arXiv:2601.08582v1 [math.CA] 13 Jan 2026

L^p 收敛性：傅里叶–赫克曼–奥普丹展开

Béchir Amri

数学系，理学院。泰巴大学，麦地那，沙特阿拉伯。电子邮箱：
bamria@taibahu.edu.sa,

摘要

我们研究关于 A_1型非对称赫克曼–奥普丹多项式的傅里叶展开的 L^p收敛性。利用核估计和对偶论证，我们证明部分和在 $L^p([-\pi,\pi],\ dm_k)$ 中收敛，其中

$$2-\frac{1}{k+1}<p<2+\frac{1}{k}.$$

这将三角傅里叶级数的经典 L^p 收敛结果推广到了赫克曼–奥普丹框架。

1 引言

长期以来，傅里叶分析一直是调和分析和数学物理中的核心工具。特别是，傅里叶级数在 L^p -空间中的收敛性是一个经典课题，与正交多项式和特殊函数 [1, 4, 5]有着深刻联系。近几十年来，将经典傅里叶分析推广到与根系和反射群相关的情形，引起了广泛关注。Heck- man–Opdam 多项式为经典 Jacobi 多项式提供了自然的推广，并作为 Cherednik 型微分差分算子的特征函数出现[2, 3]。 A_1 型非对称赫克曼–奥普丹多项式构成 $L^2([-\pi,\pi],dm_k)$ 的正交基， $dm_k(x)=|\sin x|^{2k}dx$，并展现出丰富的代数与解析结构，包括与非对称 Jack 多项式的密切关系。在本文中，我们研究关于非对称赫克曼–奥普丹多项式的傅里叶展开的 L^p-收敛性。具体而言，对于 $f\in L^p([-\pi,\pi],dm_k)$，我们考虑其傅里叶–Heckman–Opdam 展开，并研究其部分和的收敛性。沿用 [5], 中发展的方法，并结合积分核表示与适当的估计，我们证明部分和收敛到 f，其

$$2-\frac{1}{k+1}<p<2+\frac{1}{k}.$$

关键词：Heckman-Opdam 多项式、正交多项式、积分算子 .
2020 年数学主题分类：33C52、33C45、42B10。

2 A_1 型非对称Heckman-Opdam多项式

我们首先回顾并介绍关于 A_1型非对称赫克曼–奥普丹多项式的若干结果。关于与任意根系相关的 Heckman–Opdam 多项式的一般理论，可参阅标准文献[2, 3]。

设 $k \geq 0$， A_1 型的 Cherednick 算子定义为

$$T^k(f)(x) = \frac{df}{dx}(x) + 2k\,\frac{f(x) - f(-x)}{1 - e^{-2x}} - kf(x), \qquad f \in C^1(\mathbb{R}). \tag{2.1}$$

定义权函数

$$dm_k(x) = |\sin x|^{2k} dx$$

以及 $L^2([-\pi, \pi], dm_k(x))$ 上的内积

$$(f, g)_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dm_k(x),$$

w及其伴随范数 $\|.\|_{2,k}$。引入 $\mathbb{Z}$ 上的偏序 $\lhd$，如下所示：

$$j \lhd n \Leftrightarrow \begin{cases} |j| < |n| \text{ and } |n| - |j| \in 2\mathbb{Z}^+, \\ or, \\ |j| = |n| \text{ and } n < j. \end{cases} .$$

非对称Heckman-Opdam多项式 E_n^k, $n \in \mathbb{Z}$ 由以下条件刻画：

$$(a) \qquad E_n^k(z) = \mathrm{e}^{nz} + \sum_{j \lhd n} c_{n,j}\, \mathrm{e}^{jz}, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

$$(b) \qquad (E_n^k(\mathrm{i}x), \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx})_k = 0, \quad \text{for any } \ j \lhd n. \tag{2.3}$$

由 [7] 中的推论 5.2 和命题 6.1 可知，系数 $c_{n,\ j}$ 均为实数且非负。多项式 E_n^k 同时对角化 Cherednik 算子。特别地，它们满足

$$T^k(E_n^k) = n_k\, E_n^k, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4}$$

