arXiv:2601.08616v1 [cond-mat.str-el] 13 Jan 2026

2+1d G 簇态的参数化族

Shuhei Ohyama[1] 和 Kansei Inamura[2, 3]

[1]维也纳大学，物理学院，玻尔兹曼巷5号，A-1090，维也纳，奥地利[2]数学研究所，牛津大学，安德鲁·怀尔斯大楼，伍德斯托克路，牛津，OX2 6GG，英国[3]鲁道夫·佩尔斯理论物理中心，牛津大学，帕克斯路，牛津，OX1 3PU，英国

2026年1月14日

摘要

我们构造了一个 G-簇态哈密顿量，并分析其在 2+1 维空间中的性质。该模型具有 $G \times 2\mathrm{Rep}(G)$ 对称性，其中 $2\mathrm{Rep}(G)$ 扇区实现了一种非可逆对称性，该对称性通过在 $\mathrm{Rep}(G)$ 中凝聚适当的代数对象而获得。利用对称性插值方法，我们通过对 $G \times 2\mathrm{Rep}(G)$ 中包含的一种可逆 0-形式或 1-形式对称性进行插值，构造了 S^1 参数化族和 S^2 参数化族的短程纠缠（SRE）态。将绝热演化论证应用于该族，我们分析了这一绝热过程产生的泵浦界面模。随后，我们显式构造了作用于界面上的对称算符，并证明界面模在该对称性下携带非平凡荷，从而展示了参数化族的非平凡性。

目录

1 引言与总结 **2**

2 预备知识 **6**

2.1 G簇态在 1+1d.6 2.2 界面对称性与参数化族.9 2.3 对称性插值.10

3 2+1d G-簇态 **11**
3.1 哈密顿量.113.2 对称性.143.2.1 Frobenius 代数对象.143.2.2Rep(G) 中的弗罗贝尼乌斯代数对象 .163.2.3 凝聚曲面.173.2.4 融合规则.183.3 张量网络表示.213.4 线状作用张量.233.4.1 G-对称性的线状作用张量.233.4.2 模 MPS.243.4.32Rep(G)-对称性的线状作用张量.31

4 参数化族 G-对称态 34
4.1 S^1-参数化族.344.1.1 2Rep(G) 中的可逆凝聚曲面 .344.1.2 在0-形式对称性中对可逆2Rep(G) 的对称性插值 . . . . 374.1.3 泵浦界面模.384.2 S^2-参数化族.424.2.1 在1-形式对称性中对可逆2Rep(G) 的插值 .424.2.2 泵浦界面模.45

5 参数化族2Rep(G)对称态 48
5.1 S^1-参数化族.485.1.1 模型.485.1.2 泵浦界面模.495.2 关于非平凡性的另一种视角.51

模 MPS 上的对称作用 53

B 纤维 2-函子 rs 及其自同构 5 **4**
B.1 融合 2-范畴的纤维 2-函子.54B.2 G-簇态的纤维 2-函子.55B.2.1 点状作用张量.55B.2.2 模 10-j 符号.58B.3 泵浦不变量再探.61

1 引言与总结

引言 近年来，物质拓扑相的概念在凝聚态物理中发挥了核心作用。尤其是，对称性保护拓扑（SPT）相是具有对称性的短程纠缠（SRE）态的拓扑相；尽管

它是最基本的拓扑相类别之一，却以丰富的物理性质著称，体边对应 [1–8]便是其中的典型代表。此外，考虑由单参数族短程纠缠态实现的拓扑相，可以描述 Thouless 电荷泵浦等拓扑泵浦现象。更一般地，作为 Thouless泵的推广，可以考虑由以一般空间 X为参数的短程纠缠态族构成的拓扑相。这类态族所关联的不变量及其产生的高阶泵浦现象——即所谓的广义 Thouless 泵——近年来日益受到关注 [9–26]。

在一个相关但有所不同的背景下，近年来，物理学界普遍对推广对称性概念产生了日益浓厚的兴趣 [27]。尤其是，非可逆对称性备受关注；在这类对称性中，通常要求对称操作可逆这一条件被放宽。将非可逆对称性纳入考量后，我们便可以将理论的自对偶性（例如 Kramers-Wannier 自对偶性 [28], ）视为广义意义上的对称性，尽管传统对称性无法描述它们。关于非可逆对称性的近期综述，见 [29–38] 。在 2+1 维中（这是本文关注的重点），有限非可逆对称性可用融合二范畴来描述；融合二范畴的定义见 [39] ，分类见 [40]。近期研究已展示了融合二范畴对称性的多种物理实现 [41–61]。受这些进展启发，研究非可逆对称性保护的 SPT 相及其相关的泵浦现象是很自然的，而目前也逐渐明晰，这类 SPT 相具有传统 SPT 相所不具备的有趣性质 [23, 47, 54, 59, 60, 62–77]。

张量网络为描述多体系统中的量子态提供了一种高效且图示化的框架；综述见 [78]。近期进展还表明，张量网络是描述非可逆对称性的有力工具 [79–82]。在 1+1维度中，研究者利用一类称为矩阵乘积算符（MPO）的张量网络，对具有非可逆对称性的 SPT 相进行了系统分析 [23, 54, 60, 64–66, 68, 70, 71, 74, 76]。在 2+1 维度中，利用投影纠缠对算符（PEPO）研究非可逆对称性的类似工作也正在开展 [46–48,50,51,54–57, 60]。

如前所述，与具有对称性的短程纠缠态族相关的广义 Thouless 泵日益受到关注。然而，先前的许多研究都着重分析具有可逆对称性的短程纠缠态的（高阶）泵浦现象。在 1+1维中，研究者已分析了具有非可逆对称性的短程纠缠态族所呈现的广义 Thouless 泵现象。具体而言，在参考文献 [23], 中，作者分析了 G-簇态 [66, 83]——一种在 1+1 维中受 $G \times \mathrm{Rep}(G)$对称性保护的 SPT 相——并详细研究了相关的泵浦现象。该参数化态族采用所谓的对称性插值方法构造。该方法在酉算符空间中，对恒等算符与一种可逆对称性进行插值，从而生成态族。在参考文献 [23], 中，对 $G \times \mathrm{Rep}(G)$对称性的 G对称性扇区进行插值，得到一个参数化的 $\mathrm{Rep}(G)$对称短程纠缠态族。通过连续调制该参数，可以产生一个泵浦界面模。随后，通过计算诱导界面模在界面对称性下的荷，系统地刻画了各态族的非平凡性，并证明每个态族都携带一个由 G中的某个元素标记的荷。根据一般的范畴论论证，预期具有 $\mathrm{Rep}(G)$对称性的 S^1短程纠缠态族由G [23, 26]分类，因此这一晶格结果与范畴论预期一致，并实现了所有扇区

分类所预言的扇区。

对于 1+1 维的 G簇态，Thouless泵已有一种简单的图像。因此，自然会期待，通过考察 2+1维的 G簇态，可以将这一图像推广到 2+1维情形；该簇态是由$G \times 2$Rep(G)对称性保护的SPT相。然而，在 2+1 维中，尚无关于 G簇态的对称性结构及其相关泵浦现象的具体研究。此外， $G \times 2$Rep(G)对称性除了包含 G对称性扇区外，还包含其他可逆对称性，即2Rep(G)中的可逆0-形式对称性和1-形式对称性。通过对这些对称性进行插值，有望构造出 2+1维的 G对称短程纠缠态族，以及2Rep(G)对称短程纠缠态族。然而，迄今为止发展出的对称性插值方法实际上仅应用于在位0-形式对称性，尚无针对这些可逆对称性的类似构造。

本文构造了 G维簇态，并基于这一模型构造了若干参数化的短程纠缠态族。为此，我们首先明确给出 2+1维 G簇态的基态和对称算符的张量网络构造。利用这些表示，我们计算基态上的局域对称作用，并提取相关的（沿一维延伸的）作用张量，将其称为线状作用张量。随后，我们将对称性插值方法扩展到参数化族的构造，通过对 $G \times 2\mathrm{Rep}(G)$ 对称性中包含的各种可逆对称性进行插值来实现。上述构造分别对应于对位点上的0形式对称性、非位点上的0形式对称性，以及位点上的1形式对称性进行插值。对于由此得到的 S^1族和 S^2族，我们运用绝热演化论证，分析这一过程中泵浦产生的界面模。为确认每个族的非平凡性，我们利用线状作用张量构造界面上的对称作用，即界面对称性算符[1], ，并证明诱导出的界面模在该对称性下携带非平凡荷。

概述与总结 本文的结构如下。

在第 2节中，我们回顾与本文相关的 G-簇态在 1+1 维空间中的性质。在单个张量层面上，许多出现在 2+1 维G-簇态及其对称算符中的张量，直接继承自 1+1 维 G-簇态，因此我们先在较简单的情形下介绍它们。此外，界面对称性与参数化族之间的概念联系，以及对称性插值论证，与 1+1 维 G-簇态中的情形基本相同。因此，我们先简要概述 1+1 维情形，将其作为 2+1 维分析的原型。

在第 3 节中，我们构造了 G 维的簇态，并分析其基本性质。特别是， 2+1维中的对称性包括由描述的非可逆对称性2Rep(G)，我们需要用张量网络语言构造相应的对称算符。根据一般的范畴论考量，这些非可逆对称性可以实现为凝聚曲面，它们源自对称特殊弗罗贝尼乌斯代数的凝聚。

[1]这给出了条带代数的一个 2+1维推广，即条带 2-代数 [84]。本文不深入探讨界面对称性的条带 2-代数方面。关于条带 2-代数的系统分析，读者可参阅文献 [85]。

，这些凝聚曲面存在于 $\mathrm{Rep}(G)$ [86, 87]中。为此，我们首先在 $\mathrm{Rep}(G)$中构造一个对称特殊弗罗贝尼乌斯代数，随后在张量网络层面执行形式上类似的凝聚过程，以获得对称性 PEPO 算符，并验证它们确实定义了对称性，且在满足平坦性条件的态上遵循 $2\mathrm{Rep}(G)$ 的融合规则。关于晶格上凝聚面算符的类似构造，参见文献 [46, 48]。此外，通过考察这些对称性对基态的局部作用，我们构造了一维延拓作用张量，并称之为线状作用张量。为了描述与非可逆对称性相关的线状作用张量，我们关键地运用了对称特殊弗罗贝尼乌斯代数上模的矩阵乘积态（MPS）表示，并将其称为模矩阵乘积态。

在第 4 节中，我们通过对 2Rep(G) 中包含的可逆对称性进行插值，构造了 G-对称短程纠缠态的参数化族。首先，2Rep(G) 中的可逆 0-形式对称性由第二群上同调 $\mathrm{H}^2(G;\mathrm{U}(1))$ 的一个元素标记。这些对称性原则上由具有非平凡键维数的 PEPO 实现，但利用底层代数的可逆性，我们可以将它们分解为局域幺正算符的乘积。将对称性插值方法应用于这些局域幺正算符后，对于 $\mathrm{H}^2(G;\mathrm{U}(1))$ 的每个元素，我们构造出一个 S^1-参数化的 G-对称哈密顿量族。接下来，2Rep(G) 中的可逆 1-形式对称性由 $\mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$ 的一个元素标记。尽管这些对称性是位点上的，但它们属于 1-形式对称性，因此无法直接应用标准的对称性插值方法。不过，通过适当地组合 1-形式对称算符的回路，我们构造出一个二参数酉算符族，进而对于 $\mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$ 的每个元素，得到一个 S^2-参数化的 G-对称哈密顿量族。对于这些模型，我们运用绝热演化论证，并分析泵浦界面模。随后，我们证明所得界面模在界面对称性下携带非平凡荷，从而确立这些族的非平凡性。从范畴论视角来看，预期 S^1-族和 S^2-族的G-对称哈密顿量分别由 $\mathrm{H}^2(G;\mathrm{U}(1))$ 和 $\mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$ [18, 23, 88–90], 分类，而其他具有 $n \geq 3$ 的 S^n-族预计是平凡的。[2] 从这个意义上说，我们的构造既符合一般分类，也全面实现了一般分类。

在第 5 节中，我们通过对 G 对称性进行插值，构造了 $2\mathrm{Rep}(G)$-对称短程纠缠态的参数化族。由于 G 对称性是位点上的 0-形式对称性，因此可以直接应用标准的对称性插值方法。这样，对于 G中的每个元素，我们得到一个S^1-参数化的 $2\mathrm{Rep}(G)$-对称哈密顿量族。对于这些模型，我们采用绝热演化论证并分析泵浦界面模。随后，我们证明泵浦界面模在界面对称性下携带非平凡荷，从而确立这些族的非平凡性。尽管凝聚曲面在早期研究中尚未得到系统性利用，但我们发现，它们在界面模研究中发挥着至关重要的作用。作为从不同视角对非平凡性的额外检验，我们考察线状作用张量空间中的基变换，并确认这些族确实是非平凡的。从范畴论视角来看，预期 S^1-族的 $2\mathrm{Rep}(G)$-对称哈密顿量是

[2] 更准确地说，预计存在非平凡的 S^4 族 G对称短程纠缠态，并可通过高阶贝里相位加以测量。然而，由于这些 S^4 族无论是否具有 G对称性都存在，因此本文不讨论它们。有关 [91, 92] 晶格上 2+1维短程纠缠态的高阶贝里相位，请参见。

由 G [23]分类的，而其他带有 S^n-族且具有 $n \geq 3$的族则预期是平凡的。[3] 从这个意义上说，我们的构造既与一般分类一致，也对其进行了全面实现。

2 预备知识

如第 1 节所述，本文构造 G-簇态于 2+1d 中，并以此为基础构造参数化族并验证其非平凡性。为构造参数化族，我们采用所谓的对称性插值方法；为验证非平凡性，我们使用界面对称性。这些方法已用于 G-簇态于 1+1d[23]。因此，本节概述 G-簇态于 1+1d 中的情形，并回顾界面对称性以及以此为基础的对称性插值方法。此外，我们还将回顾用于 G-簇态于 2+1d 的基本张量及其性质。

2.1 G-簇态于 1+1d

簇态是一个具有 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-对称性的 1+1d SPT 相的例子 [93, 94]。作为簇态的推广，文献 [66, 83] 引入了有限群 G 的 G-簇态于 1+1d。G-簇态于 1+1d 实现了具有 $G \times \mathrm{Rep}(G)$-对称性的 SPT 相。本节回顾 G-簇态于 1+1d。

我们考虑一个具有偶数个格点 $2N$ 的一维周期晶格。在每个格点i上，我们放置 G 的群环 $\mathbb{C}[G]$，并将总希尔伯特空间定义为它们的张量积:

$$\mathcal{H}_{1+1d} = \bigotimes_{i=1}^{2N} \mathbb{C}[G]_i. \tag{2.1}$$

对于每个格点 i，我们取 $\mathbb{C}[G]_i$ 的基为 $\{|g\rangle_i\}_{g\in G}$。令 V 为奇数位点的集合，令 L 为偶数位点的集合。那么， G-簇态的哈密顿量为

$$H_{1+1d} = -\sum_{i\in V} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overleftarrow{X}_g^{(i-1)} \overleftarrow{X}_g^{(i)} \overrightarrow{X}_{g^{-1}}^{(i+1)} - \sum_{i\in L} \frac{1}{|G|} \sum_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)} \dim\rho \cdot \mathrm{tr}_\rho \left[Z_\rho^{(i-1)} Z_\rho^{(i)} Z_\rho^{\dagger(i+1)} \right], \tag{2.2}$$

其中，$\mathrm{Irr}(G)$ 是 G 的不可约表示集合，而广义泡利 X 算符 $\overrightarrow{X}_g, \overleftarrow{X}_g$ 定义为

$$\overrightarrow{X}_g := \sum_{h\in G} |gh\rangle \langle h|, \ \overleftarrow{X}_g := \sum_{h\in G} |hg\rangle \langle h|, \tag{2.3}$$

[3] 更准确地说，类似于 G对称的短程纠缠态（见脚注 2）的情形，预计存在非平凡的 S^4 族 $2\mathrm{Rep}(G)$对称的短程纠缠态，其非平凡性由高阶贝里相位刻画。然而，由于这些 S^4 族无论是否具有 $2\mathrm{Rep}(G)$对称性都存在，因此本文不讨论它们。

而广义泡利 Z 算符 Z_ρ 定义为

$$[Z_\rho]_{ab} := \sum_{g\in G} \rho(g)_{ab} \left|g\right\rangle \left\langle g\right|, \tag{2.4}$$

上标 (i) 表示算符作用于格点 i。[4] 这些算符的对易关系为

$$[Z_\rho]_{ab}\overrightarrow{X}_g = \overrightarrow{X}_g[\rho(g)\cdot Z_\rho]_{ab}, \quad [Z_\rho]_{ab}\overleftarrow{X}_g = \overleftarrow{X}_g[Z_\rho\cdot\rho(g)]_{ab}, \tag{2.5}$$

其中，$\cdot$ 表示表示 ρ中的乘法。哈密顿量 H_{1+1d} 有能隙且具有唯一基态，称为 1+1d中的 G-簇态。

G-簇态具有由下式生成的 $G\times$ Rep(G)对称性：

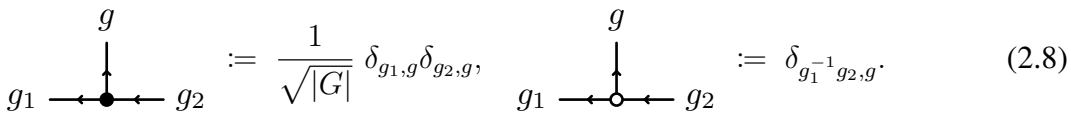
$$U_g := \bigotimes_{i\in V} \overrightarrow{X}_g^{(i)}, \quad \mathcal{O}_\rho := \mathrm{tr}_\rho[\prod_{i\in L} Z_\rho^{(i)}], \tag{2.6}$$

其中，$g\in G$ 和 $\rho\in$ Irr(G)。可以证明，第二类算符满足Rep(G)的融合规则：

$$\mathcal{O}_\rho\mathcal{O}_\sigma = \sum_{\tau\in\mathrm{Irr}(G)} N_{\rho\sigma}^\tau \mathcal{O}_\tau, \tag{2.7}$$

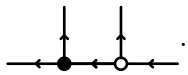
其中，$N_{\rho\sigma}^\tau$ 是Rep(G)中的融合系数。注意，若 G 是非阿贝尔的，则该对称性是非可逆的。

基态和对称性具有简单的MPS和MPO表示。对于MPS表示，我们引入两个张量：



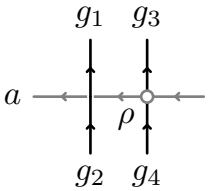
(2.8)

第一个张量称为余乘张量，第二个称为乘法张量。基态通过在每个偶数位点放置乘法张量、在每个奇数位点放置余乘张量，并收缩虚拟腿来实现。具体而言，基态的 MPS表示由下式生成：



(2.9)

对于对称性的 MPO表示，我们为每个不可约表示 $\rho\in$ Irr(G)引入以下 MPO 张量：

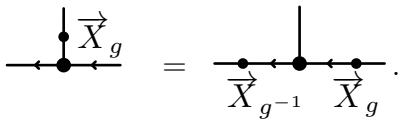


$= \rho(g_3)_{ab}\delta_{g_1,g_2}\delta_{g_3,g_4}.$ (2.10)

[4] 在 [66], 右乘算符 $\overleftarrow{X}_g$ 定义为 $\sum_{h\in G}\left|hg^{-1}\right\rangle\left\langle h\right|$。

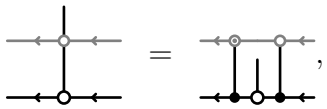
于是，将上述张量放置在每个偶数位点，并对虚拟腿进行缩并，即可得到 $\mathcal{O}_\rho$ 的MPO表示。

对于传统对称性，SPT 不变量可从基态的 MPS表示中，对称作用在虚拟腿上的射影表示中提取 [3,4,8]。对称作用 U_g 在虚拟腿上的形式为



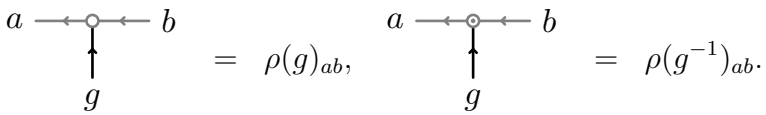
(2.11)

作为对此的推广，我们还可以将 MPO 对称性 $\mathcal{O}_\rho$ 穿过乘法张量推移，如下所示：



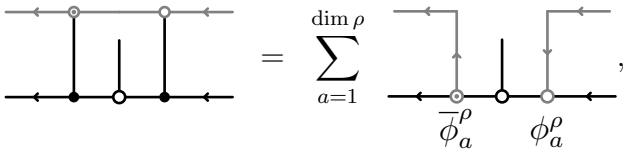
(2.12)

其中，基线上方的黑点表示余乘法张量，而三腿灰色张量定义为



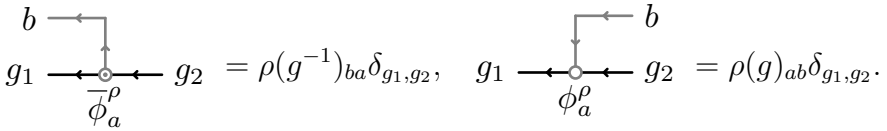
(2.13)

然后，将表示 ρ的基的完备集插入两个灰色张量之间的灰线上，从而定义作用张量：



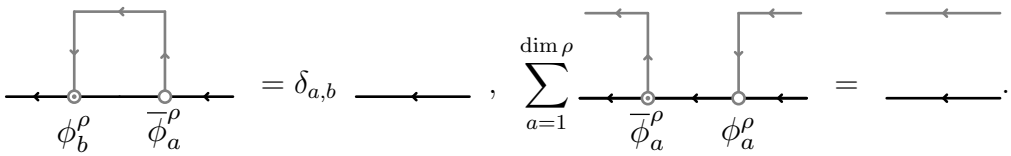
(2.14)

其中，左作用张量和右作用张量 $\{\phi_a^\rho\}_{a=1}^{\dim\rho}$ 及$\{\phi_a^\rho\}_{a=1}^{\dim\rho}$ 定义为



(2.15)

这些作用张量满足正交关系和完备关系：



(2.16)

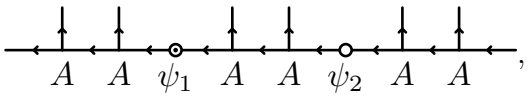
我们注意到，将乘法张量替换为单位元胞 MPS 张量 A 后得到的方程同样成立。利用作用张量，可以构造 1+1维 G簇态的 SPT 不变量。

在第 3节中，我们将上述构造推广到 2+1d。在这种情况下，对称性结构由融合 2-范畴 $G \times 2\mathrm{Rep}(G)$描述，而作用张量则成为线状对象。

2.2 界面对称性与参数化族

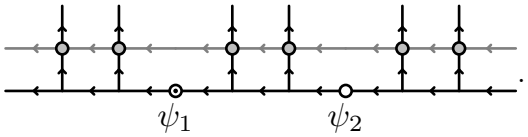
本节回顾 1+1d G-簇态的界面对称性及其与参数化族的关系。界面对称性是作用于两个 SPT 相之间界面上的对称性。具体而言，我们关注 1+1d 中 G-簇态的自界面。

考虑周期晶格上的 G-簇态，其中存在缺陷 ψ_1 和 ψ_2



(2.17)

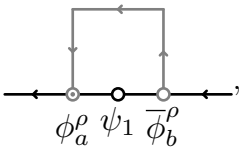
并考虑如下作用于该态的对称性:



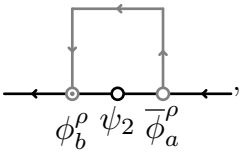
(2.18)

这里，灰色圆点表示对称性 MPO 张量。利用作用张量的正交关系，我们发现对称性作用只影响缺陷 ψ_1 和 ψ_2，如下所示:

$$(\hat{\mathcal{O}}_\rho)_{ab}\psi_1 =$$



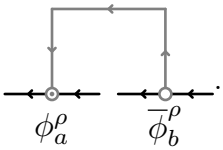
$$, \quad (\hat{\mathcal{O}}_\rho)_{ba}\psi_2 =$$



(2.19)

ˆ 其中，界面对称性算符 $(\mathcal{O}_\rho)_{ab}$ 定义为

$$(\hat{\mathcal{O}}_\rho)_{ab} :=$$



(2.20)

ˆ在文献 [23], 中，由算符 $\{(\mathcal{O}_\rho)_{ab} \mid \rho \in \mathrm{Irr}(G)\ a, b = 1, \ldots, \dim\rho\}$生成的代数称为自界面的界面代数。[5] 特别地，自界面模由界面代数的不可约表示分类。

[5]这些代数结构最初用于研究拓扑有序态边界处的缺陷[95–100], ，而相同的代数结构或其推广形式也在各种语境下以不同名称得到研究，包括模环形代数 [101], 边界管代数 [102–106], 条带代数 [84, 107,108], 和界面代数 [23, 74]。例如，文献 [109–116]也讨论了条带代数的近期应用。

下面说明界面代数与参数化的 SPT 相族之间的关系。预计 S^1-族可逆态与自界面代数的一维表示之间存在一一对应关系。直观上，可以通过考虑参数 $\theta \in [0, 2\pi]$ 随空间变化调制的哈密顿量来理解这一点，即纹理化哈密顿量。例如，对于无限晶格上的一个 S^1-族，将左半空间的参数固定为 $\theta = 0$，并在右半空间逐渐将 θ 从 $\theta = 0$ 变为$\theta = 2\pi$。这样，除中心附近可能存在自界面模外，系统处处均匀。该自界面模是可逆的，因为如果逐渐将 θ 从 2π 变为0，它就会消失。特别地，这个自界面模是界面代数的一维表示。关于这种对应关系的更详细说明，请参见 [23]。

在接下来的章节中，我们将上述构造推广到 2+1d G-簇态。在这种情况下，界面对称性不是代数，而是一个（多）融合范畴；界面模则由界面对称范畴上的不可分解模范畴分类。本文不讨论界面对称范畴的范畴论细节，而是着重构造 2+1d G-簇态的参数化族，并分析其自界面模。关于界面对称性的范畴论描述，感兴趣的读者可参阅 [85]以了解更多详情。

2.3 对称性插值

构造 SPT 相参数化族的方法有多种。本文采用对称性插值方法。下面简要介绍这一方法。首先，假设我们有一个哈密顿量 H，它具有局域幺正对称性 U，即 $[H, U] = 0$ 和 $U = \prod_i \hat{u}_i$，其中某个酉算符 $\hat{u}_i$ 作用在 i 周围的格点上。由于 $\hat{u}_i$ 是幺正的，我们可以找到一条从恒等算符到 $\hat{u}_i$的连续路径，也就是说，存在一族连续的幺正算符 $\hat{u}_i(\theta)$，使得 $\hat{u}_i(0) = \mathrm{id}$ 且 $\hat{u}_i(2\pi) = \hat{u}_i$。然后，我们定义一个连续的哈密顿量族：

$$\hat{H}(\theta) = \hat{U}(\theta)\hat{H}\hat{U}(\theta)^\dagger, \quad \hat{U}(\theta) = \prod_i \hat{u}_i(\theta). \tag{2.21}$$

$\hat{}\ \hat{}\ \hat{}\hat{}$ 我们注意到，$U(\theta)$不是 2π周期性的，但由于关系式 $[H, U] = 0$，$H(\theta)$是 2π周期性的。

例如，对于 1+1d G-簇态，我们可以取 $\hat{}$ 可以作为 G 对称算符之一 U_g。作为对称性插值，我们可以取

$$U_g(\theta) = \bigotimes_{i \in V} \overrightarrow{X}_g^{(i)}(\theta), \quad \overrightarrow{X}_g^{(i)}(\theta) := \exp\left[\frac{\theta}{2\pi} \log \overrightarrow{X}_g^{(i)}\right]. \tag{2.22}$$

这里我们可以将对数的主值分支取为

$$\log \overrightarrow{X}_g^{(i)} = \sum_{s=0}^{|G|-1} \frac{2\pi i s}{|G|} P_s[\overrightarrow{X}_g^{(i)}], \tag{2.23}$$

其中，$P_s[\overrightarrow{X}_g^{(i)}]$ 是投影到 $\overrightarrow{X}_g^{(i)}$本征值为 $e^{2\pi i s/|G|}$的特征子空间的投影算子，即，

$$P_s[X] := \frac{1}{|G|} \sum_{k=0}^{|G|-1} e^{\frac{-2\pi i s k}{|G|}} X^k, \tag{2.24}$$

对于满足 $X^{|G|} = 1$的酉算符 X。事实上，可以验证 $\exp(\log \overrightarrow{X}_g) = \overrightarrow{X}_g$。那么， 1+1d G 簇态的 S^1族为

$$H^g_{1+1d}(\theta) \coloneqq U_g(\theta) H_{1+1d} U_g(\theta)^\dagger, \tag{2.25}$$

