arXiv:2601.08566v1 [cs.CG] 13 Jan 2026

最稀疏割（切格常数）。解决这个问题的一种自然方法是将模型视为图 $G = (V, E)$，并计算

1.2. 我们的方法

我们的出发点是正式定义什么构成一个良好的颈部切割。直观地说，它是一条能够围成较大面积、同时自身长度较短的曲线。在平面中，当周长固定时，能够围成的最大面积是一个圆盘。这个看似简单的观察是著名等周不等式的结果。该不等式表明，对于平面中的任意区域 R 以及半径为 r的任意圆盘 d，都有

$$\frac{\mathsf{m}(R)}{\|\partial R\|^2} \leq \frac{\mathsf{m}(d)}{\|\partial d\|^2} = \frac{\pi r^2}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi},$$

其中 $\mathsf{m}(R)$ 表示 面积 R，而 $\|\eta\|$ 表示 长度，曲线 η 的长度。我们将左侧的比值视为 等周比，即 R 的边界的等周比。一个良好的颈部切割应具有较高的比值。曲面上的一条曲线所围成的面积可能远大于其周长；但与平面不同，我们必须考虑曲线所围成的两侧。因此，曲面（零亏格）上一条闭曲线的 紧致度，是其所围成的两个区域的等周比中的较小值。

计算紧致度。遗憾的是，要在曲面上计算（甚至近似计算）最紧致环，似乎无法通过高效算法实现。尽管如此，它仍为我们提供了一种易于计算的评分

$$\rho(\sigma) = \frac{\mathrm{m}\big(\mathrm{int}(\sigma)\big)}{\|\sigma\|^2},$$

其中，$\mathrm{int}(\sigma)$ 位于由 σ 围成的内部区域内，$\mathrm{m}\big(\mathrm{int}(\sigma)\big)$ 是其面积，而$\|\sigma\|$是 σ的长度。这个比值可以任意小（例如，考虑一个边界很长但面积很小的曲折形状）。等周不等式指出，对于圆盘，这个比值取得最大值，且等号成立。也就是说，等周不等式指出，对于任意闭合平面曲线 σ，有 $\rho(\sigma) \leq \frac{1}{4\pi}$.

—

在三维空间中的有限曲面上（例如零亏格曲面），自然的做法是尝试计算一条尽可能短的曲面闭曲线，使其将曲面面积分成两个“大”部分。举个具体例子，人类手指根部的自然环——它甚至远不能将曲面（即人体模型）大致均分。然而，直觉上它确实是一条很好的颈部切割。

紧致度。为了克服曲面 $\mathcal{M}$ （例如亏格 0 曲面）上的这一问题，我们定义一种等周比的变体。

定义 2.1。对于亏格为零的曲面 $\mathcal{M}$ 上 $\mathbb{R}^3$ 的一个区域 $\mathcal{b} \subseteq \mathcal{M}$，令 紧致度为$\mathcal{b}$的比值

$$\langle \mathcal{b} \rangle = \frac{\min\big(\mathrm{m}(\mathcal{b}), \mathrm{m}(\overline{\mathcal{b}})\big)}{\|\partial b\|^2},$$

其中，$\partial\mathcal{b}$ 是b的边界，$\mathrm{m}(\mathcal{b})$ 是 b的面积，$\mathcal{b}$ 的补集是 $\mathrm{b} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{b}$，且 $\|\partial \mathcal{b}\|$表示 $\partial\mathcal{b}$的长度。特别地，对于闭曲线 η，它将曲面分成两个部分 $\mathcal{b}$和 $\mathcal{b}$，其紧致度为$\langle \eta \rangle = \langle \mathcal{b} \rangle$。