其中，当 $n > 0$ 时 $n_k = n + k$，当 $n \leq 0$ 时 $n_k = n - k$。我们注意到，

$$E_0^k(x) = 1, \quad \text{and} \quad E_1^k(x) = e^x. \tag{2.5}$$

此外，三角多项式族 $\{E_n^k(ix) \ \ n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2([-\pi, \pi], \ dm_k(x))$ 的一组正交基。

Heckman-Opdam-Jacobi多项式 P_n^k, $n \in \mathbb{Z}_+$ 定义为

$$P_n^k(x) = \frac{1}{2}\Big(E_n^k(x) + E_n^k(-x)\Big),$$

并且它们满足

$$(T^k)^2 P_n^k = (n+k)^2 P_n^k.$$

特别地， P_n^k 是算子 L_k的特征函数，它与由下式给出的$(T^k)^2$, 的偶部一致：

$$L_k(f) = f'' + 2k\,\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\,f'(x) + k^2 f(x)$$

Heckman-Opdam-Jacobi多项式可通过超几何函数 ${}_2F_1$ 表示为

$$P_n^k(x) = P_n^k(0)\ {}_2F_1(n+2k, -n, k+1/2, -\sinh^2(x/2)) \tag{2.6}$$

其中，对于所有 $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$P_n^k(0) = E_n^k(0) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+2k)}{\Gamma(2k+1)\Gamma(n+k)} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(n+2k)}{2\Gamma(2k)\Gamma(n+k)}.$$

它们也可以用超球（Gegenbauer）多项式C_n^k 表示为

$$P_n^k(ix) = \frac{P_n^k(0)}{C_n^k(1)} C_n^k(\cos x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(2k+1)}\frac{n!}{\Gamma(n+k)} C_n^k(\cos x). \tag{2.7}$$

这里，多项式 C_n^k C_n^k通过其生成函数定义为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^k(x)\, t^n = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda}, \qquad |t| < 1.$$

（关于超球多项式的更多性质，参见 [8], 。）

由 (2.6) 可得一个重要恒等式：

$$\frac{dP_n^k}{dx}(x) = 2nP_{n-1}^{k+1}(x)\sinh x, \quad n \geq 1. \tag{2.8}$$

此外，利用以下恒等式：

$$\frac{dE_n^k}{dx}(x) + 2k\frac{E_n^k(x) - E_n^k(-x)}{1-e^{-2ix}} = (n+2k)E_n^k(x)$$

$$\frac{dE_n^k}{dx} - 2k\frac{E_n^k(x) - E_n^k(-x)}{1-e^{2x}} = (n+2k)E_n^k(-x)$$

并将第二个恒等式从第一个中减去，可得：

$$\frac{dP_n^k}{dx}(x) = n\ \frac{E_n^k(x) - E_n^k(-x)}{2}.$$

因此，根据 (2.8)，可得表示公式：

$$E_n^k(x) = P_n^k(x) + 2\sinh x\ P_{n-1}^{k+1}(x), \quad n \geq 1. \tag{2.9}$$

值得注意的是，非对称Heckman-Opdam多项式 E_n^k 与非对称 Jack 多项式密切相关，参见 [7]。如果 $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$且 $\mathcal{I}_\lambda^k$ 是相应的非对称 Jack 多项式，那么

$$E_{\lambda_2-\lambda_1}^k = \mathcal{I}_\lambda^k(e^{-x}, e^x).$$

命题 2.1. 对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，我们有

$$E_{n+1}^k(x) = e^x E_{-n}^k(-x). \tag{2.10}$$

证明。根据 (2.5)，恒等式 (2.10) 对于 $n = -1, 0$ 成立。令 $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, 0$。设 $H_n^k(x) = e^x E_{-n}^k(-x)$。只需验证 $T^k(H_n) = (n+1)_k H_n$。我们有