对每个 $g \in G$。该插值保持 Rep(G) 对称性，因为 $U_g(\theta)$ 与 $\mathcal{O}_\rho$ 对所有 θ 都对易。因此， $H^g_{1+1d}(\theta)$ 是一个具有 Rep(G) 对称性的 S^1-族。

如第 2.2 节所述，可以通过考虑纹理化哈密顿量，从每个 S^1-族 $H^g_{1+1d}(\theta)$构造一个自界面模。文献 [23], 证明，相应的自界面代数具有由 $g \in G$ 标记的一维表示，而由该 S^1-族构造的自界面模对应于由 g 标记的一维表示。此结果符合以下范畴论预期： S^1族的 $2\mathrm{Rep}(G)$ 对称短程纠缠态由 G 分类。

3 2+1d G-簇态

本节中，我们构造 2+1d 中的 G-簇态并研究其性质。在2+1d 中，哈密顿量和基态的表示由 1+1d 情形自然推广而来；但由于 Rep(G) 对称性增强为 2Rep(G) 对称性，对称性结构变得更加复杂。在张量网络形式中表示这些对称性后，我们确定相应的作用张量。

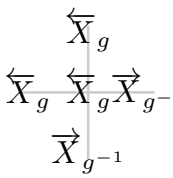
3.1 哈密顿量

我们考虑一个具有周期性边界条件的二维定向方格晶格。在晶格的每个顶点和链路上分别放置有限群 G 的群环 $\mathbb{C}[G]$ ，并将总希尔伯特空间定义为它们的张量积:

$$\mathcal{H} \coloneqq \left(\bigotimes_{i \in V} \mathbb{C}[G]_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{\ell \in L} \mathbb{C}[G]_\ell \right), \tag{3.1}$$

其中 V是顶点集合， L 是链路集合。参见图 1。

我们来定义 2+1d G-团簇模型的哈密顿量。首先，引入以下算符:

$$A_{i,g} \quad := \quad$$  $$, \quad B_{\ell,\rho} := \dim\rho \cdot \mathrm{tr}_\rho[\ Z_\rho \quad Z_\rho \quad Z^\dagger_\rho\ ], \tag{3.2}$$

对于每个顶点 $i \in V$和链路 $\ell \in L$。因此， 2+1d G-团簇模型的哈密顿量为

$$H \coloneqq -\sum_{i \in V} h_i - \sum_{\ell \in L} h_\ell, \tag{3.3}$$

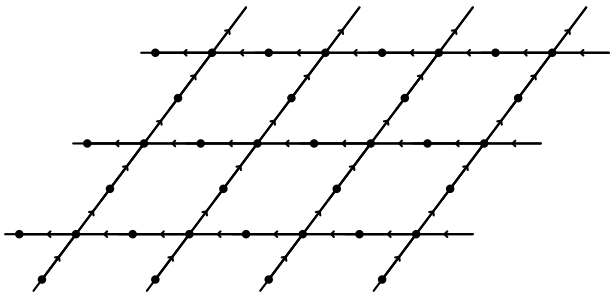


图 1：具有周期性边界条件的二维定向方格晶格。链路上的箭头表示晶格的方向。我们在晶格的每个顶点和链路上放置群环 $\mathbb{C}[G]$，并用黑点表示。

其中局域项定义为

$$h_i \coloneqq \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} A_{i,g}, \quad h_\ell \coloneqq \frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)} B_{\ell,\rho}. \tag{3.4}$$

注意，局域项 h_i 和 h_ℓ 是投影算符。事实上，它们满足

$$(h_i)^2 = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g_1,g_2\in G} A_{i,g_1}A_{i,g_2} = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g_1,g_2\in G} A_{i,g_1g_2} = h_i, \tag{3.5}$$

and

$$\begin{aligned}(h_\ell)^2 &= \frac{1}{|G|^2}\sum_{\rho_1,\rho_2\in \mathrm{Irr}(G)} B_{\ell,\rho_1}B_{\ell,\rho_2} = \frac{1}{|G|^2}\sum_{\rho_1,\rho_2,\rho_3\in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\dim\rho_1\dim\rho_2}{\dim\rho_3} N_{\rho_1,\rho_2}^{\rho_3} B_{\ell,\rho_3} \\ &= \frac{1}{|G|^2}\sum_{\rho_3\in \mathrm{Irr}(G)} |G|\, B_{\ell,\rho_3} = h_\ell.\end{aligned} \tag{3.6}$$

这里，在式（3.6）的第三个等号中，我们用到了等式

$$\sum_{\rho_1,\rho_2} \dim\rho_1\dim\rho_2 N_{\rho_1,\rho_2}^{\rho_3} = \sum_{\rho_1,\rho_2} \dim\rho_1\dim\rho_2 N_{\overline{\rho_1},\rho_3}^{\rho_2} = \sum_{\rho_1} \dim\rho_1\dim\overline{\rho_1}\dim\rho_3 = |G|\dim\rho_3. \tag{3.7}$$

此外，可以验证这些投影算符彼此对易。因此， H 的基态是所有投影算符本征值均为 1 的共同本征态。

为了显式地得到基态，我们使用酉算符对投影算符进行对角化

$$U_{\mathrm{diag}} \coloneqq \prod_{i\in V} C\overrightarrow{X}_{i,\ell_r} C\overrightarrow{X}_{i,\ell_b} C\overleftarrow{X}_{i,\ell_t} C\overleftarrow{X}_{i,\ell_l}, \tag{3.8}$$

其中 $C\overrightarrow{X}_{i,j}$和 $C\overleftarrow{X}_{i,j}$是由以下公式定义的受控乘法算符

$$C\overrightarrow{X}_{i,j}\left|g_i,g_j\right\rangle=\left|g_i,g_ig_j\right\rangle\,,\quad C\overleftarrow{X}_{i,j}\left|g_i,g_j\right\rangle=\left|g_i,g_jg_i\right\rangle\,, \tag{3.9}$$

并且 ℓ_r, ℓ_b, ℓ_t, ℓ_l分别是与顶点 i相邻的右侧、底部、顶部和左侧链路。于是，局域项变换为

$$U_{\text{diag}}h_iU_{\text{diag}}^\dagger=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overleftarrow{X}_g^{(i)}\ \text{ and }\ U_{\text{diag}}h_\ell U_{\text{diag}}^\dagger=\frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in\text{Irr}(G)}\dim\rho\cdot\text{tr}[Z_\rho^{(\ell)}]. \tag{3.10}$$

这些算符中本征值为 1 的唯一本征态为

$$\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_g\left|g\right\rangle_i\ \text{ and }\ \left|e\right\rangle_\ell\,, \tag{3.11}$$

分别，其中 $e\in G$ 是单位元。事实上，我们可以验证，式（3.10）中的第二个算符是对 $\left|e\right\rangle_\ell$ 的投影：

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in\text{Irr}(G)}\dim\rho\cdot\text{tr}[Z_\rho^{(\ell)}]\left|g\right\rangle_\ell=\frac{1}{|G|}\text{tr}[\rho_{\text{reg}}(g)]\left|g\right\rangle_\ell=\delta_{g,e}\left|g\right\rangle\,. \tag{3.12}$$

因此， H 的基态是唯一的，且为

$$\left|\text{G.S.}\right\rangle=U_{\text{diag}}\left(\bigotimes_{i\in V}\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_g\left|g\right\rangle_i\otimes\bigotimes_{\ell\in L}\left|e\right\rangle_\ell\right)\,. \tag{3.13}$$

特别地， $\left|\text{G。S.}\right\rangle$是所有稳定子 h_i 和 h_ℓ的本征值为 1 的共同本征态。我们将此基态称为 2+1d G-簇态。

哈密顿量 ian（3.3）具有0-形式 G-对称性和1-形式Rep（G）-对称性，其生成元为 y

$$U_g:=\prod_{i\in V}\overrightarrow{X}_g^{(i)},\quad U_\rho(\gamma):=\text{tr}_\rho[\prod_{\ell\in\gamma\cap L}[Z_\rho^{(\ell)}]^{\text{sgn}(\ell)}], \tag{3.14}$$

对于任意定向闭环 γ，其中 sgn(ℓ) 表示一个函数：当赋予 l 的方向与 γ 的方向相同时返回 1，而相反时返回 -1。我们注意到， U_ρ 中乘积的顺序沿着 γ 的方向确定。例如，沿逆时针方向包围晶格面 p 的最小环路为

$$\text{tr}[Z_\rho^{\dagger(\ell_b)}Z_\rho^{\dagger(\ell_l)}Z_\rho^{(\ell_t)}Z_\rho^{(\ell_r)}], \tag{3.15}$$

其中 ℓ_t, ℓ_b, ℓ_l, ℓ_r分别是围绕晶格面 p的上、下、左、右链路。哈密顿量与对称算符的对易性可直接由广义泡利算符的对易关系（2.5）得出。除此之外，通过凝聚 0-形式对称性由凝聚 Rep(G)生成。因此，完整的对称性为

$G \times 2\mathrm{Rep}(G)$。凝聚曲面的具体实现将在下一节中介绍。

我们简要讨论一下 1-形式对称性的拓扑性质。作为作用于希尔伯特空间上的算符，$U_\rho(\gamma)$ 取决于环路 γ 的形状。从这个角度来看，1-形式对称性并非拓扑的。换言之，1-形式对称性在时间方向上的拓扑性质由哈密顿量与对称算符的对易性保证，但在空间方向上则没有这样的保证。为确保 1-形式对称性在空间方向上的拓扑性质，我们对每个晶格面 p 施加以下平坦性条件：

$$\pi^{(p)}_{\mathrm{flat}} \left| \begin{array}{ccc} & g_4 & \\ g_2 & p & g_3 \\ & g_1 & \end{array} \right\rangle = \delta_{g_2 g_1, g_4 g_3} \left| \begin{array}{ccc} & g_4 & \\ g_2 & p & g_3 \\ & g_1 & \end{array} \right\rangle . \tag{3.16}$$

在平坦子空间上，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{flat}} := \left(\bigotimes_p \pi^{(p)}_{\mathrm{flat}} \right) \mathcal{H}, \tag{3.17}$$

该1-形式对称算符 $U_\rho(\gamma)$ 仅取决于环路 γ 的同伦类。我们注意到，平坦性条件与哈密顿量相容，即 $[\pi^{(p)}_{\text{平坦}}, H] = 0$ 对所有晶格面p均成立。在下文中，我们始终考虑限制在平坦子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{flat}}$内的模型。关于拓扑和非拓扑 1-形式对称性的详细讨论，参见文献 [47, 117, 118]。

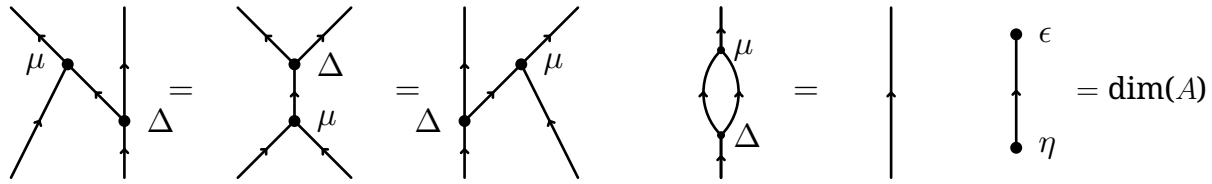
3.2 对称性

从范畴论视角来看，如果存在由编织融合范畴 $\mathcal{C}$描述的 1-形式对称算符，那么就可以得到通过代数对象 $A \in \mathcal{C}$的凝聚实现的 0-形式对称算符。由此产生的余维一缺陷称为凝聚面，而 $\mathcal{C}$ 中的不同（Morita 等价类）代数对象通常会产生不同的凝聚面。加入凝聚面后，完整的对称范畴成为一个融合 2-范畴，称为 $\mathcal{C}$ [86, 87]的悬挂。在我们的情形中，1-形式对称性由 $\mathrm{Rep}(G)$描述，其悬挂已知为 $2\mathrm{Rep}(G)$，即 G [119]的 2-表示构成的 2-范畴。本节将明确构造我们晶格模型中的凝聚面。

3.2.1 Frobenius 代数对象

我们回顾融合范畴 $\mathcal{C}$中 Frobenius 代数对象的定义。在融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 A若配备以下态射，则称为 Frobenius 代数对象：

- 乘法：$\mu : A \otimes A \to A$



(a) (b-1) (b-2)

图 2：（a）Frobenius 条件的图示表示。（b）特殊性条件的图示表示。

- 单位： $\eta:\ \mathbf{1}\to A$
- 余乘法： $\Delta:\ A\to A\otimes A$
- 余单位： $\epsilon:\ A\to\mathbf{1}$

满足以下条件：

- associativity: $\mu\circ(\mu\otimes \mathrm{id}_A)=\mu\circ(\mathrm{id}_A\otimes\mu)$
- unitality: $\mu\circ(\eta\otimes \mathrm{id}_A)=\mathrm{id}_A=\mu\circ(\mathrm{id}_A\otimes\eta)$
- coassociativity: $(\Delta\otimes \mathrm{id}_A)\circ\Delta=(\mathrm{id}_A\otimes\Delta)\circ\Delta$
- counitality: $(\epsilon\otimes \mathrm{id}_A)\circ\Delta=\mathrm{id}_A=(\mathrm{id}_A\otimes\epsilon)\circ\Delta$
- Frobenius condition: $(\mu\otimes \mathrm{id}_A)\circ(\mathrm{id}_A\otimes\Delta)=\Delta\circ\mu=(\mathrm{id}_A\otimes\mu)\circ(\Delta\otimes \mathrm{id}_A)$

这里，$\mathbf{1}$是 $\mathcal{C}$ 的张量单位，而 id_A 是 A的恒等态射。此外，如果 A满足以下条件，则称其为特殊 Frobenius 代数对象：

$$\mu\circ\Delta=\mathrm{id}_A,\quad \epsilon\circ\eta=\dim(A). \tag{3.18}$$

此外，如果 A 满足以下条件，则称其为对称特殊 Frobenius 代数对象：

$$(\epsilon\otimes \mathrm{id}_{A^*})\circ(\mu\otimes \mathrm{id}_{A^*})\circ(\mathrm{id}_A\otimes \mathrm{coev}^L)=(\mathrm{id}_{A^*}\otimes\epsilon)\circ(\mathrm{id}_{A^*}\otimes\mu)\circ(\mathrm{coev}^R\otimes \mathrm{id}_A), \tag{3.19}$$

其中 A^*表示 A的对偶，而 余评价映射^L: $\mathbf{1}\to A\otimes A^*$和 余评价映射^R: $\mathbf{1}\to A^*\otimes A$分别是左余评价映射和右余评价映射。Frobenius 条件和特殊性条件的图示见图2 。下文中，我们始终考虑对称特殊 Frobenius 代数对象。

3.2.2 Rep($\mathrm{Rep}(G)$中的 Frobenius代数对象

已知，Rep(G) 中对称特殊弗罗贝尼乌斯代数的 Morita类由一对 (H,ω) 的等价类确定，其中 H 是 G 的子群，且 $\omega \in \mathrm{Z}^2(H;\mathrm{U}(1))$ 是 H上的一个 2-余循环。[6] 为描述对应于 (H,ω) 的代数对象，我们固定一个对应于 ω 的射影酉表示 (ρ_ω, V_ω)，其中 V_ω 是一个向量空间，$\rho_\omega: H \to \mathrm{GL}(V_\omega)$ 是一个表示映射。那么，代数对象 $A^G_{H,\omega}$是与 H的表示 $(\mathrm{Ad}\rho_\omega, \mathrm{End}(V_\omega))$ 相关联的诱导表示 $\mathrm{Ind}^G_H(\mathrm{End}(V_\omega))$。具体而言，$A^G_{H,\omega}$ 是 G [121] 上取值于 $\mathrm{GL}(V_\omega)$ 的 H-等变函数空间：

$$A^G_{H,\omega} := \{f : G \to \mathrm{GL}(V_\omega) \mid f(h^{-1}g) = \rho_\omega(h) f(g) \rho_\omega(h)^\dagger\}, \tag{3.20}$$

带有表示映射 $\rho^G_{H,\omega}: G \to \mathrm{GL}(A^G_{H,\omega})$，其定义为

$$\rho^G_{H,\omega}(g) f(g') = f(g'g). \tag{3.21}$$

乘法映射

$$\mu : A^G_{H,\omega} \otimes A^G_{H,\omega} \to A^G_{H,\omega} \tag{3.22}$$

由逐点乘法给出

$$(f \cdot f')(g) := f(g) f'(g). \tag{3.23}$$

这一乘　法与 H-等变性相容。$A^G_{H,\omega}$ 的余单位定义为

$$\epsilon : f \mapsto \frac{\dim V_\omega}{|H|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}_{V_\omega}[f(g)]. \tag{3.24}$$

尽管一致的余乘法由上述信息唯一确定，我们仍将其明确写出：

$$\Delta : A^G_{H,\omega} \to A^G_{H,\omega} \otimes A^G_{H,\omega}, \quad f \mapsto \frac{1}{\dim V_\omega} \sum_i f \cdot f_i \otimes f_i^\dagger, \tag{3.25}$$

其中，f_i 是$A^G_{H的\omega}$ 标准正交基，$\dagger$ 意味着在 $\mathrm{GL}(A^G_{H,\ \omega})$ 中取共轭转置。特别地，乘法映射和余乘法映射是 G-等变的，即

$$(\rho^G_{H,\omega}(g) \otimes \rho^G_{H,\omega}(g)) \circ \Delta = \Delta \circ \rho^G_{H,\omega}(g), \quad \rho^G_{H,\omega}(g) \circ \mu = \mu \circ (\rho^G_{H,\omega}(g) \otimes \rho^G_{H,\omega}(g)), \tag{3.26}$$

对于所有 $g \in G$。

[6]等价关系由 G [120] 的共轭作用给出，即，当且仅当存在元素 $g \in G$ 使得 $H' = \mathrm{Ad}_g(H)$ 和 $[\omega'] = [\mathrm{Ad}^*_g(\omega)] \in \mathrm{H}^2(H';\mathrm{U}(1))$ 时，成对元素（H，ω）和（H'，ω'）等价。

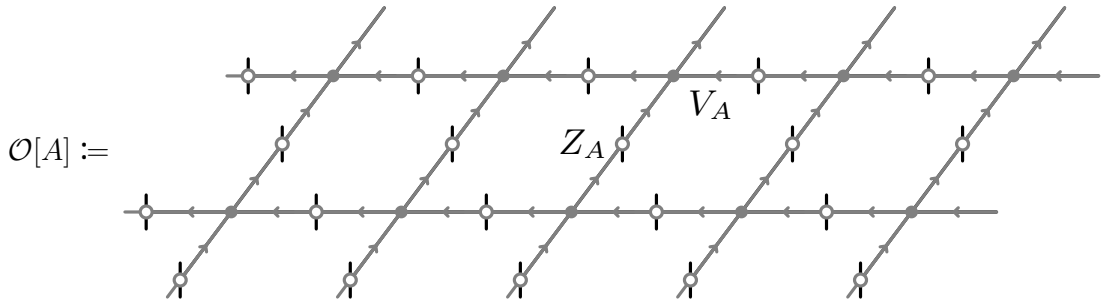


图3：凝聚曲面的 PEPO表示。每个白点表示一个与表示 A 相关的广义泡利算符 Z_A，每个黑点表示一个由乘法映射和余乘法映射构成的四价张量 V_A。

3.2.3 凝聚曲面

从范畴论视角来看，编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中对称特殊弗罗贝尼乌斯代数对象 A 的凝聚，除了由 $\mathcal{C}$描述的1-形式对称性之外，还会产生一种0-形式对称性。本文不会从数学上讨论凝聚的一般理论，而是会在我们的晶格模型中明确构造凝聚曲面。

设 $(A = \bigoplus_i \rho_i, \mu, \Delta)$ 是 $\mathrm{Rep}(G)$ 的一个代数对象，其中 ρ_i 是 G 的不可约表示，μ, Δ 分别为乘法映射和余乘法映射。由于 A 是 G 的一个表示，我们可以定义与 A 相关的广义泡利算符 Z Z_A：

$$[Z_A]_{ab} \coloneqq \sum_{g\in G} \left(\bigoplus_i \rho_i(g) \right)_{ab} |g\rangle \langle g| . \tag{3.27}$$

由于 A 是一个代数对象，我们可以像图 3中那样在晶格上定义算符 $\mathcal{O}[A]$。我们将此算符称为与代数对象 A相关的凝聚曲面。由于乘法映射和余乘法映射具有 G-等变性（3.26），该算符显然与哈密顿量（3.3）对易。

虽然这属于技术细节，但值得一提的是，凝聚曲面取决于代表元的选择 H，ω 以及(ρ_ω, V_ω)。从范畴论视角来看，代数对象 A 对应的凝聚曲面由该代数对象的 Morita 类决定，而不取决于代表元的选择。在我们的 PEPO 实现中，作为作用于总希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的算符，凝聚曲面可能取决于代数本身；但作为作用于平坦子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{flat}}$上的算符，它只取决于 A的 Morita 类。这是因为，在平坦子空间上，由代数对象 A 标记的 PEPO 充当与 A [121]相关的二维态和TQFT配分函数。由于态和构造为 Morita 等价的代数给出相同的 TQFT，由两个 Morita 等价代数生成的 PEPO 在平坦态上充当相同的算符。我们始终考虑平坦子空间，因此无需在意 Morita 等价类代表元的选择。我们还注意到，在通过规范化构造 G簇态 [85]时，平坦性条件会自然出现。

3.2.4 融合规则

如我们所见，凝聚曲面由 Rep(G) 中对称特殊 Frobenius 代数对象的 Morita 等价类标记。现在，我们计算凝聚曲面的融合规则，并证明它们与 2Rep(G) 的融合规则一致。

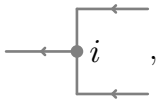
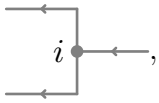
首先， G-等变代数的张量积可分解为以下诱导表示的直和，这称为 Mackey 分解 [122, 定理 2] [7]:

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{End}(V_\omega)) \otimes \mathrm{Ind}_K^G(\mathrm{End}(V_\rho)) \cong \bigoplus_{x\in D} \mathrm{Ind}_{H\cap xKx^{-1}}^G(\mathrm{End}(V_\omega \otimes V_{\rho^x})), \tag{3.28}$$

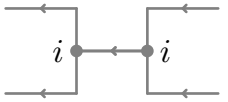
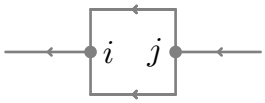
其中， D 是双陪集 $H\backslash G/K$ 的一组代表元， ρ^x 是通过用 x共轭 ρ得到的K 的表示，即对于 $k \in K$，有 $\rho^x(k) = \rho(x^{-1}kx)$。相应地，我们可以取投影 p_i ，将其投影到分解中的第 i 个诱导表示，并取嵌入ι_i ，使得

$$\sum_i \iota_i \circ p_i = \mathrm{id}_{A_1\otimes A_2}, \quad p_i \circ \iota_j = \delta_{ij}\mathrm{id}_{A_i}. \tag{3.29}$$

这里， A_1和 A_2定义为 $A_1 = \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{End}(V_\omega))$ 以及 $A_2 = \mathrm{Ind}_K^G(\mathrm{End}(V_\rho))$，而 A_i是分解的第 i 个分量（3.28）。用图示表示如下：

$p_i =$  , $\iota_i =$  , (3.30)

and

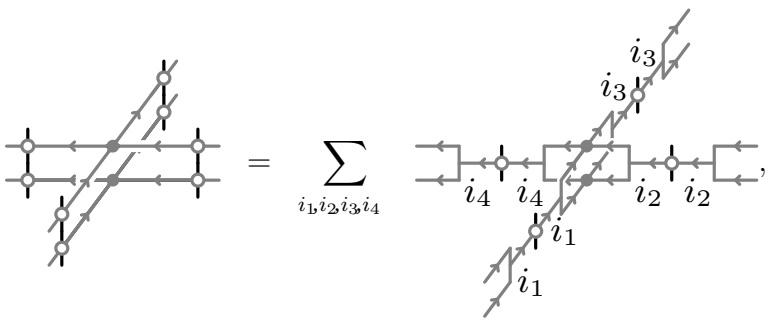
$\sum_i$  ,  $= \delta_{ij}$  . (3.31)

投影和嵌入与弗罗贝尼乌斯代数结构相容，即，

$$\begin{aligned} &p_i \circ (\mu_1 \otimes \mu_2) = \mu_i \circ (p_i \otimes p_i), \quad (p_i \otimes p_i) \circ (\Delta_1 \otimes \Delta_2) = \Delta_i \circ p_i, \\ &(\mu_1 \otimes \mu_2) \circ (\iota_i \otimes \iota_i) = \iota_i \circ \mu_i, \quad (\Delta_1 \otimes \Delta_2) \circ \iota_i = (\iota_i \otimes \iota_i) \circ \Delta_i. \end{aligned} \tag{3.32}$$

这里我们省略了 A_1 和 A_2之间平凡的编织。

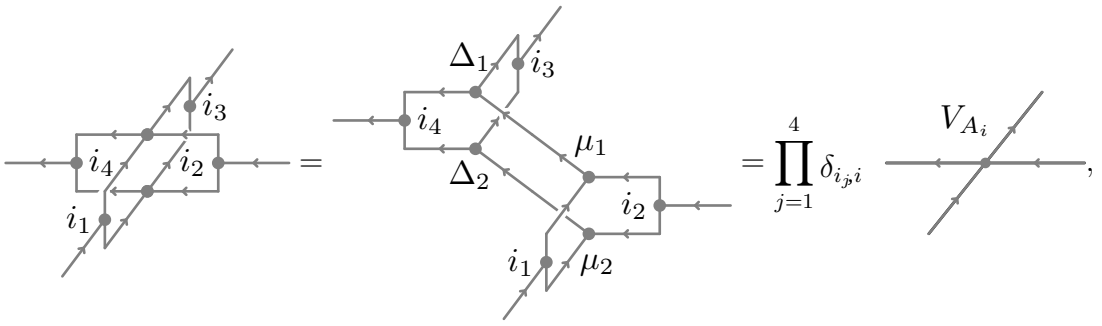
利用这一投影，我们可以计算 PEPO 的融合规则：设 A_1 和 A_2 是 Rep(G) 中的两个代数对象。设 $P_{12} = \{p_i\}$ 是张量积 $A_1 \otimes A_2$ 分解中的一组投影。那么，两个 PEPO 的乘积可在局部按如下方式分解：



, (3.33)

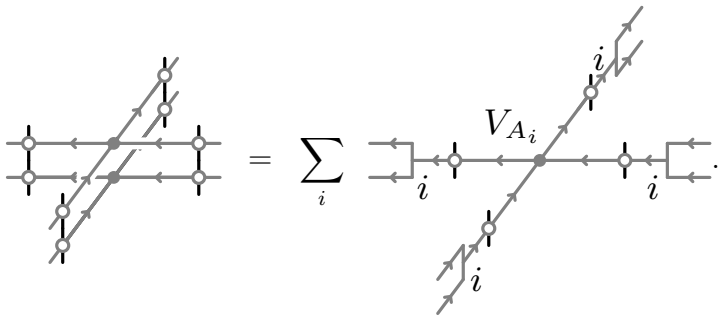
[7]作者感谢 Alex Turzillo 就分解问题展开讨论。

其中， i_1， i_2， i_3， i_4 遍历 P_{12} 中投影的指标。我们可以证明，在等式右侧，不同指标对应的投影算符构型均为零。为此，我们聚焦于等式右侧的中心部分。根据四价张量的定义，这部分可写为



(3.34)

其中 i 在右边可以是任意一个 i_1， i_2， i_3，以及 i_4。这里，对于第二个等式，由于式（3.28）中的分解是作为弗罗贝尼乌斯代数的直和分解，不同直和分量之间的乘法和余乘法为零，因此产生了克罗内克 δ 函数。当所有指标都相等时，该等式可由投影与嵌入以及乘法和余乘法之间的相容条件（3.32）得到。将其代入式（3.33），得到



(3.35)

应用这一局部分解，我们得到 PEPO 的以下融合规则：

$$\mathcal{O}[A^G_{H,\omega}] \cdot \mathcal{O}[A^G_{K,\rho}] = \sum_{x \in D} \mathcal{O}[A^G_{H \cap xKx^{-1}, \omega \cdot \rho^x}], \tag{3.36}$$

其中 D 是双陪集 $H\backslash G/K$的一组代表元。这与 $2\mathrm{Rep}(G)$ [123,推论 810]中的融合规则一致。

例如，我们计算分解（3.28）的两个特殊情形。首先，考虑情形 $H = K = G$。此时，$G\backslash G/G = \{e\}$，因此分解为

$$\mathrm{Ind}^G_G(\mathrm{End}(V_\omega)) \otimes \mathrm{Ind}^G_G(\mathrm{End}(V_\rho)) \cong \mathrm{Ind}^G_G(\mathrm{End}(V_\omega \otimes V_\rho)) \sim \mathrm{Ind}^G_G(\mathrm{End}(V_{\omega\cdot\rho})). \tag{3.37}$$