问题 2.3。给定一个曲面 $\mathcal{M}$，求一个区域 b，使其紧致度 $\langle b \rangle$ 尽可能大。

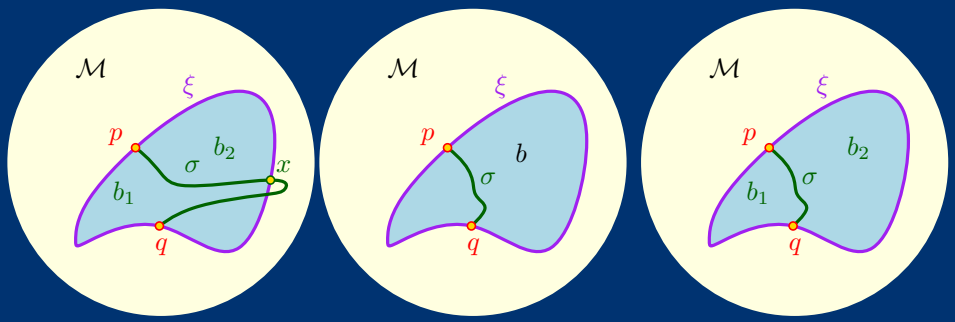

图 2.1：中图、右图：对于某个最优瓶颈 ξ，我们考察测地线 σ。左图：如果测地线在 x 处穿过 ξ，就会产生矛盾，因为沿着 ξ 抄近路会更短。

定义 2.4。设 $\mathcal{M}$ 是一个零亏格曲面，且 ξ 是 $\mathcal{M}$上的一个环。设b是 ξ 在 $\mathcal{M}$ 上所围成的区域。若区域的紧致度至少为 α，则环 ξ 是 α-瓶颈，属于$\mathcal{M}$。在$\mathcal{M}$上具有最大 α 的 α-瓶颈即为最优瓶颈切割，或简称领圈。

定义 2.7。简单环 σ 是可缩的，如果可以将 σ 连续变形为一个点。部分 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$，以及环 $\sigma \subset \mathcal{R}$，若该环 $\mathcal{R}$-可缩的，则意味着它可以在始终留在 $\mathcal{R}$内的情况下收缩为一个点。

请注意，虽然原曲面 $\mathcal{M}$ 上的任意环 σ 都是可缩的，但如果$\mathcal{M}$ 的亏格为零，它也可能不是 $\mathcal{R}$-可缩的——例如，若 $\mathcal{R}$ 是由 $\mathcal{M}$ 在 σ两侧各开一个穿孔得到的。直观来说，紧环不是局部可缩的——要把它们收缩为一个点，必须走很远。

定义 2.8。对于 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$和一个 $\mathcal{R}$-可缩环 $\sigma \subseteq \mathcal{R}$，令 $\mathcal{b}_\sigma \subseteq \mathcal{R}$表示由闭曲线 σ 围成的 $\mathcal{M}$ 部分（由 σ 围成的 $\mathcal{M}$另一部分可能包含位于 $\mathcal{R}$之外的部分）。如果 $\mathcal{R} = \mathcal{M}$，令 $\mathcal{b}_\sigma$ 表示由 σ 在 $\mathcal{M}$上界定的两个面积片中较小的那个。若对于所有 $\mathcal{R}$-可缩环 $\sigma \subset \mathcal{R}$，均有 $\mathrm{m}(\mathcal{b}_\sigma) \leq \alpha \|\sigma\|^2$，则区域 $\mathcal{R}$ 是 α-良态的。

注记 2.9。考虑一个区域 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$，其中 $\mathcal{M}$ 是 τ-扩张的，并且其中任意 $\mathcal{R}$-可缩的环 σ 都是 $((\sigma \oplus r) \cap \mathcal{R})$-可缩的，其中 $r = \tau \|\sigma\|$。那么， τ-扩张意味着 $\mathrm{m}(\mathcal{b}_\sigma) \leq \mathrm{m}(\sigma \oplus r) \leq \tau(\|\sigma\| r + r^2) \leq 2\tau^3 \|\sigma\|^2)$。也就是说， $\mathcal{R}$ 是 $2\tau^3$-性质良好的。

定义 3.1. 设 κ 是 $\mathcal{M}$ 上一条端点为 s 和 t 的“长”最短路径。对于每个点 $p \in \kappa$，考虑从 p 到其自身的最短路径 $\circlearrowleft_\kappa(p)$，如果

观察3.3。 使用同一条基路径 π 定义的两个套索不能彼此交叉。

$$\mathsf{m}(\mathscr{C}_i) \leq \alpha(\|\vartheta^\star\| + \|\varsigma\|)^2 \leq 4\alpha \|\vartheta^\star\|^2 ,$$

因为 $\|\varsigma\| \le \|\vartheta^\star\|$ ——事实上， $\vartheta^\star$ 是一条连接 p 与其自身、沿着 κ “绕行”的最短路径候选者，但 ς 才是最短的路径。

对于闭曲线 η，令$\mathcal{b}\eta$ 和$\mathcal{b}\eta$ 为由 η围成的 $\mathcal{M}$ 的两部分。注意，

$$B = \min\bigl(\mathsf{m}(\mathcal{b}_\varsigma), \mathsf{m}(\overline{\mathcal{b}}_\varsigma)\bigr) \ge \min\bigl(\mathsf{m}(\mathcal{b}_{\vartheta^\star}), \mathsf{m}(\overline{\mathcal{b}}_{\vartheta^\star})\bigr) - \mathsf{m}(\mathcal{b}_i).$$

ς的紧致度因此为 $\langle\varsigma\rangle = \dfrac{B}{\|\varsigma\|^2} \ge \min\bigl(\mathsf{m}(\mathcal{b}),\mathsf{m}(\mathcal{b})\bigr) - \mathsf{m}(\mathcal{b}_i)$