$$\begin{aligned}
&T^k(H_n)(x) \\
&= e^x E_{-n}^k(-x) - e^x (E_{-n}^k)'(-x) + 2k \, \frac{e^x E_{-n}^k(-x) - e^{-x} E_{-n}^k(x)}{1 - e^{-2x}} - k e^x E_{-n}^k(-x) \\
&= -e^x \left((E_{-n}^k)'(-x) + 2k \, \frac{E_{-n}^k(-x) - E_{-n}^k(x)}{1 - e^{2x}} - k E_{-n}^k(-x) \right) + e^x E_{-n}^k(-x) \\
&= (1 - (-n)_k) e^x E_{-n}(-x) = (n+1)_k e^x E_{-n}(-x) = (n+1)_k H_n(x).
\end{aligned}$$

比较首项系数即可得到 (2.10)。 □

命题 2.2。对于 $n \in \mathbb{Z}^+, n \neq 0$，有

$$E_{-n}^k(x) = E_n^k(-x) + \frac{k}{n+k} E_n^k(x). \tag{2.11}$$

证明。注意，对于 $n \geq 1$，我们有 $T^k(E_n(-x)) = -2k E_n(x) - (n+k) E_n(-x)$。于是

$$\begin{aligned}
T^k \left(E_n^k(-x) + \frac{k}{n+k} E_n^k(x) \right) &= -2k E_n(x) - (n+k) E_n(-x) + k E_n(x) \\
&= -k E_n(x) - (n+k) E_n^k(-x) \\
&= -(n+k) \left(E_n^k(-x) + \frac{k}{n+k} E_n^k(x) \right).
\end{aligned}$$

比较最高次项系数即可得到等式 (2.11)。 □

命题 2.3。对于所有 $n \in \mathbb{Z}^+$，有

$$\|E_{n+1}^k\|_{2,k} = \|E_{-n}^k\|_{2,k} = \pi 2^{1-2k} n! \, \frac{\Gamma(n+2k+1)}{\Gamma(n+k+1)^2}. \tag{2.12}$$

这里 $\|E_\nu^k\|_{2,\,k}$ 表示空间 $L^2([-\pi, \pi], dm_k)$ 中 $E_\nu^k(ix)$ 的范数。

证明。根据 (2.11)，我们可写为

$$E_n^k(-x) = E_{-n}^k(x) - \frac{k}{n+k} E_n^k(x), \quad n \geq 1 \quad .$$

由于 E_n^k 和 E_{-n}^k 正交，因此

$$\|E_n^k\|_{2,k}^2 = \|E_{-n}^k\|_{2,k}^2 + \frac{k^2}{(n+k)^2} \|E_n^k\|_{2,k}^2$$

从而

$$\|E_{n+1}^k\|_{2,k}^2 = \|E_{-n}^k\|_{2,k}^2 = \frac{n(n+2k)}{(n+k)^2}\|E_n^k\|_{2,k}^2. \tag{2.13}$$

此外，很容易验证

$$\|E_1^k\|_{2,k}^2 = \|E_0^k\|_{2,k}^2 = \pi 2^{1-2k}\frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+1)^2} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)}.$$

于是，公式（2.12）得证。 □

总之，Heckman–Opdam 多项式 E_n^k的显式表达式为： $E_0^k = 1$，并且对于所有 $n \geq 1$,

$$\begin{cases} E_n^k(x) = P_n^k(x) + 2\sinh(x)\, P_{n-1}^{k+1}(x), \\ E_{-n}^k(x) = \dfrac{n+2k}{n+k}\, P_n^k(x) - \dfrac{2n}{n+k}\, \sinh(x)\, P_{n-1}^{k+1}(x). \end{cases} \tag{2.14}$$

设函数 $f \in L^p([-\pi,\pi],\ dm_k(x))$。$f$ 的傅里叶–Heckman–Opdam 系数定义为

$$a_n = \gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) E_n^k(-ix) dm_k(x), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

where $\gamma_n = \|E_n^k\|_{2\,k}^{-1}$，。 f 的傅里叶–Heckman–Opdam 级数形式上表示为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n E_n^k(ix).$$