这里，最后一个符号 ∼表示 Morita 等价。因此，这些凝聚曲面满足融合规则

$$\mathcal{O}[A^G_{G,\omega}] \cdot \mathcal{O}[A^G_{G,\rho}] = \mathcal{O}[A^G_{G,\omega\cdot\rho}]. \tag{3.38}$$

我们注意到，凝聚曲面 $\mathcal{O}[A^G_{G,1}]$ 在 $\mathcal{H}_{\text{flat}}$上充当恒等算符。因此，凝聚曲面 $\mathcal{O}[A^G_{G,\omega}]$ 是可逆的，其逆元为 $\mathcal{O}[A^G_{G,\omega^{-1}}]$。接下来，我们考虑 $H = K = \{e\}$的情况。在这种情况下，$\{e\}\backslash G/\{e\} = G$ 和余循环都是平凡的，因此分解为

$$\mathrm{Ind}^G_{\{e\}}(\mathrm{End}(\mathbb{C})) \otimes \mathrm{Ind}^G_{\{e\}}(\mathrm{End}(\mathbb{C})) \cong \bigoplus_{g\in G} \mathrm{Ind}^G_{\{e\}}(\mathrm{End}(\mathbb{C})). \tag{3.39}$$

因此，曲面算符 $\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}]$ 满足融合规则

$$\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}] \cdot \mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}] = |G| \cdot \mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}]. \tag{3.40}$$

算符 $\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}]$ 将被称为完全凝聚曲面，因为它在物理上是通过在恒等曲面上凝聚所有线而得到的。在接下来的两段中，我们将更详细地计算完全凝聚曲面的融合规则。

例： $G = \mathbb{Z}_2$作为一个具体例子，我们来考察 $G = \mathbb{Z}_2 = \{e, a | a^2 = e\}$ 的情形，并计算其对称特殊 Frobenius 代数对象及其融合规则。首先，Rep($\mathbb{Z}_2$) 中有两种类型的代数对象：

(1) $H = \{e\}$， $\omega = 1$,
我们取 V_ω 为带有平凡表示的一维向量空间 $\mathbb{C}$。作为 $A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},\,1}$ 的一组基，我们可以选择

$$f_g(h) = \delta_{g,h}, \tag{3.41}$$

对于 g， $h \in \mathbb{Z}_2$。这是作为代数的对偶群代数 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2]^*$，其不可约分解为

$$A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1} \cong \mathbf{1} \oplus \mathrm{sign}. \tag{3.42}$$

(2) $H = \mathbb{Z}_2, \omega = 1$,
我们取 V_ω 为带有平凡表示的一维向量空间 $\mathbb{C}$。作为 $A^{\mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_2,1}$ 的基，我们可以选择

$$f(e) = f(a) = 1. \tag{3.43}$$

因此，

$$A^{\mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_2,1} \cong \mathbf{1}. \tag{3.44}$$

让我们计算这两个代数对象之间的融合规则。唯一非平凡的融合规则是 $A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1} \otimes A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1}$ $A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1} \otimes A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1}$ $f_e \otimes f_e$ $f_e \otimes$,, 的分解。乘积 ,,由 ,,, 张成。可以验证 f_a $f_a \otimes f_e$ $f_a \otimes f_a$

$$\langle f_e \otimes f_e, f_a \otimes f_a \rangle \cong \langle f_e \otimes f_a, f_a \otimes f_e \rangle \cong A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1}, \tag{3.45}$$

作为 $\mathbb{Z}_2$-等变代数。因此，我们得到融合规则

$$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \cong \mathbf{1},\ A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1} \otimes \mathbf{1} \cong \mathbf{1} \otimes A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1} \cong A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1},\ A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1} \otimes A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1} \cong A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1} \oplus A^{\mathbb{Z}_2}_{\{e\},1}. \tag{3.46}$$

这与 Mackey 分解（3.28）一致。

示例：一般情况下的完全凝聚曲面 G 考虑一般情况下的完全凝聚曲面 G，即 $H = \{e\}$ 和 $\omega = 1$。我们取 V_ω 为带有平凡表示的一维向量空间 $\mathbb{C}$。作为 $A^G_{\{e\},1}$ 的基，我们可以选择

$$f_g(h) = \delta_{g,h}, \tag{3.47}$$

对于 g， $h \in G$。因此，代数对象是对偶群代数 $\mathbb{C}[G]^*$。下面计算 $A^G_{\{e\},\ 1}$ 的融合规则。在我们的基 $\langle f_g \rangle_{g\in G}$ 中，$A^G_{\{e\},\ 1} \otimes A^G_{\{e\},\ 1}$ 中的乘积分解为

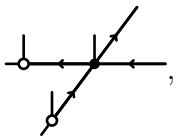
$$A^G_{\{e\},1} \otimes A^G_{\{e\},1} \cong \bigoplus_{g\in G} \langle f_{g'} \otimes f_{g'g} \rangle_{g'\in G}\,, \tag{3.48}$$

其中， g 标记直和分量， g' 标记该分量的基。设 p_g 是投影到第 g 个分量的投影。每个分量作为 G-等变代数都同构于$A^G_{\{e\},\ 1}$。因此，融合规则为

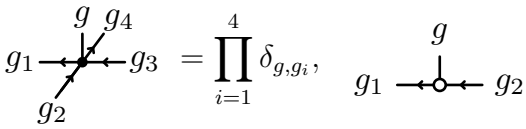
$$A^G_{\{e\},1} \otimes A^G_{\{e\},1} \cong [A^G_{\{e\},1}]^{\oplus|G|}. \tag{3.49}$$

3.3 张量网络表示

下面构造哈密顿量（3.3）基态及其上的对称作用的张量网络表示。基态的张量网络表示由下面的 PEPS张量给出：


, (3.50)

其中，四价张量定义为



(3.51)

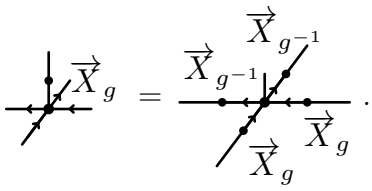
注意到，PEPS 张量是式（2.8）的自然推广。通过验证该 PEPS 受到哈密顿量中所有项的稳定作用，可以确认它确实是哈密顿量（3.3）的唯一基态。为描述 $\mathcal{H}$ 的元素，我们引入 $\mathcal{H}$ 的以下基：

$$|\{g_i\}, \{g_{ij}\}\rangle \in \mathcal{H}, \tag{3.52}$$

其中 g_i 是顶点 i上的群元素，而 g_{ij} 是连接顶点的边上 i 的群元素，而 j。接着，可以验证由式（3.50）中的张量生成的 PEPS 为

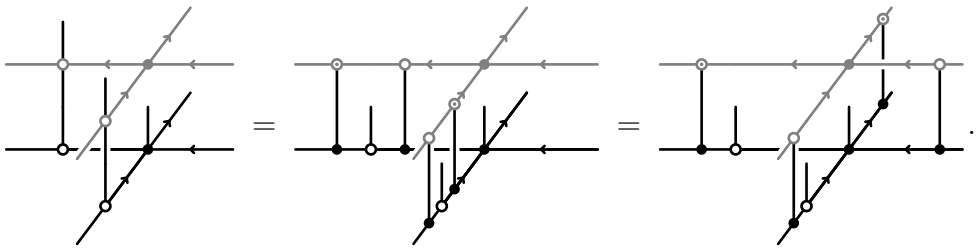
$$\sum_{\{g_i\}} |\{g_i\}, \{g_i^{-1} g_j\}\rangle \in \mathcal{H}. \tag{3.53}$$

这个态显然在哈密顿量（h_i 中的顶点项 h_ℓ 和 3.3）中的边项下保持不变。下面确认该 PEPS 在 $G \times 2\mathrm{Rep}(G)$ 对称性下保持不变。对于 G- 对称性，对称算符在虚拟腿上的分数化形式如下：



(3.54)

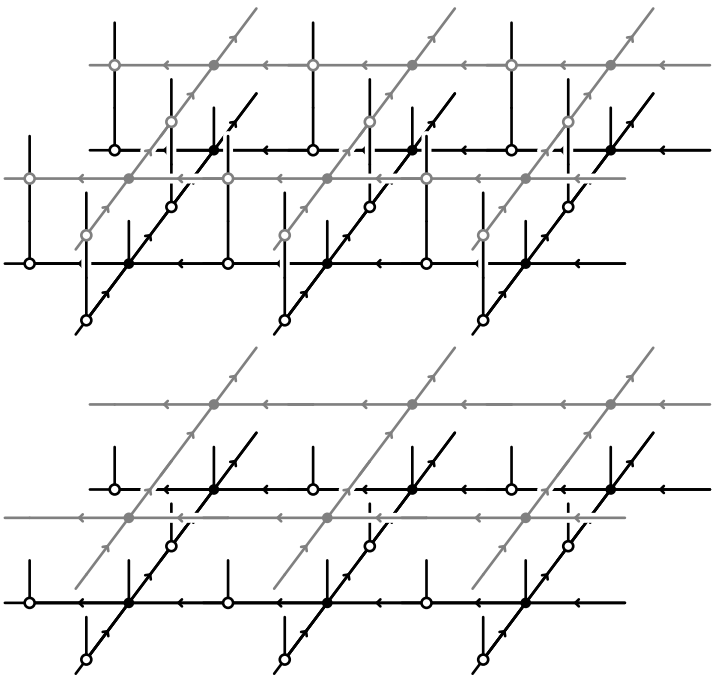
由于虚拟腿上的左乘法与式（3.50）中的白色张量对易，单位元胞上的对称作用便化简为对 PEPS 张量的规范变换。因此，基态在 G-对称性下保持不变。对于 $2\mathrm{Rep}(G)$-对称性，根据式（2.12），凝聚曲面在虚拟腿上的对称作用为



(3.55)

这里，在第一个等式中，我们使用了式（2.12），第二个等式则由 G-乘法映射和余乘法映射的等变性可得，见式（3.26）。因此，$\mathcal{O}[A]$ 对环面上基态 $|\mathrm{G。S.}\rangle$的作用为

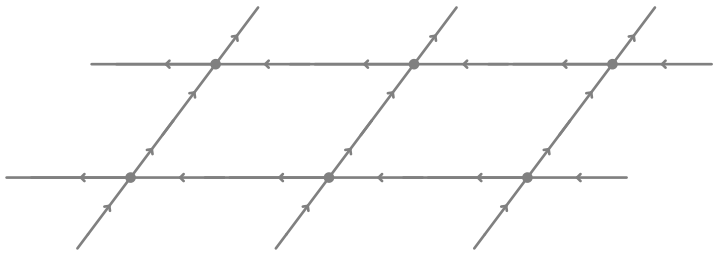
$\mathcal{O}[A]\,|\mathrm{G。S.}\rangle$ =



(3.56)

= $n(A)\,|\mathrm{G。S.}\rangle$.

这里， $n(A)$ 定义为

$n(A) :=$  $\in \mathbb{N}.$ (3.57)

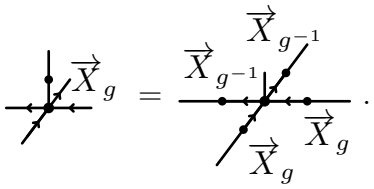
我们注意到 $n(A)$ 与系统大小无关，对于标记为 $([H], \omega)$ 的代数对象，$n(\mathcal{A}^G_{H,\omega}) = |G/H|$。事实上， $n(A)$ 是与对称特殊弗罗贝尼乌斯代数 A 相关的拓扑量子场论的环面配分函数，其表达式为 $|G/H|$ [121]。

3.4 类线状作用张量

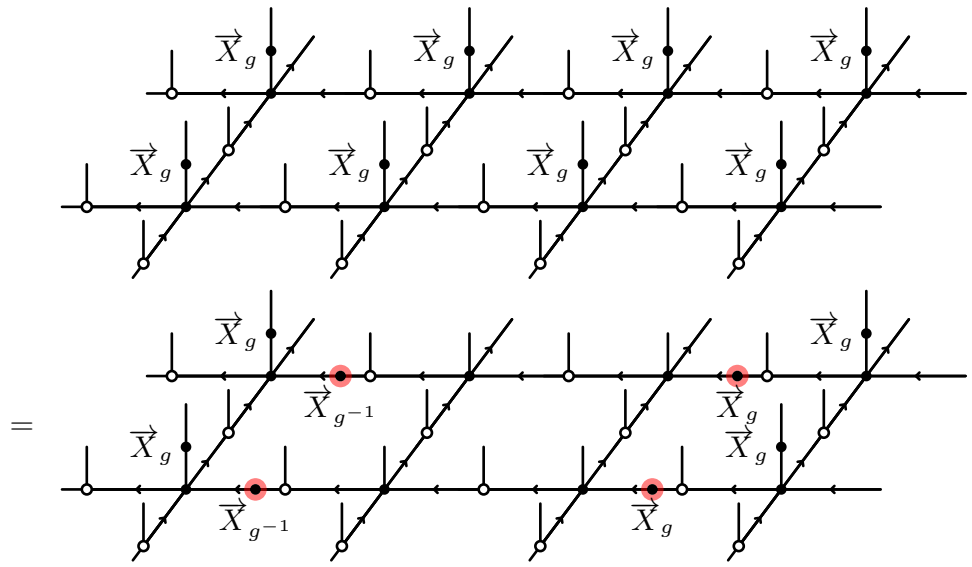
在 1+1d 情形下，我们通过对局域 MPS 施加 MPO 对称性来定义作用张量，如式（2.12）所示。在 2+1d 情形下，通过对局域 PEPS 张量施加位点上的 G-对称算符和凝聚曲面的对称性 PEPO 张量 $\mathcal{O}[A]$，可以定义沿一维延展的作用张量。我们称之为线状作用张量。为了计算 $2\mathrm{Rep}(G)$-对称性的线状作用张量，引入代数对象 A 上的模 MPS 会很方便。

3.4.1 G-对称性的类线状作用张量

我们先计算 G-对称性的线状作用张量。如式（3.54）所示， $\overrightarrow{X}^{(i)}_g$被分解到 PEPS 张量的虚拟腿上，形式如下

 (3.58)

因此，对基态 PEPS 施加对称算符 U_g 的部分作用为



(3.59)

这里，对称算符的中间部分被吸收到基态中，而左右两部分则保留下来。沿着每个界面，每个格点都会出现一个用红色标出的作用张量。因此， G-对称性的线状作用张量定义为

$$\Phi_g := \bigotimes_v \overrightarrow{X}_g, \quad \overline{\Phi}_g := \bigotimes_v \overrightarrow{X}_{g^{-1}}. \tag{3.60}$$

这里，张量积取遍界面上的所有虚拟腿。

3.4.2 模 MPS

现在来引入模 MPS，并推导它的若干重要性质。模 MPS 在计算 $2\mathrm{Rep}(G)$-对称性的线状作用张量时将发挥关键作用。线状作用张量的计算将在第 3.4.3 节讨论。

代数对象上的模 对于代数对象 $A^G_{H,\,\omega}$，可按以下方式构造一个左模 [121]：首先回顾一下，我们取一个不可约射影表示 $(\rho_\omega,\ V_\omega)$，它属于 H，其余循环为 ω，并将代数表示为

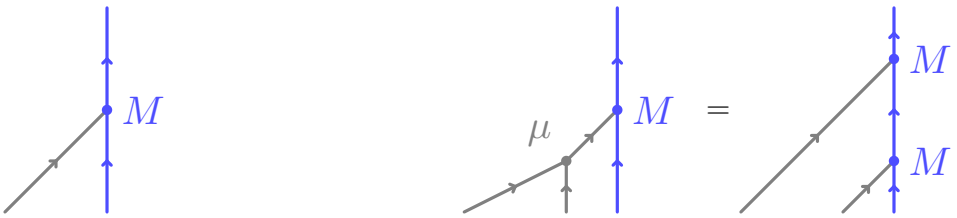
$$A^G_{H,\omega} = \{f : G \to \mathrm{GL}(V_\omega) \,|\, f(h^{-1}g) = \rho_\omega(h) f(g) \rho^\dagger_\omega(h)\}. \tag{3.61}$$

那么，左模 $M^G_{H,\omega}$ 在 $A^G_{H,\omega}$ 上实现为一个诱导模，其定义为

$$M^G_{H,\omega} := \{m : G \to V_\omega \,|\, m(h^{-1}g) = \rho_\omega(h) m(g)\}. \tag{3.62}$$

模作用

$$M : A^G_{H,\omega} \otimes M^G_{H,\omega} \to M^G_{H,\omega} \tag{3.63}$$



(a) (b)

图 4：模作用的基本性质。(a) 模作用的图示表示。(b) 一致性条件的图示表示。

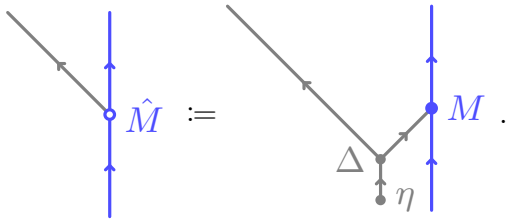
由.....给出

$$(f \cdot m)(g) = f(g)m(g), \tag{3.64}$$

也就是说，End(V_ω) 的逐点作用。可以验证

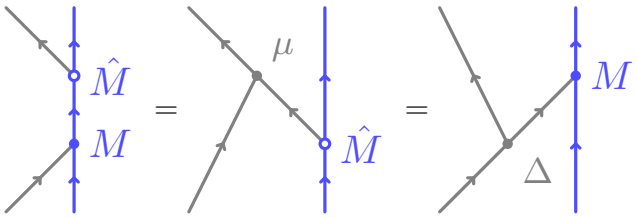
$$(f_1 \cdot f_2) \cdot m = f_1 \cdot (f_2 \cdot m), \tag{3.65}$$

因此 $M^G_{H,\omega}$是 $A^G_{H,\omega}$上的左模。图示表示见图 4(a) 和 (b)。由于 $A^G_{H,\omega}$是一个特殊Frobenius 代数，$M^G_{H,\omega}$自然地具有余模结构 $\hat{}M\colon M^G_{H,\omega} \to A^G_{H,\omega} \otimes M^G_{H,\omega}$:



(3.66)

我们注意到，余 模结构满足以下与模结构的一致性条件 :



(3.67)

令 $S_{H\backslash G}$ 为 G 中右 H-陪集的一组代表元。我们选取 A^G_H 的基 $\{f^r_{ab} \mid r \in S_{H\backslash G}、a、b = 1,$ ...，dim $V_\omega\}$，以及 M^G_H 的基 ω 和 $\{m^r_a \mid r \in S_{H\backslash G}, a = 1, ..., \dim V_\omega\}$、$\omega$，使得

$$f^r_{ab}(r') = \frac{1}{\sqrt{\dim V_\omega}}\,\delta_{rr'}e_{ab}, \quad m^r_a(r') = \delta_{rr'}e_a, \tag{3.68}$$

其中 $e_{ab} \in \mathrm{End}(V_\omega)$ 是在第 (a, b) 个位置为 1、其余位置为 0 的矩阵单位，而 $e_a \in V_\omega$ 是在第 a 个位置为 1、其余位置为 0 的向量。特别地， f^r_{ab} 和 m^r_a 满足以下关系：

$$f^r_{ab}(r') \in \mathbb{R}, \quad f^r_{ab} \cdot m^{r'}_{a'} = \frac{1}{\sqrt{\dim V_\omega}} \delta_{rr'} \delta_{ba'} m^r_a. \tag{3.69}$$

因此，作为一个 $A^G_{H,\omega}$-模，$M^G_{H,\omega}$ 分解为由左 H-轨道标记的单模直和：

$$M^G_{H,\omega} \cong \bigoplus_{r \in S_{H\backslash G}} M_r, \quad M_r := \mathrm{span}\{m^r_a \mid a = 1, ..., \dim V_\omega\}. \tag{3.70}$$

从物理上讲，每个分量 M_r 对应于与 G-对称态和 TQFT（拓扑量子场论）相关的自发对称性破缺（SSB）基态，而该 TQFT 又与 G-等变代数 $A^G_{H,\omega}$ [121]相关。因此，我们将称每个直和分量 M_r 为 $M^G_{H,\omega}$的一个 SSB 扇区。

为后续使用，我们还在$A^G_{H,\omega}$ 上定义一个内积：

$$\langle f | f' \rangle := \epsilon(f^\dagger \cdot f'), \tag{3.71}$$

其中， $f^\dagger$是 f作为从 G到 $\mathrm{End}(V_\omega)$的函数的伴随，即 $f^\dagger(g) := f(g)^\dagger$。我们可以验证，基 $\{f^r_{ab}\}$ 关于此内积是正交归一的：

$$\langle f^r_{ab} | f^{r'}_{a'b'} \rangle = \delta_{rr'} \delta_{aa'} \delta_{bb'}. \tag{3.72}$$

当将同一元素 $f \in A^G_{H,\omega}$视为向量时，我们也用右矢记号 $|f\rangle$ 表示它，并用左矢记号 $\langle f|$表示$f \in A^G_{H,\omega}$的对偶向量，即

$$\langle f| := \epsilon(f^\dagger \cdot \bullet) : A^G_{H,\omega} \to \mathbb{C}. \tag{3.73}$$

ˆ模与余模 MPS 模结构映射 M 和 M 自然地给出矩阵乘积态张量，我们分别将其称为模与余模矩阵乘积态张量。首先，考虑模结构映射 M。与模结构映射相关联的矩阵乘积态张量 $[M]^{(r;a,b)}_{r'' \; d\;(;),(r';c)}$定义为

$$f^r_{ab} \cdot m^{r'}_c = \sum_{d,r''} m^{r''}_d [M]^{(r;a,b)}_{(r'';d),(r';c)}, \tag{3.74}$$

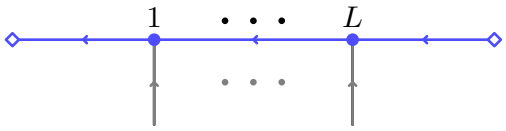
而式（3.69）表明，矩阵乘积态张量为

$$[M]^{(r;a,b)}_{(r'';d),(r';c)} = \frac{1}{\sqrt{\dim V_\omega}} \delta_{r,r'} \delta_{r',r''} \delta_{a,d} \delta_{b,c}. \tag{3.75}$$

我们将由式（$\langle M|_L$ 中的矩阵乘积态张量生成的矩阵乘积态3.75定义为

$$\langle M|_L := \sum_{\{(r_k,a_k,b_k)\}} \mathrm{tr}\left([M]^{(r_1;a_1,b_1)} \cdots [M]^{(r_L;a_L,b_L)}\right) \langle f^{r_1}_{a_1b_1}, ..., f^{r_L}_{a_Lb_L}|, \tag{3.76}$$

其中 $\langle f^{r_1}_{a_1b_1}, \ldots\ldots, f^{r_L}_{a_Lb_L}|$ 由 $\langle f^{r_1}_{a_1b_1}| \otimes \cdots \otimes \langle f^{r_L}_{a_Lb_L}|$ 定义， L 为格点数。其图示表示为

$$\langle M|_L = $$  ， (3.77)

其中每个张量上方的标签表示格点指标。我们将这个矩阵乘积态 $\langle M|_L$ 称为模 MPS。模 MPS是与式（3.70）中每个分量相对应的自发对称性破缺基态的等权叠加。事实上，式（3.75）中的矩阵乘积态张量可以分解为$[M]^{(r;a,b)}_{r''\ d\ \ (;),\ (r';\ c)} = \delta_{r,\ r'}\delta_{r',\ r''}[M_r]^{(a,b)}_{d\ c}$ ，其中

$$[M_r]^{(a,b)}_{d,c} = \frac{1}{\sqrt{\dim V_\omega}}\,\delta_{a,d}\delta_{b,c}, \tag{3.78}$$

对于 $r \in S_{H\backslash G}$，或者等价地，

$$[M_r]^{(a,b)} = \frac{1}{\sqrt{\dim V_\omega}}\,e_{ab}, \tag{3.79}$$

作为一组维数为 $V_\omega \times$ 维 V_ω 的矩阵，模 MPS 分解为

$$\langle M|_L = \sum_{r\in S_{H\backslash G}} \langle M_r|_L\,, \tag{3.80}$$

其中 $\langle M_r|_L$ 是由式（3.78）中的矩阵乘积态张量生成的矩阵乘积态:

$$\langle M_r|_L \coloneqq \sum_{\{(a_k,b_k)\}} \mathrm{tr}\left([M_r]^{(a_1,b_1)}\cdots[M_r]^{(a_L,b_L)}\right)\langle f^r_{a_1b_1},\ldots,f^r_{a_Lb_L}|\,. \tag{3.81}$$

我们将每个矩阵乘积态 $\langle M_r|_L$ 称为简单模矩阵乘积态。注意，每个矩阵乘积态张量 $\{[M_r]^{(a,b)}\}$作为一组维数为 $V_\omega \times$ 维 V_ω 的矩阵，都是单射的。

与模 MPS 类似，余模矩阵乘积态张量，我们称之为余模矩阵乘积态张量。矩阵乘积态张量 $[\hat{M}]^{(r;a,b)}_{d\ r''\ \ (;),\ (c\ ;\ r')}$ 定义为

$$\hat{M}(m^{r'}_c) = \sum_{a,b,r}\sum_{d,r''} f^r_{ab}\otimes m^{r''}_d\,[\hat{M}]^{(r;a,b)}_{(d;r''),(c;r')}. \tag{3.82}$$

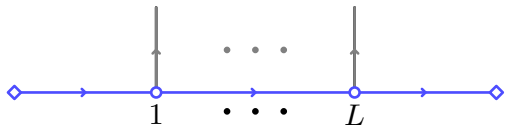
利用式 (3.66) 和式 (3.69)，可以验证余模矩阵乘积态张量为

$$[\hat{M}]^{(r;a,b)}_{(r'';d),(r';c)} = \frac{1}{\sqrt{\dim V_\omega}}\,\delta_{r,r'}\delta_{r',r''}\delta_{a,c}\delta_{b,d}, \tag{3.83}$$

以及由 $|M\rangle_L$ 式（3.83）中的余模矩阵乘积态张量生成的 MPS 定义为

$$|M\rangle_L \coloneqq \sum_{\{(r_k,a_k,b_k)\}} \mathrm{tr}\left([\hat{M}]^{(r_L;a_L,b_L)}\cdots[\hat{M}]^{(r_1;a_1,b_1)}\right)|f^{r_1}_{a_1b_1},\ldots,f^{r_L}_{a_Lb_L}\rangle\,, \tag{3.84}$$

其中 $|f^{r_1}_{a_1b_1},\ \ldots,\ f^{r_L}_{a_Lb_L}\rangle$ 由 $|f^{r_1}_{a_1b_1}\rangle\otimes\cdots\otimes|f^{r_L}_{a_Lb_L}\rangle$ 定义。用图表示为

$$|M\rangle_L = $$ 

, (3.85)

每个张量下方的标签表示格点指标。我们将这个矩阵乘积态 $|M\rangle_L$ 称为余模矩阵乘积态。余模矩阵乘积态也是式（3.70）中与每个分量对应的自发对称性破缺基态的等权叠加。事实上，式（3.83）中的余模矩阵乘积态张量可以分解为 $[\hat{M}]^{(r;a,b)}_{r''\,d\ (;),\ (r';\ c)} = \delta_{r,\ r'}\delta_{r',\ r''}[\hat{M}_r]^{(a,b)}_{d\,c}$，其中

$$[\hat{M}_r]^{(a,b)}_{d,c} = \frac{1}{\sqrt{\dim V_\omega}}\,\delta_{a,c}\delta_{b,d}, \tag{3.86}$$

对于 $r\in S_{H\backslash G}$，或者等价地，

$$[\hat{M}_r]^{(a,b)} = \frac{1}{\sqrt{\dim V_\omega}}\,e_{ba}, \tag{3.87}$$

并且余模矩阵乘积态可分解为

$$|M\rangle_L = \sum_{r\in S_{H\backslash G}} |M_r\rangle_L\,, \tag{3.88}$$

其中 $|M_r\rangle_L$ 是由式（3.86）中的余模矩阵乘积态张量生成的矩阵乘积态：

$$|M_r\rangle_L := \sum_{\{(a_k,b_k)\}} \mathrm{tr}\left([\hat{M}_r]^{(a_L,b_L)}\cdots[\hat{M}_r]^{(a_1,b_1)}\right)|f^r_{a_1b_1},\ldots,f^r_{a_Lb_L}\rangle\,. \tag{3.89}$$

