arXiv:2601.08627v1 [math.AG] 13 Jan 2026

# 奇异簇上轨形陈类的复解析方法及其应用

*by*

Henri Guenancia 和 Mihai P˘aun

摘要。—本文证明了 Kähler 簇上稳定 Q-层的 Bogomolov-Gieseker 不等式的轨形版本，推广了我们此前在三维情形下的工作 [GP25] 。我们还刻画了等号情形，给出了复环面商数值刻画的一种全新的纯解析证明，并对与 Q-层相关的第二轨形陈类提出了一种新颖的复解析解释。

**目录**

1. 引言.1 2. 记号与准备.4 3. 回顾 [GP25]+ε.6 4. Θ 在$X$上的闭合性.9 5. 再论轨形陈类.12 6. Bogomolov-Gieseker 不等式.21 7. 一致化的应用.22 参考文献.23

## 1. 引言

**1.1. 主要结果。—** 本文给出了我们先前工作 [GP25] 中主要结果的一般版本，因此可视为该工作的补篇。我们的主要结果是稳定丛的 Bogomolov-Gieseker 不等式的以下奇异版本。

定理 ***A***。— 设$(X,\omega)$ 是一个维数为 $n$ 的紧凯勒空间，设 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上秩为 $r$ 的相干反身层，且该层是 $[\omega]$-稳定的。假设存在一个余维至少为三的闭解析子集 $Z \subset X$，使得 $X \setminus Z$ 至多具有商奇点，且 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 具有轨形丛结构。则有

$$\left(2rc_2(\mathcal{F}) - (r-1)c_1(\mathcal{F})^2\right) \cdot [\omega]^{n-2} \geqslant 0,$$

且当且仅当 $\mathcal{F}|_{X_{\mathrm{reg}}}$ 是局部自由且射影平坦时，等号成立。

若 X 是射影的，且 $[\omega]$ 是丰线丛的第一陈类，则利用 Mehta-Ramanathan定理 [MR84] 以及 Lefschetz超平面定理的奇异版本 [GM88]，即可从原始的 Bogomolov-Gieseker 不等式（及等号情形的刻画）推出定理 A。在解析情形中，定理 A 已在 [GP25] 中对三维簇得到证明，并在最近发表的文章 [FO25] 中得到了完全一般性的结果，其依据是两项主要技术：X 的部分消奇化的存在性 [Ou24, KO25], ，以及 J. Scheffler 在 [Sch24]中提出的 MA理论重要进展的轨形版本（尤其参见 [GPSS24]）。不等式部分（不包括等号情形的刻画）此前已在 [Ou24, Ou25] 和 [ZZZ25] 中得到证明，其依据是 [Ou24, KO25]。

建立上述定理的动机之一，是为了对以下结果给出一个纯粹的分析证明。

推论 ***B***。— 设 $X$ 是一个维数为 $n$、具有对数终端奇点的紧*Kähler*簇，且 $c_1(X) = 0 \in H^2(X, \mathbb{R})$。以下各项等价：

*1.* 存在一个拟*étale* 覆盖 $T \to X$，其中 $T$ 是一个复环面。*2.* 存在一个 *Kähler* 类 $\alpha \in H^2(X, \mathbb{R})$，使得 $c_2(X) \cdot \alpha^{n-2} = 0$。

上述结果可追溯至 Yau 对 Calabi猜想的解消 [Yau78]，当 $X$ 光滑时。当 $X$ 为射影簇且 $\alpha$ 是某个丰线丛的第一陈类时，该结果由 [GKP16b] 证明，若 $X$ 在余维二处光滑；之后由 [LT18] 在一般情形下证明。一般 Kähler 情形的推广由[CGG22] 证明，若 $X$ 在余维二处光滑，随后由 [CGG24] 在一般情形下证明。然而，后两篇论文都依赖于代数情形和分解定理 [BGL22]。

**1.2. 轨形陈数：如何计算。**—在这段简短的文字中，我们将简要说明定理A 和推论B中出现的陈类是什么，以及如何利用我们提出的一种新刻画来计算它们。更多详情请参见第5 节。

由于 X 是奇异的，且 $\mathcal{F}$ 不一定是局部自由的，因此定义与 $\mathcal{F}$相关的陈类或陈数有多种彼此不等价的方式。若 $Z = \emptyset$，则 X 是一个轨形，应用于 $\mathcal{F}$ 的 Chern-Weil 理论可用于定义其轨形陈类。若 X 是射影的，仍可利用一般超平面截面，将 $c_1^2(\mathcal{F})$、$c_2(\mathcal{F})$ 定义为 $NS(X)_{\mathbb{R}}$ 上的多重线性形式，参见 [Mum83]。一般而言，它们可以定义为 X 的 $2n-4$次奇异上同调群 $H^{2n-4}(X, \mathbb{R})^*$ 的对偶空间中的元素；Graf-Kirschner 在 [GK20] 中采用的就是这种方法。本文对这一课题的贡献，是借助 X 的 Dolbeault 上同调并依赖 Andreotti-Grauert 定理，对 $c_1^2(\mathcal{F})$、$c_2(\mathcal{F})$作出诠释。更确切地说，我们证明以下结果，该结果本身或许也值得关注；关于下文的 Dolbeault 版本，参见命题 5.8–5.9；关于 de Rham 版本，参见命题 5.4 及其下方的讨论。

定理 **C.** — 设 $(X,\omega)$ 是一个维数为 $n$ 的紧*Kähler*簇，存在一个余维至少为三的闭解析子集 $Z \subset X$，使得 $X \setminus Z$ 至多具有商奇点。设 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的相干无挠层，且 $X \setminus Z$ 是一个轨形丛。则存在一个分解

$$\omega^{n-2} = \Omega + \bar{\partial}\gamma$$

其中，$\Omega$ 是一个支集远离 $Z$ 的光滑（$n-2$，$n-2$）形式，而 $\gamma$ 是一个光滑（$n-2$，$n-3$）形式。此外，还有等式

$$c_2(\mathcal{F}) \cdot \{\omega\}^{n-2} = \int_{X\setminus Z} c_2(\mathcal{F},h) \wedge \Omega$$

对于 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 上任意的轨形厄米度量 $h$。

上述结果的动机是给出一种定义，使得可以通过几何分析的方法研究上述陈类的性质。该结果对于证明定理 A至关重要。请注意，当 $n = 3$ 时，该结果的内容或多或少是显而易见的，因为在这种情况下 $Z$ 是有限个点的集合，而 $\omega$ 在其附近便是 $dd^c$-恰当的，因此 $Z$ 附近的 $\Omega$ 可以如 [GK20] 或 [GP25].所述，通过“手动”方式构造出来。

