑限制 Breaker 的步数。

我们在本小节中证明问题 $\textsc{Short}_{\textsc{Breaker}}$ MB Pos Game属于 W[2]。证明依赖于 Bonnet等人 [5]提出的一个思路。简而言之，我们首先引入一类公式 $\forall^{\neq}$-$\Sigma_{2,\,1}$，其中所有 $\forall$-量词的变量（除最后一个量词外）都只出现在不等式中；这类似于 [5], 中的公式类 $\forall^{\neq}$-FO，其中所有 $\forall$-量词的变量都只出现在不等式中。然后，我们给出一个从 $\forall^{\neq}$-$\Sigma_{2,\,1}$ 中的公式到 $\Sigma_{2,\,1}$中的公式的固定参数可处理归约。现在我们简要回顾数理逻辑中的一些标准定义。

一个词汇表 τ 是由关系符号组成的集合，每个关系符号都有指定的元数。一个 τ-结构 $\mathcal{A} = (A, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \tau})$由一个集合 A 以及对其中每个 k元关系符号 R（来自 τ）的解释组成，该解释是 A上的一个 k元关系；也就是说，是一个集合 $P^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$。词汇表 τ 上的原子公式的形式为 $x_1 = x_2$或 $R(x_1, \ldots, x_k)$，其中 $R \in \tau$和 $x_1, \ldots, x_k$是变量。

Σ_1 是这样一类一阶公式：只能使用 $\exists$量词，并且所有量词都位于公式开头，即形如 $\exists x_1 \ldots \exists x_k\, \psi$ 的公式，其中 ψ是一个无量词公式。类Σ_2 是这样一类一阶公式：由一段连续的 $\exists$量词和一段

连续的 ∀量词构成，即形如 $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_\ell \ \psi$ 的公式，其中 ψ 是一个无量词公式。此外，对于所有 $u \geq 1$，我们将$\Sigma_{2,\ u}$ 定义为满足以下条件的 Σ_2 公式类：最后一段 ∀量词的长度至多为 u。对于给定的公式类 Φ，模型检测的参数化变体可以表述为以下问题。

问题 3.7 （MC（Φ））。
输入：一个有限结构 $\mathcal{A}$ 和一个公式 $\phi \in \Phi$。参数：$|\phi|$。问题：ϕ是否可满足？

这个参数化问题有助于研究参数化复杂性类，因为例如，$MC(\Sigma_1)$ 是 W[1]-完全的，而 MC(FO) 是 AW[*]-完全的 [17]。此外，在 [5],中，Bonnet 等人 通过扩充 Σ_1引入了一类新的公式，允许添加任意数量的 ∀-量词，其对应的全称变量只出现在不等式中。随后，他们利用这类新公式（记作 $\forall^{\neq}$-Σ_1），通过归约到 $MC(\Sigma_1)$，证明了 Short$_{\text{Maker}}$ MB Pos Game 是 W[1]-完全的。形式上，$\forall^{\neq}$-Σ_1 是所有如下形式的一阶公式组成的类

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \ \psi$$

其中 $Q_i \in \{\exists, \forall\}$，$\psi$ 是一个公式，每个 ∀-量化变量 x_i 只出现在不等式中：$x_i \neq x_j$ 不能被否定？。

我们以类似的方式扩展 Σ_2 ，以证明 Short$_{\text{Breaker}}$ MB Pos Game属于 W[2]。令$\forall^{\neq}$-Σ_2 表示形如以下形式的公式类

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m \ \psi$$

其中，ψ 是一个无量词公式，$Q_i \in \{\exists, \forall\}$ 以及每个 ∀-量化变量 x_i 只出现在不等式中：$x_i \neq x_j$，且这些不等式不能被否定。注意，我们**不**允许形如 $x_i \neq y_j$的不等式，其中 y_j 由一个 ∀量化。最后，令 $\forall^{\neq}$-$\Sigma_{2,\ u}$ 表示Σ_2的公式类，u 其中最后一块 ∀-量词的长度至多为 u。

Bonnet等人 [5] 通过将新公式类中的公式使用固定参数可处理归约归约为Σ_1 中的公式，证明了 $MC(\forall^{\neq}$-$\Sigma_1)$属于 W[1] 。类似地，我们将 $\forall^{\neq}$-Σ_2中的公式，u 归约为Σ_2中的公式，u 从而证明$MC(\forall^{\neq}$-$\Sigma_{2,\ u})$属于 W[2]。随后，我们使用 Downey等人 [12] 以及 Flum 和 Grohe [17], 的结果：对于任意 $u \geq 1$，以公式大小为参数的$\Sigma_{2,\ u}$模型检测是 W[2]-完全的。

引理 3.8. $\forall u \geq 1$, $MC(\forall^{\neq}$-$\Sigma_{2,u})$ 是关于公式大小参数化的W*[2]*-完全问题。

证明. 困难性源自模型检测 $\Sigma_{2,u}$ 的 W[2]-困难性，其中 $\Sigma_{2,u} \subset \forall^{\neq}$-$\Sigma_{2,u}$。对于归属性，固定某个 $u \geq 1$，并令 $(\mathcal{A}, \phi)$ 为 $MC(\forall^{\neq}$-$\Sigma_{2,u})$ 的一个实例。我们将其归约为 $MC(\Sigma_{2,u})$ 的一个实例。如果 ϕ 中不含一个后接 ∃-量词的 ∀-量词，那么 $(\mathcal{A}, \phi)$ 已经是 $MC(\Sigma_{2,u})$ 的一个实例。因此，我们可以将 ϕ 写为:

$$\phi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_{i-1} x_{i-1} \forall x_i \exists x_{i+1} \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_\ell \ \psi$$

其中 x_i 是最右侧且后接存在量词变量的全称量词变量，并且 $\ell \leq u$。

该证明沿用了 Bonnet等人 [5], 的相同思路；不过，我们不会消去所有全称量词，直到得到一个 Σ_1 公式，而是将全称量词逐一消去，直到 x_i为止，最终得到一个 $\Sigma_{2,\ u}$ 公式。我们首先说明如何消去 x_i的全称量词。其思路是，由于 x_i 只出现在与其他变量 x_js有关的不等式中，我们只需区分赋给 x_i 的值是否等于赋给某个其他变量的值。确实，若不相等，即公式在满足 x_i 与其他变量之间所有不等式的 x_i 赋值下成立，那么只要这些不等式仍然成立，即使改变 x_i的赋值，公式也仍然成立。随后，我们将迭代使用这一技巧，消去 x_i之前的所有全称量词；请回想一下，相应的变量只出现在不等式中。

我们将证明，可以将子公式$\phi_1(x_1, \ldots\ldots, x_{i-1})$
$= \forall x_i \exists x_{i+1} \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi$替换为

$$\phi_2(x_1, \ldots, x_{i-1}) =$$
$$\exists z_i \exists z_{i+1} \ldots \exists z_k \big((\forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi[z_i/x_i, z_{i+1}/x_{i+1}, \ldots, z_k/x_k]) \wedge \quad (1)$$
$$\bigwedge_{j=1}^{i-1} \exists z_{i+1}^j \ldots \exists z_k^j \forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi[x_j/x_i, z_{i+1}^j/x_{i+1}, \ldots, z_k^j/x_k] \wedge \quad (2)$$
$$\bigwedge_{j=i+1}^{k} \exists z_{i+1}^j \ldots \exists z_k^j \forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi[z_j/x_i, z_{i+1}^j/x_{i+1}, \ldots, z_k^j/x_k] \big) \quad (3)$$

其中，$\phi[y/x]$ 表示在 ϕ 中将 x 的每一次出现都替换为 y。这是一个 FPT 归约，因为公式 ϕ_2 的大小是公式 ϕ_1大小的函数。我们证明，对于 c_1、……、c_{i-1}，$\mathcal{A}$中的元素 ϕ_1（c_1、……、c_{i-1}）为真，当且仅当 ϕ_2（c_1、……、c_{i-1}）为真。

我们先介绍 ϕ_2的构造思路。$\forall x_i$ 根据赋给 x_i的值进行拆分：

- (1)旨在确保至少存在一个满足 ψ的赋值。
- (2)旨在验证：对于 x_j的所有取值，在 $j < i$ 已选定的情况下，如果 x_i 取这些值之一，ψ 仍然可以得到满足。
- (3)确保：每当 x_i 取到我们要求用于第一个满足 ψ 的赋值（见(1)）的值时，就可以为带有 $j > i$ 的 x_j找到另一个赋值，使 ψ得到满足。

注意，由于 x_i 只出现在不等式中，因此只有在这些情况下，x_i 的取值才会使 ψ 的值变为 False。

首先，如果 $\phi_1(c_1, \ldots, c_{i-1})$ 为 True，那么 $\phi_2(c_1, \ldots, c_{i-1})$ 之所以为 True，是因为 (1)，（2）和（3）都是关于 x_i 的全称量化的特殊情形。事实上，如果 $\phi_1(c_1, \ldots, c_{i-1})$ 为 True，那么对于 x_i 的任意赋值 $c_i \in A$，都存在一个 $x_{i+1} \ldots x_k$ 的赋值 $C = c_{i+1} \ldots c_k$，使得 ψ 为真（因此（1）为 True）。特别地，对于满足 $j < i$ 的赋值 c_i，即等于赋值 c_j 的情形也是如此（意味着（2）为 True）；对于在 C 中定义的任意 c_j，满足 $j > i$ 的赋值 c_i 的情形也同样如此；换言之，在这种情况下，仍然存在一个 $x_{i+1} \ldots x_k$ 的赋值 $c'_{i+1} \ldots c'_k$，使得 ψ 为真（意味着（3）为 True）。