我们将每个矩阵乘积态 $|M_r\rangle_L$ 称为简单余模 MPS。注意，余模矩阵乘积态张量$\{[\hat{M}_r]^{(a,b)}\}$等于模矩阵乘积态张量 $\{[M_r^\dagger]^{(a,b)}\}$的复共轭。因此可知，$|M_r\rangle_L$ 是 $\langle M_r|_L$的对偶向量：

$$\begin{aligned}
[\langle M_r|_L]^\dagger &= \sum_{\{(a_k,b_k)\}} \mathrm{tr}\left([M_r]^{(a_1,b_1)}\cdots[M_r]^{(a_L,b_L)}\right)^*|f^r_{a_1b_1}\cdots f^r_{a_Lb_L}\rangle \\
&= \sum_{\{(a_k,b_k)\}} \mathrm{tr}\left([M_r^\dagger]^{(a_L,b_L)}\cdots[M_r^\dagger]^{(a_1,b_1)}\right)|f^r_{a_1b_1}\cdots f^r_{a_Lb_L}\rangle \\
&= \sum_{\{(a_k,b_k)\}} \mathrm{tr}\left([\hat{M}_r]^{(a_L,b_L)}\cdots[\hat{M}_r]^{(a_1,b_1)}\right)|f^r_{a_1b_1}\cdots f^r_{a_Lb_L}\rangle = |M_r\rangle_L\,.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

下文中，为简洁起见，我们省略下标 L。注意，简单模矩阵乘积态彼此正交归一：

$$\langle M_r|M_{r'}\rangle = \delta_{r,r'}. \tag{3.91}$$

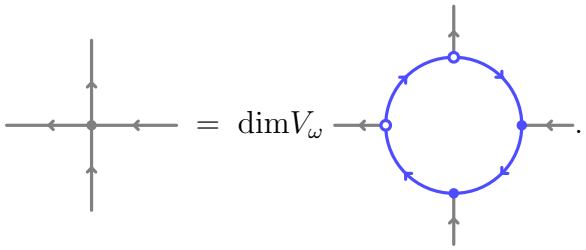
下面描述对称性在 SSB基态 $|M_r\rangle$ 上的作用。可以证明，该作用为

$$\bigotimes \rho^G_{H,\omega}(g)\,|M_r\rangle = |M_{r'}\rangle\,, \tag{3.92}$$

其中 $r'\in S_{H\backslash G}$ 是满足以下条件的唯一元素 $hr' = rg^{-1}$ 对于唯一的 $h\in H$。推导过程参见附录。A。

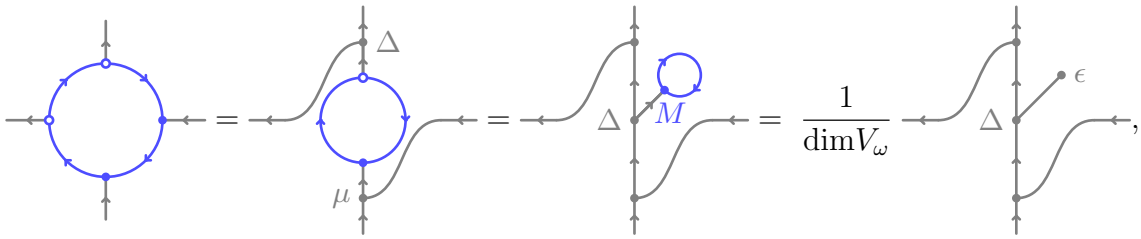
两个重要性质 我们希望利用模与余模 MPS 来计算凝聚表面的对称性分数化。本段将介绍两个对实现这一目的至关重要的性质。

首先，我们来证明以下气泡产生关系成立：



(3.93)

利用模结构和余模结构的性质直接计算，可得这一等式：



(3.94)

其中，第一个等式利用了模结构映射和余模结构映射的性质，第二个等式则由模结构与余模结构之间的一致性条件得出。为了证明最后一个等式，我们来计算结构映射 $M : A^G_{H,\omega} \otimes M^G_{H,\omega} \to M^G_{H,\omega}$ 在 $M^G_{H,\omega}$ 上的偏迹。对于元素 $f = \sum_{(r;a,b)} X^r_{a,b} f^r_{a,b} \in A^G_{H,\omega}$，偏迹 $\mathrm{tr}^{M^G_{H,\omega}} M : A^G_{H,\omega} \to \mathbb{C}$ 计算如下：

$$\mathrm{tr}_{M^G_{H,\omega}} M(f) = \sum_{(r;a)} m^{r\dagger}_a f m^r_a = \sum_{(r';a',b')} \sum_{(r;a)} X^{r'}_{a',b'} m^{r\dagger}_a f^{r'}_{a',b'} m^r_a = \sum_{(r;a)} X^r_{a,a}. \tag{3.95}$$

另一方面，余单位 $\epsilon : A^G_{H,\omega} \to \mathbb{C}$ 由式（3.24）定义，计算结果为

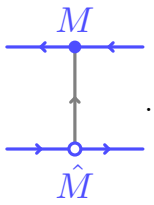
$$\begin{aligned} \epsilon(f) &= \frac{\dim V_\omega}{|H|} \sum_{g\in G} \sum_{(r;a,b)} X^r_{a,b} \mathrm{tr}_{V_\omega}(f^r_{a,b}(g)) \\ &= \frac{\dim V_\omega}{|H|} \sum_{r'\in S_{H\backslash G}} \sum_{h\in H} \sum_{(r;a,b)} X^r_{a,b} \mathrm{tr}_{V_\omega}(f^r_{a,b}(r')) \\ &= \dim V_\omega \sum_{r'\in S_{H\backslash G}} \sum_{(r;a,b)} X^r_{a,b} \delta_{r,r'} \delta_{a,b} \\ &= \dim V_\omega \sum_{(r;a)} X^r_{a,a}. \end{aligned} \tag{3.96}$$

因此，迹 $\mathrm{tr}^{M^G_{H,\omega}} M : A^G_{H,\omega} \to \mathbb{C}$ 为

$$\mathrm{tr}_{M^G_{H,\omega}} M = \frac{1}{\dim V_\omega}\,\epsilon, \tag{3.97}$$

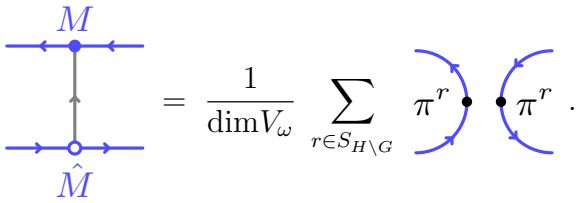
因此，我们得到式（3.94）中的最后一个等式。利用余单位条件，我们可以去掉最后一个图示中的余单位，从而得到所需的等式。

其次，我们证明，模 MPS 的转移矩阵等于投影到自发对称性破缺扇区上的投影算子之和。考虑由下式定义的模 MPS 的转移矩阵：

$T_{M^G_{H,\omega}} :=$ 

. (3.98)

我们可以证明，转移矩阵满足以下等式：

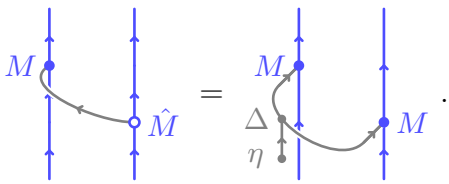


. (3.99)

这里，π^r 是投影到自发对称性破缺扇区 M_r 上的投影，该投影在式（3.70）中定义，即

$$\pi^r(m_a^{r'}) = \delta_{r,r'} m_a^r. \tag{3.100}$$

利用余模结构的定义直接计算，也可以得到这个等式。下面来计算这个图示：



. (3.101)

这里，该图示是将转移矩阵旋转 90 度后的结果，其中左侧的一条蓝线被翻转。将 $m_a^r \otimes m_b^{r'}$ 代入底部的各条腿后，顶部各条腿的输出计算如下：

$$\frac{1}{\dim V_\omega} \sum_{r'' \in S_{H\backslash G}} \sum_{a',b'=1}^{\dim V_\omega} f^{r''}_{a'b'} m_a^r \otimes (f^\dagger)^{r''}_{a'b'} m_b^{r'} = \frac{1}{\dim V_\omega}\,\delta_{r,r'} m_b^r \otimes m_a^r. \tag{3.102}$$

因此，该图通过交换两条蓝线并投影到同一个自发对称性破缺扇区上来发挥作用。将该图旋转回去后，我们就得到所需的等式。

示例： $G=\mathbb{Z}_2$

当 $G=\mathbb{Z}_2=\{e,a|\,a^2=e\}$ 时，只有一个非平凡的代数对象 $A^G_{H,\omega}=\mathbf{1}\oplus$ 符号表示，其中 H 和 ω 均为平凡的。下面来计算该代数对象的模 MPS。由于 H和 ω是平凡的，因此 $M^G_{H,\omega}$就是 $A^G_{H,\omega}$本身。$M^G_{H,\omega}$的一组标准正交基为

$$m^g(h)=\delta_{g,h}, \tag{3.103}$$

模作用由[8]给出

$$f_g\cdot m^h=\delta_{g,h}m^h. \tag{3.104}$$

因此，$M^G_{H,\omega}\simeq\mathbb{C}m^e\oplus\mathbb{C}m^a$ 给出了不可约分解。于是，矩阵乘积态矩阵为

$$M_e=1,\quad M_a=1. \tag{3.105}$$

矩阵乘积态矩阵 M_e 和 M_a 分别生成 $\bigotimes|e\rangle$ 和 $\bigotimes|a\rangle$。值得注意的是，每个矩阵乘积态矩阵作为一组 1×1 矩阵都是单射的。

示例： G**的完全凝聚曲面**

下面来计算完全凝聚曲面 $\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}]$的模 MPS。$M^G_{H,\omega}$ 的一组标准正交基为

$$m^g(h)=\delta_{g,h}, \tag{3.106}$$

并且模作用由下式给出

$$f_g\cdot m^h=\delta_{g,h}m^h. \tag{3.107}$$

因此，$M^G_{H,\ \omega}\simeq\bigoplus_{g\in G}\mathbb{C}m_g$ 给出了不可约分解。于是，矩阵乘积态矩阵由下式给出

$$M_g=1. \tag{3.108}$$

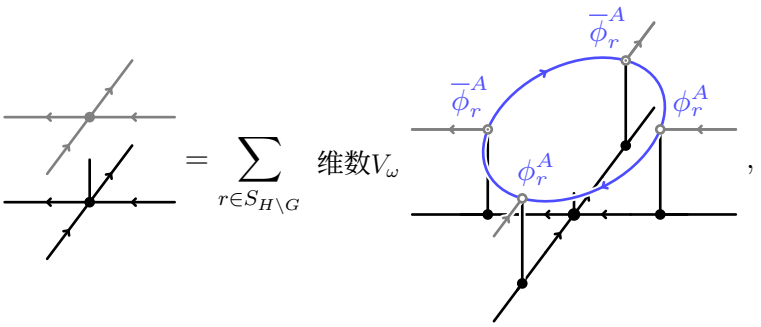
由 M_g 生成的矩阵乘积态为 $\bigotimes|g\rangle$，即一个 G-自发对称性破缺态。请注意，每个矩阵乘积态矩阵作为一组 1×1 矩阵都是单射的。

3.4.3 2Rep(G)-对称性的线状作用张量

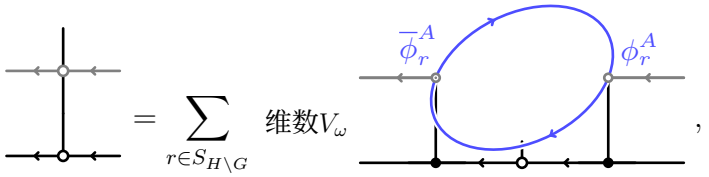
我们来计算凝聚曲面 $\mathcal{O}[A]$ 在基态上的局域对称作用，其中 $A=A^G_{H,\omega}$。这个局域对称作用由以下张量 ϕ^A_r和 $\phi^{\overline{A}}_r$ 描述

[8]这里省略了 m^g 的下标，因为由于 $\dim V_\omega=1$，它是唯一的。

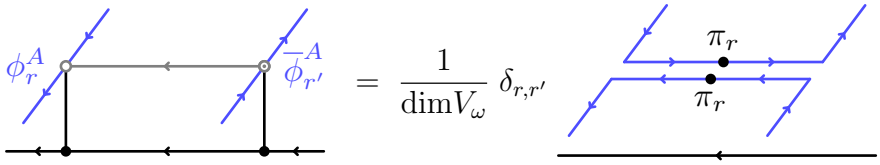
满足



(3.109)

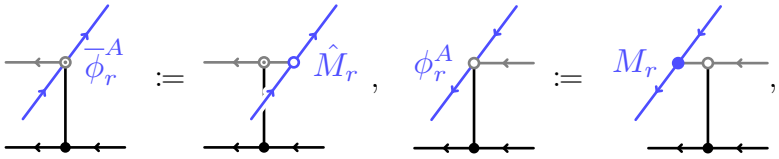


以及正交条件



(3.110)

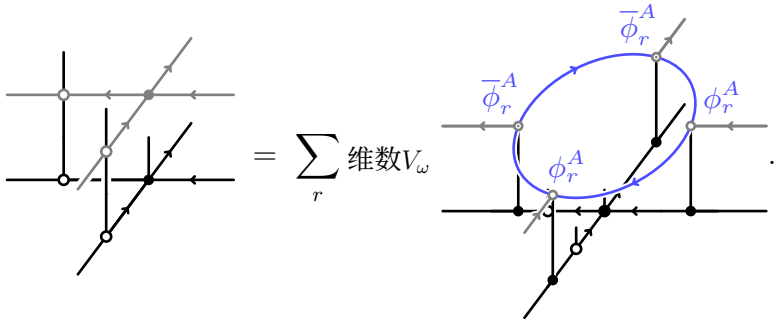
利用模 MPS，我们可以将作用张量 ϕ_r^A和 ϕ_r^A 取为如下形式 $^-$:



(3.111)

ˆ其中 M_r 和 M_r 分别是限制在由 $r \in S_{H\backslash G}$标记的自发对称性破缺扇区上的模和余模结构映射，右侧的灰点表示式（2.13）中定义的张量。事实上，利用性质（3.109）和性质（3.93），可以验证第一个定义性质（3.94）可用类似论证证明。正交条件也由式（3.99）得到。

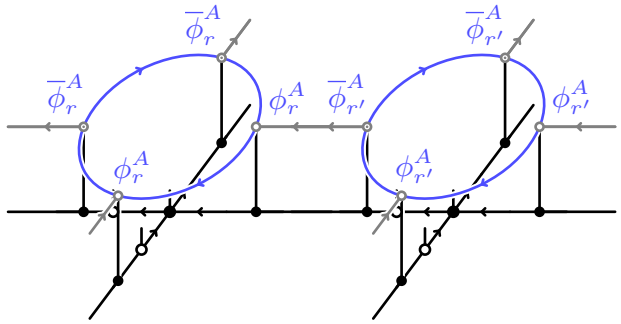
利用这些张量，单位元胞上的对称作用可描述如下:



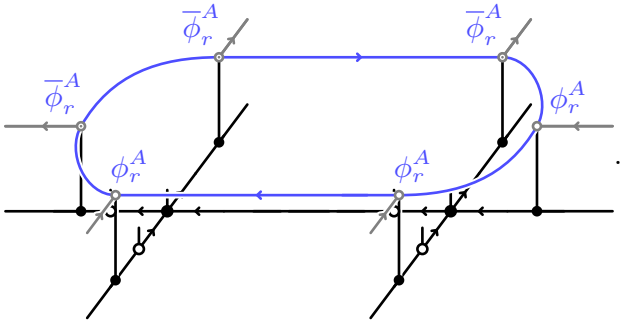
(3.112)

此外，两个蓝色圆圈可以合并为一个：

$$\sum_{r,r'} (\dim V_\omega)^2$$

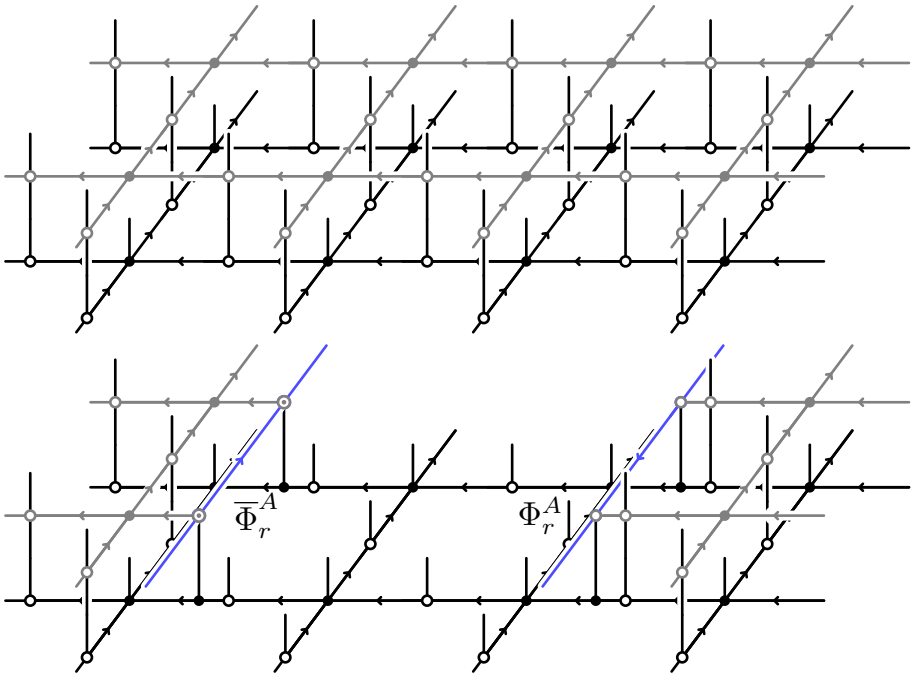


$$= \sum_{r=1} \dim V_\omega$$



(3.113)

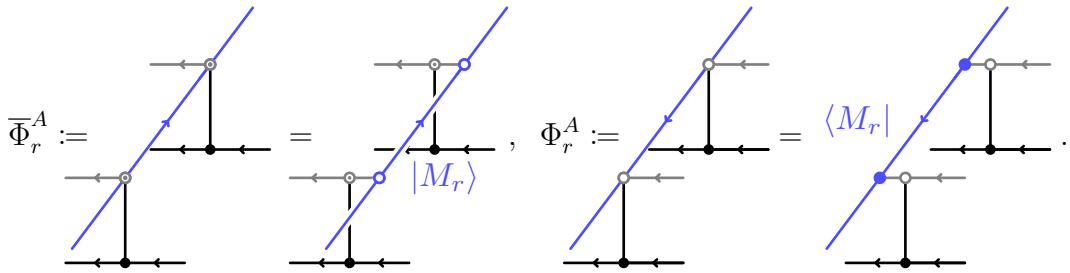
为了后续使用，我们考虑以下对称作用：对于环面上的基态，我们施加一个支撑在绕环面其中一个圈的条带上的部分对称作用。该部分对称作用的张量网络表示为



(3.114)

两个方向上均施加周期边界条件，线状张量 Φ_r^A

并 Φ_r^A 定义如下：



(3.115)

这里，公式（3.114）可利用公式（3.109）和公式（3.110）推导得到。我们将 Φ_r^A和 Φ_r^A 称为凝聚曲面 $\mathcal{O}[A]$的线状作用张量。

4 G 对称态的参数化族

根据一般考虑，预期 S^n 参数化的 G 对称短程纠缠态分别由 $\mathrm{H}^2(G;\mathrm{U}(1))$ 和 $\mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$ 分类，其中 $n=1$ 和 $n=2$ 对应；并且对于所有 $n\geq 3$，除高阶贝里相位 [18, 88–90] 外，分类都是平凡的。本节中，我们利用对称性插值，构造由 $\mathrm{H}^2(G;\mathrm{U}(1))$ 和 $\mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$ 中的元素标记的 S^1 和 S^2 参数化的 G 对称态族。

4.1 S^1 参数化族

本节中，我们利用对称性插值方法构造 S^1 参数化的 G-对称态。从范畴论视角来看，S^1 参数化族由 $\mathrm{H}^2(G;\mathrm{U}(1))$ [18, 88–90] 分类。由于 $2\mathrm{Rep}(G)$ 中每个可逆 0-形式对称性都由 $\mathrm{H}^2(G;\mathrm{U}(1))$ 中的一个元素标记，因此自然可以预期，对应于$[\omega]\in\mathrm{H}^2(G;\mathrm{U}(1))$ 的 S^1 参数化族可通过插值由 $[\omega]$ 标记的对称性来构造。然而，我们无法将第 2.3 节讨论的对称性插值方法直接应用于 $2\mathrm{Rep}(G)$ 中的可逆凝聚面。这是因为，即使凝聚面可逆，图 3 中定义的凝聚面也无法写成局域幺正算符的乘积。为解决这一问题，我们首先构造 $2\mathrm{Rep}(G)$ 中可逆凝聚面的局域幺正分解。之后，我们应用对称性插值方法，构造 S^1 参数化的G-对称态族。为确认所构造的族是非平庸的，我们计算沿 S^1 参数进行绝热演化所泵浦的自界面模，并证明其实现了 1+1d 中非平庸的 G-SPT 相。

4.1.1 $2\mathrm{Rep}(G)$中的可逆凝聚面

正如我们在第3.2节所展示的，$2\mathrm{Rep}(G)$中的可逆 0-形式对称性由上同调类 $[\omega]$ 在 $\mathrm{H}^2(G,\mathrm{U}(1))$中标记。接下来，我们将说明，由$[\omega]$ 标记的对称算符可以分解为局域幺正算符的乘积。我们还将计算它对 G簇态的局域作用，以供后续使用。

我们首先描述与由 $[\omega]$ 标记的可逆凝聚曲面相对应的 Frobenius 代数对象。为此，取一个代表性余循环 ω。相应的特殊对称Frobenius代数对象为

$$A^G_{G,\omega} = \mathrm{End}(V_\omega), \tag{4.1}$$

其中 (ρ_ω, V_ω) 是 G 上余循环为 ω 的射影表示。作为射影表示，我们取扭曲正则表示 $(\rho^{\mathrm{reg}}_\omega, \mathbb{C}[G]^\omega)$：作为一个向量空间，其表示空间定义为群代数

$$\mathbb{C}[G]^\omega := \mathbb{C}[G], \tag{4.2}$$

表示映射定义为

$$\rho^{\mathrm{reg}}_\omega(g)v_h = \omega(g,h)v_{gh}, \tag{4.3}$$

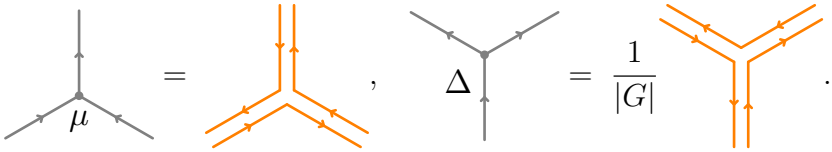
其中 $\{v_g\}_{g\in G}$ 是由群元素标记的 $\mathbb{C}[G]^\omega$ 的基。接下来，我们将余循环规范化为对所有 $g \in G$，$\omega(e,g) = \omega(g,e) = 1$。我们还选择规范，使得对所有 $g \in G$，$\omega(g,g^{-1}) = 1$。这种规范化和规范选择意味着 $\rho^{\mathrm{reg}}_\omega(e) = \mathrm{id}$ 且 $\rho^{\mathrm{reg}}_\omega(g^{-1}) = \rho^{\mathrm{reg}}_\omega(g)^{-1} = \rho^{\mathrm{reg}}_{\omega^{-1}}(g)^{\mathrm{T}}$，其中上标 T 表示转置。为方便起见，我们明确写出特殊对称弗罗贝尼乌斯代数结构。令 $\{v^g\}_{g\in G}$ 为 $(\mathbb{C}[G]^\omega)^*$ 的对偶基，使得 $v^g(v_h) = \delta_{g,h}$。那么，G 对 $\mathrm{End}(\mathbb{C}[G]^\omega) \cong (\mathbb{C}[G]^\omega)^* \otimes \mathbb{C}[G]^\omega$ 的作用为

$$\rho^G_{G,\omega}(g)(v^h \otimes v_l) = \frac{\omega(g,l)}{\omega(g,h)} v^{gh} \otimes v_{gl}, \tag{4.4}$$

而乘法和余乘法由下式给出

$$\begin{aligned} \mu &: (v^{g_1} \otimes v_{g_2}) \otimes (v^{h_1} \otimes v_{h_2}) \mapsto \delta_{g_2,h_1} v^{g_1} \otimes v_{h_2}, \\ \Delta &: v^{g_1} \otimes v_{g_2} \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{h\in G} (v^{g_1} \otimes v_h) \otimes (v^h \otimes v_{g_2}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

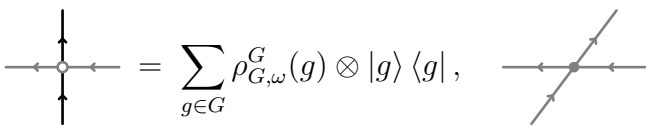
我们可以用图示如下表示这些结构映射：



(4.6)

这里，右侧与灰色线方向相同的橙色线表示表示空间 $\mathbb{C}[G]^\omega$，而方向与灰色线相反的橙色线表示其对偶空间（$\mathbb{C}[G]^\omega$）*。

利用式（4.6）中的双线记号，我们可以将凝聚曲面$\mathcal{O}[A^G_{G,\omega}]$ 分解成小块。回顾一下，凝聚曲面由以下局部张量组成：



(4.7)

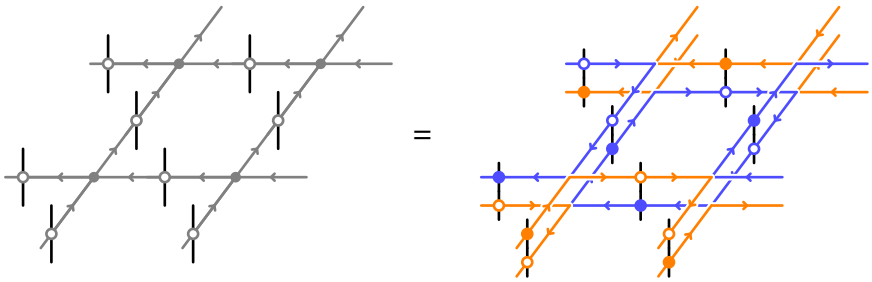


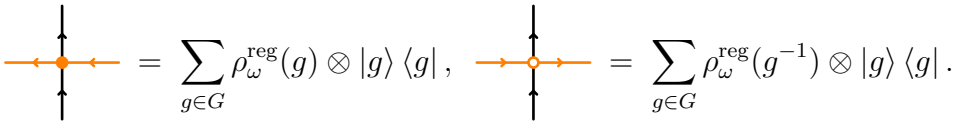
图 5：与代数对象 $A^G_{G,\omega}$ 相关的可逆凝聚面的分解。为了展示线的连接关系，我们用橙色和蓝色表示相同的酉算符 $u^{(p)}_\omega$。

式（4.7）中的第一个张量可以分解为



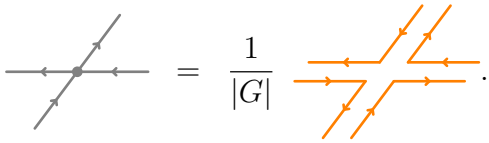
(4.8)

其中，实心点和空心点分别表示与 $\rho^{\mathrm{reg}}_\omega$ 和 $\rho^{\mathrm{reg}}_{\omega^{-1}}$ 相关的广义泡利 Z 算符，即，



$$= \sum_{g\in G} \rho^{\mathrm{reg}}_\omega(g) \otimes |g\rangle\langle g| \,, \qquad = \sum_{g\in G} \rho^{\mathrm{reg}}_\omega(g^{-1}) \otimes |g\rangle\langle g| \,. \tag{4.9}$$

在第二个等式中，我们使用了关系 $\rho^{\mathrm{reg}}_{\omega^{-1}}(g) = \rho^{\mathrm{reg}}_\omega(g^{-1})^{\mathrm{T}}$。式（4.7）中的第二个张量可以分解为

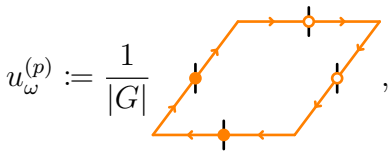


(4.10)

将这些分解组合起来，我们可以把凝聚曲面拆分成如下的小块：

$$\mathcal{O}[A^G_{G,\omega}] = \prod_p u^{(p)}_\omega. \tag{4.11}$$

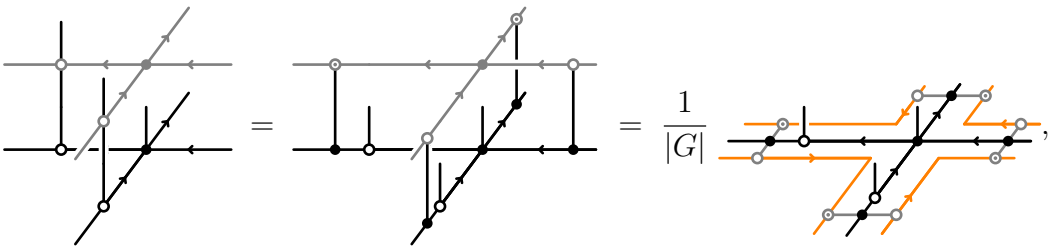
这里，$u^{(p)}_\omega$是一个作用于晶格面p周围物理自由度的局域幺正算符，该晶格面定义为