为了说明这一点，Graf 和 Kirschner 运用一些“抽象”的维数考量，证明类 $\{\omega\}^{n-2} \in H^{2n-4}(X,\mathbb{R})$ 可以由一个支集远离$Z$的奇异链 $\sigma$ 自然地表示。现在，de Rham-Weil 同构使得可以将一个次数为 $2n-4$ 且支集远离 $Z$的轨形形式 $\sigma$ 与之关联。然而，在 [GK20], 中并未明确揭示微分形式$\omega^{n-2}$ 与 $\Omega'$ 之间的关系；如今，借助定理 C的 de Rham 版本，即命题 5.4，这一点得以实现。

**1.3. 定理A的证明思路。**—若$X$ 是光滑的，且 $\mathcal{F}$ 是局部自由的，那么 $[\omega]$-稳定性 $\mathcal{F}$ 结合唐纳森–乌伦贝克–丘定理，保证存在一个 Hermite–Einstein 度量$h_{\mathcal{F}}$ 关于 $\omega$。经典计算表明

$$(2rc_2(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}}) - (r-1)c_1^2(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}})) \wedge \omega^{n-2} \geqslant 0$$

在逐点意义下成立，因此可以对$X$ 积分，得到预期结果。

当$X$ 和 $\mathcal{F}$ 是奇异的时，仍然可以在$h_{\mathcal{F}}$ 关于 $\omega$ 的$X_{\mathrm{reg}} \setminus Z$ 上找到一个 Hermite–Einstein 度量 [CGN+23]，因此上述不等式在该集合上逐点成立。不过，接下来会遇到两个问题：

*a*. $h_{\mathcal{F}}$ 不一定是$X \setminus Z$上的轨形厄米度量。*b*. 尽管积分 $\int_{X_{\mathrm{reg}}\setminus Z} c_2(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \wedge \omega^{n-2}$收敛，但它未必计算出轨形陈数$c_2(\mathcal{F}) \cdot \{\omega\}^{n-2}$，因为存在第一点所述的问题，而且支集$(\omega^{n-2}) = X$。

为了处理 *a*., 我们选取一个小的开邻域$U \supset Z$ 的$Z$ 在$X$ 中，现在选择 $\omega$ 作为$X$ 上的度量，该度量在$X \setminus U$ 中具有轨形奇点，并且在$Z$附近通常意义下是光滑的。这样的环境度量或许看起来有些刻意，但从某种意义上说，如果$Z$ 非空，这就是我们所能得到的“最佳”度量。此外，[CGN+23] 中的结果仍然适用，并可导出一个厄米度量$h_{\mathcal{F}}$，它是一个轨形

度量定义在$X \setminus U$上。

第二个问题*b*. 要棘手得多，下面我们将对此作出说明。我们在$\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$上有定义良好的曲率形式$X_{\mathrm{reg}} \setminus Z$，它在$X \setminus U$上是轨形光滑的。展开定理C给出的轨形陈数刻画后，我们发现，要使等式成立

$$c_2(\mathcal{F}) \cdot \{\omega\}^{n-2} = \int_{X_{\mathrm{reg}} \setminus Z} c_2(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \wedge \omega^{n-2}$$

（由此即可推出定理A），我们需要满足以下斯托克斯公式

$$\int_{X_{\mathrm{reg}} \setminus Z} \Theta \wedge \bar{\partial} \alpha = 0 \tag{1.1}$$

其中

$$\Theta := \mathrm{Tr}\big(\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \wedge \Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})\big),$$

并且$\alpha$是$X^{\mathrm{reg}}$上的光滑形式，在$Z$附近光滑，并且相对于我们的混合度量有界$\omega$。显然，若$\mathrm{supp}(\alpha) \subset X \setminus U$，则（1.1）成立。然而，我们想代入（1.1）的特定$\alpha$无法满足这一条件。本文相当一部分内容都致力于证明（1.1），参见定理4.1。这部分依托于[GP25]中已有的思想（见第3节），另一部分则基于第4节展开的新论证。

**致谢**。— 我们感谢 Benoît Claudon 就命题 5.4 进行了富有启发性的讨论。我们也衷心感谢 János Kollár 慷慨分享他对本文诸多主题的真知灼见。

**经费支持**。— 本研究部分基于美国国家科学基金会资助编号 DMS-1928930 的支持。该资助用于 H.G. 于 2024 年秋季学期在加利福尼亚州伯克利的西蒙斯·劳弗数学科学研究所（前身为 MSRI）驻留期间的研究。H.G. 还获得法国国家研究署（ANR）项目 ANR-21-CE40-0010（KARMAPOLIS）的部分资助。M.P. 谨此感谢德国科学基金会（DFG）的资助。

## 2. 符号与预备设置

全文中，我们将采用以下背景设定。

• 簇。设$(X, \omega_X)$为一个维数为$n \geqslant 2$的紧致正规 Kähler 簇。这意味着，$\omega_X$是在正则轨迹$X_{\mathrm{reg}}$上的一个 Kähler 形式，并且在任意将$X$局部嵌入欧几里得空间后，都可延拓为该处的 Kähler 形式。进一步假设，存在一个闭解析子集$Z \subset X$，使得

– $X \setminus Z$至多具有商奇点，– $Z$的余维至少为三。

• 层。给定上述$X$，如果一个秩为$r$ 的相干无挠层 $\mathcal{F}\mathcal{F}|$在$X$ 上是 Q-层，且 $\mathcal{F}$ 是自反的，并且 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 是一个轨形丛（必要时可扩大上文引入的解析子集$Z$，只要其余维不超过三），那么我们称之为 Q-层。从现在起，我们假设

– $\mathcal{F}$ 是一个 Q-层，–
$\mathcal{F}$ 是 $\omega_X$- 稳定的，

我们回顾一下本文使用的术语。$\mathcal{F}$ 是自反的，意指自然映射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ 是同构。其次，由于 $X \setminus Z$ 具有商奇点，任意点 $x \in X \setminus Z$ 都有一个一致化图。也就是说，存在 x 的一个欧几里得邻域 U，以及一个有限伽罗瓦覆盖 $p : V \to U$，使得 $V \simeq B_{C^n}(0, 1)$。如果对任意 $x \in X \setminus Z$ 及其附近的任意一致化图 p，层 $\mathcal{E} := p^{[*]}\mathcal{F} := p^*(\mathcal{F})^{**}$ 均为局部自由的，则称 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 为轨形丛。