现在假设 $\phi_1(c_1, \ldots, c_{i-1})$ 为假。反设 $\phi_2(c_1, \ldots, c_{i-1})$ 为真，也就是说，存在一个针对 $z_i, z_{i+1}, \ldots z_k$ 的赋值 $c_i, c_{i+1}, \ldots c_k$，使剩余子公式为真。根据假设，存在 $c'_i \in \mathcal{A}$，使得 $\phi_1(c_1, \ldots, c_{i-1})[c'_i/x_i]$ 为假。

- 若对于某个 $1 \le j \le i-1$，$c'_i = c_j$。令 $c'_{i+1}, \ldots, c'_k \in \mathcal{A}$ 为变量 $z_{i+1}^j, \ldots, z_k^j$ 的赋值，并满足 ϕ_2；也就是说，与 (2) 中第 j^{th} 项对应的子公式 $\forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi[x_j/x_i, c_{i+1}/x_{i+1}, \ldots c_k/x_k]$ 为真。因此，在 ϕ_1 中将 $c_j, c'_{i+1}, \ldots, c'_k$ 赋给变量 $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k$，再将 c_i 赋给 x_i，就会使公式 $\phi_1(c_1, \ldots, c_{i-1})$ 成立，这与假设矛盾。

- 如果 $c'_i = c_j$对某个 $i+1 \le j \le k$成立。令 $c'_{i+1}, \ldots, c'_k$为变量 $z_{i+1}^j, \ldots z_k^j$的赋值，使其满足 ϕ_2，也就是说，与式 (3) 中的 j^{th} 项对应的子公式 $\forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi[z_j/x_i, c_{i+1}/x_{i+1}, \ldots c_k/x_k]$为真。因此，将 $c_j, c'_{i+1}, \ldots, c'_k$ 赋给 $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k$ 中的变量，会使 ϕ_1 中的公式 $\phi_1(c_1, \ldots, c_{i-1})$ 在将 c_i 赋给 x_i 时成立，这与假设矛盾。

- 否则，令 $l_1, \ldots, l_m$ 为 x_i 在 ψ 中出现的文字。回顾一下，它们全都是形如 $x_i \ne x_j$ 的不等式，其中 $j \ne i$。回顾一下，c_i 是 z_i 的一个赋值，且满足 ϕ_2；令 $l'_1, \ldots, l'_m$ 为某个满足 ϕ_2 的赋值下 $\psi[c_i/x_i]$ 的文字。令 $l'_1, \ldots, l'_m$ 为 $\forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi[z_i/x_i, z_{i+1}/x_{i+1}, \ldots, z_k/x_k]$ 中对应的文字。注意，$\forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi[c_i/x_i, c_{i+1}/x_{i+1}, \ldots, c_k/x_k]$ 为真。$l'_1, \ldots, l'_m$ 中有些可能为假，但由于它们不会以否定形式出现，将它们变为真不会使公式由真变假。由于将 x_i 的赋值从 c_i 改为 c'_i 会使所有这些不等式都为真，因此 $\forall y_1 \ldots \forall y_\ell\ \psi[c'_i/x_i, c_{i+1}/x_{i+1}, \ldots, c_k/x_k]$ 为真，这又导致矛盾。

至此，证明了这些公式等价。公式 ϕ_2 并不完全属于 $\Sigma_{2,u}$，因为合取之后还有存在量词和全称量词。不过，可以通过将所有量词移到合取式之前来转换该公式。虽然与 ϕ_1 相比，存在量词的数量有所增加，但全称量词 $\forall y_1 \ldots \forall y_\ell$ 可以由所有合取式共享，从而得到如下形式的公式

$$\begin{aligned}\phi_2'(x_1,\ldots,x_{i-1}) = \quad & \exists z_i \exists z_{i+1} \ldots \exists z_k \exists z_{i+1}^1 \ldots \exists z_{i+1}^k \ldots \exists z_k^k \ \forall y_1 \ldots \forall y_\ell \\ & \big((\psi[z_i/x_i, z_{i+1}/x_{i+1}, \ldots, z_k/x_k]) \wedge \\ & \textstyle\bigwedge_{j=1}^{i-1} \psi[x_j/x_i, z_{i+1}^j/x_{i+1}, \ldots, z_k^j/x_k,] \wedge \\ & \textstyle\bigwedge_{j=i+1}^{k} \psi[z_j/x_i, z_{i+1}^j/x_{i+1}, \ldots, z_k^j/x_k,]\big)\end{aligned}$$

属于 $\forall^{\neq}\text{-}\Sigma_{2,\ u}$。通过重复此构造，直到移除最后一次交替之前的所有全称量词，我们得出 $MC(\forall^{\neq}\text{-}\Sigma_{2,\ u})$ 属于 W[2]。 □

推论 3.9. $\text{Short}_{\text{Breaker}}$ MB Pos Game 属于W*[2]*。

证明。 在 $\text{Short}_{\text{Breaker}}$ MB Pos Game 中，Breaker 的获胜条件可表示为 $\forall^{\neq}\text{-}\Sigma_{2,\ 1}$ 如下:

$$\forall v_1 \in V\, \exists u_1 \in V\, \forall v_2 \in V\, \ldots \forall v_k \in V\, \exists u_k \in V\, \forall e \in E\ \left(\bigwedge_{i=1}^{k}\bigwedge_{j=1}^{i} u_i \neq v_j\right) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{k} Inc(u_i, e)\right)$$

其中，当且仅当 e 与 u_i 相 incident 时，$Inc(u_i,\ e)$ 为真。

因此，根据引理 3.8，它属于 W[2] ，因为 v_i 仅出现在不等式中。 □

3.3 W[2]-完全性

在上一小节中，我们证明了 $\text{Short}_{\text{Breaker}}$ MB Pos Game属于 W[2]。因此，$\text{Short}_{\text{Dominator}}$ MB Dom Game 属于 W[2]。我们将证明它甚至是 W[2]-完全的。

定理 3.10. $\text{Short}_{\text{Dominator}}$ MB Dom Game是W*[2]*-完全的。

证明。 为了证明 $\text{Short}_{\text{Dominator}}$ MB Dom Game 属于 W[2], ，我们将 Maker-Breaker 支配博弈视为 Maker-Breaker 位置博弈，其中支配者扮演 Breaker 的角色；相应的超图为闭邻域超图。由于该超图有多项式数量的顶点和超边，且$\text{Short}_{\text{Breaker}}$ MB Pos Game 属于 W[2], ，判定支配者能否在 k 步内获胜也属于 W[2]。

现在，我们将通过从以下k-Dominating Set 问题进行归约，证明 $\text{Short}_{\text{Dominator}}$ MB Dom Game 是 W[2]-难的。该问题已知是 Downey 和 Fellows [10]中的 W[2]-完全问题。

问题 3.11 (k-Dominating Set)。输入：图 $G = (V, E)$，一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个大小为 k 的支配集 $D \subseteq V$?

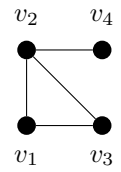
令 $(G,\ k)$ 为该 k-Dominating Set 问题的一个实例。我们考虑如下图 G'：

- $V(G') = \{x_i \mid v_i \in V(G)\} \cup \{y_i \mid v_i \in V(G)\}$
- $E(G') = \{x_i y_i \mid v_i \in V(G)\} \cup \{x_i y_j \mid v_i v_j \in E(G)\} \cup \{x_i x_j \mid v_i v_j \in E\} \cup \{y_i y_j \mid v_i v_j \in E(G)\}$

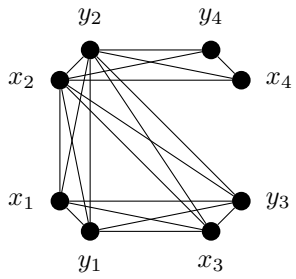
该归约如图5所示。

直观地说，图 G' 是通过复制图 G 的所有顶点而得到的。因此，如果 G 具有一个大小为 k 的支配集 D ，则支配者可以使用配对 $\{(x_i,\ y_i)$ 的配对策略，在 k 步内于 G' 上构造一个支配集，因为每对中包含一个顶点的任意集合都是支配集。

□



(a) 图 G



(b) 所得到的图。

图5：定理 3.10 中的归约

因此，由于 $\textsc{Short}_{\textsc{Dominator}}$ MB Dom Game 可在多项式时间内归约为 $\textsc{Short}_{\textsc{Breaker}}$MB Pos Game，$\textsc{Short}_{\textsc{Breaker}}$ MB Pos Game 也是 W[2]-难的。

推论 3.12。 $\textsc{Short}_{\textsc{Breaker}}$ MB Pos Game是W*[2]*-完全的。

推论 3.12 十分令人惊讶，因为 $\textsc{Short}_{\textsc{Maker}}$ MB Pos Game 是 W[1]-完全的。此外，这表明，即使通过考虑横截超图可以交换 Maker 和 Breaker 的角色，这也会带来复杂度方面的代价。这可以由以下事实解释：Maker 的获胜条件是局部的（即填满一个超边），而 Breaker 的获胜条件是全局的。

积极的一面是，由于判断是否存在一个支配集，或某个顶点的闭邻域是否被某位玩家完全占据，都可以使用 $O(k)$ 量词轻松地用一阶逻辑表达，因此，Grohe 等人 [21], andDreier 等人 [13] 关于模型检测的元定理为我们提供了以下定理。