对于 $N \in \mathbb{N}$，我们定义 N阶部分和

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n E_n^k(ix).$$

那么， $S_N(f)$ 可以表示为一个积分算子：

$$S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x,y) f(y) dm_k(y). \tag{2.16}$$

其中

$$K_N(x,y) = \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n^2 E_n^k(ix) E_n^k(-iy)$$

在本文中，为了书写简便，只要不会产生歧义，我们便在某些记号中省略对k 的依赖。空间$L^p([-\pi,\pi],\ dm_k)$上的范数记作 $\|.\|_{p,\ k}$。我们用 A 表示一个常数，它可以在不同的行中取不同的值。

3 L^p-部分和的收敛性

The 主要目的是建立部分和 $\{S_N(f)\}_{N\in}$的 L^p-收敛性 $\mathbb{N}$.

定理 3.1 (主要结果)。 设 $f \in L^p([-\pi,\pi], dm_k)$，并假设

$$2 - \frac{1}{k+1} < p < 2 + \frac{1}{k}.$$

那么部分和序列 $\{S_N(f)\}_{N\geq 1}$在 $L^p([-\pi,\pi], dm_k)$中收敛到 f，即

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_{p,k} = 0.$$

证明借助一系列辅助引理来完成。

引理 3.2. 对于任意整数 $N \geq 0$ 以及所有满足 $x + y \notin 2\pi\mathbb{Z}$ 的 $x, y \in \mathbb{R}$，下列恒等式成立:

$$K_N(x,y) = \gamma_{N+1}^2 \frac{e^{-i(x-y)} E_{N+1}^k(ix) E_{N+1}^k(-iy) - 2\, E_{N+1}^k(-ix) E_{N+1}^k(iy)}{1 - e^{-i(x-y)}}. \tag{3.1}$$

证明。 我们首先证明 $K_N(x,y)$ 是实值的。由 (2.11),

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \gamma_{-n}^2 E_{-n}^k(ix) E_{-n}^k(-iy) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \gamma_{-n}^2 E_n^k(-ix) E_n^k(iy) + \sum_{n=1}^{N} \frac{k^2}{(n+k)^2} \gamma_{-n}^2 E_n^k(ix) E_n^k(-iy) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N} \frac{k}{n+k} \gamma_{-n}^2 \Big(E_n^k(-ix) E_n^k(-iy) + E_n^k(ix) E_n^k(iy) \Big).
\end{aligned}$$

由 (2.13) 可知，归一化常数满足

$$\gamma_n^2 = \frac{n(n+2k)}{(n+k)^2} \gamma_{-n}^2,$$

由此可得

$$\gamma_n^2 + \frac{k^2}{(n+k)^2} \gamma_{-n}^2 = \gamma_{-n}^2.$$

因此，结合上述恒等式可得

$$\begin{aligned}
K_N(x,y) &= \gamma_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \gamma_n^2 E_n^k(ix) E_n^k(-iy) + \sum_{n=1}^{N} \gamma_{-n}^2 E_{-n}^k(ix) E_{-n}^k(-iy) \\
&= \gamma_0^2 + 2\sum_{n=1}^{N} \gamma_{-n}^2 Re\Big(E_n^k(ix) E_n^k(-iy) \Big) + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{k}{n+k} \gamma_{-n}^2 Re\Big(E_n^k(ix) E_n^k(iy) \Big).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

因此， $K_N(x,y)$ 是实值的。现在，我们将 $K_N(x,y)$ 分解为

$$K_N(x,y)=\sum_{n=0}^{N}\gamma_{-n}^2E_{-n}^k(ix)E_{-n}^k(-iy)+\sum_{n=1}^{N}\gamma_n^2E_n^k(ix)E_n^k(-iy)=A_N+B_N.$$