$\|\vartheta^\star\|^2 \qquad \ge \langle\vartheta^\star\rangle - \dfrac{}{4\alpha}.$

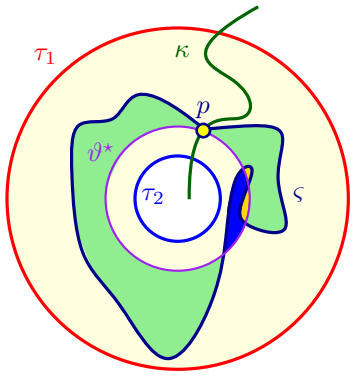

图 3.4

稍难的情况是 ς 和 $\vartheta^\star$ 有多个交点。此时，集合 $\varsigma \cup \vartheta^\star$ 构成一个排列——其中“内部”区域/面记为$\mathcal{b}_s$ ，外部面记为$\mathcal{b}_t$。因此，考虑此排列中的所有其他面 $f_1, \dots, f_k$。这些面都是可缩圆盘。令 ℓ_i 为第 i个面的边界，其中 $i = 1, \dots, k$。注意， ς 或 $\vartheta^\star$ 的每条边 e 对这些边界面的总长度贡献至多为 $2\|e\|$。因此，我们有 $\sum_{i=1}^k \ell_i \le 2(\|\varsigma\| + \|\vartheta^\star\|) \le 2\|\vartheta^\star\|$. 令$\mathcal{b}_i = (\mathcal{b}_{\vartheta^\star} \setminus \mathcal{b}_\varsigma) \cup (\mathcal{b}_\varsigma \setminus \mathcal{b}_{\vartheta^\star})$为<style id='b'>b$_{\vartheta^\star}$ 与$\mathcal{b}_\varsigma$之间的对称差区域，我们有

$$\mathsf{m}(\mathcal{b}_i) \le \sum_{t=1}^k \mathsf{m}(f_t) \le \sum_{t=1}^k \alpha\ell_t^2 = \alpha\sum_{t=1}^k \ell_t^2 \le \alpha\Bigl(\sum_{t=1}^k \ell_t\Bigr)^2 \le 4\alpha\|\vartheta^\star\|^2.$$

现在通过上述论证，并注意到 $\langle\varsigma\rangle \ge \langle\vartheta^\star\rangle - 4\alpha = \beta\bigl(1 - \frac{4\alpha}{\beta}\bigr)$，即可得出该结论。 —

4. 实用算法

我们在此介绍一种实用算法，它利用少量启发式方法，在保持高效运行的同时定位最优瓶颈曲线。该算法

我们强调，以下将网格的边长度视为构成一个图，我们的算法将在这个三角剖分图上运行。边的长度是其端点之间的欧几里得距离。

步骤 I：通过近似直径确定显著性点。 该算法首先计算网格上的一个点，该点属于网格直径的一个 2-近似：

(I) 算法在图 s 上任意选取一个点。(II) 算法使用 Dijkstra 从 s 计算最短路径树 T_s。令 u 为与 s 距离最大的叶节点。(III) 算法再次使用 Dijkstra 从 u 计算最短路径树 T_u。令 v 为与 u 距离最大的叶节点。点对 u 和 v 是网格直径的一个 2-近似（限定为沿边的路径时）

观察 4.1。 对于 r 常数，在假设网格中的顶点度数有界的情况下，上述算法的运行时间为 $O(n\log n)$。事实上，该算法需要多次运行 *Dijkstra* 算法，并对每个候选显著性点执行深度至多为 r 的局部广度优先搜索。

4.2. 寻找瓶颈曲线

4.2.1. 从最短路径生成候选颈部切割

考虑一条最短路径 π。该算法从某个顶点 $v \in \pi$ 出发，运行最短路径算法以返回该顶点自身，同时禁止使用 π 上的任何顶点，从而避免最短路径算法穿过 π。也就是说，该算法沿着 π“切开”曲面，计算从 p 到其位于 π另一侧的副本、绕过π 的最短路径。这条路径是一个相对于 π的测地线环，其中包含 v。此过程会沿着 π，根据各环的基顶点 p，生成一个有序环序列 Π。任务是

—

4.2.2. 计算骨架：一小组最短路径

要使用上述算法计算颈部切割，我们需要向其提供要处理的最短路径。一个自然但简单的做法是，尝试集合 C 中显著点两两之间的所有最短路径对。为了减少

路径的数量，我们计算显著点的一个“廉价”骨架。此类骨架的一个自然候选者是 C 在$\mathcal{M}$这些点的斯坦纳树，但遗憾的是，计算精确的斯坦纳树 NP-Complete。为避免这种情况，我们使用启发式算法来构造这样的树。算法从近似直径点对 u 和 v 开始，并用最短路径将它们连接起来。随后，算法迭代地将其余点加入已构建的图中，把第 i个显著点连接到目前构建的树上与其最近的邻点，并将这条连接路径加入已计算的最短路径集合；这些路径的并集就是所计算出的骨架。然后，我们使用这些路径和上述过程来生成优质的颈部切割。