定理 3.13. $\textsc{Short}_{\textsc{Dominator}}$ MB Dom Game 和 $\textsc{Short}_{\textsc{Staller}}$ MB Dom Game 可以在单子稳定图类上用固定参数可处理时间求解，参数为步数。

注意，由于处处稀疏图和有界树宽图都是单子稳定的，因此在这些图类中， MB DomGame 可以在固定参数可处理时间内求出，参数为步数。

4 带模块的图

在本文余下部分中，我们只考虑步数不受限制的 Maker-Breaker 支配博弈。我们将考察 Maker-Breaker 支配博弈关于若干图参数的参数化复杂性。本节重点讨论与模块相关的参数。能够处理模块，使我们可以将 [15] 中给出的余图上的多项式算法推广到可视为与余图具有某种距离的参数。特别地，引理 4.1 还给出了关于模块宽度和 P_4-稀疏度的固定参数可处理算法。

4.1 替换图中的一个模

本节的大多数结果都得益于以下引理，它是引理 2.12 的推广。该引理指出，任何大小至少为 3 的模都可以替换为大小至多为 3 的模，而不改变图的结果。图 6 展示了这一引理。

引理 4.1。 设 G 是一个图， M 是 G 的一个模，满足 $|M| \geq 3$。用 P_i 表示具有 i 个顶点的路径。

- 若 $o(G[M]) = \mathcal{D}$，令 G' 为将 G 中的 M 替换为 P_2的一个副本后得到的图。

- 若 $o(G[M]) = \mathcal{S}$，令 G' 为将 G 中的 M 替换为两个独立顶点后得到的图。
- 若 $o(G[M]) = \mathcal{N}$，令 G' 为由 G 通过将 M 替换为 P_3的一个副本所得到的图。

那么 G 和 G' 具有相同的结果。

证明。设 $G=(V,E)$为一个图，且 M是 G的一个模。举例来说，假设 $o(G[M]) = \mathcal{D}$，其他情形类似。令 G' 为由 G 通过将 M 替换为一个 P_2所得到的图。令 $\{u,v\}$ 为 G'中 P_2 的顶点。

首先，我们在 G' 中对 $G' \setminus \{u,v\}$内具有相同邻域的 $\{u,v\}$ 应用引理 2.12。因此， G'和$(G',\{u\},\{v\})$具有相同的结果。

假设支配者在$(G',\{u\},\{v\})$中有一个必胜策略 $\mathcal{S}$。我们考虑支配者的以下策略：她在 $G \setminus M$中按照 $\mathcal{S}$行动，并在 $G[M]$中按照她作为后手玩家时的必胜策略行动（如果其中一个策略已经结束，她就随机行动）。

按照这一策略，我们证明支配者总能支配 G 的所有顶点。设 x 是 G 的一个顶点。

- 如果 $x \in (V \setminus M) \cap N[M]$。由于 $|M| \geq 2$，她总会至少占据 M 中一个顶点 x_0，从而支配 x。
- 如果 $x \in V \setminus N[M]$，令 y 为 G' 中支配 x 的顶点。该顶点存在，因为 $\mathcal{S}$ 是 G' 中的必胜策略。由于 x 与 M 不相邻， $y \neq u$。因此，她在 G 中的策略也会占据 y，并且 x 会被支配。
- 如果 $x \in M$，由于 $o(G[M]) = \mathcal{D}$，且她一直按照自己在 $G[M]$ 中的必胜策略行动，她将支配 x。

如果 $O(G[M]) = \mathcal{N}$，对 P_3 的两个叶节点应用引理 2.12，即可得到相同的证明；如果 $o(G[M]) = \mathcal{S}$，对两个孤立顶点应用引理 2.12，也同样成立。

现在假设 Staller 在 $\mathcal{S}$in $(G',\{u\},\{v\})$ 中有一个必胜策略。考虑如下策略：当 Dominator 在 $G \setminus M$ 中落子时，Staller 按照 $\mathcal{S}$in $G \setminus M$ 的策略行动；否则，他任意选择顶点落子。

基于与前面相同的理由，如果 Staller 按照$\mathcal{S}$在 G' 中的博弈里成功使 $G \setminus M$ 中的一个顶点 x 孤立，那么在 G中他仍然能使它孤立。事实上，由于在 $(G',\{u\},\{v\})$ 上进行的博弈中， x是孤立的，因此在 G' 中， x与 u 不相邻，所以它在 G中没有邻点。因此，Staller 在 G 中有一个必胜策略。

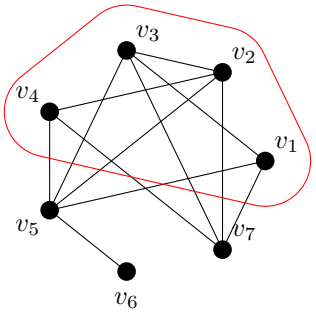
如果 $o(G[M]) = \mathcal{N}$或 $o(G[M]) = \mathcal{S}$，那么通过补充以下情况，同样的论证仍然成立：如果 Staller 使 P_3中的一个顶点或替代 M 的两个孤立顶点之一孤立，那么他就已经占据了 M的所有邻点，因此按照他在 $G[M]$中的必胜策略进行博弈，就使 M 中的一个顶点孤立。

最后，我们证明了 G 和 G' 具有相同的结果。□

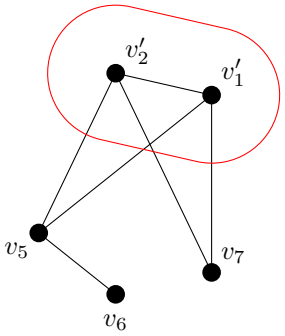
该引理直接给出了一个以邻域多样性为参数的 MB Dom Game 线性核，即最小整数 w，使得 V可划分为 w 个集合 V_1、.....、V_w，且每个 V_i 都是由同一类型的顶点组成的集合，即一个诱导出团或稳定集的模。

定理 4.2。 MB Dom Game 存在一个线性核，其参数为图的邻域多样性。

证明。设 $G=(V, E)$ 是一个邻域多样性为 w 的图。设 V_1，....., V_w 是 V的一个划分，使得对于 $1 \leq i \leq w$，V_i 是由相同类型的顶点构成的集合——也就是说，如果 x， $y \in V_i$，则 $N(x) = N(y)$ 或 $N[x] = N[y]$。因此，根据引理 4.1，如果 V_i 至少包含两个顶点，就可以将其替换为一条边或两个独立顶点，而不改变结果。应用此操作 w 次后（可在线性时间内完成），我们得到一个至多有 $2w$ 个顶点且结果相同的图，从而得到一个线性核。□



(a) $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 是结果为 $\mathcal{D}$ 的模。



(b) 归约后的图，其中 M 已被一条边替换。

图 6：利用引理 4.1 对模进行归约

4.2 模块宽度

设 $G_0 = (V_0, E_0)$ 是一个图，其顶点记为 $v_1, \ldots v_n$。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ ....., $G_n = (V_n, E_n)$ 为图。关于 G_0 的替换操作 记为 $G_0(G_1, \ldots, G_n)$，其做法是将每个顶点 $v_i \in V_0$ 替换为图 G_i，并在 G_i 与 G_j 之间添加所有边（如果 $v_i v_j \in E_0$）。于是， G_i 是所得图的一个模。

图 $G = (V, E)$ 的模分解是一种通过以下操作构造图 G 的表达式：添加一个孤立顶点、对两个图取不交并、对两个图取完全联接，以及执行替换操作。模分解的宽度是替换操作中最大图 G_0 的阶，即其顶点数。图 G 的模块宽度记作 $mw(G)$，是满足图 G 可以由宽度为 m 的模分解得到的最小整数 m。图 7 展示了一个模分解的示例。

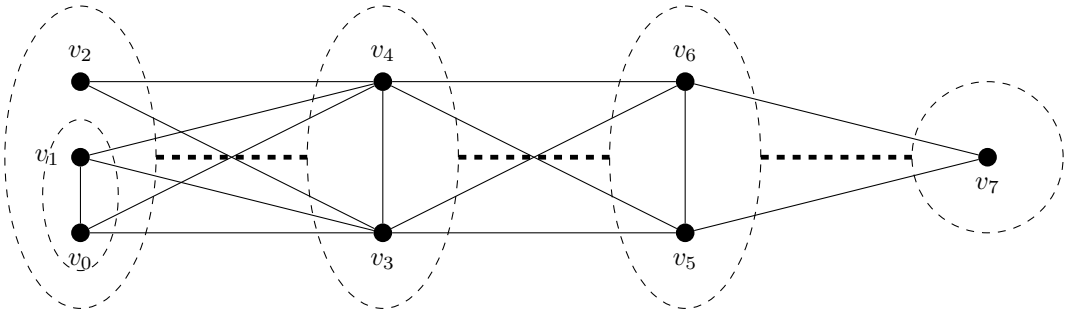


图 7：宽度为 4 的模分解示例。这里，虚线圈出的每组顶点都是一个模。

Th定理 4.3。 MB Dom Game 是关于图的模块宽度参数化的固定参数可处理 .