利用这些恒等式（根据 (2.12) 和 2.10），

$$\gamma_{-n}=\gamma_{n+1},\qquad E_{-n}^k(iu)=e^{iu}E_{n+1}^k(-iu)$$

我们得到

$$\begin{aligned}
A_N &= \sum_{n=0}^{N}\gamma_{-n}^2E_{-n}^k(ix)E_{-n}^k(-iy)\\
&= e^{i(x-y)}\sum_{n=0}^{N}\gamma_{n+1}^2E_{n+1}^k(-ix)E_{n+1}^k(iy)\\
&= e^{i(x-y)}\sum_{n=1}^{N+1}\gamma_n^2E_n^k(-ix)E_n^k(iy)\\
&= e^{i(x-y)}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n^2E_n^k(-ix)E_n^k(iy)+e^{i(x-y)}\gamma_{N+1}^2E_{N+1}^k(-ix)E_{N+1}^k(iy)\\
&= e^{i(x-y)}\overline{B_N}+e^{i(x-y)}\gamma_{N+1}^2E_{N+1}^k(-ix)E_{N+1}^k(iy).
\end{aligned}$$

由于 A_N+B_N 是实数，我们有

$$\begin{aligned}
K_N(x,y) &= B_N+e^{i(x-y)}\overline{B_N}+e^{i(x-y)}\gamma_{N+1}^2E_{N+1}^k(-ix)E_{N+1}^k(iy)\\
&= \overline{B_N}+e^{-i(x-y)}B_N+e^{-i(x-y)}\gamma_{N+1}^2E_{N+1}^k(ix)E_{N+1}^k(-iy)\\
&= e^{-i(x-y)}\Big(B_N+e^{i(x-y)}\overline{B_N}\Big)+e^{-i(x-y)}\gamma_{N+1}^2E_{N+1}^k(ix)E_{N+1}^k(-iy)\\
&= e^{-i(x-y)}K_N(x,y)+e^{-i(x-y)}\gamma_{N+1}^2E_{N+1}^k(ix)E_{N+1}^k(-iy)\\
&\quad -\gamma_{N+1}^2E_{N+1}^k(-ix)E_{N+1}^k(iy).
\end{aligned}$$

由此得到恒等式

$$\begin{aligned}
K_N(x,y) &= \gamma_{N+1}^2\,\frac{e^{-i(x-y)}E_{N+1}^k(ix)E_{N+1}^k(-iy)-E_{N+1}^k(-ix)E_{N+1}^k(iy)}{1-e^{-i(x-y)}}\\
&= \gamma_{N+1}^2\,\frac{Im\Big(e^{-i(x-y)/2}E_{N+1}^k(ix)E_{N+1}^k(-iy)\Big)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

最后考察 $k=0$ 的情形。在这种情况下，归一化常数化简为 $\gamma_n^2=2\pi$。因此，所考虑的和变为

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}e^{in(x-y)}=\frac{1}{2\pi}e^{iN(x-y)}\sum_{n=0}^{2N}e^{-in(x-y)}=\frac{e^{iN(x-y)}-e^{-i(N+1)(x-y)}}{1-e^{-i(x-y)}}$$

这就是有限等比和的经典公式。 □

根据（2.9）和（3.3），核 $K_N(x,y)$ 可以写成

$$\begin{aligned} K_N(x,y) &= 2\gamma_{N+1}^2 \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\Big\{\sin x P_N^{k+1}(ix)P_{N+1}^k(iy) - \sin y P_N^{k+1}(iy)P_{N+1}^k(ix)\Big\} \\ &\quad -\gamma_{N+1}^2\Big\{P_{N+1}^k(ix)P_{N+1}^k(iy) + 4\sin x \sin y P_N^{k+1}(ix)P_N^{k+1}(iy)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

引理 3.3。存在一个常数 $A>0$，它与 $x\in[-\pi,\pi]$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 无关，使得

$$\gamma_n|\sin^k x E_n^k(ix)| \le A. \tag{3.5}$$

证明。 [5] 中使用的超球多项式经典估计指出，对于所有 $x\in[-\pi,\pi]$ 和 $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{|\sin^k x P_n^k(ix)|}{\|P_n^k\|_{2,k}} = \frac{|\sin^k x C_n^k(\cos x)|}{\|C_n^k\|_{2,k}} \le A \tag{3.6}$$