(4.12)

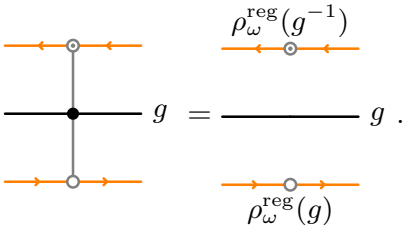
其中橙色张量定义于式（4.9）中。分解的图示见图5 。

下面来计算可逆凝聚面的局域对称作用在基态上的作用。局域对称作用由下式给出



(4.13)

其中在第一个等式中，我们使用了凝聚曲面的普遍性质（3.55）。最后一个图中的黑点表示复制张量，灰点定义为

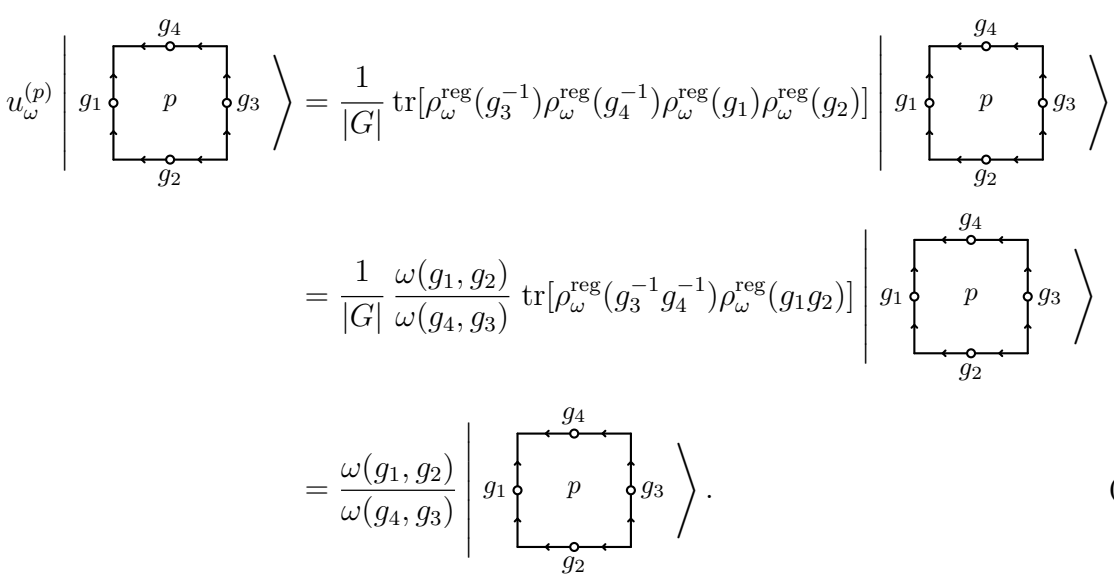


(4.14)

特别地，我们可以确认基态在凝聚曲面的作用下保持不变。

4.1.2 在 0-形式对称性中，对 $2\mathrm{Rep}(G)$ 的可逆对称性进行插值

通过使用双线记号，可将可逆凝聚面拆分为作用在每个晶格面周围的局域幺正算符 $u_\omega^{(p)}p$。通过在 $u_\omega^{(p)}$ 与恒等算符之间进行插值，我们可以构造可逆凝聚面的一个插值。为找到这样的插值，我们先明确写出 $u_\omega^{(p)}$ 的作用。$u_\omega^{(p)}$ 对基态的作用计算如下：

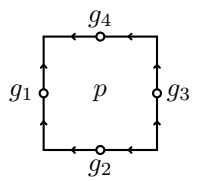


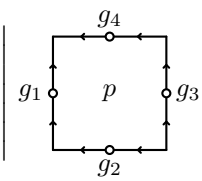
(4.15)

这里，第二个等号由 $\omega(g_3^{-1},\ g_4^{-1}) = \omega(g_4,\ g_3)^{-1}$ 得出，这是我们对 ω 进行规范选择的结果；第三个等号则由平坦性条件 $g_1g_2 = g_4g_3$ 得出。利用这个表达式，我们可以如下定义可逆凝聚面的一个插值：

$$\mathcal{O}[A^G_{G,\omega}](\theta) \coloneqq \prod_p u^{(p)}_\omega(\theta), \tag{4.16}$$

其中， $u^{(p)}_\omega(\theta)$ 定义为

$u^{(p)}_\omega(\theta)\Big|$ 

$\Big\rangle = \left[\dfrac{\omega(g_1,g_2)}{\omega(g_4,g_3)}\right]^{\frac{\theta}{2\pi}}\Big|$ 

$\Big\rangle.$ (4.17)

这里，对于复数 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $|z| = 1$，我们取对数的主值分支为$z = e^{i\phi}$其中 $0 \le \phi < 2\pi$并定义 $z^{\frac{\theta}{2\pi}} = e^{i\frac{\theta}{2\pi}\phi}$对于 $\theta \in [0, 2\pi]$。参数化哈密顿量族通过用 G-簇哈密顿量 H （式（3.3））与 U_ω（θ）进行共轭得到：

$$H_\omega(\theta) = \mathcal{O}[A^G_{G,\omega}](\theta) H \mathcal{O}[A^G_{G,\omega}](\theta)^\dagger. \tag{4.18}$$

我们注意到，对于所有 $\theta \in [0, 2\pi]$，该族都具有 G-对称性，因为 $\mathcal{O}[A^G_{G,\omega}](\theta)$ 与 G-对称性的生成元对易。

4.1.3 泵浦界面模

现在，让我们通过计算泵浦界面模来确认上述 S^1-参数化族是非平凡的。为此，我们采用绝热演化论证。下面简要回顾这一论证：考虑一个具有 G-对称性的 S^1-参数化族 $H(\theta)$。对于这样的族，我们考虑一个空间非均匀哈密顿量，即纹理化哈密顿量 $H^{\text{text}}(\theta)$。这里，纹理化哈密顿量是指其参数沿一个空间方向（下文取为 x轴）调制的哈密顿量。更准确地说， $H^{\text{text}}(\theta)$ 在 $x = 0$、 $x \gg 0$ 和 $x \ll 0$ 附近的区域满足以下性质：

1。在区域 $x \gg 0$ 中， $H^{\text{text}}(\theta)$ 的局域项与 $H(\theta$ 的局域项一致).

2。在区域 $x \ll 0$ 中， $H^{\text{text}}(\theta)$ 的局域项与 $H(0$ 的局域项一致).

3. 在 $x = 0$ 的邻域内， $H^{\text{text}}(\theta)$ 的局域项可任意选取，只要 $H^{\text{text}}(\theta)$ 仍保持唯一能隙且保留对称性 G。

通过将 θ 从 0 绝热地改变至 2π， $H^{\text{text}}(\theta)$ 的基态会连续演化。最终，除了 $x = 0$ 附近的区域外，基态会回到自身；但 $x = 0$ 附近的态可能发生非平庸变化。这种变化可视为泵浦界面模。如果族 $H(\theta)$ 是非平庸的，那么泵浦界面模也非平庸。我们注意到，这一论证

也可应用于对称性为非可逆的情形。在第 5.1 节中，我们将对 S^1-族2Rep(G)-对称态进行类似分析。

让我们将这一论证应用于具有 G-对称性的 S^1参数化族 $H_\omega(\theta)$。我们考虑如下定义的纹理化哈密顿量 $H_\omega^{\text{text}}(\theta)$:

$$H_\omega^{\text{text}}(\theta) \coloneqq \mathcal{O}[A_{G,\omega}^G]^{x>0}(\theta) H \mathcal{O}[A_{G,\omega}^G]^{x>0}(\theta)^\dagger, \tag{4.19}$$

其中， $\mathcal{O}[A_{G,\omega}^G]^{x>0}(\theta)$是如下定义的截断凝聚面:

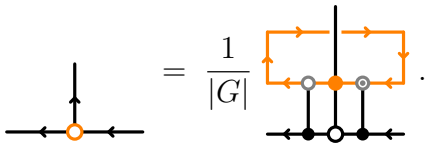
$$\mathcal{O}[A_{G,\omega}^G]^{x>0}(\theta) \coloneqq \prod_{p, x_p>0} u_\omega^{(p)}(\theta), \tag{4.20}$$

其中， x_p 是晶格面 p的 x坐标。该纹理化哈密顿量满足上述三个性质：根据定义，第一和第二个性质显然成立；第三个性质成立，是因为截断凝聚面是幺正的，且与 G-对称性对易。 $H_\omega^{\text{text}}(\theta)$的基态为

$$|\text{G.S.}_\omega^{\text{text}}(\theta)\rangle \coloneqq \mathcal{O}[A_{G,\omega}^G]^{x>0}(\theta) \, |\text{G.S.}\rangle \, . \tag{4.21}$$

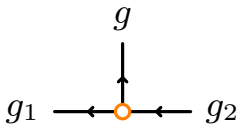
我们将这一状态称为纹理化基态。

为了观察泵浦界面模，我们来考察 $\theta = 2\pi$处的基态。利用性质（4.13），可以证明， $\theta = 2\pi$ 处的基态可由$\theta = 0$ 处的基态通过替换 $x = 0$ 处界面沿线的链接张量得到，替换后的张量如下:



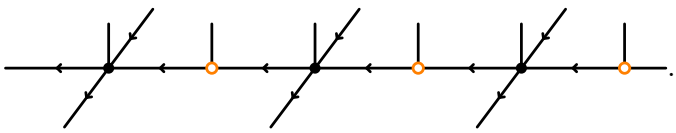
(4.22)

参见图 6，其中展示了详细的图形计算。通过直接计算可知，上述橙色张量即为扭曲乘法张量:



$$= \omega(g_2^{-1}, g_1)\delta_{g_1 g, g_2}. \tag{4.23}$$

因此，泵浦界面模由以下矩阵乘积态给出:



(4.24)

我们将这个矩阵乘积态称为泵浦界面矩阵乘积态。在上图中，我们将朝向前方和后方延伸的腿称为有效物理腿，将竖直的腿称为原始物理腿，并将水平的腿称为矩阵乘积态的虚拟腿。我们注意到，泵浦界面矩阵乘积态是单射的。

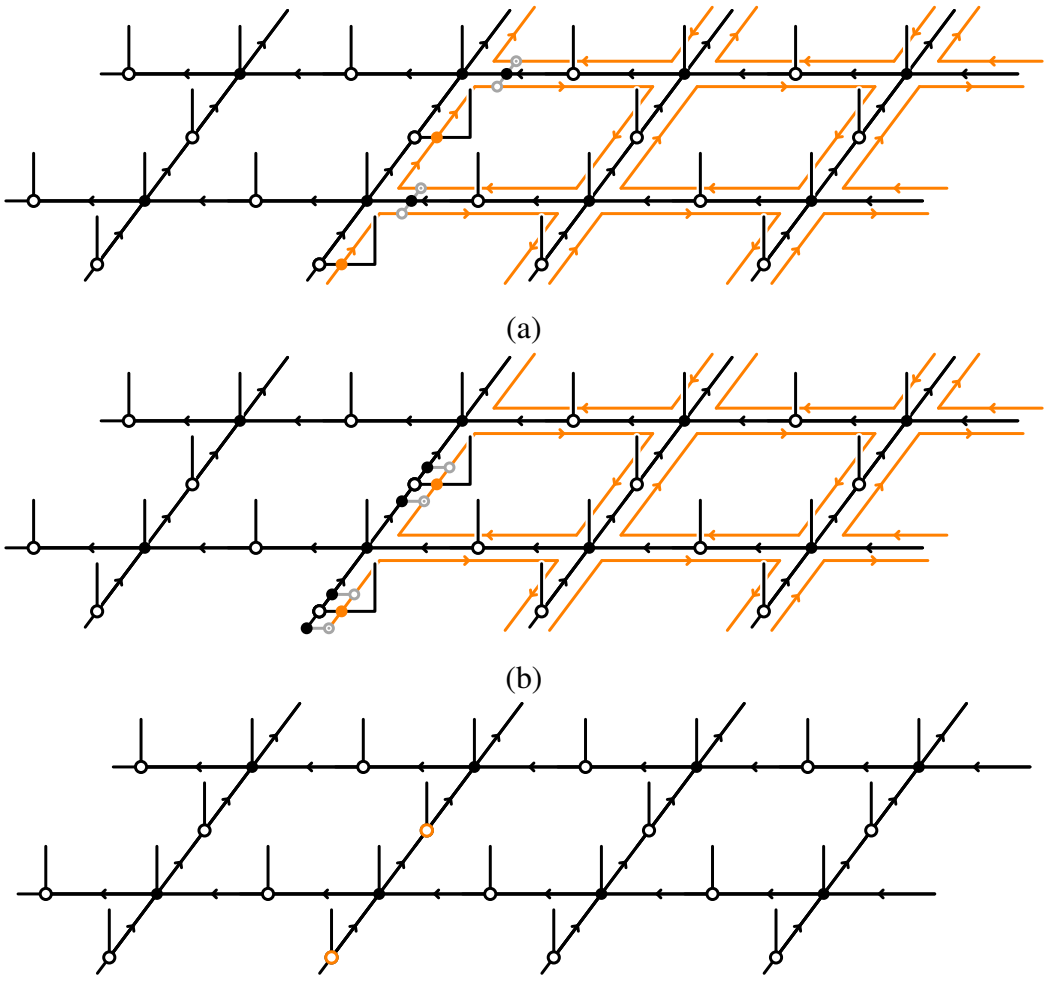
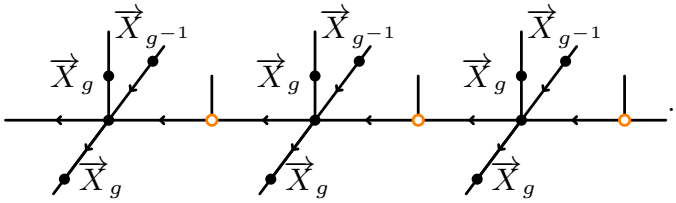


图 6：图示计算 S^1参数化族$H_\omega(\theta)$的泵浦界面模。(a) 利用性质 (4.13)，将可逆凝聚面吸收到远离界面 $x = 0$处的基态中。式 (4.14) 中定义的灰色和黑色张量保留在 $x = 0$上的每个顶点张量处，而式 (4.9) 中定义的橙色张量保留在 $x = 0$上的每个链接张量处。(b) 由于式 (4.14) 中的黑色张量是复制张量，我们可以将其拆分为两部分，并将它们穿过顶点张量。因此，非平凡性集中在 $x = 0$处的链接张量上。(c) 利用式 (4.22) 中橙色张量的定义，我们得到泵浦界面模的最终形式。

让我们计算泵浦界面矩阵乘积态上的 G-对称作用。为此，我们考虑 G-对称性在 $\theta = 2\pi$ 处对纹理化基态的作用，并推导作用于界面上的有效对称算符。我们首先回顾希尔伯特空间上的 G-对称算符为

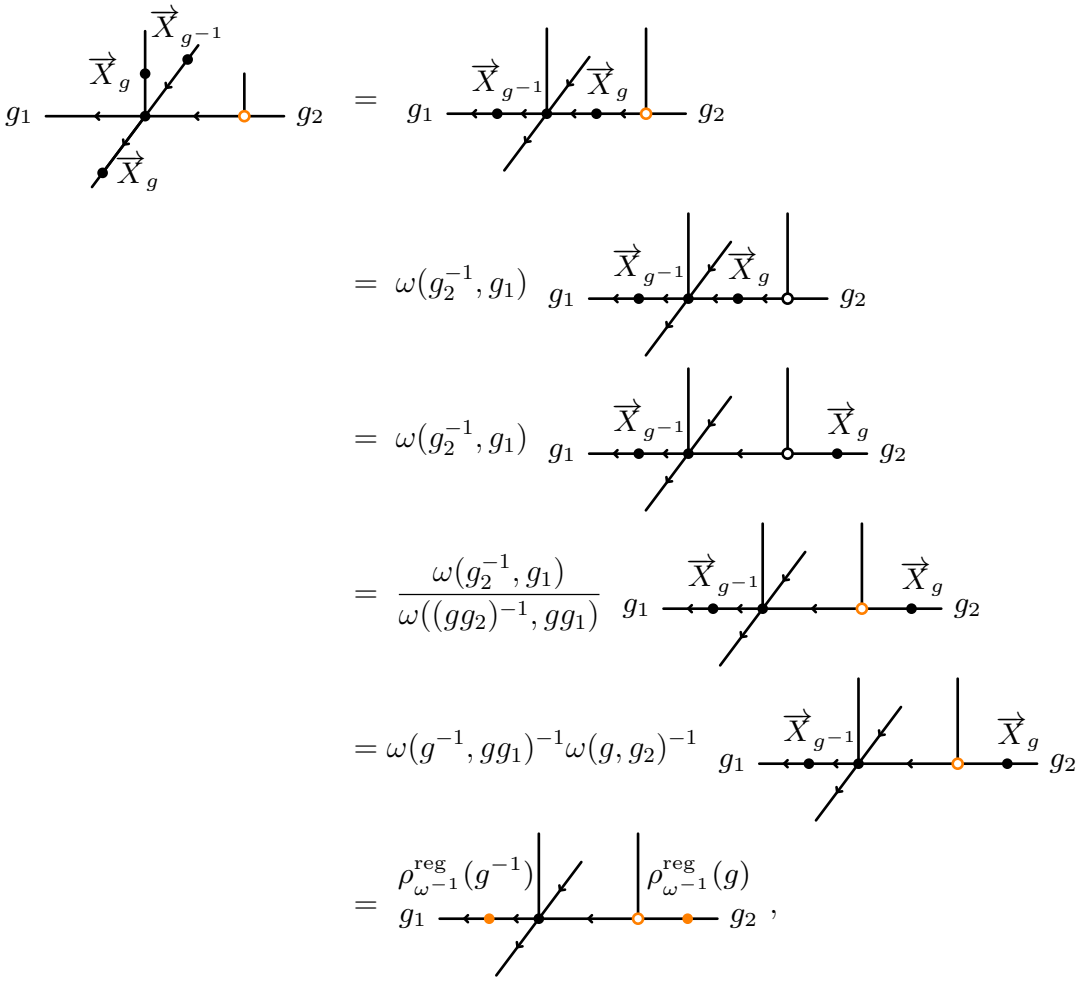
$$U_g = \bigotimes_{i\in V} \overrightarrow{X}_g^{(i)}. \tag{4.25}$$

根据公式（3.59），作用于界面之外物理腿的对称算符可约化为作用于泵浦界面矩阵乘积态的有效物理腿上的线状作用张量（3.60）。另一方面，对于界面处的物理腿，我们保持原有的现场对称算符 $\overrightarrow{X}_g^{(i)}$不变。因此， G-对称性在泵浦界面矩阵乘积态上的总作用由下图给出：



(4.26)

接下来，我们将证明，泵浦界面矩阵乘积态在上述 G- 对称作用下保持不变，并且作为 G- 对称单射矩阵乘积态具有非平庸的 SPT 不变量。首先，我们来证明其在 G-对称作用下的不变性。为此，我们将对称算符穿过矩阵乘积态张量：



(4.27)

其中， $\rho^{\mathrm{reg}}_{\omega^{-1}}$ 是由公式（4.3）定义的扭曲正则表示，其扭曲为 ω^{-1}。在第一个等式中，我们使用了 G-不变性复制张量；在第二个和第四个等式中，我们使用了泵浦界面 MPS 张量的定义；在第三个等式中，我们使用了乘法张量与左乘法 $\overrightarrow{X}_g$的对易性。在第五个等式中，我们使用了 ω上的余循环条件。因此，具有周期边界条件的泵浦界面矩阵乘积态在 G-对称作用下保持不变。上式表明，泵浦界面矩阵乘积态上的对称作用在虚拟腿上分解为射影作用 $\rho^{\mathrm{reg}}_{\omega^{-1}}$。因此，该 G-对称 MPS 的 SPT 不变量为 $[\omega^{-1}] \in \mathrm{H}^2(G;\ \mathrm{U}(1))$。特别地，当 $[\omega]$ 非平凡时，泵浦界面模也是非平凡的，这意味着S^1-族哈密顿量 $H_\omega(\theta)$是非平凡的。

4.2 S^2参数化族

本节使用对称性插值方法，构造具有 G对称性的 S^2参数化态族。从范畴论视角来看， S^2参数化族由 $\mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$ [18, 88–90] 分类。由于 2Rep(G) 中的每个可逆 1-形式对称性都由 $\mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$ 的一个元素标记，因此自然可以预期，与$\chi \in \mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$ 对应的 S^2参数化族，可以通过插值由 χ 标记的对称性来构造。然而，第2.3节介绍的对称性插值方法既不能直接应用于 S^2族，也不能直接应用于1-形式对称性。为解决这一问题，我们首先将对称性插值方法应用于由 χ 标记的 Wilson环乘积，构造两个（平凡的） S^1族。进一步在这两个族之间进行插值后，对于每个$\chi \in \mathrm{H}^1(G;\mathrm{U}(1))$，我们将得到一个具有 G对称性的 S^2族。

一个 S^2-族可以视为由 S^1-族构成的 S^1-族。因此，对其中一个 S^1 参数应用绝热演化论证，我们得到一个具有 G 对称性的泵浦界面模 S^1-族。于是， S^2-族的非平凡性归结为这个具有 G 对称性的泵浦界面模 S^1-族的非平凡性。因此，再次对界面 S^1-族应用绝热演化论证，我们确认了具有 G 对称性的态 S^2-族的非平凡性。

4.2.1 在1-形式$2\mathrm{Rep}(G)$中对可逆 1-形式对称性进行插值

2Rep(G)中的每个可逆 1-形式对称性都由一个特征标 $\chi:\ G \to \mathrm{U}(1)$标记。对于每个特征标 χ，我们现在构造一个由 G 对称的短程纠缠态构成的 S^2-参数化族。如上所述，一个 S^2-族可通过在两个平凡的 S^1-族之间进行插值得到。因此，我们先构造这两个 S^1-族。

为了构造第一个 S^1 族，我们将对称性插值方法应用于以下算符：

$$\mathrm{id} = \prod_p u_\chi^{(p)}. \tag{4.28}$$

这里的张量积取遍所有晶格面， $u_\chi^{(p)}$是围绕晶格面 p的 Wilson环算符，即

$$u_\chi^{(p)} := Z_\chi^{\dagger(\ell_b)} Z_\chi^{\dagger(\ell_l)} Z_\chi^{(\ell_t)} Z_\chi^{(\ell_r)}, \tag{4.29}$$

其中 ℓ_t、ℓ_b、ℓ_l、ℓ_r 分别是围绕晶格面 p的顶部、底部、左侧和右侧链接。由于算符（4.28）是局域幺正算符的乘积，我们可以将第 2.3 节中的对称性插值方法应用于该算符。具体而言，为了得到一个 S^1-族，我们在 Wilson环 $u_\chi^{(p)}$与恒等算符之间进行插值，得到

$$v_\chi^{(p)}(r) \coloneqq [Z_\chi^{(\ell_b)}]^{-r}[Z_\chi^{(\ell_l)}]^{-r}[Z_\chi^{(\ell_t)}]^{r}[Z_\chi^{(\ell_r)}]^{r}, \qquad r \in [0,1]. \tag{4.30}$$

这里，算符 $[Z_\chi^{(\ell)}]^r$ 和 $[Z_\chi^{(\ell)}]^{-r}$ 定义为

$$[Z_\chi^{(\ell)}]^r \left|g\right\rangle \coloneqq \chi(g)^r \left|g\right\rangle, \qquad [Z_\chi^{(\ell)}]^{-r} \left|g\right\rangle \coloneqq \chi(g)^{-r} \left|g\right\rangle, \tag{4.31}$$

其中，对于 $\chi(g) = e^{i\phi}$，$\chi(g)^r = e^{i\phi r}$ 且 $\chi(g)^{-r} = e^{-i\phi r}$，其中 $0 \le \phi < 2\pi$。利用上述插值，我们可以构造一个 S^1-参数族的哈密顿量，如下所示

$$H_\chi^V(r) \coloneqq V(r) H V(r)^\dagger, \qquad V_\chi(r) \coloneqq \prod_p v_\chi^{(p)}(r), \tag{4.32}$$

其中 H 是 3.3 式的哈密顿量，即 2+1d G-簇模型。注意，$V_\chi(r) = 1$对于晶格上的所有$r \in [0,1]$ 都成立，且满足周期性边界条件，因为相邻方格的贡献相互抵消。因此，上述 S^1-参数族是平凡的，即 $H_\chi^V(r) = H$ 对于所有 $r \in [0,1]$ 都成立。我们稍后将利用这个平凡族构造一个非平凡的 S^2- 参数族。

为了构造第二个 S^1-参数族，我们再次考虑恒等算符的相同分解（4.28），但采用不同的插值。具体而言，在 p的 x坐标为偶数的晶格面x_p 上，我们在 Wilson环 $u_\chi^{(p)}$和恒等算符之间进行插值，如下所示

$$w_\chi^{(p)+}(s) \coloneqq \exp(s \log u_\chi^{(p)}), \qquad s \in [0,1]. \tag{4.33}$$

另一方面，在坐标 x 为奇数的晶格面 p 上，我们在 $u_\chi^{(p)}$ 与恒等算符之间进行插值，如下所示：x_p

$$w_\chi^{(p)-}(s) \coloneqq \exp(-s \log u_\chi^{(p)\dagger}), \qquad s \in [0,1]. \tag{4.34}$$

这里，我们回顾一下，满足 $X^N = \mathrm{id}$ 的算符 X 的算符对数，对于正整数 N，定义为[9]

$$\log X \coloneqq \sum_{n=0}^{N-1} i\frac{2\pi n}{N} P_n[X], \tag{4.35}$$

其中 $P_n[X] \coloneqq \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi nm}{N}} X^m$ 是投影到 X 本征值为$e^{i\frac{2\pi n}{N}}$ 的特征子空间的投影。根据x 坐标选择不同插值的原因将在后文阐明；参见脚注 10。通过使用插值（4.33）和（4.34），我们可以构造一个 S^1 族哈密顿量，如下所示

$$H_\chi^W(s) \coloneqq W_\chi(s) H W_\chi(s)^\dagger, \qquad W_\chi(s) \coloneqq \prod_{p, x_p:\mathrm{even}} w_\chi^{(p)+}(s) \prod_{p, x_p:\mathrm{odd}} w_\chi^{(p)-}(s), \tag{4.36}$$

[9]特别是，当 $X = u_\chi^{(p)}$ 或 $u_\chi^{(p)\dagger}$ 时，我们取 $N = |\mathrm{H}^1(G; \mathrm{U}(1)|$。

其中 H 再次是 G-簇哈密顿量（3.3）。注意，上述族也是平凡的，即$H_\chi^W(s) = H$ 对所有 $s \in [0,1]$ 都成立，因为 $w_\chi^{(p)+}(s)$ 和 $w_\chi^{(p)-}(s)$ 是 Wilson环$u_\chi^{(p)}$的多项式，因此与 G-簇哈密顿量 H对易。

现在，我们通过在上述两个平凡的 S^1-族之间进行插值，构造一个 S^2-族。为此，我们首先证明这样的插值存在。具体而言，我们证明，在局域幺正算符的单参数族 $\{v_\chi^{(p)}(r)v^{(p')}{}_\chi(r)\}_{r\in[0,1]}$ 与 $\{w_\chi^{(p)+}(s)w^{(p')}{}_\chi{}^-(s)\}_{s\in[0,1]}$ 之间存在插值。这里，p 和 p' 是相邻方格，其 x 坐标分别为偶数和奇数。当且仅当通过拼接这两个族得到的以下S^1-族在酉算符空间中可收缩时，这些族之间才存在插值：

$$u_\chi^{(p,p')}(t) = \begin{cases} v_\chi^{(p)}(2t)v_\chi^{(p')}(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ w_\chi^{(p)+}(2-2t)w_\chi^{(p')-}(2-2t), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases} \tag{4.37}$$

一般而言，当且仅当其行列式的绕数为零时，酉算符的 S^1-族才是可收缩的。对于上述定义的酉算符，由于行列式为常数，其绕数为零：

$$\det(u_\chi^{(p,p')}(t)) = 1, \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{4.38}$$

对于 $t \in [0,1/2]$，上述等式由 $\det(v_\chi^{(p)}(r)) = 1$ 推出；这是因为 Z_χ^r 和 Z_χ^{-r} 的行列式相反。另一方面，对于 $t \in [1/2,1]$，上述等式由 $\det(w_\chi^{(p)+}(s)) = (\det(w_\chi^{(p)-}(s)))^{-1}$ 推出；这是因为 $u_\chi^{(p)}$ 和 $u_\chi^{(p)\dagger}$ 具有相同的特征值集合。[10] 方程 (4.38) 表明，酉算符的 S^1-族 $\{u_\chi^{(p,p')}(t)\}_{t\in[0,1]}$ 是可收缩的。因此，单参数酉算符族 $\{v_\chi^{(p)}(r)v^{(p')}{}_\chi(r)\}_{r\in[0,1]}$ 与 $\{w_\chi^{(p)+}(s)w^{(p')}{}_\chi{}^-(s)\}_{s\in[0,1]}$ 之间存在插值。由于对于任意 $n \ge 2$，$SU(n)$ 的第二同伦群均为零，这样的插值在同伦意义下唯一。