证明。 设 $G = (V, E)$ 是一个图，并设 $k = mw(G)$。首先，我们计算 G 的分解，这可以在线性时间内使用 Tedder等人 [33]的算法完成。我们将其嵌入一棵树中，使得节点表示联接、并和替换操作，而叶节点是孤立顶点。现在，我们使用一个在树结构上自底向上的算法来计算 G的结果。从叶节点开始，这些叶节点的结果均为 $\mathcal{N}$，我们按照如下方式计算每个节点上的结果，其中考虑由其后代诱导的子图 H：

1. 如果 $|V(H)| \leq 3k$，我们通过穷举所有可能的博弈来计算胜者 s.

2. 如果 $H = G_1 \cup G_2$，我们归纳地计算 G_1 和 G_2 的结果；它们的模块宽度至多为 k，然后根据引理 2.4 返回相应结果。3. 如果 $H = G_1 \bowtie G_2$，我们归纳地计算 G_1 和 G_2 的结果；它们的模块宽度至多为 k，然后根据引理 2.5 返回相应结果。4. 如果 $H = G'(G_1, \ldots\ldots, G_p)$，则必然有 $p \leq k$。根据引理 4.1，我们将每个顶点数超过三个的 G_i 替换为一个 P_2、一个 P_3 或两个孤立顶点，具体取决于其结果。然后，我们计算 $o(H)$，因为它至多有 $3k$ 个顶点。

该算法的运行时间为 $O\left(3^{3k}n\right)$，因为这四个步骤中的任意一个都可以在 $O(3^{3k})$ 次操作内完成，而模分解至多包含 n个节点。 □

尽管我们针对模块宽度给出了一个固定参数可处理算法，但该算法并不能直接导出一个核。事实上，它必须通过对一个子图进行穷举搜索，多次计算结果。改进这一结果的一种方法是寻找针对模块宽度的多项式核。

4.3 P_4-稀少性

另一个可视为到余图距离的参数是 P_4-稀少性，我们将在下文介绍。余图类恰好是不存在诱导 P_4 的图类。Ho´ang [26]，提出的另一类图，在局部意义上只包含有限数量的 P_4，称为 P_4-稀疏图；这类图中，任意五个顶点组成的集合至多诱导出一个 P_4。Babel 和 Olariu 将这些图类推广为"少 P_4 图"这一图类，形式化地说，就是 $(q, q-4)$-图 [3]。如果任意至多含 q 个顶点的集合都不会诱导出多于 t 个不同的 P_4，那么该图就是一个 (q, t)-图 。按照这种记法，余图类就是 (4,0)-图类，而 P_4-稀疏图类就是 (5,1)-图类。图 G 的 P_4-稀少性 是满足 G 为 $(q, q-4)$-图 [6] 的最小整数 q 。

我们将为 P_4-稀疏性提供的固定参数可处理算法，将依赖于 Jamison 和 Olariu 提供的 $(q, q-4)$-图的树分解 [3, 28]，并在 [8] 中将其重新表述为原始分解。我们在下述定理中给出这一分解。蜘蛛图 是指其顶点集可划分为 (R, C, S) 的图，其中 $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ 和 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$分别是团和稳定集；对于 $m \geq 2$，s_i 与 c_j 相邻当且仅当 $i = j$ （薄蜘蛛图），或者 s_i 与 c_j 相邻当且仅当 $i \neq j$ （厚蜘蛛图）；并且 R 中的每个顶点都与 C 中的每个顶点相邻，与 S中的每个顶点均不相邻。

定理 4.4 ([3, 8])。 设 G 是一个（$q, q-4$）图，则以下结论之一成立：

1. G 至多有 q 个顶点；*2.* G 是两个$(q, q-4)$图 G_1 和 G_2的不交并；*3.* G 是两个$(q, q-4)$图 G_1 和 G_2的联接；*4.* G 是一个蜘蛛图(R, C, S)，且 $G[R]$ 是一个$(q, q-4)$图；*5.* G 包含一个非空顶点子集 H，其中有 $|H| < q$ 和二分划分 $H = H_1 \cup H_2$，使得$G' = G \backslash H$ 是一个$(q, q-4)$图，并且 G' 中的每个顶点都与 H_1 中的每个顶点相邻，且与 H_2中的每个顶点不相邻，见图 *8*。

[3, 8] 中的分解还保证了 H 在情况 5 中具有其他性质，而证明我们的算法正确性并不需要这些性质。

定理 4.5. MB Dom Game 以图的 P_4-稀疏度为参数时属于固定参数可处理 。

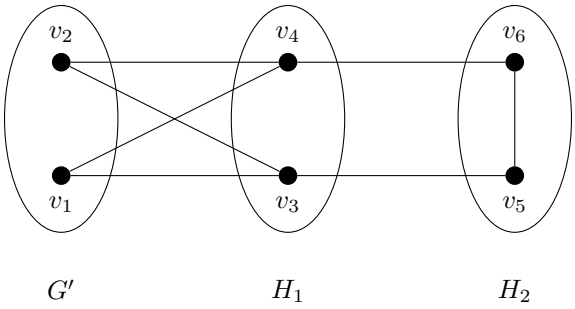


图 8：展示情况 5 的图 G。

证明。 令 $G = (V, E)$ 为一个 $(q, q-4)$-图。 G 可以通过依次应用定理 4.4 进行分解。若满足 (2) 或 (3)，则对 G的每个连通分支应用该定理。若满足 (4)，则对 $G[R]$应用该定理。若满足 (5)，则对 G'应用该定理。最后，(1) 对应于树的叶节点。该分解可以在线性时间内完成 [27]。随后，可以根据每个节点的子节点结果以及该节点对应的操作，确定该节点对应的图的结果。

1. 如果 $|V(G)| \leq q$，我们通过穷举计算所有可能的博弈来确定获胜者。

2. 如果 $G = G_1 \cup G_2$，我们通过归纳法计算 G_1 和 G_2 的结果，并依靠引理 2.4 来确定 G的结果。

3. 如果 $G = G_1 \bowtie G_2$，我们通过归纳法计算 G_1 和 G_2 的结果，并依靠引理 2.5 来确定 G的结果。

4. 如果 G 是蜘蛛图（R, C, S），且 $G[R]$ 是一个（$q, q-4$）-图，我们根据该蜘蛛图是细型还是粗型作进一步的情况区分。

   (a) 当蜘蛛图为细型时，若支配者先手，支配者获胜：先在 C中走第一步，然后对 $i \in \{1, \ldots, |C|\}$ 采用配对策略，配对为（s_i, c_i）。若 Staller 先手，则通过迭代应用引理 2.10，其中未被认领的叶节点是 S 的顶点，其各自的私有邻点是 C的顶点，可得 G的结果与 Staller 先手时 G' 的结果相同。由于 $G' = G[R]$ 是一个规模更小的（$q, q-4$）-图，我们通过归纳法计算其结果。(b) 当蜘蛛图为粗型时，若 $|C| \geq 4$，则 $o(G) = \mathcal{D}$，支配者在C中配对两条不相交的边。否则，注意到 G' 是 G的一个模。因此，若 $|G'| \geq 3$，我们通过归纳法计算 G'的结果，并应用引理 4.1，得到一个至多有九个顶点、且结果与 G相同的新图 G_2 。接着我们计算 $o(G_2)$。否则，$|G'| < 3$ ，并计算 $o(G)$，因为它至多有八个顶点。

5. 如果 G 包含一个非空子集 H，其二分划分为 $H_1 \cup H_2$, $|H| < q$，且 $G' = G \setminus H$ 是一个 $(q, q-4)$-图，其中 G' 的每个顶点都与 H_1 的每个顶点相邻，且与 H_2的每个顶点均不相邻，那么 G' 是 G的一个模。因此，如果 $|V(G')| \geq 3$，我们归纳地计算G'的结果，并应用引理 4.1，得到一个至多有 $q+2$ 个顶点的新图 G_2，其结果与G相同。然后我们计算 $o(G_2)$。否则， $|V(G')| < 3$，我们计算 $o(G)$，因为它至多有 $q+1$ 个顶点。

该算法的运行时间为 $O\left(3^{(q+2)}n\right)$，因为每个步骤都可以在 $O\left(3^{(q+2)}\right)$ 次操作内完成；原始分解至多包含 n 个节点，并且可以在线性时间内计算。 □

5 到簇图的距离

现在我们关注到簇图的距离，即从图中删除最少数量的顶点，使其成为若干团的并。我们首先回顾一下，团簇图上的结果可以很容易地计算出来。

引理 5.1。 设 G 是一个簇。

- 若 G 没有孤立顶点，则有 $o(G) = \mathcal{D}$。
- 若 G 有一个孤立顶点，则有 $o(G) = \mathcal{N}$。
- 若 G 至少有两个孤立顶点，则有 $o(G) = \mathcal{S}$。

证明。 这个结果显而易见，因为若 K 是一个团，则当其阶为 1 时，结果为 $\mathcal{N}$；否则结果为 $\mathcal{D}$。因此，根据引理 2.4 即可得到该结果。 □

定理 5.2. MB Dom Game 是固定参数可处理的，参数为图到簇图的距离 .