其中 A 与 x 和 n 无关。此外，由于

$$\|P_n^k(ix)\|_{2,k} \le 1/\gamma_n$$

并且对于 $n\ge 1$

$$|P_{n-1}^{k+1}(ix)\|_{2,k+1} = \|\sin x P_{n-1}^{k+1}(ix)\|_{2,k} \le 1/\gamma_n$$

于是，利用 (2.9) 和 (3.6) 可得估计 (3.5)。 □

引理 3.4。设 $a,b\in(0,1)$。则积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^a - \left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^b\right)\right| dy$$

在 $x\in[-\pi,\pi]$ 中一致有界。

证明。 首先，回忆恒等式

$$\cot\left(\frac{x-y}{2}\right) = -\frac{\sin x+\sin y}{\cos x-\cos y}.$$

由对称性，我们可以将积分归约为 $y\in[0,\pi]$，并估计

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^a - \left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^b\right)\right| dy \\ &\qquad \le 2\int_0^{\pi}\left|\left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^a - \left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^b\right| |\cos x-\cos y|^{-1}\sin y dy \\ &\qquad\quad +2|\sin x|\int_0^{\pi}\left|\left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^a - \left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^b\right| |\cos x-\cos y|^{-1} dy. \end{aligned}$$

接下来，作代换 $s=\cos x$ 和 $t=\cos y$，积分变为

$$\int_{-1}^{1}|s-t|^{-1}\left|\left(\frac{1-s^2}{1-t^2}\right)^{a/2}\left(\frac{1-s^2}{1-t^2}\right)^{b/2}\right|dt$$

and

$$\int_{-1}^{1}|s-t|^{-1}\left|\left(\frac{1-s^2}{1-t^2}\right)^{(a+1)/2}\left(\frac{1-s^2}{1-t^2}\right)^{(b+1)/2}\right|dt.$$

已知这些积分是一致有界的，其中 a， $b\in(0,1)$，（见 [4]）

□

引理 3.5. 设 $f\in L^p([-\pi,\pi],dm_k)$ 为非负函数。那么积分

$$T(f)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^{k(2-p)/p}-1\right)\right|dm_k(y)$$

在 $L^p([-\pi,\pi],dm_k)$ 中定义一个函数，适用于

$$2-\frac{1}{k+1}<p<2+\frac{1}{k}.$$

证明. 我们使用对偶性。设 $g\in L^{p'}([-\pi,\pi],dm_k)$ 为非负函数，其中 $1/p+1/p'=1$。由霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}g(x)T(f)(x)dm_k(x)\\
=\;&\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)f(y)\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^{k(2-p)/p}-1\right)\right|dm_k(y)dm_k(x)\\
\le\;&\left\{\int_{-\pi}^{\pi}g^{p'}(x)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^{k(2-p)/p}-1\right)\right|\left|\frac{\sin y}{\sin x}\right|^{-1/p}dm_k(y)\right)dm_k(x)\right\}^{1/p'}\\
&\times\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f^{p}(y)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^{k(2-p)/p}-1\right)\right|\left|\frac{\sin y}{\sin x}\right|^{1/p'}dm_k(x)\right)dm_k(y)\right\}^{1/p}.
\end{aligned}$$

现在由引理 3.4 可知

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^{k(2-p)/p}-1\right)\right|\left|\frac{\sin y}{\sin x}\right|^{-1/p}dm_k(y)<\infty$$

and

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^{k(2-p)/p}-1\right)\right|\left|\frac{\sin y}{\sin x}\right|^{1/p'}dm_k(x)<\infty.$$

因此，

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)T(f)(x)dm_k(x)\le A\|g\|_{p',k}\|f\|_{p,k}.$$

对所有此类 g 取上确界可得 $T(f)\in L^p([-\pi,\pi],dm_k)$。 □

引理 3.6。若 $f \in L^p([-\pi,\pi], dm_k)$，则 $2-\frac{1}{k+1} < p < 2+\frac{1}{k}$ 由 *(2.15)* 定义的序列 $(a_n/\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 有界