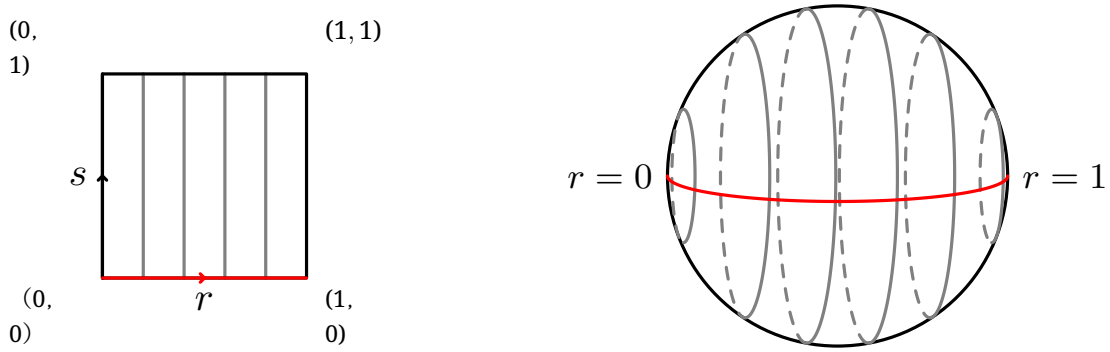
上述插值的存在保证了存在一个二参数族的酉算符 $\{u_\chi^{(p,p')}(r,s) \mid r,s \in [0,1]\}$，使得

$$\begin{aligned} u_\chi^{(p,p')}(r,0) &= \mathrm{id}, & u_\chi^{(p,p')}(0,s) &= \mathrm{id}, \\ u_\chi^{(p,p')}(r,1) &= v_\chi^{(p)}(r)v_\chi^{(p')}(r), & u_\chi^{(p,p')}(1,s) &= w_\chi^{(p)+}(s)w_\chi^{(p')-}(s). \end{aligned} \tag{4.39}$$

由于插值在同伦意义下是唯一的，因此上述条件在同伦意义下唯一确定了参数空间内部的酉算符。利用上述酉算符二参数族，我们可以构造一个哈密顿量二参数族，如下所示

$$H_\chi(r,s) \coloneqq U_\chi(r,s) H U_\chi(r,s)^\dagger, \qquad U_\chi(r,s) \coloneqq \prod_{p,x_p:\mathrm{even}} u_\chi^{(p,p')}(r,s). \tag{4.40}$$

[10] 我们注意到，$\det(w_\chi^{(p)+}(s))$ 和 $\det(w_\chi^{(p)-}(s))$ 通常都不等于一，并且可能对绕数有所贡献。特别是，单参数族 $\{w_\chi^{(p)+}(s)\}_{s\in[0,1]}$ 和 $\{w_\chi^{(p)-}(s)\}_{s\in[0,1]}$ 可能无法连续变形为 $\{v_\chi^{(p)}(r)\}_{r\in[0,1]}$。



(a) (b)

图 7： $U_\chi(r,s)$ 和 $H_\chi(r,s)$ 的参数空间。(a) $U_\chi(r,s)$ 的参数空间是一个正方形 $[0,1]\times[0,1]$。在底边和左边上，我们有 $U_\chi(r,0) = U_\chi(0,s) =$ 恒等映射。在顶边和右边上，我们分别有 $U_\chi(r,1) = V_\chi(r)$ 和 $U_\chi(1,s) = W_\chi(s)$。特别地，正方形边界上的 $U_\chi(r,s)$ 与 G- 簇哈密顿量 H对易。(b) $H_\chi(r,s)$ 的参数空间是一个球面 S^2，因为在通过 $U_\chi(r,s)$ 共轭哈密顿量 H 后，正方形的边界塌缩为一个点。灰线表示 r 为常数的线，而红线表示 $s=0$ 的线。红线上的所有点都被视为相同，因为对所有 $r\in[0,1]$，$U_\chi(r,0) =$ 恒等映射。

由于方程（4.39），参数空间边界上的酉算符 $U_\chi(r,\ s)$ 由下式给出

$$U_\chi(r,0) = U_\chi(0,s) = \mathrm{id}, \quad U_\chi(r,1) = V_\chi(r) = \mathrm{id}, \quad U_\chi(1,s) = W_\chi(s). \tag{4.41}$$

由于所有这些算符都与 H 对易，参数空间边界上的哈密顿量 $H_\chi(r,s)$ 可化简为

$$H_\chi(r,0) = H_\chi(0,s) = H_\chi(r,1) = H_\chi(1,s) = H. \tag{4.42}$$

也就是说，参数空间边界上的所有点都被视为等同。因此，模型的参数空间可化为一个球面 S^2；参数空间的图示见图 7。我们注意到，哈密顿量 $H_\chi(r,s)$ 对所有 G和 r 均具有 s- 对称性，因为 $U_\chi(r,s)$仅作用于边缘的希尔伯特空间，因此与 G-对称性对易。

4.2.2 泵浦界面模

我们通过绝热演化论证确认上述由 S^2 参数化的族 $H_\chi(r,\ s)$ 的非平凡性。对于每个固定的 $r\in[0,1]$，族 $\{H_\chi(r,\ s)\mid s\in[0,1]\}$ 是一个由 S^1 参数化的 G 对称哈密顿量族。因此，首先将绝热演化论证应用于 s，我们得到一个由 r 参数化的 S^1 族 G 对称泵浦界面模。为此，我们取由下式定义的纹理化哈密顿量 $H_\chi^{\mathrm{text}}(r,\ s)$:

$$H_\chi^{\mathrm{text}}(r,s) \coloneqq U_\chi^{x>0}(r,s) H U_\chi^{x>0}(r,s)^\dagger, \tag{4.43}$$

其中， $U_\chi^{x>0}(r,\ s)$ 定义为

$$U_\chi^{x>0}(r,s) \coloneqq \prod_{p;x_p>0,\text{even}} u_\chi^{(p,p')}(r,s). \tag{4.44}$$

这个纹理化哈密顿量满足第 4.1.3 节中列出的三个性质。其基态为$H_\chi^{\text{text}}(r,\ s)$，由下式给出：

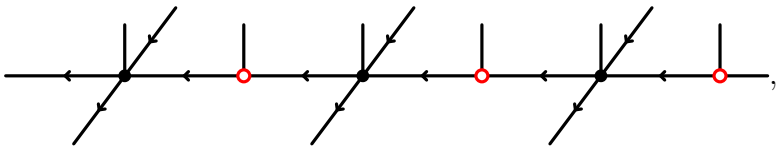
$$|\text{G.S.}\rangle_\chi^{\text{text}}(r,s)\rangle \coloneqq U_\chi^{x>0}(r,s)\,|\text{G.S.}\rangle\,. \tag{4.45}$$

我们将此态称为纹理化基态。

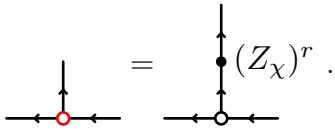
为考察泵浦界面模，我们来考虑 $s=1$ 处的基态。根据定义， $s=1$ 处的截断酉算符 $U_\chi^{x>0}(r,\ s)$ 是右半平面上环算符 $v_\chi^{(p)}(r)$ 的乘积。由于相邻晶格面 p 和 p' 上的 $v_\chi^{(p)}(r)$ 与 $v^{(p')\chi}(r)$ 的乘积在公共边上相互抵消，该算符可化简为 $x=0$ 处沿界面的链路上 $(Z_\chi^{(l)})^r$ 的乘积。因此， $s=1$ 处的基态为

$$|\text{G.S.}\rangle_\chi^{\text{text}}(r,s=1)\rangle = \bigotimes_{\ell,x_\ell=0} (Z_\chi^{(\ell)})^r\,|\text{G.S.}\rangle\,. \tag{4.46}$$

因此，泵浦界面模由以下单射矩阵乘积态给出：

$|\psi_{\chi,\text{interface}}(r)\rangle \coloneqq$  , (4.47)

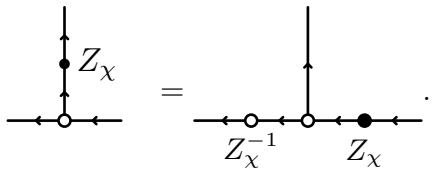
其中，矩阵乘积态张量定义为



(4.48)

我们将此矩阵乘积态称为泵浦界面矩阵乘积态。

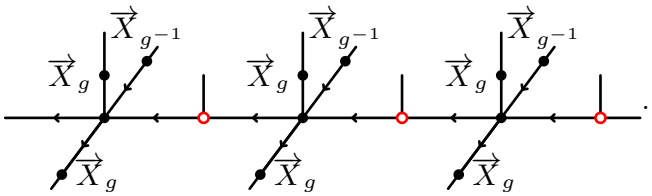
注意，周期链上的泵浦界面矩阵乘积态（4.47）关于 $r\in[0,1]$ 具有周期性，并且对所有 G-对称作用均保持不变 $r\in[0,1]$。首先，我们验证其关于 r的周期性。利用式（2.12），可以将算符 $(Z_\chi^{(\ell)})^r$ 在 $r=1$处如下推移：



(4.49)

这表明， $r=0$ 和 $r=1$ 处的矩阵乘积态张量由规范变换联系起来。因此，在周期链上，$r=1$处的泵浦界面矩阵乘积态等于 $r=0$处的泵浦界面矩阵乘积态。

接下来，我们证明泵浦界面矩阵乘积态具有 G-对称性。为此，我们来计算G-对称作用在泵浦界面矩阵乘积态上的作用。与 S^1-族的情况一样，对称性在界面上的作用由以下算符给出：



(4.50)

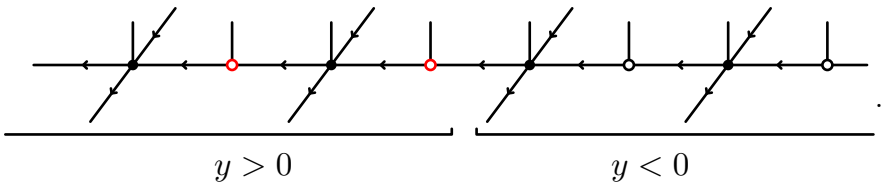
根据方程（3.54），原始物理腿和有效物理腿上的算符 $\overrightarrow{X}_g$ 和 $\overrightarrow{X}_{g^{-1}}$ 可以推到虚拟腿上。随后，这些算符在虚拟腿上相互抵消，因为它们与方程（4.50）中的红色张量对易。因此，泵浦界面矩阵乘积态（4.47）在 G-对称性的作用下保持不变。

现在，我们得到了一个由 $r \in [0,1]$ 参数化的 G-对称单射矩阵乘积态 S^1 族。我们可以再次运用绝热演化论证，确认这个 S^1 族的非平凡性。为此，我们考虑与这个 S^1 族[11]相关联的以下纹理态：

$$|\psi^{\text{text}}_{\chi,\text{interface}}(r)\rangle := \bigotimes_{\ell, y_\ell>0} (Z^{(\ell)}_\chi)^r \, |\psi_{\chi,\text{interface}}(r)\rangle \, . \tag{4.51}$$

从图示上看，这个态表示为

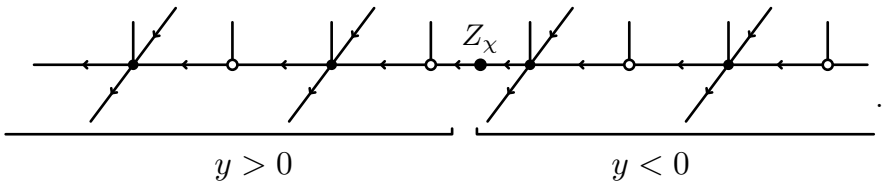
$|\psi^{\text{text}}_{\chi,\text{interface}}(r)\rangle =$



(4.52)

利用方程（4.49），可以看出算符 Z_χ 在虚拟腿上表现为位于 $r = 1$ 处的泵浦界面模：

$|\psi^{\text{text}}_{\chi,\text{interface}}(1)\rangle =$



(4.53)

[11]严格来说，要应用绝热演化论证，我们需要构造一族 1+1维 G对称哈密顿量，其基态由式（4.47）给出，因为在讨论绝热演化时，我们假设哈密顿量存在。不过，为避免使讨论复杂化，这里省略哈密顿量的显式构造。一般而言，对于单射矩阵乘积态，存在一个有能隙哈密顿量，使该态成为其唯一基态 [124]。因此，根据上述一族单射矩阵乘积态（4.47），我们可以构造一参数母哈密顿量族。态（4.51）可以视为这族母哈密顿量的纹理化基态。此外，无需使用绝热演化论证，也可以运用参考文献 S^1 中的方法，验证这族 G 对称单射矩阵乘积态的非平凡性。 [17]。

通过证明该泵浦界面模相对于界面上的 S^1-对称作用携带非平凡荷，可以验证具有 G-对称性的 G-族的非平凡性。将方程（4.50) 中定义的 G 对称算符作用于 $|\psi_\chi^{\text{text}}, \text{interface}(r=1)\rangle$，我们发现界面模 Z_χ 上的对称作用为

$$Z_\chi \longmapsto \overrightarrow{X}_g Z_\chi \overrightarrow{X}_g^\dagger = \chi(g)^{-1} Z_\chi. \tag{4.54}$$

这表明，在 $r=1$ 处泵浦的界面模相对于界面上的 G-对称作用携带非平凡荷 χ^{-1}。因此，通过两次应用绝热演化论证，我们确认了 S^2-参数化族 $H_\chi(r,\ s)$ 的非平凡性。

5 参数化的$2\mathrm{Rep}(G)$-对称态族 s

根据一般性考虑，可以预期：S^n-参数化的 $2\mathrm{Rep}(G)$-对称短程纠缠态由 G （当 $n=1$时）分类，并且对于所有 $n\geq 2$，截至高阶贝里相位 [23]，其分类是平凡的。在本节中，我们通过将对称性插值方法应用于 0-形式对称性 G，构造所有 S^1-参数化的$2\mathrm{Rep}(G)$-对称短程纠缠态族，该对称性位于 2+1d G-簇态中。

5.1 S^1-参数化族

在本小节中，我们将使用对称性插值方法构造 S^1-参数化的 2Rep(G)-对称短程纠缠态族。我们还将使用绝热演化论证展示这些族的非平凡性。

5.1.1 模型

我们首先针对每个标记为 $g\in G$ 的对称性算符，定义一个由 S^1 参数化的 2Rep(G) 对称模型族。回想一下，G 簇态的 G 对称性由下式给出

$$U_g = \bigotimes_{i\in V} \overrightarrow{X}_g^{(i)}. \tag{5.1}$$

作为 G 对称性的一种插值，我们考虑与方程（2.22）中相同的插值：

$$U_g(\theta) = \bigotimes_{i\in V} \overrightarrow{X}_g^{(i)}(\theta),\quad \overrightarrow{X}_g^{(i)}(\theta) := \exp\left[\frac{\theta}{2\pi}\log \overrightarrow{X}_g^{(i)}\right]. \tag{5.2}$$

关于 2.23 式中 $\log \overrightarrow{X}_g^{(i)}$ 的定义，见方程。注意，$U_g(\theta)$ 对所有 $\theta\in[0,2\pi]$ 都与 $2\mathrm{Rep}(G)$ 对称性对易。于是，我们通过对方程（3.3）中的 G 簇哈密顿量 H 进行 $U_g(\theta)$ 共轭，定义一个由 S^1 参数化的 $2\mathrm{Rep}(G)$ 对称哈密顿量族：

$$H_g(\theta) = U_g(\theta) H U_g(\theta)^\dagger. \tag{5.3}$$

酉算符族 $U_g(\theta)$ 不是 2π-周期的，但哈密顿量 $H_g(\theta)$是 2π-周期的，因为 $U_g(2\pi) = U_g$ 是 H 的 G-对称性。$H_g(\theta)$ 的基态为

$$|\mathrm{G.S.}_g(\theta)\rangle = U_g(\theta)\,|\mathrm{G.S.}\rangle\,. \tag{5.4}$$

5.1.2 泵浦界面模

接下来，我们通过应用绝热演化论证，确认上述 S^1参数化族 $H_g(\theta)$的非平凡性。我们考虑一个纹理化哈密顿量 $H_g^{\text{text}}(\theta)$，其定义为

$$H_g^{\text{text}}(\theta) \coloneqq U_g^{x>0}(\theta) H U_g^{x>0}(\theta)^\dagger, \tag{5.5}$$

其中 $U_g^{x>0}(\theta)$ 定义为

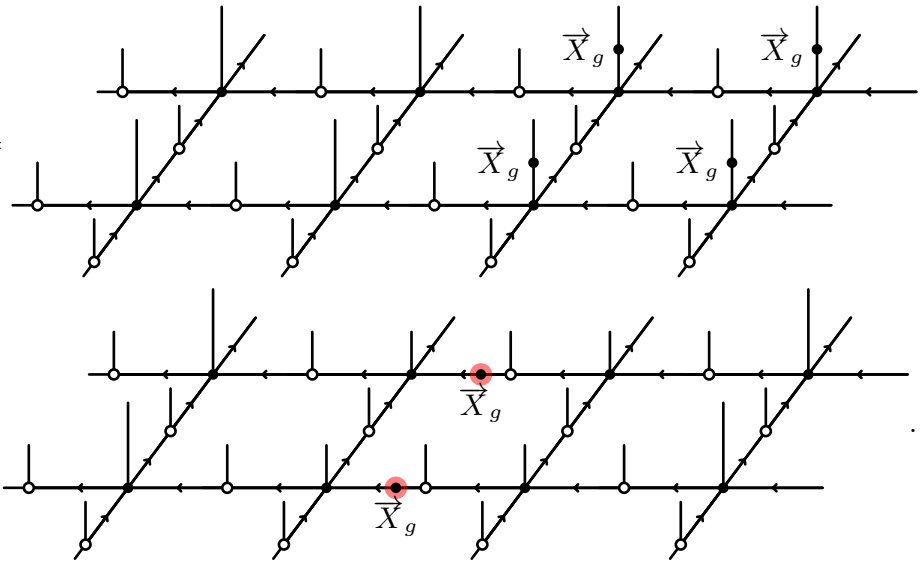
$$U_g^{x>0}(\theta) \coloneqq \bigotimes_{i,x_i>0} \overrightarrow{X}_g^{(i)}(\theta). \tag{5.6}$$

我们注意到，上述纹理化哈密顿量满足第 4.1.3 节中列出的三条性质，其中最后一条性质中的 G-对称性现在被$2\mathrm{Rep}(G)$-对称性取代。 $H_g^{\text{text}}(\theta)$的基态为

$$|\mathrm{G.S.}_g^{\text{text}}(\theta)\rangle \coloneqq U_g^{x>0}(\theta)\,|\mathrm{G.S.}\rangle\,. \tag{5.7}$$

为了观察泵浦界面模，我们考虑 $\theta = 2\pi$ 处的基态。由于复制张量具有 G-不变性（3.54），格点算符 $\overrightarrow{X}_g^{(i)}(\theta)$ 在 $\theta = 2\pi$ 处可以转化为 $\overrightarrow{X}_g$ 和 $\overrightarrow{X}_{g^{-1}}$，并作用于虚拟腿上。除了界面上的算符之外，这些算符两两抵消。因此，在 $x = 0$ 处沿界面的每条虚拟腿上都留下了左乘算符 $\overrightarrow{X}_g$

$|\mathrm{G.S.}_g^{\text{text}}(2\pi)\rangle =$



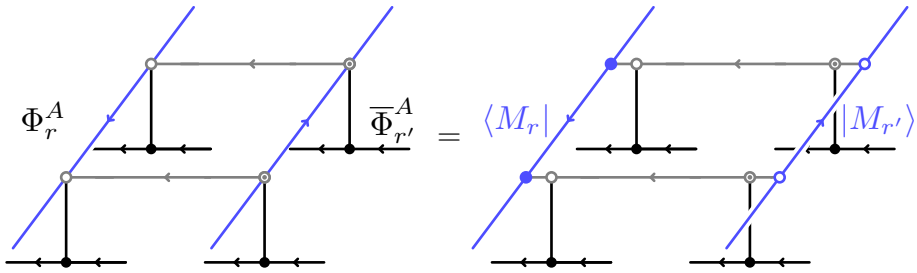
(5.8)

上面的方程表明，在 $\theta = 2\pi$ 处的泵浦界面模为

$$|\psi_{g,\text{interface}}\rangle = \bigotimes \overrightarrow{X}_g = \bigotimes \left(\sum_{h\in G} |gh\rangle\langle h| \right), \tag{5.9}$$

其中，张量积是对界面上的所有虚拟腿取的。

考虑 2Rep(G) 对界面模的作用。界面对称性的生成元可利用式（3.115）中定义的线状作用张量表示如下：

$(\mathcal{O}[A])_{rr'} :=$  . (5.10)

这里，A 是 2Rep(G) 中的对称特殊弗罗贝尼乌斯代数，而 r、r' 是自发对称性破缺扇区的标签。这些算符可以被视为作用于界面希尔伯特空间 $\bigotimes \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]^*$上的对称算符。我们将希尔伯特空间 $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]^*$ 称为界面局域希尔伯特空间，并将其基记为 $\{|g\rangle \langle g'| \,|g, g' \in G\}$。由上述算符生成的对称性是所谓条带 2-代数的一个例子，相关讨论见 [84]。这里我们不对完整的对称性结构进行显式分析；界面对称性的结构，包括更一般的情形，将在 [85]中讨论。[12]

下面说明泵浦界面模（5.9）是界面对称性的一维表示。为此，我们计算界面对称算符（5.10）作用于泵浦界面模（5.9）的结果。我们首先关注 $\mathcal{O}[A]$ 为完全凝聚曲面的情形，即 $A = A^G_{\{e\},\,1} = \mathbb{C}[G]^*$。在这种情况下，式（5.10）中的每个简单模矩阵乘积态都由一个群元素 $g \in G$ 标记，而界面对称算符 $(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{g_1,\,g_2}$ 是作用于每个界面局域希尔伯特空间上的算符的张量积：

$$(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{g_1,g_2} = \bigotimes_i (\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}]^{(i)})_{g_1,g_2}. \tag{5.11}$$

容易看出，界面对称性在每个界面局域希尔伯特空间上的作用为

$$(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}]^{(i)})_{g_1,g_2} \,|g_3\rangle \langle g_4|_i = \delta_{g_3 g_4^{-1}, g_1 g_2^{-1}} \,|g_3\rangle \langle g_4|_i \,. \tag{5.12}$$

因此，该 对称算符 (5.11) 在泵浦界面模 (5.9) 上的作用如下 :

$$(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{g_1,g_2} \,|\psi_{g,\text{interface}}\rangle = \delta_{g,g_1 g_2^{-1}} \,|\psi_{g,\text{interface}}\rangle \,. \tag{5.13}$$

类似地，也可以计算其他界面对称性算符的作用：

$$(\mathcal{O}[A^G_{H,\omega}])_{r_1,r_2} \,|\psi_{g,\text{interface}}\rangle = \delta_{r_1,r'} \,|\psi_{g,\text{interface}}\rangle \,, \tag{5.14}$$

其中 $r' \in S_{H\backslash G}$ 是满足 $hr' = r_2 g^{-1}$ 的唯一元素，对应唯一的 $h \in H$。事实上，将$(\mathcal{O}[A^G_{H,\omega}])_{r_1,\,r_2}$ 作用于$|\psi_{g,\,\text{interface}}\rangle$ ，会得到与$|\psi_{g,\,\text{interface}}\rangle$成正比的态，其中比例

[12]此处的界面对称性由多融合 1-范畴 $\text{Vec}^{\oplus|G|}$ [85]描述，这与界面对称算符的融合规则 (5.15) 一致。

常数$\langle M_{r_1}| \bigotimes \rho^G_{H,\ \omega}(g) |M_{r_2}\rangle$。利用 G 对称性作用于 $|M_r\rangle$ 的方式（见式（3.92））， 再结合式（3.91）中 $|M_r\rangle$ 的正交归一性，可得该因子为$\delta_{r_1,\ r'}$其中$r' \in S_{H\backslash G}$ 是满足 $hr' = r_2 g^{-1}$ 的唯一元素，对应唯一的 $h \in H$。式（5.13）和（5.14）表明，界面上的所有对称算符在泵浦界面模（5.9）上的作用要么为 0，要么为 1。特别地，泵浦界面模（5.9）是界面对称性的一维表示。

现在，我们证明，形式为（5.9）的泵浦界面模，在连续变形意义下穷尽了界面对称性的所有一维表示。为此，我们首先枚举界面对称性的所有一维表示。先从由算符（5.11）生成的子对称性的所有一维表示着手。由方程（5.12）可知，算符$(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{g_1,g_2}$ 在方程（5.11）中仅取决于差值 $g_1 g_2^{-1}$。因此，只需考虑算符 $(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{e,g}$，其中 $g \in G$。根据方程（5.12），这些对称算符满足以下融合规则：

$$(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{e,g}(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{e,g'} = \delta_{g,g'}(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{e,g}. \tag{5.15}$$

注意，每个算符 $(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{e,g}$ 都是投影算符，因为它的平方等于自身。为写出上述融合规则的所有一维表示，我们令 V_g 表示单点投影算符 $(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}]^{(i)})_{e,g}$的像。具体而言， V_g 是由基向量$\{|g_1\rangle \langle g_2| \mid g_1 g_2^{-1} = g\}_{g_1,g_2\in G}$张成的向量空间。完整对称算符 $(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{e,g}$ 的像则由张量积 $\bigotimes_i V_g$给出。根据定义，对称算符（5.11）对任意态 $|v_g\rangle \in \bigotimes_i V_g$ 的作用为

$$(\mathcal{O}[A^G_{\{e\},1}])_{e,g'} |v_g\rangle = \delta_{g,g'} |v_g\rangle . \tag{5.16}$$

因此， $|v_g\rangle$ 是融合规则（5.15）的一维表示。此外，可以证明，其他对称算符也在 $|v_g\rangle$上以对角形式作用，如下所示

$$(\mathcal{O}[A^G_{H,\omega}])_{r_1,r_2} |v_g\rangle = \delta_{r_1,r'} |v_g\rangle , \tag{5.17}$$

其中， $r' \in S_{H\backslash G}$ 是满足 $hr' = r_2 g^{-1}$ 的唯一元素，且对应唯一的 $h \in H$。因此， $|v_g\rangle$是整个界面对称性的一维表示。反过来，根据构造，任何界面对称性的一维表示都具有这种形式。

从方程（5.16）和（5.17）可清楚看出， $|v_g\rangle \in \bigotimes_i V_g$ 的对称荷仅取决于 g。[13] 特别地， V_g 中的所有态都具有相同的对称荷。由于 V_g 是连通的，任何两个荷为 g 的一维表示都可以在保持对称性的同时连续变形为彼此。因此，界面对称性的一维表示在连续变形意义下由 G 分类。泵浦界面模（5.9）是携带荷 g的一维表示的一个代表。

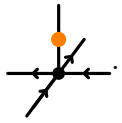
5.2 关于非平凡性的另一种视角

在 1+1 维中，由不可逆对称性保护的 SPT 相中的泵浦不变量可以视为纤维函子的自同构 [23]。更具体地说，通过为矩阵乘积态选择一个

[13]在此，对称 性荷指作用于该态的对称算符的特征值集合 t.