证明。 设 X 是一个顶点集，使得 $G \setminus X$ 是一个簇。设 $k = |X|$。设 G_1、.....、 G_s 是 $G \setminus X$的连通分量。所有图 G_i 都是团。

我们首先界定团的大小。首先请注意，若 G_i 是一个团，且 v_1、.....、 v_k 是 G_i中在 X里具有相同邻域的顶点，根据引理 4.1，我们可以移除除两个以外的所有 v_i，而不改变博弈的结果。因此，对于 $1 \leq i \leq s$，我们可以假设 $|V(G_i)| \leq 2^{k+1}$，因为 X中至多有 2^k种不同的邻域，且每个邻域在每个团中至多有两个邻居。

证明的其余部分是界定团的数量。我们将团 G_i的签名 定义为 G_i 中顶点在 X中的邻域所构成的多重集。由于具有相同邻域的顶点至多有两个，因此至多有 3^{2^k} 种可能的签名（对于 2^k 种可能的邻域中的每一种，共享该邻域的顶点数为零、一或二）。此外，若 G_i 和 G_j 具有相同的签名，由于我们考虑的是多重集，它们的顶点数必定相同。对于大小不等于 2 的团，我们证明可以假设至多有另外两个团具有相同的签名。更确切地说：

命题 5.3。 设 G_i 是一个大小为 ℓ 的团。

1. 若 $\ell = 1$，且至少另外有两个团具有相同的签名，那么可以移除除两个之外的所有这些团，而不改变 G的结果。 *2.* 若 $\ell \geq 3$，且至少另外有三个团具有相同的签名，那么可以移除除三个之外的所有这些团，而不改变 G的结果。

命题的证明。

1. 假设 G_i 的大小为 1，令 u_i 为 G_i 的唯一顶点， Y为其在 X中的邻域。令 H 为所有具有签名 $\{Y\}$的其他单顶点。那么 H 是一个稳定集，也是 G的一个模。若 $|H| > 2$，根据引理 4.1，可将其替换为大小为 2 的稳定集。

2. 现在假设 G_i 的大小至少为 3。令 $\mathcal{C}$ 为所有与 G_i 具有相同签名的团（含$G_i \in \mathcal{C}$）。假设 $\mathcal{C}$ 至少包含四个团。令 Y为 X 中与 G_i的至少一个顶点相连的所有顶点。我们断言，可以用一条通过联接与集合 Y相连的边替换 $\mathcal{C}$ 。令 G' 为这个新图， x， y 为这条新边的顶点。我们证明 G 和 G' 具有相同的结果。

首先注意，根据引理 2.12，由于 x 和 y 具有完全相同的邻域，我们可以假设支配者会占领 x ，而 Staller 会在 G'中占领 y 。特别地，集合 Y 全部由支配者支配。

首先假设 Staller 在 G' 中（先手或后手）获胜。然后，他在 G 中采用相同的策略，忽略 Dominator 在 $\mathcal{C}$ 中的步数。由于可以假设 Dominator 会占据 G' 中的 x,

Staller 在 G' 中使之孤立的顶点 z，不可能是 $Y \cup \{x, y\}$中的顶点。特别是， z 在 G 中与 $\mathcal{C}$ 中的任何顶点都不相连，因此也会被 Staller 在 G中孤立。
现在假设支配者在 G' （先手或后手）中获胜。如前所述，我们可以直接假设 x由支配者占据， y 由 Staller 在 G'中占据。假设 x 由支配者占据， y由 Staller 占据时，令 $\mathcal{S}'$ 为支配者在 G'中的策略。令 C_1、.....、C_m为 $\mathcal{C}$（$m \geq 4$）的团。对于 $j \in \{1, ..., m\}$，令 $\{u_j^t\}$ （ $t \in \{1, ..., \ell\}$ ）为 C_j的顶点，使得对于固定的 t，顶点 u_j^t在 X中具有相同的邻域。当 Staller 尚未在 $\mathcal{C}$中落子时，支配者遵循她的策略 $\mathcal{S}'$。不失一般性，可以假设 u_1^1 是 Staller 在 $\mathcal{C}$中占据的第一个顶点。随后支配者占据 u_2^1 ，从而支配整个团 C_2。之后，支配者继续在 $\mathcal{C}$ 之外遵循 $\mathcal{S}'$ ，并在 $\mathcal{C}$ 中采用配对策略 $\mathcal{P}$ ，配对如下：

(a) 对于 $t \in \{2, ..., \ell - 2\}$，支配者在 $\mathcal{P}$ 中添加配对 (u_1^t, u_2^t)。
(b) 支配者在 $\mathcal{P}$ 中添加配对 $(u_2^{\ell-1}, u_3^{\ell-1})$ 和 (u_2^{ℓ}, u_4^{ℓ})。(c) 支配者在 $\mathcal{P}$ 中添加配对 $(u_1^{\ell-1}, u_1^{\ell})$。(d) 对于 $j \in \{3, ..., m\}$，支配者在 $\mathcal{P}$ 中添加配对 (u_j^1, u_j^2)。

来自条目 (a) 和 (b) 的配对确保每个 t 都至少有一个 u_i^t 被支配者选取，而条目 (c) 和 (d) 则确保每个团 C_j 中至少有一个顶点被支配者选取。请注意， $\mathcal{C}$ 中未配对的顶点可以忽略，因为它们将被 (c) 和 (d) 支配，且无法支配新的顶点。

这样，支配者将支配 $\mathcal{C}$ 中的所有顶点，并支配 Y 中的所有顶点。 G 中的所有其他顶点都位于 G' 中，并且被 x以外的另一个顶点支配。因此，支配者将支配整个图 G。$\diamond$

现在我们考虑大小为 2 的团。我们证明，如果具有相同签名的大小为 2 的团足够多，那么可以移除其中一个而不改变结果。重复这一论证，我们便可假设具有相同签名的大小为 2 的团的数量有一个由 k 决定的上界。

断言 5.4。设 $f(k) = (2^k + 3)3^{2^k} + 2$。设 $X_1, X_2 \subseteq X$。假设 G 中具有相同签名(X_1, X_2)的大小为 *2* 的团多于 $f(k)$个。令 G' 为从图 G 中移除其中一个团后得到的图。那么 G 和 G' 的结果相同。

命题的证明。
令 $\mathcal{C}$ 为具有签名（X_1， X_2）的大小为 2 的团的集合。令 C_1， $...C_{|\mathcal{C}|}$ 为 $\mathcal{C}$的团。我们假设 $|\mathcal{C}| > f(k)$。对于 $j \in \{1, ..., \mathcal{C}\}$，令 u_j 和 v_j 为 C_j 的两个顶点，使得所有的 u_j （分别为所有的 v_j ）的邻域均为 X_1 （分别为 X_2）。令 G' 为从 G中移除团 $C_{|\mathcal{C}|}$ 后得到的图。我们证明 G 和 G' 的结果相同。如果支配者在 G' 中获胜（先手或后手），那么她就可以在 G 中获胜：对 $C_{|\mathcal{C}|}$ 使用配对策略，并在 G的其余部分沿用之前的策略。

因此，假设 Staller 在 G' 中获胜。令 $\mathcal{S}'$ 为 Staller 在 G' 中采用的策略。我们要证明 Staller 在 G 中获胜。

我们在 G 中模拟一场博弈，直到 $f(k) - 1$ 个 $\mathcal{C}$ 的团中至少有一个顶点被某位玩家占据，同时 Staller 在 G 中遵循 $\mathcal{S}'$。不失一般性，我们可以假设所进行的 $f(k) - 1$ 个团是从 C_1 到 $C_{f(k)-1}$。

我们观察到以下事实：

1. 如果支配者已经占据了顶点 u_i 和顶点 v_j，那么根据超级引理，可以假设对于 $\mathcal{C}$ 中所有空团，都有一个顶点被 Staller 占据，另一个被支配者占据，因为对于所有 $k \notin \{i, j\}$ 以及所有包含 u_i 和 v_j 的顶点集合 D， $D \cup \{u_k\}$ 是支配集当且仅当 $D \cup \{v_k\}$ 是支配集。于是可以移除团 $C_{\mathcal{C}}$，得到图 G'；根据假设，Staller 将在其中获胜。

2. 如果支配者在 $\mathcal{C}$ 中连续占据两个顶点，期间 Staller 没有在 $\mathcal{C}$ 中占据任何顶点，那么根据引理 2.11，支配者有意占据两个顶点 u_i 和 v_j，随后我们就回到了情况 1。

3. 假设支配者已经占据了顶点 v_i。这步之后，如果 Staller 占据顶点u_j，紧接着支配者占据 v_j，那么可以移除团 C_j：除了 u_j 和 v_j 之外，支配者没有支配任何新顶点，因此得到的博弈是一个 G'的构型，在该构型中 Staller 会获胜。如果支配者在某个时刻占据 v_j，这意味着 v_j 在 X_2 中没有未被占据的邻居，也没有被支配者占据的邻点；否则，根据引理 2.11，支配者占据 v_j 的任一邻点会更好。特别是，此后 Staller 占据顶点 u_t 时，支配者必须立即应对 v_t，否则 Staller 可以通过占据该点孤立一个顶点，随后我们就可以移除这两个顶点。

4. 因此，可以认为支配者只在 $\mathcal{C}$ 中占据了顶点 v_1，而 Staller 占据了从 u_1 到$u_{f(k)-2}$的所有顶点。Staller 占据顶点 u_j时，支配者在 $\mathcal{C}$之外应对。现在我们来计算在 $\mathcal{C}$之外的最优步数。支配者可以占据 X 的 k 个顶点之一。对于 X之外的顶点，至多有 3^{2^k} 种不同的签名。对于不对应于大小为 2 的团的每一种签名，至多有 2^k+3 个顶点：这些顶点在 X 中具有不同的邻域，或者是需要被支配的团的最后一个顶点（每个类别至多一个）。对于大小为 2 的团，一旦支配者占据了两个具有不同邻域的顶点，根据前文所述，除非 Staller 占据某个顶点并威胁要孤立一个顶点，否则她永远不会占据团中的顶点。因此，Staller 占据 $\mathcal{C}$的顶点时，支配者在每个大小为 2 的团类别中至多走两步。综上，至多有$(2^k+3)3^{2^k}=f(k)-2$ 个有意义的顶点。支配者占据所有这些顶点后，应在 Staller 下一步之后直接在 $\mathcal{C}$ 应对。由于仍有一个$u_{f(k)-1}$ 未被占据的顶点，她可以占据该顶点，于是我们回到情形 1。$\diamond$