^我们固定一个适当的、双有理的满射映射 $\pi : X \to X$，使得^ ^X 光滑且 $\mathcal{F} := \pi^*\mathcal{F}/\text{tor}$ 局部自由。得益于平中裕一的奇点消解以及 Rossi 的一个结果 $\pi$ Ros68]，这样的映射 [存在。相对于 $\omega_X$，$\mathcal{F}$ 的斜率定义为 $\mu_{\omega_X}(\mathcal{F}) = {}^1\text{r}\, c_1(\widehat{\mathcal{F}}) \cdot [\pi^*\omega_X]^{n-1}$。容易验证，后一数量与所选取的满足上述两个条件的映射 $\pi$ 无关。此外，斜率对 $\omega_X$ 的依赖仅通过其上同调类$\kappa(\omega_X) \in H^1(X, PH_X)$体现，参见 (5.3)。最后，若对 $\mathcal{F}$的任意秩为 $\neq 0$的相干子层 $\mathcal{G}$，均有 $\mu_{\omega_X}(\mathcal{G}) < \mu_{\omega_X}(\mathcal{F})$，则称 $\mathcal{F}$ 是 $\omega_X$-稳定的。更多细节可参见例如[CGG22，第 2] 节。

• 度量。设 $\theta : X \to [0,1]$ 为 $Z \subset X$ 的一个截断函数。也就是说，在 Z 之外有 $\theta \equiv 1$，且 $\text{Supp}(\theta) \subset X^\circ = X \setminus Z$。固定两个开集 $W' \subset W \Subset X^\circ$，使得 $W' \subset (\theta = 1)$ 且 $\text{Supp}(\theta) \Subset W$。我们用 $\mathcal{U}$ 表示 $X \setminus W$ 的一个小邻域。众所周知（例如参见 [CGG24，引理 11]），可以构造一个连续函数 $\varphi\text{orb} : W \to \mathbb{R}$，使得 $\omega\text{orb} := \omega X + \text{ddc}\varphi\text{orb}$ 是 W 上的轨形凯勒度量。更确切地说，这意味着 $\omega\text{orb}|\text{Wreg}$ 是一个凯勒度量，并且对于任意一致化图 p，$p^*\omega\text{orb}|_{U\cap\text{Wreg}}$ 可延拓为 V 上的凯勒度量，其中 $V \cap p^{-1}(U \cap W)$。随后我们取足够小的 $\varepsilon_0 > 0$，并考虑

$$\omega := \omega_X + dd^c(\varepsilon_0\theta\varphi_{\text{orb}}). \tag{2.1}$$

根据构造，$\omega$ 在$Z$ 附近是凯勒度量，在$W$上是轨形凯勒度量。此外，不难验证存在$C > 0$ 使得

$$C^{-1}(\omega_X + \theta\omega_{\text{orb}}) \leqslant \omega \leqslant C(\omega_X + \theta\omega_{\text{orb}}). \tag{2.2}$$

根据 [CGN+23]，存在$h_{\mathcal{F}}$，它是$Z$ 上的光滑厄米度量，且其陈曲率$i\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$ 满足

$$\Lambda_\omega i\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) = \mu\text{Id}_{\mathcal{F}} \quad \text{on } X_{\text{reg}} \setminus Z, \tag{2.3}$$

对于某个 $\mu \in \mathbb{R}$。此外，$h_{\mathcal{F}}$ 可延拓为$W$上的轨形光滑厄米度量。也就是说，对于任意一致化图$p : V \to U$，厄米度量$p^*h_{\mathcal{F}}|_{U_0\cap W}$ 在 $\mathcal{E}$ 上可光滑延拓至$V \cap p^{-1}(U \cap W)$。最后，我们有

$$\int_{X_{\text{reg}}\setminus Z} |\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})|^2_{h_{\mathcal{F}},\omega}\, \omega^n < +\infty. \tag{2.4}$$

## 3. 回顾 [GP25]+$\varepsilon$

本节以及下一节的主要目标，是研究相干自反层 $\mathcal{F}$的前两个陈类的陈-韦伊代表元的可积性。我们要求在环境空间$X$ 和层 $\mathcal{F}$ 上考虑的度量满足若干性质，下面将逐一列出。正如本节标题所示，我们打算 [GP25] 几乎逐字照搬其中的方法：我们将概述该方法的一般框架，并说明它可以轻松地应用于当前情形。

(a) 设 $\omega_X$ 是 $X$ 上的非奇异凯勒度量。使用第 2 节中的记号，我们得到一个度量 $\omega$，它具有性质（2.1）和（2.2）。(b) 对 $\mathcal{F}$ 的局部解消与单位分解共同提供了向量丛 $\mathcal{F}|_{X_{\mathrm{reg}}\setminus Z}$ 的参考度量 $h_{\mathcal{F}},0$。它有若干有趣的性质，其中最值得注意的是，它在 $\mathcal{F}$ 的奇点消解上诱导出一个光滑度量。

(c) 给定一个正的常数 $C > 0$，我们考虑度量类 $h_{\mathcal{F}} := h_{\mathcal{F}},0\exp(s)$，定义在具有轨形奇点的 $_Z\mathcal{F}|_{X_{\mathrm{reg}}\setminus}$ 上，且奇点位于 $W$，使得下列不等式成立

$$\sup_{X_{\mathrm{reg}}\setminus Z} |\Lambda_\omega \Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})|_{h_{\mathcal{F}}} \leq C, \qquad \int_{X_{\mathrm{reg}}\setminus Z} |\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})|^2_{h_{\mathcal{F}},\omega} dV_\omega \leq C$$

以及

$$\mathrm{Tr}\exp(s) \leq C, \qquad \exp(s) \geq e^{C\phi}\mathrm{Id}$$

成立。注意，至少在 $C \gg 0$ 的情况下，对于 $\{\omega_X\}$-稳定层 $\mathcal{F}$，该度量类非空，参见 [GP25]。在上述不等式中，我们用 $\phi$ 表示一个在 $X$ 上具有对数极点的准拟次调和函数，满足 $\{\phi = -\infty\} = X_{\mathrm{sing}} \cup Z$ 与 $X$ 的奇异轨迹重合，且 $\mathcal{F}$。

注 ***3.1***。—设$X$ 是一个紧凯勒空间，并设 $\mathcal{F}$ 是$X$ 上的相干无挠层，如第2节所述。构造一个满足上文 (c) 点所列性质的度量 $h_{\mathcal{F}}$ 于 $\mathcal{F}$将会非常有趣。一个不错的候选是 (b) 中提到的度量 $h_{\mathcal{F}},0$，但尚不清楚在这种情况下是否满足第一个 $L^\infty$ 性质。

一个重要的技术要点是，在集合 $Z$ 的补集中，空间 $X$ 具有商奇点。更确切地说，适当扩大Z后，可以假设对于任意点 $x \in X \setminus Z$，都存在一个开子集 $U \ni x$，使得

$$(U, x) \simeq (\mathbb{C}^{n-2}, 0) \times (S, s), \tag{3.1}$$

其中 $(S,s)$ 是一个具有商奇点的曲面胚，参见例如 [Joy00]中 § 9.1 的开头。我们可以假设$U$ 包含于一个一致化图表中。

另一个会用到的概念是 $\mathcal{C}^\infty_X$-模 $\mathcal{E}^p$，定义如下。对于任意开集 $U \subset X$， $\mathcal{E}^p(U)$ 由满足以下条件的$p$-形式 $\alpha \in C^\infty(U^{\mathrm{reg}}, \mathcal{A}^p X)$ 组成