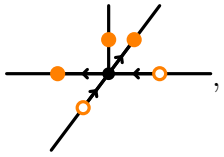
适当的规范，我们可以使矩阵乘积态张量具有 2π-周期性，并使相应的 L-符号[14] 相对于参数保持不变；在这种规范下，将参数从 0 变为 2π 所诱导的作用张量空间上的线性变换，就给出了泵浦不变量。在本节中，通过考虑 2+1 维中的类似构造，我们将从另一个角度确认所构造模型的非平凡性。更具体地说，通过选择使 PEPS 张量具有 2π-周期性的规范，我们将看到，这个族的非平凡性可以理解为线状作用张量空间上的一个非平凡变换。

为了找到一种规范，使 PEPS 张量具有 2π-周期性，我们先写出由 S^1 参数化的基态（5.4）的 PEPS 表示。将酉算符 $\overrightarrow{X}_g^{(i)}(\theta)$（定义见式（5.2））作用于 G-簇态 PEPS 表示的每个顶点张量，即可得到状态（5.4）的 PEPS 表示：



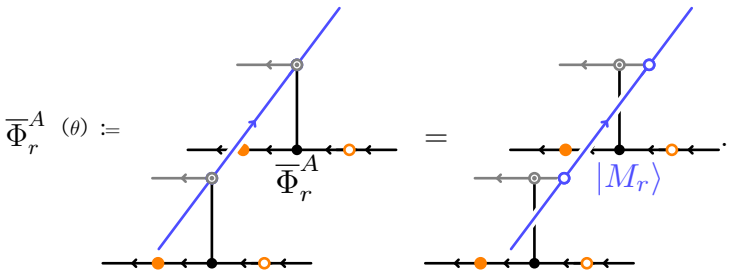
(5.18)

这里，橙色圆点表示 $\overrightarrow{X}_g^{(i)}(\theta)$。对于参数 θ，该 PEPS 张量不具有 2π-周期性，因为当 θ 增加 2π时，它会按照式（3.54）进行变换。为了使 PEPS 张量具有 2π-周期性，我们对虚拟腿进行如下规范变换：



(5.19)

其中，未填充的橙色圆点表示 $\overrightarrow{X}_g(\theta)^\dagger$。在此规范变换下，式（3.115）定义的线状作用张量变换如下：



(5.20)

在此，我们回顾一下$A = A^G_{H,\ \omega}$。

在此规范下，让我们考察当 θ 从 0 增加到 2π时，线状作用张量如何变化。[15] 不难看出，$\Phi_r^A(\theta = 2\pi) = \Phi_{r'}^A(\theta = 0)$，其中 $r' \in S_{H\backslash G}$ 是唯一的

[14]这些 L-符号是纤维函子的相关数据；定义见 [65]。[15]类比于 1+1d 情形，严格来说，应当验证在此规范下，$10j$-符号及相关量均为常数。然而，由于对这些要素作出恰当的张量网络表述会涉及技术上的复杂问题，我们在此不深入讨论细节。附录 B中，我们提出了如何将这些信息纳入张量网络，并在这一框架下重新考察泵浦不变量。

满足 $r' = hrg^{-1}$ 的元素，对应唯一的 $h \in H$。当 $g \neq e$时，这是线状作用张量空间的一种非平凡变换。此外，若用 T_g统称这一变换，则可得 $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$。这与以下事实一致：$S^1$-参数化的 2Rep($G$) 对称短程纠缠态在拼接运算下构成群 G。

致谢

我们感谢 Andras Molnar 和 Alex Turzillo 的有益讨论。S.O. 获得欧盟地平线2020 研究与创新计划的资助，资助编号为 863476（ERC-CoG SEQUAM）。S.O. 还获得了 JSPS 科研费资助，项目编号为 24K00522。KI 部分获得 EPSRC 开放研究员资助 EP/X01276X/1 以及由 Leverhulme 信托基金资助的 Leverhulme-Peierls Fellowship。

模 MPS 上的对称作用

让我们计算$U^G_{H,\omega}(g)$的对称作用：$= \bigotimes \rho^G_{H,\omega}(g)$在简单余模 MPS $|M_r\rangle$（定义见公式 3.89）上的作用。由于计算定义于公式（3.81）中的简单模矩阵乘积态上的作用更为容易，我们将其计算为

$$\begin{aligned} U^G_{H,\omega}(g)\,|M_r\rangle &= [\langle M_r|\, U^G_{H,\omega}(g)^\dagger]^\dagger \\ &= [\sum_{\{(a_k,b_k)\}} \mathrm{tr}\left([M_r]^{(a_1,b_1)} \cdots [M_r]^{(a_L,b_L)}\right) \langle g\cdot f^r_{a_1b_1}, ..., g\cdot f^r_{a_Lb_L}|]^\dagger, \end{aligned} \tag{A.1}$$

其中

$$\langle g\cdot f^r_{a_1b_1}, ..., g\cdot f^r_{a_Lb_L}| \coloneqq \langle \rho^G_{H,\omega}(g)\cdot f^r_{a_1b_1}| \otimes \cdots \otimes \langle \rho^G_{H,\omega}(g)\cdot f^r_{a_1b_1}|\,. \tag{A.2}$$

首先，让我们计算局域幺正算符 $\rho^G_{H,\omega}(g)$ 在 f^r_{ab} 的基 $A^G_{H,\omega}$（定义见公式 3.68）上的作用：

$$\begin{aligned} [\rho^G_{H,\omega}(g)\cdot f^r_{ab}](r') &= f^r_{ab}(r'g), \\ &= \rho_\omega(h[r'g]^{-1}) f^r_{ab}(r[r'g]) \rho_\omega(h[r'g]^{-1})^\dagger, \\ &= \rho_\omega(h[r'g]^{-1}) e_{ab} \rho_\omega(h[r'g]^{-1})^\dagger \delta_{r,r[r'g]}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

这里，$h[r'g]$ 和 $r[r'g]$ 由唯一分解式 $r'g = h[r'g]^{-1} r[r'g]$ 定义，其中 $h[r'g] \in H$ 且 $r[r'g] \in S_{H\backslash G}$。这表明，$\rho^G_{H,\omega}(g)$将基 $\{f^r_{ab}\}$ 置换为

$$[\rho^G_{H,\omega}(g)\cdot f^r_{ab}]^\dagger = \sum_{r'\in S_{H\backslash G}} \rho_\omega(h[r'g]^{-1})(f^{r'}_{ab})^\dagger \rho_\omega(h[r'g]^{-1})^\dagger \delta_{r,r[r'g]}. \tag{A.4}$$

在此基下，模映射 M 的矩阵表示为

$$\begin{aligned}[\rho^G_{H,\omega}(g)\cdot f^r_{ab}]^\dagger m^{r'}_{a'} &= \left[\sum_{r''\in S_{H\backslash G}} \rho_\omega(h[r''g]^{-1})(f^{r''}_{ab})^\dagger \rho_\omega(h[r''g]^{-1})^\dagger \delta_{r,r[r''g]}\right] m^{r'}_{a'},\\ &= \rho_\omega(h[r'g]^{-1})(f^{r'}_{ab})^\dagger \rho_\omega(h[r'g]^{-1})^\dagger \delta_{r,r[r'g]} m^{r'}_{a'},\\ &= \sum_{b'} m^{r'}_{b'}\delta_{r,r[r'g]}[m^{r'\dagger}_{b'}\rho_\omega(h[r'g]^{-1})(f^{r'}_{ab})^\dagger \rho_\omega(h[r'g]^{-1})^\dagger m^{r'}_{a'}].\end{aligned} \tag{A.5}$$

这意味着，$\rho^G_{H、\omega}(g)$ 对模 MPS 的对称作用由以下方式给出 y

$$[g\cdot M]^{(r;a,b)}_{(s,c),(t,d)} = \delta_{r,r[r'g]}[m^{r'\dagger}_{b'}\rho_\omega(h[r'g]^{-1})(f^{r'}_{ab})^\dagger \rho_\omega(h[r'g]^{-1})^\dagger m^{r'}_{a'}]_{s,t}. \tag{A.6}$$

特别地，每个 SSB 基态 $|M_r\rangle$都会映射到 $|M_{r'}\rangle$，其中 $r'\in S_{H\backslash G}$ 满足 $r=r[r'g]$，也就是说，对于唯一的 $h\in H$，有 $r'=hrg^{-1}$。

B纤维2-函子及其自同构

本文基于 G簇态构造了各种参数化族，并验证了它们的非平凡性。尽管我们的分析不需要明确描述 G簇态的 SPT 不变量，但利用张量网络对 2+1维不可逆对称 SPT 不变量作出具体描述，本身就是一个有趣的问题，而且对于采用第5.2节所述的方法等来表述泵浦不变量也很重要。要完整描述 SPT 不变量，就需要处理张量网络表示中的若干技术问题，例如为 PEPS 制定适当的单射性概念，而这超出了本文的范围。尽管如此，类比 1+1 维情形，我们仍可在一定程度上预见这类数据应采取何种形式。本节基于启发式考量，提出一种从 G 簇态的 PEPS 表示中提取 SPT 不变量的方法。

从范畴论视角来看，SPT 相预期由纤维 2-函子的同构类分类，而 S^1-族预期由其自同构（模可逆幺半范畴修正）分类。我们简要解释这些数据，随后说明在 G-簇态的情形下，如何从 PEPS 表示中提取这些数据。之后，我们通过一些例子阐述我们的提议。最后，我们重新讨论第 5.2 节中描述的泵浦不变量。

B.1 融合 2-范畴的纤维 2-函子

从范畴论观点来看，由融合 2-范畴 $\mathcal{C}$ 保护的 SPT 相由从 $\mathcal{C}$ 到 2Vec 的张量2-函子分类，也就是说，由纤维 2-函子分类。这里，2Vec 表示有限半单线性范畴构成的 2-范畴。纤维 2-函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}\to 2$ Vec 的数据可展开如下：首先，为每个对象 $x\in\mathcal{C}$ 指定一个半单线性范畴 $\mathcal{F}(x)$。接下来，

为每个 1-态射 $f\colon x \to y$ 指定一个线性函子 $\mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(x) \to \mathcal{F}(y)$，并为每个 2-态射 $\alpha\colon f \Rightarrow g$ 指定一个自然变换 $\mathcal{F}(\alpha)\colon \mathcal{F}(f) \Rightarrow \mathcal{F}(g)$。然后，对于每一对对象 $x,\ y \in \mathcal{C}$，给定一个等价

$$J_{x,y} : \mathcal{F}(x) \otimes \mathcal{F}(y) \to \mathcal{F}(x \otimes y). \tag{B.1}$$

最后，对于每组三个对象 x、y、$z \in \mathcal{C}$，给定一个自然同构$\omega_{x,\ y,\ z}$，它位于$J_{x\otimes y,\ z} \circ [J_{x,y} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(z)}]$与$J_{x,\ y\otimes z} \circ [\mathrm{id}_{\mathcal{F}(x)} \otimes J_{y,\ z}]$之间，且差别至结合子为止。[16] 这些数据要求关于 x、y、z 自然，并满足作为幺半2-函子的通常相干条件。

纤维 2-函子 $\mathcal{F}$ 的自同构 (α, β) 由以下数据构成。首先，α 是一个从 $\mathcal{F}$ 到其自身的自然同构。特别地，对于每个对象 $x \in \mathcal{C}$，我们指定一个自等价 $\alpha_x\colon \mathcal{F}(x) \to \mathcal{F}(x)$。更明确地说，$\alpha_x$将 $F(x)$ 中的每个简单对象 Φ_x^r映到另一个简单对象 $\Phi^{\sigma_x}(r)_x$，其中置换 σ_x 作用于 $\mathcal{F}(x)$ 中简单对象的指标集。接下来，β是一组自然同构 $\beta_{x,y}$，它们分别连接函子 $\alpha_{x\otimes y} \circ J_{x,y}$ 与 $J_{x,y} \circ (\alpha_x \otimes \alpha_y)$。这些数据应满足适当的相干条件。最后，自同构 (α, β) 的一个可逆幺半修正由一组 α_x的自然自同构 μ_x 给出，并满足适当的相干条件。关于这些概念的更详细说明，请参阅文献 [125] [126, Chaper 2] 。

G簇态的纤维 2-函子

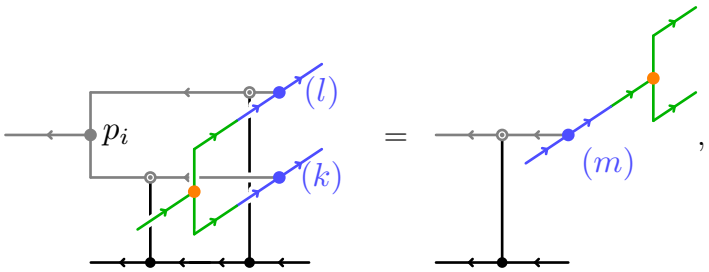
在本节中，我们将说明如何从B.1 节引入的范畴数据中，提取 G簇态的 PEPS 表示。

B.2.1 点状作用张量

首先，2Rep(G) 的对象 $\mathcal{O}[A]$ 由对称特殊 Frobenius 代数 A 标记，相应的 $\mathcal{F}(\mathcal{O}[A])$ 由线状作用张量 $\{\Phi_r^A\}_{r=1}^{n(A)}$ 生成。接下来，通过考虑线状作用张量的复合，可以得到 $J_{A_1,\ A_2}$ 的信息：将 $\Phi_{r_1}^{A_1}$ 与 $\Phi_{r_2}^{A_2}$复合得到的线状作用张量，应等于由出现在 $A_1 \otimes A_2$直和分解中的对称特殊 Frobenius 代数标记的线状作用张量的直和。等价地，在由 $\Phi_{r_1}^{A_1}$ 与 $\Phi_{r_2}^{A_2}$的乘积得到的对象和与 A_3相关联的线状作用张量之间，应存在一个拓扑点状算符；前者是将 $A_1 \otimes A_2$投影到一个直和分量 A_3后得到的。我们将这类点状算符称为点状作用张量。点状作用张量的定义方程

[16] 众所周知，任意弱幺半弱 2-范畴都幺半等价于一个半严格幺半 2-范畴，在该范畴中结合子是平凡的 [39, 备注 2.1。4]因此，总可以不失一般性地令结合子为平凡的。

可用下图表示：



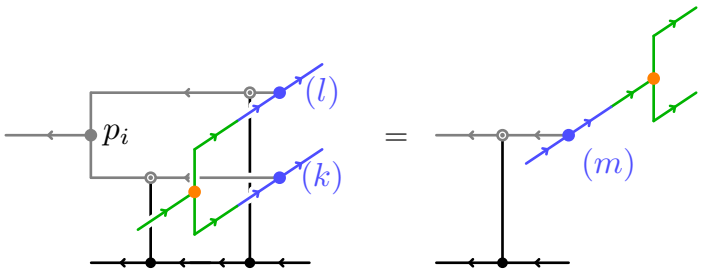
(B.2)

其中， k、 l 和 m 分别是 A_1、 A_2 和 A_3 的自发对称性破缺扇区的标记，而 p_i 是从 $A_1 \otimes A_2$ 到 A_3的投影。令 $[V_{(A_3;i)\ A_1,A_2}]^{m}_{k,l}$ 为由这类点状作用张量张成的向量空间。那么，自然同构 J_{A_1,A_2} 可视为向量空间 $\{[V_{(A_3;i)\ A_1,A_2}]^{r_3}_{r_1,r_2} \mid (A_3;\ i)\ r_a = 1, ..., n(A_a)$ 的集合，其中 $a = 1$、2、 $3\}$。

为保证该方程有解，并确定该解具有何种冗余，我们有必要了解由式（B.2）左边出现的（余）模MPS融合所生成的MPS的冗余。我们不在此处详细讨论这一点。相反，我们在此为代数 A_1、 A_2和 A_3 是生成完全凝聚曲面的代数这一情形构造一个解，即情形 $A_i = A^G_{\{e\},\ 1}$对应 $i = 1$， 2， 3。下文中，我们将对情形 $G = \mathbb{Z}_2$进行明确计算。对于一般群 G，完全凝聚曲面的点状作用张量也可以用同样的方法构造。

示例： $G = \mathbb{Z}_2$

我们来计算 $G = \mathbb{Z}_2$的点状作用张量。在这种情况下，点状作用张量的定义方程变为



(B.3)

对于每个 $i = 1$,2。为了简化方程，我们为局域希尔伯特空间的基引入以下记号：

$$|+\rangle := m_e, \quad |-\rangle := m_a, \quad \langle +| := m_e^\dagger, \quad \langle -| := m_a^\dagger, \tag{B.4}$$

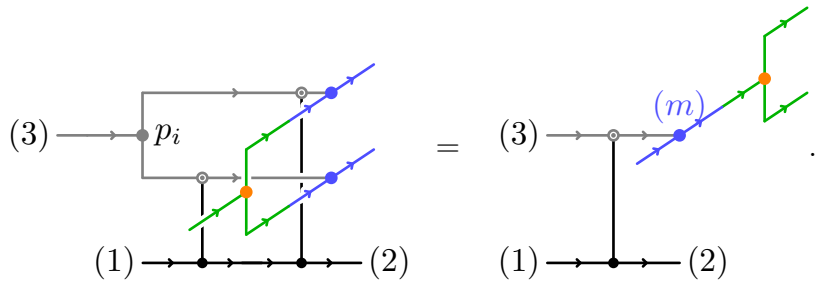
其中， e 和 a 分别是 $\mathbb{Z}_2$ 的单位元和非平凡元。 $i = 1$ 的解由以下向量张成：

$$\Lambda^1_{p_1} := |+\rangle \begin{matrix}\langle +| \\ \otimes \\ \langle +|\end{matrix}, \quad \Lambda^2_{p_1} := |-\rangle \begin{matrix}\langle -| \\ \otimes \\ \langle -|\end{matrix}, \tag{B.5}$$

$i=2$的解由以下向量张成：

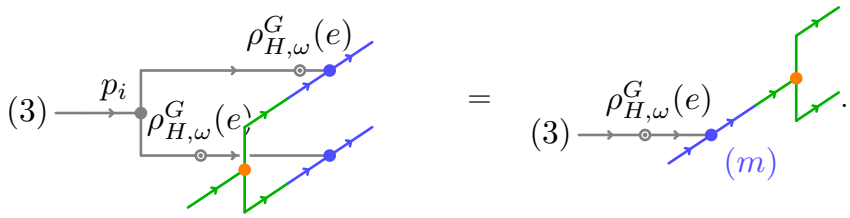
$$\Lambda^1_{p_2} := |+\rangle \otimes \begin{matrix}\langle +| \\ \langle -|\end{matrix}, \quad \Lambda^2_{p_2} := |-\rangle \otimes \begin{matrix}\langle -| \\ \langle +|\end{matrix}. \tag{B.6}$$

让我们明确地验证一下：



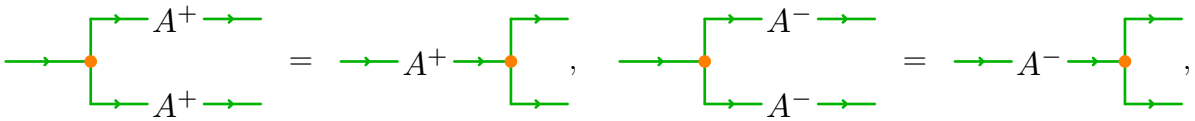
(B.7)

首先，考虑 $p_i = p_1$ 的情况。将腿 (1) 和 (2) 分别与 $\langle +|$ 和 $|+\rangle$ 收缩后，方程变为



(B.8)

此外，将腿 (3) 与 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 收缩后，方程可简化为

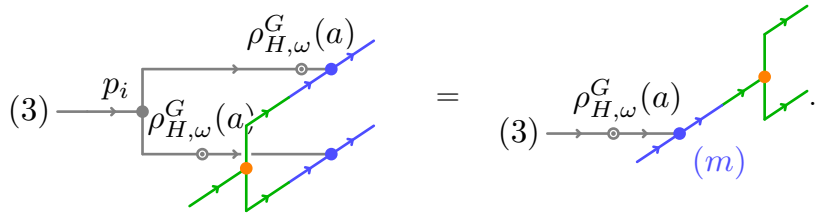


(B.9)

其中 $A^\pm = |\pm\rangle\langle\pm|$。因此，解由以下向量张成

$$\Lambda^1_{p_1} = |+\rangle \otimes \begin{matrix}\langle +| \\ \langle +|\end{matrix}, \quad \Lambda^2_{p_1} = |-\rangle \otimes \begin{matrix}\langle -| \\ \langle -|\end{matrix}. \tag{B.10}$$

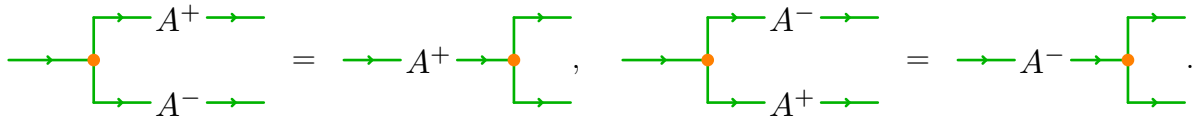
另一方面，将支腿 (1) 和 (2) 分别与 $\langle -|$ 和 $|-\rangle$ 收缩后，方程变为



(B.11)

该方程等价于式（B.9）。因此，对于 $p_i = p_1$ 的情况，解由 $\Lambda^1_{p_1}$ 和 $\Lambda^2_{p_1}$ 张成。

接下来，考虑 $p_i = p_2$ 的情形。分别用 $\langle +|$、$|+\rangle$ 和 $|\pm\rangle$ 与（1）、（2）和（3）的腿进行缩并后，方程变为



(B.12)

此外，用 $\langle -|$ 和 $|-\rangle$ 与（1）和（2）的腿进行缩并后，也可化为同一方程。因此，对于 $p_i = p_2$ 的情形，解由以下内容张成

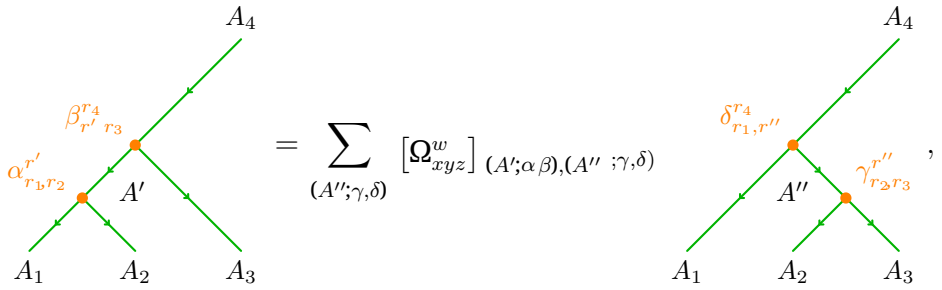
$$\Lambda^1_{p_2} = |+\rangle \otimes \begin{matrix}\langle +| \\ \langle -|\end{matrix}, \quad \Lambda^2_{p_2} = |-\rangle \otimes \begin{matrix}\langle -| \\ \langle +|\end{matrix}. \tag{B.13}$$

B.2.2 模10-jsymbol

最后，同构 $\omega_{x,\ y,\ z}$ 可通过以下向量空间之间的点状作用张量的基变换得到：

$$\bigoplus_{(A';i)} \bigoplus_{r_1,r_2,r_3,r_4} \bigoplus_{r'} [V^{(A';i)}_{A_1,A_2}]^{r'}_{r_1,r_2} \otimes [V^{A_4}_{A',A_3}]^{r_4}_{r',r_3} \to \bigoplus_{(A'';j)} \bigoplus_{r_1,r_2,r_3,r_4} \bigoplus_{r''} [V^{(A'';j)}_{A_2,A_3}]^{r'',r_4}_{r_2,r_3} \otimes [V^{A_4}_{A_1,A''}]^{r_4}_{r_1,r''}. \tag{B.14}$$

更具体地说，上述信息可以表示为以下方程：

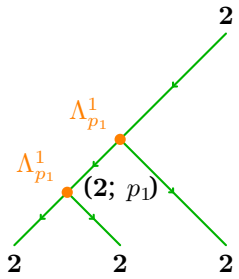


(B.15)

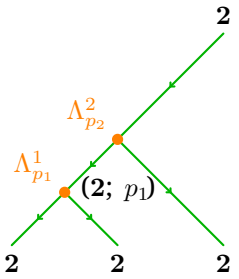
其中，$\alpha^{r'}_{r_1,r_2}$、$\beta^{r_4}_{r',r_3}$、$\gamma^{r''}_{r_2,r_3}$、以及$\delta^{r_4}_{r_1,r''}$是$[V^{(A';i)}_{A_1,A_2}]^{r'}_{r_1,r_2}$、$[V^{A_4}_{A',A_3}]^{r_4}_{r',r_3}$、$[V^{(A'';j)}_{A_2,A_3}]^{r''}_{r_2,r_3}$、以及$[V^{A_4}_{A_1,A''}]^{r_4}_{r_1,r''}$的基点状作用张量。我们将系数集合 $[\Omega^w_{xyz}]_{(A';\alpha,\beta),(A'';\gamma,\delta)}$称为模 10-j 符号。 G-簇态的 SPT 不变量由模 10-j 符号给出，但只确定到规范变换为止。然而，与点状作用张量的情形类似，在一般情况下，很难保证该方程存在解，也难以确定这种解具有何种冗余。这里，我们转而为对应于完全凝聚曲面的弗罗贝尼乌斯代数构造一个解。下文将重点对情形 $G = \mathbb{Z}_2$进行显式计算。对于一般群 G，完全凝聚曲面的模 10-j 符号也可用相同方法计算。

示例： $G=\mathbb{Z}_2$

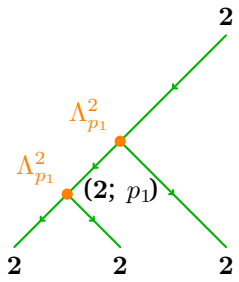
为了简化方程，我们引入以下简写记号$\mathbf{2}:=\mathbf{A}^{\mathbb{Z}_2}_{\{\mathbf{e}\},\ \mathbf{1}_\circ}$。当$G=\mathbb{Z}_2$时，式（B.15）中定义方程的左边可计算如下：



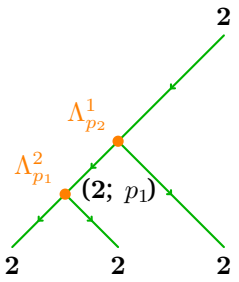
$$:\begin{cases}|+、+、+\rangle & \mapsto |+\rangle、\\ \text{否则} & \mapsto 0,\end{cases}$$



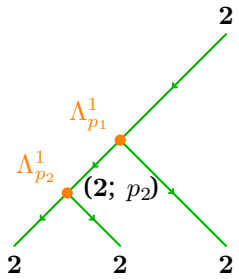
$$:\begin{cases}|+、+、-\rangle & \mapsto |-\rangle、\\ \text{否则} & \mapsto 0,\end{cases}$$



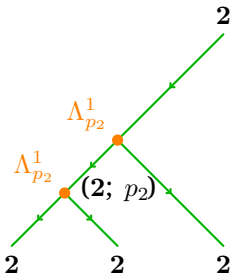
$$:\begin{cases}|-、-、-\rangle & \mapsto |-\rangle,\\ \text{否则} & \mapsto 0,\end{cases}$$



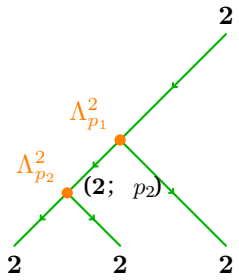
$$:\begin{cases}|-、-、+\rangle & \mapsto |+\rangle,\\ \text{否则} & \mapsto 0,\end{cases}$$



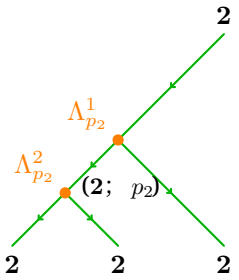
$$:\begin{cases}|-,+,+\rangle & \mapsto |+\rangle,\\ \text{否则} & \mapsto 0,\end{cases}$$



$$:\begin{cases}|-、+、-\rangle & \mapsto |-\rangle,\\ \text{否则} & \mapsto 0,\end{cases}$$

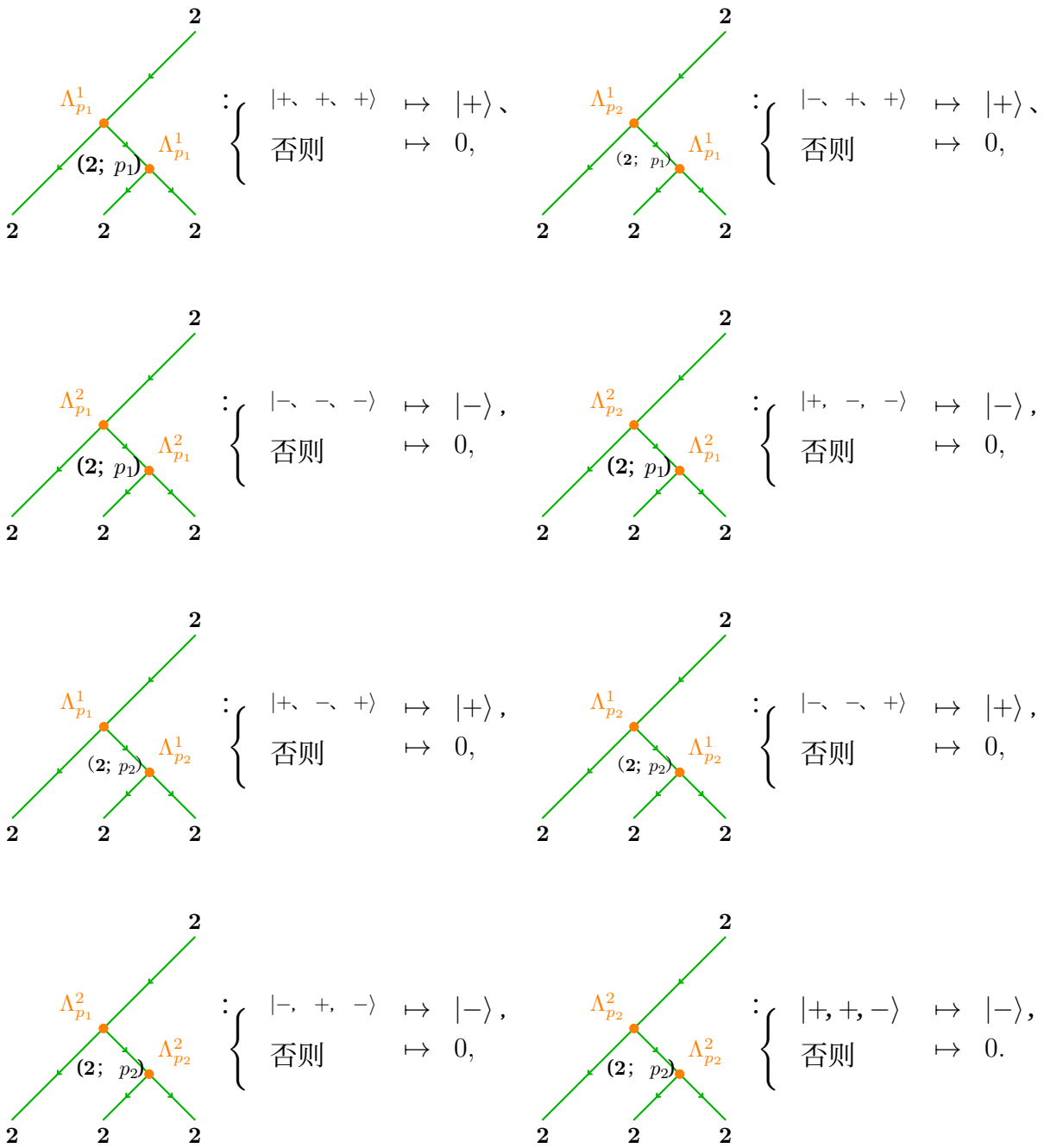


$$:\begin{cases}|+、-、-\rangle & \mapsto |-\rangle,\\ \text{否则} & \mapsto 0,\end{cases}$$



$$:\begin{cases}|+、-、+\rangle & \mapsto |+\rangle、\\ \text{否则} & \mapsto 0.\end{cases}$$