作为证明的最后一步，我们证明了，对于每个签名，都可以将图 G 约化为一个图，使得至多有 $f(k)$ 个团共享同一签名。由于总共至多有 3^{2^k} 个签名，且每个团至多有 2^{k+1}个顶点，因此可以将图约化为一个含有 $f(k)3^{2^k}2^{k+1}=O(3^{2^{k+2}})$ 个顶点的核。

我们回顾一下，存在核化算法等价于属于固定参数可处理。因此，以到簇图的距离为参数时，MB Dom Game 属于固定参数可处理。 □

6 反馈边数

现在我们聚焦于反馈边数。若边集 S 满足 $G\setminus S$ 是森林，则称其为反馈边集。图 G的反馈边数，记作 $fen(G)$，定义为最小反馈边集的大小。

当 Staller 先手时，我们将证明 MB Dom Game 有一个线性核。除考虑 $|V|$种可能的第一步外，在一般情形下我们仍可得到一个固定参数可处理算法。

定理 6.1。 MB Dom Game 在支配者走出第一步后，以反馈边数为参数，存在一个线性核。

推论 6.2。 MB Dom Game 以图的反馈边数为参数时属于固定参数可处理 .

该证明主要依赖这样一个事实：如果一个图的反馈边数有界，那么它要么有很多叶节点，要么大多数顶点都属于较长的诱导路径。更正式地说，我们证明了以下结构引理：

引理 6.3。 设 G 是一个至多有一个叶顶点的图。设 L 为 G 中度至少为3 的顶点集合。我们有 $|L|\leq 2fen(G)-1$。

证明。 不失一般性，设 G 连通。令 H 为通过压缩 G 中任意一个度为 2 的顶点，并移除其叶顶点（若存在）而得到的图。注意， $fen(H) = fen(G)$，且 H 的顶点恰好是 L 或 $L \setminus \{x\}$ ，其中 x 是被移除叶顶点的邻点。 H 的所有顶点的度都至少为 3，因此我们有 $|E(H)| \geq \frac{3}{2}|V(H)|$。由于 $|E(H)| - |V(H)| + 1 = fen(H)$，将该等式减去前一个等式可得 $|V(H)| - 1 \geq \frac{3}{2}|\bar{V}(H)| - fen(H)$。最后，我们得到$2fen(H) - 2 = 2fen(G) - 2 \geq |V(H)|$。由于放回叶顶点至多会产生一个度为 3 的顶点，因此有 $2fen(G) - 1 \geq |L|$。

□

证明的主要引理如下，它指出图中的长路径可以缩短。证明依赖于这样一个事实：在路径上走出第一步后，可以将路径分开，随后缩短悬挂路径，并通过相应的步数使孤立路径成为支配者的必胜局面。

引理 6.4. 设 G 是一个图， u、 v 是 G 的两个顶点。我们用 $G^{u}_{,k}{}^{v}$ 表示从 G 得到的图：在 G 上添加一条包含 k 个顶点的路径，并将 u 和 v 分别连接到该路径的两个端点。若 $k \geq 7$，则即使 G 中有些不在该路径上的顶点已被支配者占据， $G^{u}_{,k}{}^{v}$ 和 $G^{u}_{,k+2}{}^{v}$ 的结果仍相同。图 *9* 展示了一个示例。

由于将利用引理 2.9 创建孤立路径，我们首先证明：在一条路径上，如果支配者已占据一个端点，那么该路径对支配者而言是必胜的。

引理 6.5。 设 P_n 是一条阶为 n 的路径。我们有 $o(P_n, \{v_1\}, \emptyset) = o(P_n, \{v_1, v_n\}, \emptyset) = \mathcal{D}$ ，其中 v_1 和 v_n 是 P_n 的端点。

证明。 只需证明在只有 v_1 被支配者占据时该引理成立，因为根据观察2.6，当支配者还占据了 v_n 时，局面对支配者更有利。

设 P_n 是一条阶为 n 的路径。将其顶点记为 $v_1, \ldots, v_n$ ，使得 $(v_i, v_{i+1}) \in E(P_n)$。假设支配者已经占据了 v_1。如果 n 为奇数，那么 $\mathcal{P} = \{(v_{2i}, v_{2i+1})\}_{1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}}$ 为支配者提供了一种获胜的配对策略。如果 n 为偶数，那么 $\mathcal{P} = \{(v_{2i-1}, v_{2i})\}_{2 \leq i \leq \frac{n}{2}}$ 为支配者提供了一种获胜的配对策略。因此， P_n 的结果为 $\mathcal{D}$。

□

引理 6.4 的证明使用了另一个更具体的引理来处理较长的悬挂路径：

引理 6.6. 设 G 是一个图，且 $k \geq 3$。我们将通过在 k 个顶点 $((v_1, \ldots, v_k))$ 上添加一条悬挂路径，并将 v_1 与 u 相连而得到的图记为 G^u_k 。设 $G_k = (G^u_k, D, S)$ 是 G^u_k 上的一个局面，其中顶点 $\{v_1, ..., v_k\}$ 中唯一已被认领的顶点是 v_k，且由支配者认领。若支配者在局面 G_k 中获胜，那么对于任意 $k' \geq 1$，她在所有局面 $G_{k'} = (G^u_k, D \setminus \{v_k\} \cup \{v_{k'}\}, S)$ 中也都能获胜。

证明。 当 $k' < k$ 时，结论显然成立：支配者在 G_k 中的极小支配集，就是 $G_{k'}$ 的极小支配集（限制在未占有顶点上）。因此，支配者只需沿用她在较小图中的策略。如果某个时刻她必须认领一个不属于 $G_{k'}$ 的顶点，她只需认领任意一个未占有顶点。

We n现在证明 $k' = k + 1$ 的结果。通过归纳法，即可证明所有 $k' \geq k$ 的结果。

支配者按照她在 G_k 中的策略进行，直到 $X = \{v_1, ..., v_k\}$ 中的某个元素被占据。注意到，只需交换集合 D 和 S，我们就可以假设这是第一步。

- 首先假设是支配者占据了 X 中的一个顶点 v_j 。然后，利用引理 2.9，博弈 G_k（分别为 G_{k+1}）被分成两个博弈： G_j ，以及一条含有 $k - j + 1$（分别为 $k - j + 2$）个顶点的路径，其中只有两个端点被支配者占据。由于在 G_k 中， v_j 是支配者的最优步，因此她在 G_k 中作为后手进行且 v_j 被支配者占据时能够获胜。因此，根据引理 2.4，她在 G_j 中作为后手也能获胜。根据引理 6.5，对于任何端点被支配者占据的路径，她作为后手也能获胜，因此她在 G_{k+1} 中占据 v_j 即可获胜。
- 现在假设是 Staller 在 X 中占据了一个顶点 v_j 。若 $j > 1$，则支配者占据 v_{j-1} （根据假设，该顶点尚未被占据）。和之前一样，博弈 G_{k+1} 被分成一条路径（其一个端点由支配者占据，支配者后手可获胜，见引理 6.5）以及博弈 G_{j-1} ，后者

对支配者后手而言是必胜的（因为 $1 \le j-1 \le k$，并且根据证明中的第一条注记）。因此，根据引理 2.4，支配者后手可在这个并中获胜。

现在假设 $j=1$：Staller 声明 v_1。如果 u 尚未被声明，支配者声明 u 并获胜，因为 $(G,\ D\cup\{u\},\ S)$ 作为 G_k 的子图，对于后手行动的支配者而言是一个获胜局面；G_k 的结果为 $\mathcal{D}$，且有一条路径的一个端点已被支配者声明，根据引理 6.5，其结果为 $\mathcal{D}$。如果 u 已经被支配者声明，支配者可以在 G作出应对，我们得到相同的结果。否则，如果它已被 Staller 声明，那么在两个博弈中，支配者都必须在 v_2 作出应对，因为 $k \ge 3$ 和 v_1 需要被支配。然后，根据关于 G的假设和引理 6.5，两个博弈都分裂成结果为 $\mathcal{D}$ 的两个连通分支。