1. $\alpha$ 可光滑延拓到$U \cap Z$的邻域，2. $\sup^{U\cap X_{\mathrm{reg}}}($

$|\alpha|_\omega + |d\alpha|_\omega) < +\infty$。

注意，由于第一个条件， $\alpha$ 和$d\alpha$ 在$Z$ 附近相对于 $\omega$ 自动有界。最后，我们用 $\mathcal{E}_p$

$_0 \subset \mathcal{E}^p$ 表示 $\mathcal{E}_p$ 中支集

远离Z的形式子模。换言之，它们是$X_{\mathrm{reg}}$ 上光滑的$p$-形式，支集远离$Z$，且 $\alpha$ 和$d\alpha$ 相对于 $\omega$ 全局有界。
在此背景下，我们有如下结果。

***The*定理 *3.2.*** — 设 $\Theta := \mathrm{Tr}(\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \wedge \Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}))$。那么对于任意 $\alpha \in \mathcal{E}_0^{2n-5}(X)$，我们有

$$\int_{X_{\mathrm{reg}}} \Theta \wedge d\alpha = 0.$$

注意，由于 $\Theta$ 是实的且类型为$(2,2)$，这等价于证明该等式 y

$$\int_{X_{\mathrm{reg}}} \Theta \wedge \bar{\partial}\alpha = 0$$

对任意 $\alpha \in \mathcal{E}^{n-2}{}_0{}^{n-3}(X)$成立。注意， $\Theta$ 由于上面$(c)$ 中的第二个性质，$X$ 上的流定义良好，因为 $\omega$ 支配 $\omega_X$。定理 3.2意味着$d\Theta = 0$ 在 $X \setminus Z$上成立，但其结论略强，因为我们允许使用比光滑形式更多的恰当测试形式。证明分若干步骤说明，详见接下来的小节。

**3.1. 截断函数与 Harnack 型结果。** — 作为任意点附近局部结构（3.1）的推论，我们可以像 $X \setminus Z$ 中那样构造非常有用的截断函数，参见 [**GP25**，引理 5。9]。

引理 ***3.3.*** — 设 $x \in X \setminus Z$ 是任意一点。那么，存在 $\varepsilon_0 > 0$、$x$ 的一个邻域 $U$，以及一族定义在 $U^{\mathrm{sing}} = X_{\mathrm{sing}} \cap U$ 上的截断函数$(\rho_\delta)$，使得

$$\limsup_{\delta \to 0} \int_U \left( |\nabla \rho_\delta|_\omega^{2+\varepsilon_0} + |\Delta_\omega \rho_\delta|^{1+\varepsilon_0} \right) \omega^n = 0.$$

证明 [**GP25** 中引理 5 的论证9]完全一般；特别地，它们并不依赖于$X = 3$ 在*loc. cit.* 中的维数。以下 Harnack 型结果也适用同样的说明，参见 [**GP25**中的推论 511]。

推论 ***3.4.*** — 设 $x \in X \setminus Z$。那么，存在 $x$ 的一个邻域 $U$ 和一个数 $p > 1$，满足以下条件。对于任意支集在 $U$ 中相对紧的非负函数 $f \in \mathcal{C}^2(U_{\mathrm{reg}})$，有

$$f + (\Delta_\omega f)_- \in L^p(U_{\mathrm{reg}}, \omega^n) \quad \Longrightarrow \quad f \in L^\infty(U_{\mathrm{reg}}).$$

**3.2. $C^0$ 关于 $h_{\mathcal{F}}$ 在 $X \setminus Z$ 上的估计。** — 设$h_{\mathcal{F}}$是 $\mathcal{F}$ 上的一个度量，满足上文 (c) 中的性质，其中常数为$C > 0$。下文沿用上述记号，并设$x \in X \setminus Z$ 是$X$ 上至多具有商奇点的一点。考虑$p : V \to U$，它是 x 附近的一个一致化图。我们固定 $\mathcal{E}$ 上的一个光滑厄米度量$h_{0,\mathcal{E}}$，并将由$p^* h_{\mathcal{F}}|_{U_0}$诱导的 $\mathcal{E}|_{V_0}$上的厄米度量记为$h_{\mathcal{E}}$。

下面的陈述表明，我们在此考虑的两个度量是拟等距的。

命题 ***3.5.*** — 沿用上述记号，存在 $C > 0$ 使得

$$C^{-1} h_{0,\mathcal{E}} \leqslant h_{\mathcal{E}} \leqslant C\, h_{0,\mathcal{E}} \quad \text{on } V_0.$$

该结果的完整证明见 [GP25], 参见定理 5.15。下面我们仍将回顾主要步骤。

1. 容易得到一个较弱的不等式，即
$$e^{N\phi}h_{0,\mathcal{E}} \leqslant h_{\mathcal{E}} \leqslant e^{-N\phi}h_{0,\mathcal{E}} \quad \text{on } V_0.$$
对于某个足够大的 $N \gg 0$，该不等式成立。首先对参考度量的拉回证明这一点，然后由 (c) 得到关于$h_{\mathcal{F}}$的相应不等式。
2. 接下来，可以假设 $\mathcal{E}$ 是平凡的，并令 $\tau$ 为 $\mathcal{E}^\star$的任意全纯截面。证明的主要部分在于，得到关于 $\omega$的拉回 $\chi\psi^\varepsilon$（相对于该拉回）的拉普拉斯算子的微分不等式，其中 $\chi$ 是一个截断函数，$\psi := |\tau|^2$ 是该截面的范数，而 $0 < \varepsilon \ll 1$ 是一个足够小的正实数。3. 现在使用推论3.4 ——注意，只要将上面的 $\varepsilon$ 取足够小，就能满足可积性条件——至此证明结束。

**3.3. 证明的最后部分：在 $X \setminus Z$上进行分部积分。** —— 我们将采用与上一小节相同的策略，突出说明命题的证明中的主要步骤。该命题与 [GP25], 中的定理 5.17 类似，并补充高维情形所需的说明。

（i）显然，我们所要证明的结果是局部的，因此可以假设 $\alpha$ 的支集包含于集合$U$ 中，如（3.1）和第2节所述。此外，可以假设在一致化图表$V$ 的定义域上
$$p : V \to U$$
我们可以构造一个平凡化框架（$e_1, \ldots, e_r$），属于 $\mathcal{E} \to V$。记$A$ 为$V_0$ 上相对于所选基底、与$_{\mathcal{E}}h$相关联的联络 1-微分形式。曲率 $\Theta(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}}) = \partial A$ 是$V_0$上$A$ 的反全纯导数。