备注 4.2。这里描述的算法并不保证其近似质量。稍微谨慎一些，就能得到 2-近似。具体而言，假设集合 $C = \{s_1, \ldots, s_k\}$。在第 i 次迭代中，对于 $i = 2, \ldots k-1$，算法会计算 $C \setminus C_i$ 中距离 $C_i = \{c_1, \ldots, c_i\}$ 最近的点。这一步只需运行一次 Dijkstra 算法即可完成，并将该点记为 c_{i+1}。随后，算法计算从 c_i 到 T_{i-1} 的最短路径（即前 $i-1$ 次迭代中构造的树），并将这条路径加入该树，得到新树 T_i。可以将该算法视为在 C 上的诱导完全图上运行普里姆算法（边权是模型上相应点之间的最短路径距离）。显然，构造出的树 T_k 的权重不超过该最小生成树，而后者是最优斯坦纳树的 2-近似。该算法的运行时间为 $O(kn\log n)$。我们没有实现这个确切的变体，因为它在实践中似乎并无明显影响。

4.3. 运行时间分析

计算候选点集合需要 $O(n\log n)$ 时间，用于运行最短路径算法和进行 r-深度筛选。令 $k = |C|$ 和 $|K|$ 为骨架中的顶点数。计算骨架本身需要 $O(kn \log n)$ 时间。大部分时间花在计算路径上的环上，这需要 $O(|K|n\log n)$ 时间。实际上，这快得多，因为我们运行的是一个 st-最短路径算法，它会提前终止。

实践中还可以采用其他优化措施，进一步加快环搜索。主要是，沿每条路径计算环并不依赖于 K 中其他路径的数据。也就是说，利用并行性可以独立计算每条路径，从而使运行时间受可用核心数量和最长



图 5.2：输入 1 和 2

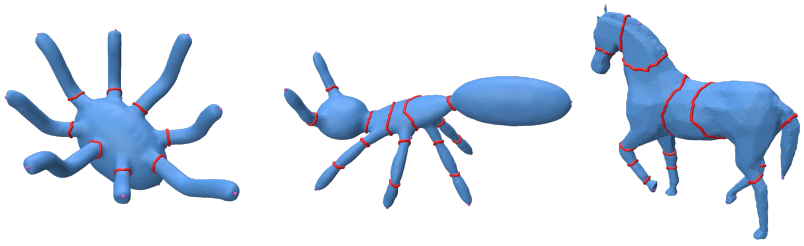

图 5.3：输入 3、4、5

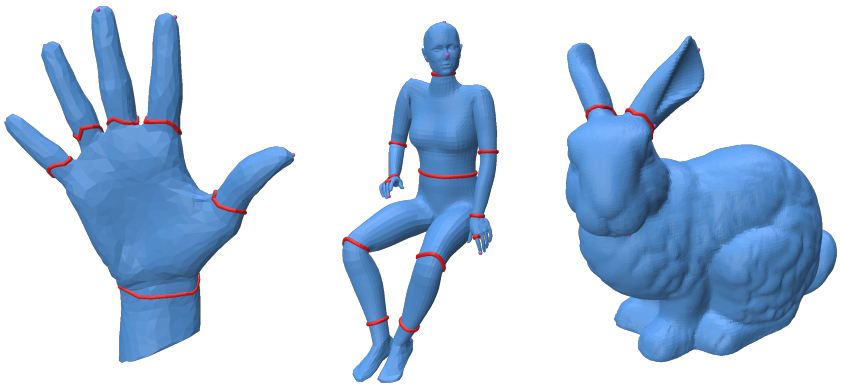

图5.4：输入 6、7、8

		运行时间（毫秒）			
输入	#	显著性	环	紧致度	总计
1	21	182	4,252	398	4,833
2	22	185	5,428	413	6,026
3	12	89	1,352	129	1,570
4	11	43	578	57	678
5	9	35	516	37	588
6	6	11	98	6	115
7	7	42	496	28	567
8	9	226	8,151	230	8,607

表 5.2：算法在选定输入上的运行时间。运行时间对发现的点数很敏感，表中也列出了点数。在此，$r = 20$ 用于显著点筛选。# 列表示计算出的显著点数量。显著性列表示发现显著点集合并将其连接成骨架所需的时间。环列表示沿骨架发现每个环所需的时间。紧致度列表示面积计算、紧致度计算和环筛选所需的时间。