□

现在我们可以证明引理 6.4。

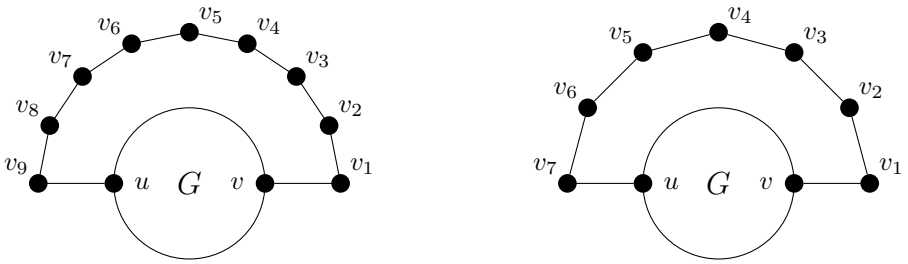


图 9：两个 等价图，使用引理 6.4。在左侧，它是 $G^{u,\ v}_{,\ 9}$。在右侧，它是 $G^{u,\ v}_{,\ 7}$

引理 *6.4* 的证明。记 P_k 为连接到 u 和 v 的路径，并记 D 为支配者在 G 中已经占据的顶点集合。

首先假设支配者在 $G^{u,\ v}_{,k}$ 中有一个必胜策略 $\mathcal{S}$，并且她已经占据了 D。我们证明支配者在 $G^{u,\ v}_{,k+2}$ 中获胜。若轮到她走第一步，而 Staller 在 G 中落子期间，支配者便按照 $\mathcal{S}$ 在 G 中应对。如果在 P_{k+2} 上尚未有任何顶点被选取之前，支配者选了 u 或 v，那么根据引理 2.9，我们可以将这个顶点拆分。随后应用引理 6.6，可以从这条路径上删去两个顶点，并直接得到所需结果。因此，我们可以假设 u 和 v 尚未被占据，或已被 Staller 占据。我们考察首次必须在 P_k 上落子，或在 P_{k+2} 上落子的时刻。

- 如果 $\mathcal{S}$ 希望支配者在 P_k 中占据顶点，我们将 P_k 中的顶点记为 $v_1,\dots,v_k$，使得 $\mathcal{S}$ 令支配者选择 v_i 时 i 最小。支配者在 P_{k+2} 中选择 v_i。现在，根据引理 2.9，我们可以将这条路径拆成两条，长度分别为 i 和 $k+3-i$：移除 v_i，并以两个由支配者占据、且分别连接到其邻点的叶节点取代它。接着，根据引理 6.6，由于 i 或 $k+3-i$ 大于 3（因为 $k \ge 7$），我们可以将这两条路径之一缩短两个顶点（或将两条路径各缩短一个顶点）。然后，再次使用引理 2.9，所得图的结果与在 P_k 中选择 v_i 时相同，由此证明完毕。

- 如果 Staller 在 P_{k+2} 中先行，我们将 P_{k+2} 的顶点记为 v_1、……、v_{k+2}，使得 Staller 下在 v_i，且 i 最小。假设 v_1 与 u 相连。根据 i 的取值，会出现以下情况：

  – 如果 $i \ge 2$，Dominator 在 $\mathcal{S}$ 中必须下在 v_i 的一个邻点上，否则 Staller 会占据 v_{i-1} 或 v_{i+1}，并威胁在下一步使一个顶点孤立。

  因此，支配者可以在 P_k（v_{i-1} 或 v_{i+1}）中占据同一个顶点。现在，根据引理 2.8，v_i 可以被移除。由于 $k \ge 7$，在路径 v_{i+1}、……、v_{k+2}上，如果支配者已占据 v_{i+1}，我们可以应用引理 6.6；如果她已走 v_{i-1}，则可以应用引理 2.10，从而由归纳法得到结论。

– 如果 $i = 1$，支配者必须占据 $\{u, v_2, v_3\}$中的一个顶点，否则 Staller 可以占据 v_2，并通过占据 u 威胁使 v_1 孤立，或通过占据 v_3 威胁使 v_2 孤立（如果他已经占据 u，则直接获胜）。因此，走出这一步后，我们可以使用引理 2.9 将这个顶点拆分。再次，如果支配者已占据 u，则根据引理 2.10 得出结论。如果支配者已占据 v_2 或 v_3，则根据引理 6.6 得出结论。

现在假设支配者有一个必胜策略 $G^{u,\ v}_{k+2}$ 其中她已经占领了 D 的顶点。我们证明支配者在 $G^{u,\ v}_{k}$ 中获胜。轮到她走时，她的第一步若在G中，则在 Staller 于G中落子期间，支配者按照 $\mathcal{S}$ 在 G 中应对。如果在 P_k上尚未有任何顶点被落子之前，支配者已经落子于 u 或 v，根据引理 2.9，我们可以将该顶点拆分。然后，应用引理 6.6 于 $G^{u,\ v}_{k}$，我们可以在这条路径上添加两个顶点，从而直接得到所需结果。因此，我们可以假设 u 和 v 要么尚未被占领，要么已被 Staller 占领。我们考虑首次必须在 P_{k+2} 上落子，或在 P_k 上落子的时刻。

- 如果 $\mathcal{S}$ 希望支配者在 P_{k+2} 中占领顶点，我们将 P_{k+2} 的顶点记为 v_1，……，v_{k+2}，使得 $\mathcal{S}$ 令支配者选择 v_i，且 i 最小。支配者在 P_k 中落子于 v_i。现在，根据引理 2.9，我们可以将这条路径拆成两条路径，长度分别为 i 和 $k+1-i$：移除 v_i，并用两个由支配者占领、且与其邻居相连的叶节点替代它。然后，根据引理 6.6，由于i或 $k+1-i$大于 3（因为 $k \geq 7$），我们可以在这两条路径中的一条上添加两个顶点。接着再次运用引理 2.9，所得图的结果与在 P_{k+2}中落子于 v_i 时相同，由此证明得证。

- 如果 Staller 先在 P_k 中认领，我们将 P_k 的顶点记为 v_1，……，v_k，使得 Staller 下在 v_i，且 i 最小。假设 v_1 与 u 相连。根据 i 的取值，会出现以下情况：

  – 如果 $i \geq 2$，支配者在 $\mathcal{S}$ 中必须下在 v_i 的某个邻点上，否则 Staller 会认领 v_{i-1} 或 v_{i+1}，并威胁在下一步使一个顶点孤立。因此，支配者可以在 P_k 中认领同一个顶点（即 v_{i-1} 或 v_{i+1}）。现在，根据引理 2.8，可以删除 v_i。由于 $k \geq 7$，在路径 v_{i+1}，……，v_k 上，如果支配者已认领 v_{i+1}，我们可以应用引理 6.6；如果她下在 v_{i-1}，则可以应用引理 2.10，从而由归纳法得到结论。– 如果 $i = 1$，支配者必须认领 $\{u, v_2, v_3\}$ 中的一个顶点，否则 Staller 可以认领 v_2，并威胁通过认领 u 使 v_1 孤立，或者通过认领 v_3 使 v_2 孤立（如果他已经认领了 u，则直接获胜）。因此，在这一步之后，我们可以应用引理 2.9 将这个顶点拆分。再次，如果支配者已认领 u，则由引理 2.10 得出结论。如果支配者已认领 v_2 或 v_3，则由引理 6.6 得出结论。

最后，我们证明了如果支配者在 $G^{u,\ v}_{k}$ 或 $G^{u,\ v}_{k+2}$中的一个上拥有必胜策略，那么她在两者上都拥有必胜策略，从而证明它们具有相同的结果。 □

利用这些引理，我们终于可以证明定理 6.1。

定理 6.1 和推论 6.2 的证明。 设 G 为一个图，且令 $k = fen(G)$。令 $n = |V(G)|$。只需考虑支配者第一步之后所达到的 $O(n)$ 局面，不妨设现在轮到 Staller 行动。根据引理 2.10，Staller 占据所有叶节点的未被占据的邻居，从而在每次行动于所连接的叶节点上之后，迫使支配者作出回应。应用引理 2.8，并移除与支配者第一步相连的叶节点——这些叶节点现在不属于任何极小支配集——我们可以假设所得的图至多有一个叶顶点；如果有，则该叶顶点已由支配者占据。

根据引理 6.3，所得的图中度为 3 或更高的顶点至多有 $2k - 1$ 个。现在，通过应用引理 2.9，我们可以拆分支配者的第一个顶点，将其转换为一组叶节点，同时不改变任何其他顶点的度，也不改变未占有顶点的数量。此时，已经被支配者占有的唯一顶点是悬挂路径的叶节点。因此，根据引理 6.4 和引理 6.6，我们可以将该图中仅包含度为 2 的顶点的任意路径缩短为阶至多为 7 的路径。

所得的图仍然有一个阶为 k 的反馈边集，且至多有一个叶顶点。因此，移除反馈边集后，我们得到一个森林，其中度至少为3的顶点至多有 $2k$ 个，叶节点至多有 $2k$ 个。由于度为2的顶点所构成的路径长度至多为7，这棵树中度为2的顶点至多有 7($4k - 1$) 个。最后，它有 $O(k)$ 个顶点。因此，给定的核是线性的。

最后，我们证明了，在支配者走出第一步之后，该博弈有一个线性核。考虑支配者不同的第一步只会使复杂度增加一个因子 n，因此，对于反馈边集大小为 k 的图，存在一个固定参数可处理算法来判定胜者。□

7 结论与开放问题

本文从各种参数的角度研究了 Maker-Breaker 支配博弈的参数化复杂性。对于步数这一自然参数，我们证明了：判定 Staller 是否能在 k 步内使一个顶点孤立，以及判定支配者是否能在 k 步内占据一个支配集，关于 k 分别是 W[1]-完全和 W[2]-完全的。实际上，我们证明了一个更强的结果：在 Maker-Breaker 位置博弈中，判定 Breaker 是否能在 k 步内占据一个横截集，是关于 [2]的 W[2]-完全问题。这与 Maker 必须在 k 步内占据一条超边的情形形成对比，后者已知是 W[1]-完全的。