接下来，令（$\chi_\varepsilon$）为$U \setminus U_0 = U \cap X_{\mathrm{sing}} \cap Z$的一族任意截断函数。待证命题等价于证明下一个等式成立
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_U \mathrm{Tr}\big(\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \wedge \Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})\big) \wedge \bar\partial\chi_\varepsilon \wedge \alpha = 0.$$
通过映射$p$ 将其拉回到$V$ 上，并利用分部积分，这等价于证明等式
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V \mathrm{Tr}\big(A \wedge \Theta(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}})\big) \wedge p^\star(\bar\partial\chi_\varepsilon \wedge \bar\partial\alpha) = 0$$
成立。现在，记 $\omega_V := p^\star\omega$ 为度量经$p$ 拉回后的度量，并设
$$\psi_\varepsilon := |p^\star(\bar\partial\chi_\varepsilon)|^2_{\omega_V}.$$
结合柯西-施瓦茨不等式以及以下事实
$$|A|^2_{h_{\mathcal{E}},\omega_V} \leq C\sum_i |D'e_i|^2_{h_{\mathcal{E}},\omega_V} \tag{3.2}$$
（这是命题3.5的推论）表明，只需证明该关系
$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_V (\psi_\varepsilon + |\partial\psi_\varepsilon| + |\Delta''_{\omega_V}\psi_\varepsilon|)\,\omega_V^n < \infty. \tag{3.3}$$

这里我们使用 $|e_i|^2_{h_\varepsilon}$ 的拉普拉斯算子的微分不等式（需要用它来界定上文不等式（3.2）右端的大小），并进行分部积分。

(ii) 回忆一下，$(U, x) \simeq (\mathbb{C}^{n-2}, 0) \times (S, s)$，其中 $i : (S, s) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$ 是一个具有对数终端奇点的曲面芽。设 $q : (\mathbb{C}^2, 0) \to (S, s)$ 是一致化图，令 $f := i \circ q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^N$ 为复合映射。因此，经过适当缩小 U，分歧覆盖 $p : V \to U$ 可写为如下形式

$$(Z, u, v) \to \big(Z, f_1(u, v), \dots, f_N(u, v)\big)$$

其中 $Z = (z_1, \dots, z_{n-2})$。

首先利用这个“显式”表达式定义一个函数

$$\rho(z, u, v) := \theta(|u|^2 + |v|^2) + \sum_{i=1}^{N} |f_i(u, v)|^2$$

然后定义如下截断函数

$$\chi_\varepsilon := \Xi_\varepsilon\big(\log\log(1/\rho)\big),$$

它出现在前面的步骤中。这里 $\Xi_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 在区间 $[0, \varepsilon^{-1}[$ 上等于 1，在 $[1 + \varepsilon^{-1}, \infty[$ 上等于 0。我们还假设 $\Xi_\varepsilon$ 的一阶和二阶导数的绝对值一致有界。

选择如上所述的 $\rho$，原因在于我们显然有

$$\begin{aligned} \omega_V &\simeq dd^c\rho + \omega_{\text{euc}} \\ &\simeq \theta dd^c(|u|^2 + |v|^2) + dd^c\Big(\sum_{i=1}^{N} |f_i(u, v)|^2\Big) + \omega_{\text{euc}} \end{aligned}$$

其中 $\omega_{\text{euc}} := \sqrt{-1}\sum^{n-2} i{=}1\, dz_i \wedge \bar{dz}_i$。特别地，我们看到，定义坏集 $p^{-1}(U^{\text{sing}})$ 的方程 $(u = v = 0)$ 和 $(f_1 = \dots = f_N = 0)$ 也自然出现在 $\omega_V$ 的势函数中；通过运用 [GP25，引理5.19]，这在下文(iii)中起着关键作用。最后，我们注意到

$$\omega_V^n \simeq \Big(\theta dd^c(|u|^2 + |v|^2) + dd^c\Big(\sum_{i=1}^{N} |f_i(u, v)|^2\Big)\Big)^2 \wedge \omega_{\text{euc}}^{n-2} =: dV_\theta.$$

(iii) [GP25]中的引理5.18表明，只要满足下式，3.3）便成立：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\operatorname{supp} \Xi'_\varepsilon} \frac{dV_\theta}{\rho^2 \log^2(|u|^2 + |v|^2)} < \infty. \tag{3.4}$$

最后，3.4）在 [GP25] 中由其中的引理5.19以及定理5.17证明的步骤2中的讨论推得，从而得以完全确立。

## 4. $X$上 $\Theta$ 的闭性

在本节中，我们通过证明与 3.2 定理相关的第二陈形式具有更强的闭性性质，推广了定理 $(\mathcal{F}、h_{\mathcal{F}})$：这些性质在整个 $X$ 上成立，而不仅仅是在 $Z$ 的补集上成立。

定理 ***4.1***。— 设 $\Theta$ 如定理 3.2 中所述，并设 $(X)$。则

$$\int_{X_{\mathrm{reg}}\setminus Z}\Theta\wedge d\alpha=0.$$

特别地，我们在 $X$ 上有 $d\Theta=0$。

证明. — 将 $Z$ 分层如下：

$$\emptyset=Z_{-1}\subset Z_0\subset Z_1\subset\ldots\subset Z_{n-4}\subset Z_{n-3}=Z$$

使得对于每个指标 $0\leqslant k\leqslant n-3$，集合 $Z_k$ 是 $Z$ 的一个维数为 $\dim Z_k\leqslant k$ 的闭解析子集，并且 $Z_k\setminus Z_{k-1}$ 是光滑的。我们将性质 $(P_k)$定义如下：

$$(P_k)\qquad \forall S\in\mathcal{E}^{2n-5}(X),\forall f\in C_0^\infty(X\setminus Z_k),\quad \int_{X_{\mathrm{reg}}} f\Theta\wedge dS=-\int_{X_{\mathrm{reg}}} df\wedge\Theta\wedge S.$$

若能证明 $(P_{-1})$ 成立，则定理得证。此外，借助定理 (3.2)，我们注意到 $(P_{n-3})$ 成立。我们将对 k 使用归纳法，证明任意 k 下 $(P_k)$ 均成立。假设某个 $k\leqslant n-3$ 满足 $(P_k)$，下面证明 $(P_{k-1})$ 也成立。固定一个微分形式 $S\in\mathcal{E}^{2n-5}(X)$ 和一个函数 $f\in C_0^\infty(X\setminus Z_{k-1})$，我们要证明

$$\int_{X_{\mathrm{reg}}} f\Theta\wedge dS=-\int_{X_{\mathrm{reg}}} df\wedge\Theta\wedge S. \tag{4.1}$$