证明。应用霍尔德不等式可得

$$|a_n/\gamma_n| \le \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|^p |\sin x|^{2k} dx\right\}^{1/p} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\gamma_n E_n^k(ix)|^{p'} |\sin x|^{2k} dx\right\}^{1/p'}$$

由对称性可写为

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\gamma_n E_n^k(ix)|^{p'} |\sin x|^{2k} dx = 4\int_0^{\pi/2} |\gamma_n E_n^k(ix)|^{p'} |\sin x|^{2k} dx$$

利用 (3.5)，得到

$$\int_0^{\pi/2} |\gamma_n E_n^k(ix)|^{p'} |\sin x|^{2k} dx \le A\int_0^{\pi/2} |\sin x|^{2k-kp'} dx.$$

后一个积分收敛当且仅当

$$2k - kp' > -1$$

这等价于

$$p > 2 - \frac{1}{k+1},$$

这恰好属于 p 的假设范围。因此，我们有

$$|a_n/\gamma_n| \le A\|f\|_{p,k}, \qquad \text{for all } n \in \mathbb{Z}$$

因此证明完成。 □

引理 3.7. 设 $f \in L^p([-\pi,\pi], dm_k)$，$2-\frac{1}{k+1} < p < 2+\frac{1}{k}$.则

$$\limsup_{N\to+\infty} \|S_N(f)\|_{p,k} < \infty$$

证明。由公式 (2.16) 和 (3.4)，部分和 $S_N(f)$ 可表示为

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) \quad &= -2\gamma_{N+1}^2 P_{N+1}^k(ix) \int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin y P_N^{k+1}(iy) f(y) dm_k(y) \\ &+2\gamma_{N+1}^2 \sin x P_N^{k+1}(ix) \int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) P_{N+1}^k(iy) f(y) dm_k(y) \\ &- \left(\frac{a_{N+1}+\overline{a_{N+1}}}{2}\right) P_{N+1}^k(ix) + i(a_{N+1}-\overline{a_{N+1}}) \sin x P_N^{k+1}(ix). \end{aligned}$$

由估计式 (3.5) 可知，对于 $x \ne -\pi, 0, \pi$,

$$|S_N(f)(x)| \le A\gamma_{N+1} \left|\sin^{-k}(x) \int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin y P_N^{k+1}(iy) f(y) dm_k(y)\right|$$

$$+A\gamma_{N+1}\left|\sin^{-k}(x)\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)P_{N+1}^{k}(iy)f(y)dm_k(y)\right|+A|\sin^{-k}(x)|$$

取 $L^p([-\pi,\pi],dm_k)$-范数，得到

$$\|S_N(f)(x)\|_{p,k}\le I_N+J_N+A$$

其中

$$I_N=A\gamma_{N+1}\left\|\sin^{-k}(x)\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)dm_k(y)\right\|_{p,k}$$

and

$$J_N=A\gamma_{N+1}\left\|\sin^{-k}(x)\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)P_{N+1}^{k}(iy)f(y)dm_k(y)\right\|_{p,k}.$$

我们着重讨论 I_N，关于 J_N 的估计类似。将其写成关于勒贝格测度 dx的形式，可得

$$I_N=A\gamma_{N+1}\left\|\sin^{\frac{2k}{p}-k}(x)\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin y|\sin y|^{2k}P_N^{k+1}(iy)f(y)dy\right\|_p.$$

我们将被积函数分解为

$$\gamma_{N+1}|\sin x|^{\frac{2k}{p}-k}|\sin y|^{2k}\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)=\gamma_{N+1}|\sin y|^{\frac{2k}{p}+k}\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)$$
$$+\gamma_{N+1}|\sin y|^{\frac{2k}{p}+k}\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)\left\{\left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^{\frac{2k}{p}-k}-1\right\}.$$