此外，由于 $\textsc{Short}_{\textsc{Dominator}}$ MB Dom Game 和 $\textsc{Short}_{\textsc{Staller}}$ MB Dom Game 可以表示为一阶逻辑公式，根据 Grohe等人 [21]的元定理，它们可以在处处稀疏图上于固定参数可处理时间内求解，其中参数为步数 k。类似地，利用 Courcelle 的元定理 [9], ，我们得到 $\textsc{Short}_{\textsc{Dominator}}$ MB Dom Game 和 $\textsc{Short}_{\textsc{Staller}}$ MB Dom Game 可以在树宽为 t的图上，于时间 $O(f(k,\ t)\ \cdot n)$ 内计算。然而，这种方法要求将步数作为参数，而仅以输入图的树宽为参数时， MB Dom Game 的复杂度仍是开放问题。即使在树宽为 2 的图上，如 [4], 中所述，我们仍不知道是否存在用于计算结果的多项式算法（但对于外平面图，已有多项式时间算法）。注意，由于量化布尔公式在有界树宽公式上已经是 PSPACE 完全的，因此不太可能通过模型检测论证获得正面结果 [1]。

我们还研究了若干结构参数下的参数化复杂性，其中包括模宽、 P_4-少数性、到簇图的距离以及反馈边数，并为这些参数给出了固定参数可处理算法。对于模宽，本文给出的证明并未得到一个核。因此，可以尝试为该参数构造多项式核。由于这种方法主要依赖于引理 2.12 的应用，而且据我们所知，在位置博弈的复杂性研究中，从未有人用一个结果相同的较小图替换图中的模，因此这或许是一种证明位置博弈在模宽参数下固定参数可处理的新方法：为其他位置博弈给出类似于引理 4.1 的引理。

我们研究了到簇图的距离。由于簇图上的支配者很容易获胜，我们不禁会想，对于其他能够在多项式时间内确定胜者的图类，情况会如何。例如，若考虑反馈顶点集而非反馈边集，就能以顶点数而非边数来衡量到森林的距离。这个参数似乎有些难以处理，因为我们无法像利用反馈边集那样，用它来界定大度数顶点的数量。第一步可以考虑到星图并集的距离。

最后， [32], 证明了支配博弈在有界度图上仍然是 PSPACE 完全的，而 [4], 证明了支配者在正则图上总是获胜。在次三度图上进行的 MB DomGame 的复杂度是一个值得研究的问题，因为支配者的步数可能很快就会受到限制。此外，闭邻域所对应的底层超图的秩为 4，而一般而言，计算位置博弈 [18]的结果是 PSPACE 完全的。

参考文献

[1] Albert Atserias 和 Sergi Oliva。有界宽度 QBF 是 PSPACE 完全的。载于*J. Comput. Syst. Sci.*，2012年。

[2] Luitpold Babel、Ton Kloks、Jan Kratochvíl、Dieter Kratsch、Haiko Müller 和 Stephan Olariu。针对 p4 数量较少的图的高效算法。*Discrete Mathematics*，235(1-3):29–51，2001。

[3] Luitpold Babel 和 Stephan Olariu。关于 p4 数量较少的图的结构。《离散应用数学》，84(1-3):1–13，1998。[4] Guillaume Bagan、Eric Duchêne、Valentin Gledel、Tuomo Lehtilä 和 Aline Parreau。Maker-Breaker 支配博弈的划分策略，2024年。[5] ´Edouard Bonnet、Serge Gaspers、Antonin Lambilliotte、Stefan Rümmele 和 Abdallah Saffidine。位置博弈的参数化复杂性。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Piotr Indyk、Fabian Kuhn 和 Anca Muscholl 编，第四十四届国际自动机、语言与编程学术会议（ICALP 2017），莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）第80卷，第90:1–90:14页，德国 Dagstuhl，2017年。Dagstuhl 城堡——莱布尼茨信息学中心。[6] Victor Campos、Cláudia Linhares-Sales、Rudini Sampaio 和 Ana Karolinna Maia。针对 p4 数量较少的图的最大化着色问题。《离散应用数学》，164:539–546，2014年。[7] Victor Campos、Cláudia Linhares-Sales、Rudini Sampaio 和 Ana Karolinna Maia。针对 p4 数量较少的图的最大化着色问题。《离散应用数学》，164:539–546，2014年。LAGOS'11：第六届拉丁美洲算法、图与优化研讨会，阿根廷巴里洛切——2011年。[8] Eurinardo Costa、Nicolas Martins 和 Rudini Sampaio。追捕—逃逸博弈中的算法、困难性与图乘积。arXiv 电子印本，第 arXiv–2110 页，2021年。[9] Bruno Courcelle。图的单子二阶逻辑。一、有限图的可识别集合。《信息与计算》，85(1):12–75，1990年。[10] Rod G. Downey 和 Michael R. Fellows。固定参数可处理性与完全性 I：基本结果。《SIAM计算杂志》，24(4):873–921，1995年。[11] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。《参数化复杂性》。纽约施普林格出版社，1999年。[12] Rodney G Downey、Michael R Fellows 和 Kenneth W Regan。描述复杂性与 W 层次。载于《证明复杂性与可行算术》，第119–134页。Citeseer，1996年。[13] Jan Dreier、Ioannis Eleftheriadis、Nikolas Mahlmann、Rose McCarty、Michal Pilipczuk 和 Szymon Torunczyk。单子稳定图类上的一阶模型检验。载于2024年 IEEE 第65届年度计算机科学基础研讨会（FOCS），第21–30页，美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯，2024年10月。IEEE计算机学会。[14] Eric Duchêne、Valentin Gledel、Fionn Mc Inerney、Nicolas Nisse、Nacim Oijid、Aline Parreau 和 Miloš Stojaković。图边集上的 Maker-Breaker 博弈的复杂度，2023年。[15] Eric Duchêne、Valentin Gledel、Aline Parreau 和 Gabriel Renault。Maker-Breaker 支配博弈。《离散数学》，343，2020年。[16] Paul Erdős 和 John L. Selfridge。关于一种组合博弈。《组合理论杂志》，14:298–301，1973年。[17] Jörg Flum 和 Martin Grohe。参数化复杂性类的描述。《信息与计算》，187(2):291–319，2003年。[18] Florian Galliot。4-一致的 Maker-Breaker 和 Maker-Maker 博弈是 PSPACE 完全的，2025年。[19] Florian Galliot、Sylvain Gravier 和 Isabelle Sivignon。Maker-Breaker 博弈的结构工具。对秩3超图的应用：策略与可处理性。CoRR，abs/2209.12819，2022年。[20] Guilherme C. M. Gomes 和 Ignasi Sau。寻找有界度割：复杂度、固定参数可处理性与精确算法，以及核化。《算法》，83(6):1677–1706，2021年6月。

[21] Martin Grohe、Stephan Kreutzer 和 Sebastian Siebertz。一阶性质的判定：处处稀疏图。第四十六届美国计算机协会计算理论年度研讨会论文集，2013年。[22] Yuri Gurevich、Larry Stockmeyer 和 Uzi Vishkin。求解几乎是树的图上的 NP难问题及其在设施选址问题中的应用。《美国计算机协会学报》，31(3):459–473，1984年6月。[23] Alfred W. Hales 和 Robert I. Jewett。正则性与位置博弈。《美国数学会汇刊》，106:222–229，1963年。[24] Tatsuhiko Hatanaka、Takehiro Ito 和 Xiao Zhou。带图参数的列表着色重配置问题的参数化复杂性。《理论计算机科学》，739:65–79，2018年。[25] Dan Hefetz、Michael Krivelevich、Milo˘s Stojakovi´c 和 Tibor Szab´o。位置博弈，第44卷。施普林格，2014年。[26] Chinh T Hoang。完美图。博士论文，计算机科学学院，麦吉尔大学，蒙特利尔，1985年。[27] Beverly Jamison 和 Stephan Olariu。P4稀疏图的树表示。《离散应用数学》，35(2):115–129，1992年。[28] Beverly Jamison 和 Stephan Olariu。图的 P-分量与齐次分解。《*SIAM*离散数学杂志》，8(3):448–463，1995年。[29] Leon Kellerhals 和 Tomohiro Koana。测地集的参数化复杂性。载于 Yixin Cao 和 Marcin Pilipczuk（编），第十五届参数化与精确计算国际研讨会（*IPEC 2020*），莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*）第180卷，第20:1–20:14页，德国 Dagstuhl，2020年。Dagstuhl 城堡——莱布尼茨信息学中心。[30] Michael Lampis。针对树宽限制的算法元定理。《算法》，64(1):19–37，2012年。[31] Nacim Oijid。图上位置博弈的复杂性。博士论文，里昂第一大学 Claude Bernard，2024年。[32] Nacim Oijid。有界度量化布尔公式与位置博弈。载于 Irene Finocchi 和 Loukas Georgiadis（编），算法与复杂性，第121–135页，查姆，2025年。施普林格自然瑞士。[33] Marc Tedder、Derek Corneil、Michel Habib 和 Christophe Paul。通过递归因子分解排列实现更简单的线性时间模分解。载于 Luca Aceto、Ivan Damg˚ard、Leslie Ann Goldberg、Magn´us M. Halld´orsson、Anna Ing´olfsd´ottir 和 Igor Walukiewicz（编），自动机、语言与编程，第634–645页，柏林、海德堡，2008年。施普林格柏林海德堡。[34] ´Edouard Bonnet、Florian Jamain 和 Abdallah Saffidine。连接博弈的复杂性。《理论计算机科学》，644:2–28，2016年。《计算机博弈最新进展》。