同样，式（B.15）中定义方程右侧可按如下方式计算：



根据上述结果，我们可以确认，左边和右边的图生成相同的向量空间。通过为基选择适当的排列顺序，模 10-j 符号可以表示为单位矩阵。这与以下事实一致：仅由 2Rep($\mathbb{Z}_2$) 对称性保护的 SPT 相的分类是平凡的。

B.3 重新审视泵浦不变量

根据第 B.2 节中的提议，我们重新审视第 G 簇态在第 5.2 节中讨论的泵浦不变量。在第 5.2 节中，我们为式（5.19）中的 PEPS 固定了一个 2π-周期规范，因此线状作用张量获得了式（5.20）所示形式的参数依赖性。若使用这个依赖于参数的线状作用张量，并考虑点状作用张量的定义方程，则方程中的参数依赖性会消失。因此，点状作用张量以及由此计算得到的模 10-j 符号都与参数无关。因此，类比于 1+1 维不变量 [23], ，可以将在线状作用张量空间上诱导的变换视为 S^1-族 $2\mathrm{Rep}(G)$ 对称短程纠缠态的不变量。

从范畴论视角来看， S^1-族的分类预期由纤维 2-函子的自同构给出。第 $g \in G$ 节中构造的、标记为5 的族会在线状作用张量空间上诱导一个变换，预期该变换对应于纤维 2-函子的一个自同构，其特征是对 $S_{H\backslash G}$ 的置换，定义如下：对于 $A = A^G_{H,\ \omega} \in {}^2\mathrm{Rep}(G)$ 和 $r \in S_{H\backslash G}$

$$\sigma_A(r) \coloneqq r', \qquad r' = hrg, \tag{B.16}$$

其中 $h \in H$ 是满足 $hrg \in S_{H\backslash G}$的唯一元素。当$g \neq e$时，这个自同构是非平凡的。[17]

还可以进一步将参数依赖性下移至更低层，如下所示：虽然式（5.20）中的（余）模 MPS具有 2π-周期性，但（余）模MPS张量不具有 2π-周期性，因为在 $\theta = 2\pi$ 处，它会经历式（A.6）所规定的规范变换。为抵消这一效应，可以使用以下变换进行规范变换：

$$\hat{V}(\theta) \coloneqq [\rho^G_{H,\omega}(g)]^{\frac{\theta}{2\pi}}. \tag{B.17}$$

这使矩阵乘积态张量 2π具有周期性。另一方面，作为这种规范变换的代价，点状作用张量的定义方程获得了参数依赖性，并且一般而言，点状作用张量不再满足 2π周期性。在此规范下，预计可以将泵浦不变量定义为作用于点状作用张量空间的线性变换。

参考文献

[1] Z.-C. Gu 和 X.-G. Wen，张量纠缠过滤重整化方法与对称性保护拓扑序，*Physical Review B* **80** （2009） [0903。1069]。3

[2] F. Pollmann、E. Berg、A.M. Turner 和 M. Oshikawa，一维量子自旋系统中拓扑相的对称性保护，*Phys. Rev. B* **85** (2012) 075125[0909。4059]。 3

[17]更准确地说，分类由自同构在可逆幺半范畴修正下给出。然而，一个非平凡地置换对象的自同构无法通过幺半修正消除。

[3] *F. Pollmann*、*A.M. Turner*、*E. Berg* 和 *M. Oshikawa*，一维拓扑相的纠缠谱，*Physical Review B 81*（*2010*） [0910.1811]。*3*、*8*[4] *X. Chen*、*Z.-C. Gu* 和 *X.-G. Wen*，一维自旋系统中有能隙对称相的分类，*Phys. Rev. B 83*（*2011*） 035107 [1008.3745]。*3*、*8*[5] *X. Chen*、*Z.-C. Gu* 和 *X.-G. Wen*，相互作用自旋系统中一维有能隙量子相的完整分类，*Physical Review B 84*（*2011*） [1103.3323]。*3*[6] *X. Chen*、*Z.-X. Liu* 和 *X.-G. Wen*，二维对称性保护拓扑序及其受保护的无能隙边缘激发，*Phys. Rev. B 84*（*2011*）*235141*[1106.4752]。*3*[7] *X. Chen*、*Z.-C. Gu*、*Z.-X. Liu* 和 *X.-G. Wen*，对称性保护拓扑序及其对称群的群上同调，*Phys. Rev. B 87*（*2013*）*155114*[1106.4772]。*3*[8] *N. Schuch*、*D. Pérez-García* 和 *I. Cirac*，使用矩阵乘积

t

态和投影纠缠对态，*Physical Review B* **84** （2011） [1010。3732]。 3,

8[9] *D.J. Thouless*，《粒子输运的量子化》，*Phys. Rev. B 27*（*1983*）*6083*。*3*

[10] *J.C.Y. Teo* 和 *C.L. Kane*，《绝缘体和超导体中的拓扑缺陷与无能隙模》，*Phys. Rev. B 82*（*2010*）*115120*。*3*[11] *A. Kitaev*，《迈向具有短程纠缠的多体量子态的拓扑分类》，*2011*年。西蒙斯几何与物理中心报告。*3*[12] *A. Kitaev*，《短程纠缠态的分类》，*2013*年。西蒙斯几何与物理中心报告。*3*[13] *A. Kitaev*，《作用中的 *SPT* 相同伦论方法： z_{16} 三维超导体的分类》，*2015*年。纯粹与应用数学研究所报告。*3*[14] *A. Kapustin* 和 *L. Spodyneiko*，《*Thouless* 电荷泵的高维推广》，*2003.09519*。*3*[15] *Y. Kuno* 和 *Y. Hatsugai*，《相互作用诱导的拓扑电荷泵》，*Phys. Rev. Res. 2*（*2020*）042024 [2007.11215]。*3*[16] *N. Tantivasadakarn*、*R. Thorngren*、*A. Vishwanath* 和 *R. Verresen*，《作为对称性与纠缠生成元的枢轴哈密顿量》，*SciPost Phys. 14*（*2023*） 012 [2110.07599].[17] *K. Shiozaki*，《量子自旋系统的绝热循环》，*Phys. Rev. B 106*（*2022*）*125108*[2110.10665]。*3, 47*

3

[18] *M. Hermele*，《有能隙系统族与量子泵》，*2021*年。哈佛大学 *CMSA* 报告。*3, 5, 34, 42*[19] *X. Wen*、*M. Qi*、*A. Beaudry*、*J. Moreno*、*M.J. Pflaum*、*D. Spiegel* 等，《高阶贝里曲率流与参数化量子系统中的体边对应》，*Phys. Rev. B 108*（*2023*）125147 [2112.07748]。*3*[20] *S. Bachmann*、*W. De Roeck*、*M. Fraas* 和 *T. Jappens*，《一维可逆态中的 G-荷 *Thouless* 泵分类》，*Commun. Math. Phys. 405*（*2024*）*157*[2204.03763]。*3*[21] *L. Spodyneiko*，《霍尔电导泵》，*2309.14332*。*3*[22] *S. Ohyama*、*K. Shiozaki* 和 *M. Sato*，《（*1+1*）维相互作用费米子系统中的广义 *Thouless* 泵》，*Phys. Rev. B 106*（*2022*）165115 [2206.01110]。*3*[23] *K. Inamura* 和 *S. Ohyama*，《具有融合范畴对称性的 *1+1d SPT* 相：界面模与非阿贝尔 *Thouless* 泵》，*2408.15960*。*3, 5, 6, 9, 10, 11, 48, 51, 61*[24] *N.G. Jones*、*R. Thorngren*、*R. Verresen* 和 *A. Prakash*，《电荷泵、枢轴哈密顿量与对称性保护拓扑相》，*Phys. Rev. B 112*（*2025*）*165123*[2507.00995]。*3*[25] *K. Shiozaki*，《自旋链的等变参数族：离散矩阵乘积态表述》，*2507.19932*。*3*[26] *Y. Li*、*M. Dell'acqua* 和 *A. Mitra*，《具有非可逆对称性的 *Thouless* 泵分类及其对 *Floquet* 相的影响》，*2510.01626*。*3*[27] *D. Gaiotto*、*A. Kapustin*、*N. Seiberg* 和 *B. Willett*，《广义全局对称性》，*JHEP 02*（*2015*）172 [1412.5148]。*3*[28] *H.A. Kramers* 和 *G.H. Wannier*，《二维铁磁体的统计学。第一部分》，*Phys. Rev. 60*（*1941*年）*252*。*3*[29] *C. Córdova*、*T.T. Dumitrescu*、*K. Intriligator* 和 *S.-H. Shao*，《*Snowmass* 白皮书：量子场论中的广义对称性及其他内容》，载于 *Snowmass 2021*，*5, 2022*[2205.09545]。*3*[30] *J. McGreevy*，《凝聚态物质中的广义对称性》，《凝聚态物理年度评论》*14*（*2023*）57 [2204.03045]。*3*[31] *S. Schäfer-Nameki*，《*ICTP* 关于（非）可逆广义对称性的讲义》，*Physics Reports 1063*（*2024*）1 [2305.18296]。*3*[32] *T.D. Brennan* 和 *S. Hong*，《量子场论与粒子物理中的广义全局对称性导论》，*2306.00912*。*3*

[33] *L. Bhardwaj, L.E. Bottini, L. Fraser-Taliente, L. Gladden, D.S.W. Gould, A. Platschorre* 等，《广义对称性讲义》，*Physics Reports 1051 (2024)* 1 [2307.07547]. *3*[34] *R. Luo, Q.-R. Wang* 和 *Y.-N. Wang*，《广义对称性及其应用讲义》，*Physics Reports 1065 (2024)* 1 [2307.09215]. *3*[35] *S.-H. Shao*，《覆水难收：*TASI* 非可逆对称性讲义》，*2308.00747. 3*[36] *N. Carqueville, M. Del Zotto* 和 *I. Runkel*，《拓扑缺陷》，*2311.02449. 3*[37] *N. Iqbal*，《耶拿广义全局对称性讲座：原理与应用》，*7*,2024 [2407.20815]. *3*[38] *D. Costa, C. Córdova, M.D. Zotto, D. Freed, J. Gödicke, A. Hofer* 等，《*Simons* 范畴对称性讲座》，*2411.09082. 3*[39] *C.L. Douglas* 和 *D.J. Reutter*，《融合二范畴与*4*维流形的态和不变量》，*1812.11933. 3, 55*[40] *T.D. Décoppet, P. Huston, T. Johnson-Freyd, D. Nikshych, D. Penneys, J. Plavnik* 等，《融合*2*-范畴的分类》，*2411.05907. 3*[41] *J. Kaidi, K. Ohmori* 和 *Y. Zheng*，《*(3+1)*维规范理论中的*Kramers-Wannier*类对偶缺陷》，*Phys. Rev. Lett. 128 (2022*年*)* 111601 [2111.01141]. *3*[42] *L. Bhardwaj, S. Schäfer-Nameki* 和 *J. Wu*，《普适非可逆对称性》，*Fortschritte der Physik 70 (2022*年*)* 2200143 [2208.05973]. *3*[43] *L. Bhardwaj, L.E. Bottini, S. Schafer-Nameki* 和 *A. Tiwari*，《非可逆对称性网络》，*SciPost Phys. 15 (2023*年*)* 160 [2212.06842]. *3*[44] *T. Bartsch, M. Bullimore, A.E.V. Ferrari* 和 *J. Pearson*，《非可逆对称性与高阶表示论 *I*》，*SciPost Phys. 17 (2024*年*)* 015 [2208.05993]. *3*[45] *T. Bartsch, M. Bullimore, A.E.V. Ferrari* 和 *J. Pearson*，《非可逆对称性与高阶表示论 *II*》，*SciPost Phys. 17 (2024*年*)* 067 [2212.07393]. *3*[46] *C. Delcamp* 和 *A. Tiwari*，《二维自旋系统中的高阶范畴对称性与规范化》，*SciPost Phys. 16 (2024*年*)* 110 [2301.01259]. *3, 5*[47] *Y. Choi, Y. Sanghavi, S.-H. Shao* 和 *Y. Zheng*，《 *2+1* 维格点规范理论中的非可逆对称性与高形式对称性》，*SciPost Phys. 18 (2025*年*)* 008 [2405.13105]. *3, 14*[48] *K. Inamura* 和 *K. Ohmori*，《融合曲面模型：基于融合*2*-范畴的 *2+1* 维格点模型》，*SciPost Phys. 16 (2024*年*)* 143 [2305.05774]. *3, 5*[49] *P.-S. Hsin, R. Kobayashi* 和 *C. Zhang*，《余集非可逆对称性的分数化与奇异霍尔电导》，*SciPost Phys. 17 (2024*年*)* 095 [2405.20401]. *3*

[50] *L. Bhardwaj, D. Pajer, S. Schafer-Nameki, A. Tiwari, A. Warman* 和 *J. Wu*，《具有非可逆对称性的*(2+1)*维有能隙相：第一部分》，*SciPost Phys. 19 (2025*年*) 056*[2408.05266]. *3*[51] *M. Bullimore* 和 *J.J. Pearson*，《迈向 *2+1* 维中的所有范畴对称性》，*2408.13931. 3*[52] *C. Cordova, D.B. Costa* 和 *P.-S. Hsin*，《有限群规范理论中的非可逆对称性》，*SciPost Phys. 18 (2025*年*)* 019 [2407.07964]. *3*[53] *C. Cordova, D.B. Costa* 和 *P.-S. Hsin*，《有限群规范理论中作为凝聚缺陷的非可逆对称性》，*2412.16681. 3*[54] *W. Cao, M. Yamazaki* 和 *L. Li*，《非可逆对称性保护拓扑相的对偶观点》，*2502.20435. 3*[55] *L. Bhardwaj, S. Schafer-Nameki, A. Tiwari* 和 *A. Warman*，《*(2+1)*维有能隙相中的

th

非可逆对称性：第二部分，*2502.20440*。*3*[56] *L. Eck*，《编织融合范畴中的 *2+1 d*融合曲面模型之间的对偶性》，*SciPost Phys. 19*（*2025*） 157 [2501.14722]。*3*[57] *B. Vancraeynest-De Cuiper* 和 *C. Delcamp*，《*(2+1)d* 阿贝尔格点规范理论中的扭曲规范化与拓扑扇区》，*SciPost Phys. 19*（*2025*） 054 [2501.16301]。*3*[58] *P.-S. Hsin*、*R. Kobayashi* 和 *C. Zhang*，《余集非可逆对称性的反常》，*2503.00105*。*3*[59] *Y. Furukawa*，《具有子系统/弱非可逆对称性保护拓扑序的晶格模型》，*2505.11419*。*3*[60] *K. Inamura*、*S.-J. Huang*、*A. Tiwari* 和 *S. Schafer-Nameki*，《具有范畴对称性的有能隙相的*(2+1)d*晶格模型与张量网络》，*2506.09177*。*3*[61] *M. K. N. Balasubramanian*、*M. Buican*、*C. Delcamp* 和 *R. Radhakrishnan*，《在*(2+1)d*拓扑序中规范化非可逆对称性》，*2507.01142*。*3*[62] *R. Thorngren* 和 *Y. Wang*，《融合范畴对称性。第一部分：反常流入与有能隙

d

相，*JHEP***04**(2024年) 132 [1912。02817]。 3[63] K. Inamura，具有融合范畴对称性的拓扑场论与对称性保护拓扑相，*JHEP***05**(2021年) 204 [2103。15588]。 3[64] K. Inamura，具有融合范畴对称性的有能隙相的晶格模型，*JHEP* **0**(2022年) 036 [2110。12882]。 3

3

[65] *J. Garre-Rubio*、*L. Lootens* 和 *A. Molnár*，利用矩阵乘积态对矩阵乘积算符对称性保护的相进行分类，*Quantum 7*（*2023*年） 927 [2203.12563]. *3, 52*[66] *C. Fechisin*、*N. Tantivasadakarn* 和 *V.V. Albert*，基于群的簇态中的不可逆对称性保护拓扑序，*Phys. Rev. X 15*（*2025*年）*011058*[2312.09272]. *3, 6, 7*[67] *S. Seifnashri* 和 *S.-H. Shao*，簇态作为不可逆对称性保护拓扑相，*Phys. Rev. Lett. 133*（*2024*年） 116601 [2404.01369]. *3*[68] *Z. Jia*，基于*Hopf*代数的广义簇态：不可逆对称性与*Hopf*张量网络表示，*JHEP 09*（*2024*年） 147 [2405.09277]. *3*[69] *Y. Li* 和 *M. Litvinov*，不可逆*SPT*、规范化与对称性分数化，*2405.15951. 3*[70] *S.D. Pace*、*H.T. Lam* 和 *Ö.M. Aksoy*，来自射影不可逆对称性的（*SPT*-）*LSM*定理，*SciPost Phys. 18*（*2025*年） 028 [2409.18113]. *3*[71] *C. Meng*、*X. Yang*、*T. Lan* 和 *Z. Gu*，非可逆*SPT*：*(1+1)*维无反常融合范畴对称性的定域实现，*2412.20546. 3*[72] *Ö.M. Aksoy* 和 *X.-G. Wen*，*1+1 D*中具有不可逆对称性的相——作为对偶自同构的对称性保护拓扑序，*2503.21764. 3*[73] *J. Maeda* 和 *T. Oishi*，*(1+1)*维中的*N*-重性对称性与*SPT*相，*JHEP 12*（*2025*年） *063*[2504.20151]. *3*[74] *D.-C. Lu*、*F. Xu* 和 *Y.-Z. You*，*1+1*维不可逆对称性保护拓扑相的奇异关联子与弦序参量，*2505.00673. 3, 9*[75] *A. Parayil Mana*、*Y. Li*、*H. Sukeno* 和 *T.-C. Wei*，由不可逆对称性和子系统对称性保护的高阶拓扑相，*2505.18119. 3*[76] *M. You*，不可逆*SPT*相的对称纠缠器，*2509.04581. 3*[77] *D.-C. Lu* 和 *Z. Sun*，不可逆对称性的内禀*NISPT*相、*igNISPT*相与混合反常，*2511.01965. 3*[78] *J.I. Cirac*、*D. Pérez-García*、*N. Schuch* 和 *F. Verstraete*，矩阵乘积态与投影纠缠对态：概念、对称性与定理，*Rev. Mod. Phys. 93*（*2021*年） 045003 [2011.12127]. *3*[79] *A. Molnar*、*A.R. de Alarcón*、*J. Garre-Rubio*、*N. Schuch*、*J.I. Cirac* 和 *D. Pérez-García*，矩阵乘积算符代数 *I*：弱*Hopf*代数的表示与投影纠缠对态，*2204.05940. 3*

[80] L. Lootens, C. Delcamp, G. Ortiz 和 F. Verstraete，一维量子晶格模型中的对偶性：对称哈密顿量与矩阵乘积算子交织算子，*PRX Quantum* **4** (2023年) 020357 [2112。09091]。 3[81] L. Lootens, C. Delcamp 和 F. Verstraete，一维量子晶格模

e

模型：拓扑扇区，PRX Quantum 5 (2024年) 010338 [2211.03777]. 3[82] P. Gorantla、S.-H. Shao 和 N. Tantivasadakarn， *3+1*维及更高维中的非可逆对称性张量网络，《物理评论》X 15 (2025年) 041006 [2406.12978]. 3[83] C.G. Brell，基于有限群的广义簇态，New Journal of Physics 17 (2015年) 023029 [1408.6237]. 3, 6[84] C. Cordova、N. Holfester 和 K. Ohmori，孤子的表示论，JHEP 06 (2025年) 001 [2408.11045]. 4, 9, 50[85] K. Inamura 和 S. Ohyama，“2+1维中的广义簇态：非可逆对称

es,

界面和参数化族。”即将出版。 *4, 10, 17, 50*[86] *D. Gaiotto* 和 *T. Johnson-Freyd*，《高阶范畴中的凝聚》，*1905.09566*。 *5, 14*[87] *K. Roumpedakis*、*S. Seifnashri* 和 *S.-H. Shao*，《高阶规范化与不可逆凝聚缺陷》，*Commun. Math. Phys. 401*（*2023* 年） 3043 [2204.02407]。 *5, 14*[88] *R. Thorngren* 和 *D.V. Else*，《规范化空间对称性与拓扑晶体相的分类》，*Physical Review X 8*（*2018*） [1612.00846]。 *5, 34, 42* [89] *P.-S. Hsin*、*A. Kapustin* 和 *R. Thorngren*，《量子场论中的贝里相：恶魔点与边界现象》，*Phys. Rev. B 102*（*2020*）*245113*[2004.10758]。 *5, 34, 42*[90] *R. Thorngren*，《贝里相、恶魔点与枢轴哈密顿量》，*2021*年。*Yuka* 的演讲

wa

理论物理研究所。 5， 34，42[91] M. Qi、D.T. Stephen、X. Wen、D. Spiegel、M.J. Pflaum、A. Beaudry 等，用张量网络绘制基态空间， *SciPost Phys.* **18** （2025年） 168 [2305.07700

].

5[92] S. Ohyama 和 S. Ryu，投影纠缠对态中的高阶 *Berry* 相位（*2+1*）维，*Phys.Rev.B* **111**（2025年） 045112 [2405。05325]。 5[93] R. Raussendorf 和 H.J. Briegel，一种单向量子计算机， *Phys. Rev. Lett.* **86**（2001）5188。 6[94] R. Raussendorf、D.E. Browne 和 H.J. Briegel，基于测量的量子计算

n

关于簇态，物理评论*A* **68**（2003） 022312 [量子物理/0301052]。6

[95] A. Kitaev 和 L. Kong，有能隙边界与畴壁模型，*Commun.Math. Phys.* **313** （2012） 351 [1104。5047]。9[96] T. Lan 和 X.-G. Wen，拓扑准粒子与全息体-边关系

在*2+1*维弦网模型中，《物理评论》*B* **90** (2014年) 115119 [1311.1784]. 9

[97] J.C. Bridgeman、D. Barter 和 C. Jones，拓扑中的二元界面缺陷融合相：*Vec*($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) 情形，*J. Math. Phys. 60*（*2019*年） 121701 [1810.09469]。 *9*

[98] *J.C. Bridgeman* 和 *D. Barter*，计算与有界畴壁结构相关的缺陷：该情形，*J. Phys. A 53*（*2020*年） 235206 [1901.08069]。 *9*[99] *J.C. Bridgeman* 和 *D. Barter*，计算带缺陷的 *Levin-Wen* 数据，*Quantum 4*（*2020*年） 277 [1907.06692]。 *9*[100] *D. Barter*、*J. Bridgeman* 和 *R. Wolf*，计算自同态融合范畴的结合子，*SciPost Physics 13*（*2022*年） [2110.03644]。 *9*[101] *J.C. Bridgeman*、*L. Lootens* 和 *F. Verstraete*，可逆双模范畴与广义舒尔正交性，*Commun. Math. Phys. 402*（*2023*年） *2691*[2211.01947]。 *9*[102] *Z. Jia*、*S. Tan* 和 *D. Kaszlikowski*，广义多融合弦网模型的弱霍普夫对称性与管代数，*JHEP 07*（*2024*年） 207 [2403.04446]。 *9*[103] *Y. Choi*、*B.C. Rayhaun* 和 *Y. Zheng*，广义管代数、对称性分辨配分函数与扭曲边界态，*2409.02159*。 *9*[104] *Y. Choi*、*B.C. Rayhaun* 和 *Y. Zheng*，基于边界管代数的非可逆对称性分辨 *Affleck-Ludwig-Cardy* 公式与纠缠熵，《物理评论》快报 *133*（*2024*年） 251602 [2409.02806]。 *9*[105] *Z. Jia*，弱霍普夫非可逆对称性保护拓扑自旋液体与晶格

（*1+1*）*D* 对称性拓扑场论的实现，2412.15336。9[106] Z. Jia 和 S. Tan，用于二维有能隙相之间畴壁的弱 *Hopf* 管代数

Turaev-Viro 拓扑量子场论，*JHEP* **11** （2025年） 018 [2507。01515]。9[107] C. Cordova、D. García-Sepúlveda 和 N.Holfester，二维量子色动力学中的粒子-孤子简并，2412.21153。9[108] F. Gagliano、A. Grigoletto 和 K.Ohmori，高阶表示与夸克禁闭，2501.09069。9[109] Y. Choi、B.C. Rayhaun、Y. Sanghavi 和 S.-H.Shao，关于边界、异常的评论

和不可逆对称性，*Phys.Rev. D* **108** （2023年） 125005 [2305。09713]。 9

[110] C. Córdova、D. García-Sepúlveda 和 N. Holfester，自发破缺的非可逆对称性产生的粒子-孤子简并，*JHEP* **07** （2024年） 154 [2403。08883]。 9[111] C. Copetti，缺陷荷、有能隙边界条件与对称性拓扑场论，2408.01490。 9[112] C. Copetti、L. Cordova 和 S. Komatsu，*S*矩阵自举与非可逆对称性

s,

*JHEP***03** (2025) 204 [2408.13132]. 9[113] L. Bhardwaj, C. Copetti, D. Pajer 和 S. Schafer-Nameki，边界对称性拓扑场论，*SciPostPhys.* **19** (2025) 061 [2409.02166]. 9 [114] J. Heymann 和 T. Quella，重新审视非可逆对称性的对称性分辨纠缠

ble

对称性 *1+1*维共形场论，*Phys.Rev. D* **112** (2025) 025004[2409。02315]. 9[115] S. Ali Ahmad、M.S. Klinger 和 Y. Wang，不可逆对称性的多重面貌

,

2509.18072. 9[116] *F. Benini*、*P. Calabrese*、*M. Fossati*、*A.H. Singh* 和 *M. Venuti*，《高阶与非可逆对称性的纠缠不对称性》，*2509.16311. 9*[117] *N. Seiberg*，《具有矢量型全局对称性的场论》，*SciPost Phys. 8 (2020) 050*[1909.10544]. *14*[118] *M. Qi*、*L. Radzihovsky* 和 *M. Hermele*，《通过奇异高形式对称性破缺实现的分形子相》，*Annals Phys. 424 (2021)* 168360 [2010.02254]. *14*[119] *T.D. Décoppet*，《融合二范畴的莫里塔理论》，*Higher Structures 7 (2023) 2*[2208.08722]. *14*[120] *V. Ostrik*，《模范畴、弱*Hopf*代数与模不变量》，*Transformati*

34

on

群 **8**(2003) 177 [math/0111139]. 16[121] A. Kapustin, A. Turzilloand M. You,拓扑场论与矩阵乘积态

s,

《物理评论》 *B* **96** (2017) 075125 [1607。06766]. 16,17, 23, 24, 26[122] G.W. Mackey, 群的诱导表示, *American Journal of Mathematics*(1951)576. 18[123] J. Greenough, 双模范畴的幺半 *2*-结构, *Journal of Algebra* **324** (2010 **73**

)

1818. 19[124] D. Pérez-García, F. Verstraete, M.M.Wolf andJ.I. Cirac, 矩阵乘积态表示, 量子信息与计算**7**(2007) 401 [quant-ph/0608197]. 47[125] R. Gordon, A.J. Power andR. Street,三范畴的相干性, vol. 558, 美国数学会 (1995). 55

[126] C.J. Schommer-Pries，二维扩展拓扑场论的分类，1112.1000。55