我们分两个步骤进行。

• 首先，由于 $Z_k\setminus Z_{k-1}$ 是光滑的，我们可以用有限个开集 $U_\alpha\hookrightarrow\mathbb{C}^N$ 覆盖 $Z_k\cap\mathrm{Supp}(f)$，使得从 $\mathbb{C}^N$ 内部看，$Z_k\cap U_\alpha$ 是一个线性子空间。令 $\tau_\alpha$ 为从属于覆盖（$U_\alpha$）的单位分解；通过将 $S=\sum\tau_\alpha S$ 写成，我们看到，只需证明当 S 的支集包含于 $U_\alpha$时（4.1）成立；从现在起我们作此假设。特别地，在进一步缩小 $U_\alpha$ 之后，不妨设 S 是光滑形式，即 $S\in\mathcal{C}^\infty_c(U_\alpha,\mathcal{A}^{2n-5}X)$。

如前几行所述，我们可以假设，$k$维集合 $Z_k$ 由方程 $z^i=0$给出，其中 $i=k+1,\ldots\ldots,N$。我们有

$$S=\sum a_{I\bar{J}}(z)dz^I\wedge dz^{\bar{J}}$$

其中$a^{IJ}$是光滑的，且 $|I|+|J|=2n-5$。特别地，我们有 $\max\{|I|,|J|\}\geqslant n-2$。由于 $k\leq n-3$，$\{1,\ldots\ldots N\}$ 中任何基数至少为$n-2$的子集，都至少包含一个属于 $\{k+1,\ldots\ldots,N\}$的元素。因此，$S$ 是若干形式之和

$$a_{I\bar{J}}(z)dz^\ell\wedge dz^{I'}\wedge dz^{\bar{J}}\quad\text{or}\quad a_{I\bar{J}}(z)dz^{\bar{\ell}}\wedge dz^I\wedge dz^{\bar{J}'}$$

对于某个 $\ell\geqslant k+1$；也就是说，这样的微分形式至少包含一个垂直于Z的微分。此外，我们可以写成

$$a_{I\bar{J}}(z)dz^\ell\wedge dz^{I'}\wedge dz^{\bar{J}}=d\big(a_{I\bar{J}}(z)z^\ell dz^{I'}\wedge dz^{\bar{J}}\big)-z^\ell da_{I\bar{J}}(z)\wedge dz^{I'}\wedge dz^{\bar{J}}.$$

总之，可以写成

$$S=S_0+dT_0 \tag{4.2}$$

其中 $T_0$ 的次数为 $2n-6$，而 $S_0$ 和 $T_0$ 的系数都是光滑的（因此$S_0, T_0$属于 $\mathcal{E}^\bullet(U_\alpha)$），并且属于由$(Z,\ 0)$的方程生成的理想。

• 接下来，设$(\rho_\varepsilon)$ 是一族支集包含于$X\ \backslash Z_k$ 中的截断函数，使得 $\rho_\varepsilon \to 1_{X\backslash Z_k}$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时成立。由于$f\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(X\ \backslash\ Z_k)$ 以及$(P_k)$ 成立，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{X_{\mathrm{reg}}} f\Theta\wedge dS &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X_{\mathrm{reg}}} f\rho_\varepsilon\Theta\wedge dS\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{X_{\mathrm{reg}}}\rho_\varepsilon df\wedge\Theta\wedge S+\int_{X_{\mathrm{reg}}} f d\rho_\varepsilon\wedge\Theta\wedge S\Big)\end{aligned}$$

由于 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X_{\mathrm{reg}}}\rho_\varepsilon df\ \wedge\Theta\wedge S=\int_{X_{\mathrm{reg}}} df\ \wedge\Theta\wedge S$，要证明所需恒等式 (4.1) 等价于证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X_{\mathrm{reg}}} f d\rho_\varepsilon\wedge\Theta\wedge S=0. \tag{4.3}$$

现在利用 $(S\ = S_0+dT$ 的分解，其中系数来自 (4.2) $S_0$ 和$T_0$ 沿$Z_k$消失，因此其系数

$$d\rho_\varepsilon\wedge S_0\quad\text{and}\quad d\rho_\varepsilon\wedge T_0$$

当 $\varepsilon\ \to\ 0$ 时一致有界。由于 $\Theta$ 具有$L^1$ 系数，且 $\mathrm{Supp}(d\rho_\varepsilon)$ 的体积（例如相对于 $\omega$）趋于零，因此可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X_{\mathrm{reg}}} f d\rho_\varepsilon\wedge\Theta\wedge S_0=0.$$

因此，证明 (4.3归结为证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X_{\mathrm{reg}}} f d\rho_\varepsilon\wedge\Theta\wedge dT_0=0. \tag{4.4}$$

为此，我们写作

$$f d\rho_\varepsilon\wedge dT_0=df\wedge d\rho_\varepsilon\wedge T_0-d\big(f d\rho_\varepsilon\wedge T_0\big) \tag{4.5}$$

现在，对于 $0<\delta\ll 1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{X_{\mathrm{reg}}}\Theta\wedge d\big(f d\rho_\varepsilon\wedge T_0\big) &= \int_{X_{\mathrm{reg}}}\rho_\delta\Theta\wedge d\big(f d\rho_\varepsilon\wedge T_0\big)\\ &= -\int_{X_{\mathrm{reg}}}\Theta\wedge(d\rho_\delta\wedge f d\rho_\varepsilon\wedge T_0)\end{aligned}$$

其中最后一个等式中使用了 $(P_k)$。由于 $d\rho_\delta\wedge T_0$ 的系数一致有界，后一个积分随着 $\delta\to 0$趋于零，因此它恒等于零。利用（4.5），可得

$$\int_{X_{\mathrm{reg}}} f d\rho_\varepsilon\wedge\Theta\wedge dT_0=\int_{X_{\mathrm{reg}}}\Theta\wedge df\wedge d\rho_\varepsilon\wedge T_0.$$

并且上述右侧的积分趋于零 $\varepsilon\to 0$，理由与前一个积分相同。这就证明了（4.4），并完成了定理的证明。 □

## 5. 重新审视轨形陈类

本节旨在为紧正规簇上的反身层所关联的第二轨形陈类提供一种新的刻画，其中该簇在余维二处仅有商奇点。我们的主要动机是希望得到一个与几何分析的方法和工具相契合的概念。这最终对于在此背景下导出 Bogomolov-Gieseker 不等式至关重要。