Then

$$I_N\le\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left\{\gamma_{N+1}|\sin y|^{\frac{2k}{p}+k}\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)dy\right\}\right\|_p$$

$$+\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\gamma_{N+1}|\sin y|^{\frac{2k}{p}+k}\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)\left\{\left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^{k(2-p)/p}-1\right\}\right\|_p$$

估计可参见论文 [6]

$$\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\left\{\gamma_{N+1}|\sin y|^{\frac{2k}{p}+k}\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)dy\right\}\right\|_p$$

$$\le A\left\|\gamma_{N+1}|\sin y|^{\frac{2k}{p}+k}\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)\right\|_p\le A\|f\|_{p,k}.$$

最后一个不等式由 (3.5) 得出。此外，结合 (3.5) 使用引理 3.5，可得

$$\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)\gamma_{N+1}|\sin y|^{\frac{2k}{p}+k}\sin yP_N^{k+1}(iy)f(y)\left\{\left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^{k(2-p)/p}-1\right\}\right\|_p$$

$$\le A\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)|\sin y|^{\frac{2k}{p}}|f(y)|\left(\left|\frac{\sin x}{\sin y}\right|^{k(2-p)/p}-1\right)\right|\right\|_p<\infty.$$

至此，证明完成。 □

现在我们来到了主要结果。正如开头所指出的，通过结合前面的引理，并紧密遵循 [5, p.361]，中定理 5.1 的论证，我们证明定理 3.1。

最后，我们为这种情况给出一个反例

$$p \notin \left(2 - \frac{1}{k+1}, 2 + \frac{1}{k}\right)).$$

我们考虑与 [5, §9] 中相同的反例，它表明在上述 p 范围之外， L^p 有界性不成立。令

$$f(x) = (1 - \cos x)^{-(k+1)/2}$$

容易看出， $f \in L^p([-\pi, \pi], dm_k)$。因此，只需证明

$$\|a_n E_n^k(ix) + a_{-n} E_{-n}(ix)\|_{p,k}$$

当 $n \to \infty$ 时，不趋于 0。事实上，对于 $n \geq 0$ ，我们有

$$a_n = \gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) E_n^k(-ix) |\sin x|^{2k} dx = 2\gamma_n^2 \int_0^{\pi} f(x) P_n^k(ix) |\sin x|^{2k} dx,$$

根据 (2.14)

$$a_{-n} = \gamma_{-n}^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) E_{-n}^k(-ix) |\sin x|^{2k} dx = 2\gamma_{n+1}^2 \frac{n+2k}{n+k} \int_0^{\pi} f(x) P_n^k(ix) |\sin x|^{2k} dx,$$

$$= \frac{n+k}{n} a_n$$

现在利用 (2.11)

$$\|a_n E_n^k(ix) + a_{-n} E_{-n}(ix)\|_{p,k} = 2a_n \frac{n+k}{n} \|P_n^k(ix)\|_{p,k} \geq A$$

对于某个与 n 无关的常数 $A > 0$ 。这是通过利用 (2.7) 将 P_n^k 表示为超球多项式，并运用 [5, (9.1)] 得出的。因此，反例得证。

参考文献

[1] B. Muckenhoupt, E.M. Stein，经典展开及其与共轭调和函数的关系，《美国数学会汇刊》118（1965），17–92[2] E. M. Opdam，关于分次赫克代数某些表示的调和分析。《数学学报》175，75–121（1995）[3] E.M. Opdam，实反射群与复反射群的邓克尔算子讲义，《日本数学会回忆录》8，日本数学会，东京，2000。[4] H. Pollard，正交级数的平均收敛。*I*，《美国数学会汇刊》62（1947），387-403。

[5] H.Pollard 正交级数的平均收敛。*II*《美国数学会汇刊》63（1948），355-367。[6] M. Riesz，《共轭函数》，《数学杂志》27（1927），218-244。[7] S. Sahi，权重重数与特征的新公式。《杜克数学杂志》101（2000），77-84。[8] G. Szegö，正交多项式，《美国数学会讨论会出版物》第23卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1939年。