我们首先讨论若干上同调理论（奇异上同调、de Rham 上同调、Dolbeault 上同调.....）及其相互关系。

**5.1. Leray 映射。—** 设 $X$ 是一个维数为$n$的正规连通复空间，不一定紧致。回顾一下，$X$ 上次数为$k$的光滑微分形式 $\alpha$ （分别地，双次数为$(p,q)$的光滑微分形式）按定义是$X^{\mathrm{reg}}$上的 $k$-形式（分别地，$(p,q)$-形式），并且可以光滑延拓到欧几里得空间中的局部嵌入。若$d\alpha = 0$ 在$X^{\mathrm{reg}}$ 上为零（分别地，$\partial\,\partial\alpha = 0$ 在$X^{\mathrm{reg}}$上为零），则称 $\alpha$ 是$d$-闭的（分别地，$\partial$-闭的）。我们用 $\mathcal{A}^k$ （分别地，$\mathcal{A}^{p,q}{}_X$）表示$k$阶光滑形式（分别地，$(p,q)$-形式）的 $\mathcal{C}^\infty_X$-模，并用 $\Omega^p{}_X$ 表示次数为$p$的 Kähler 微分的凝聚层。一般而言，这些复形

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_X \longrightarrow \mathcal{A}^0_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2_X \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{2n}_X \xrightarrow{d} 0 \tag{5.1}$$

$$0 \longrightarrow \Omega^p_X \longrightarrow \mathcal{A}^{p,0}_X \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,1}_X \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,2}_X \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,n}_X \xrightarrow{\bar\partial} 0 \tag{5.2}$$

不一定是恰当的，因此奇异上同调空间 $H^k(X,\mathbb{R})$ 可能与德拉姆上同调空间不一致

$$H^k_d(X) := \frac{\{u \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathcal{A}^k_X);\ du = 0\}}{\{dv;\ v \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathcal{A}^{k-1}_X)\}}.$$

同样，凝聚上同调空间 $H^q(X,\Omega^p{}_X)$) 不一定与 Dolbeault 上同调空间一致

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(X) := \frac{\{u \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathcal{A}^{p,q}_X);\ \bar\partial u = 0\}}{\{\bar\partial v;\ v \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathcal{A}^{p,q-1}_X)\}}.$$

然而，若我们处理局部 $\partial\bar\partial$-恰当形式，就可以绕过这一困难，下面将对此作出说明。设 $\omega$ 是一个局部 $\partial\bar\partial$-恰当的光滑实 $(1,1)$-微分形式。对于每个$p \geq 1$，我们接下来回顾类 $\{\omega\}^p$ 和 $[\omega]^p$ 在 $H^{2p}(X,\mathbb{R})$ 和$H^p(X,\Omega^p{}_X)$中的构造。

根据我们的假设，存在一个由 Stein 开集组成的覆盖 $X = \bigcup U_i$，使得 $\omega|_{U_i} = \sqrt{-1}\,\bar\partial\partial\phi_i$ 对于某些实值函数 $\phi_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$。换言之，$\omega$ 的数据等价于 $H^0(X,\mathcal{C}^\infty_X/\mathrm{PH}_X)$ 中的一个元素的数据，其中 $\mathrm{PH}_X$ 是多重调和函数层。由正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{PH}_X \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}^\infty/\mathrm{PH}_X \longrightarrow 0$$

我们可以将 $\omega$ 与一个元素关联起来

$$\kappa(\omega) \in H^1(X, \mathrm{PH}_X). \tag{5.3}$$

接下来，我们有正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{2\mathrm{Im}} \mathrm{PH}_X \longrightarrow 0$$

由此得到连接态射 $\delta^1 : H^1(X, \mathrm{PH}_X) \to H^2(X, \mathbb{R})$。我们定义

$$\{\omega\} =: \delta^1(\kappa(\omega)) \in H^2(X, \mathbb{R}). \tag{5.4}$$

接下来，微分映射

$$d : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$$

经由 $\mathcal{O}_X/\mathbb{R}_X \simeq \mathrm{PH}_X$ 分解，因此诱导出一个映射 $d : \mathrm{PH}_X \to \Omega^1_X$。该映射还在上同调中诱导出一个映射 $d^1 : H^1(X, \mathrm{PH}_X) \to H^1(X, \Omega^1_X)$，因此我们得到一个元素

$$[\omega] = d^1(\kappa(\omega)) \in H^1(X, \Omega^1_X). \tag{5.5}$$

在 ˇCech 上同调中，我们有

$$\kappa(\omega) = (\phi_{ij}), \quad \{\omega\} = (f_{ijk}), \quad \text{and} \quad [\omega] = (df_{ij}),$$

若记 $\phi_{ij} := \phi_i - \phi_j$, $2\mathrm{Im}(f^{ij}) = \phi_{ij}$ 且 $f^{ijk} := f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$。对于任意整数$1 \leqslant p \leqslant n$，我们还得到上同调类

$$\{\omega\}^p := \{\omega\} \cup \ldots \cup \{\omega\} \in H^{2p}(X, \mathbb{R}), \quad \text{and} \quad [\omega]^p := [\omega] \cup \ldots \cup [\omega] \in H^p(X, \Omega^p_X)$$

它们分别由 $2p$-上循环 $\prod^{p-1}{}_{k=0} f_{i_{2k} i_{2k+1} i_{2k+2}}$ 和 $p$-上循环$df_{i_0 i_1} \wedge df_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_{p-1} i_p}$表示。

**5.1.1.** 从凝聚上同调到*Dolbeault*上同调. — 尽管复形（5.2）不再正合，我们仍可通过通常的 Leray 映射，将任意元素 $\beta \in H^q(X, \Omega^p{}_X)$对应到一个 $\partial$-闭的光滑$(p,q)$-微分形式。下一个陈述中的记号不言自明。

命题***5.1.*** — 设 $0 \leqslant p,q \leqslant n$ 是两个正整数。存在一个态射

$$\Phi = \Phi_{p,q} : H^q(X, \Omega^p_X) \longrightarrow H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$$

使得若 $\omega$ 是 $X$ 上局部 $\partial\bar\partial$-正合的光滑(1,1)-微分形式，则有以下等式

$$\Phi_{p,p}([\omega]^p) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} [\omega^p]_{\bar\partial}$$

成立。

证明。——取 $\beta \in H^q(X, \Omega^p{}_X)$，并将 $\beta$ 视为由 $q$-上循环给出的全纯$p$-形式 $\beta^0 = (\beta^0_{i_0 \cdots i_q})$，定义在 $U_{i_0 \cdots i_q}$上。我们可以迭代地构造一个族 $(\beta^k)_{k=0,\ldots,q}$，使得

$$\beta^k \in C^{q-k}(X, \mathcal{A}^{p,k}), \quad \delta\beta^k = 0, \quad \bar\partial\beta^k = 0, \tag{5.6}$$

或者换句话说， $\beta^k$ 是一个取值于闭的 $\partial$-闭$(p,k)$-形式的$(q-k)$-上循环 $\beta^k$。我们已经构造了 $\beta^0$；若对于某个 $0 \leqslant k \leqslant q-1$， $\beta^k$ 已构造好，我们首先取

$$\widetilde{\beta}^k \in C^{q-k-1}(X, \mathcal{A}^{p,k}) \quad \text{s.t.} \quad \delta(\widetilde{\beta}^k) = \beta^k.$$

例如，若$(\rho_\ell)$ 是从属于我们的覆盖的单位分解，我们令$\widetilde{\beta}^k_{i_0\cdots i_{q-k-1}} := \sum_\ell \rho_\ell \beta^1_{i_0\cdots i_{q-k-1}\ell}$。于是定义

$$\beta^{k+1} := \overline{\partial}\widetilde{\beta}^k,$$

它满足 (5.6)。在这一过程的最后，也就是当$k = q$时，我们得到一个元素$\beta^q$，它恰好是一个 $\partial$-闭的$(p,q)$-微分形式。

现在我们需要证明，若选择 $\beta$ 的另一个代表元 $\beta^0$，或 $\beta^k$的另一个原函数 $\widetilde{\beta}^k$，所得的 $\beta^q$ 仅相差一个光滑$(p,q-1)$-微分形式的 $\partial$。我们先来看第一种情况。若选择 $\beta^0$的另一个代表元，这相当于将 $\widetilde{\beta}^0$ 替换为 $\widetilde{\beta}^0 + \widetilde{\tau}^0$，其中 $\tau^0$ 是全纯的。特别地， $\beta^1 = \overline{\partial}\widetilde{\beta}^0$ 不会改变。

现在让我们验证原函数的选择 $\widetilde{\beta}^k$ 对 $\beta^k$ 不起作用。在每一步$0 \leqslant k \leqslant q-2$中，我们选择了一个元素 $\widetilde{\beta}^k \in C^{q-k-1}(X, \mathcal{A}^{p,k})$，使得 $\delta(\widetilde{\beta}^k) = \beta^k$。任何其他选择都可以写成 $\widetilde{\beta}^k + \delta(\widetilde{\gamma}^k)$，其中 $\widetilde{\gamma}^k \in C^{q-k-2}(X, \mathcal{A}^{p,k})$。于是 $\beta^{k+1}$ 变为

$$\beta^{k+1} + \overline{\partial}\delta(\widetilde{\gamma}^k) = \delta(\widetilde{\beta}^{k+1} + \overline{\partial}\widetilde{\gamma}^k) = \delta(\widetilde{\beta}^{k+1} + \overline{\partial}\widetilde{\gamma}^k + \delta(\widetilde{\gamma}^{k+1})),$$

因此 $\beta^{k+2}$ 变为 $\beta^{k+2} + \partial\delta(\widetilde{\gamma}^{k\mp 1})$，所以它与 $\widetilde{\gamma}^k$的选择无关。一旦我们到达步骤 $\mathrm{k} = \mathrm{q}-1$，便知道先前的选择（对于 $\mathrm{k} \leqslant \mathrm{q}-2$）不会对最终结果 $\beta^q$产生任何影响，因此我们只需理解 $\beta^q$如何取决于 $\mathrm{q}-1$层面上的可能选择。更确切地说，我们的选择相当于将 $\beta^{q-1} = \delta(\widetilde{\beta}^{q-1})$ 替换为 $\beta^{q-1} + \widetilde{\gamma}^{q-1}$，其中这次 $\widetilde{\gamma}^{q-1}$ 是一个取值于 $\mathcal{A}^{p,q-1}$的 0- 上循环，即一个定义良好的 $(\mathrm{p}, \mathrm{q}-1)$- 微分形式。这会将闭的 $(\mathrm{p}, \mathrm{q})$- 微分形式 $\beta^q$ 替换为 $\beta^q + \partial(\widetilde{\gamma}^{q-1})$，因此 $[\beta^q]_{\overline{\partial}} = \Phi_{p,q}(\beta)$ 是定义良好的。

现在让我们将这一构造应用于类 $\alpha := [\omega]^p \in H^p(X, \Omega^p X)$。我们从$p = 1$开始。使用前述记号，我们有 $\widetilde{\beta}^1_i = \sum_\ell \rho_\ell df_{i\ell}$。由于

$$\widetilde{\beta}^1_i - \widetilde{\beta}^1_j = df_{ij} = \sqrt{-1}\partial\phi_{ij} = \sqrt{-1}\partial\phi_i - \sqrt{-1}\partial\phi_j,$$

在$U_i$上的$(1,0)$-微分形式 $(\widetilde{\beta}^1_i - \sqrt{-1}\partial\phi_i)$ 可以粘合成$X$上的全局$(1,0)$-微分形式$u$。此外，我们有

$$\beta^1 = \overline{\partial}\widetilde{\beta}^1 = \omega + \overline{\partial}u.$$

现在让我们处理$p \geqslant 2$的情形。回想一下， $\beta^0 = df_{i_0 i_1} \wedge df_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_{p-1} i_p}$，因此

$$\widetilde{\beta}^1_{i_0\cdots i_{p-1}} = df_{i_0 i_1} \wedge df_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_{p-2} i_{p-1}} \wedge (\sum_\ell \rho_\ell df_{i_{p-1}\ell})$$

因此

$$\beta^1_{i_0\cdots i_{p-1}} = (-1)^{p-1} df_{i_0 i_1} \wedge df_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_{p-2} i_{p-1}} \wedge (\omega + \overline{\partial}u)$$

根据前一种情况，$u$ 是$X$上的全局（$1,0$）-微分形式。迭代可得

$$(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\alpha^p = (\omega+\bar{\partial}u)^p = \omega^p + \bar{\partial}\Big(\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}u(\bar{\partial}u)^{k-1}\wedge\omega^{p-k}\Big),$$

因此 $\Phi([\omega]^p) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}[\omega^p]_{\partial}$ 如所声称。 □

**5.1.2.** 从奇异上同调到德拉姆上同调。——与上一节类似，Leray 映射允许为任意奇异上同调类 $\beta \in H^k(X,\mathbb{R})$ 关联一个$d$-闭光滑$k$-微分形式。

命题 ***5.2***。——对于任意整数 $0 \leqslant k \leqslant 2n$，存在一个态射

$$\widehat{\Phi} : H^k(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^k_d(X)$$

使得若 $k = 2\ell$ 且若 $\omega$ 是 $X$ 上局部 $\partial\bar{\partial}$-恰当的光滑$(1,1)$-微分形式，则等式 *ty*

$$\widehat{\Phi}_k(\{\omega\}^\ell) = (-1)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\{\omega^\ell\}_d$$

成立。

命题 5.2 的证明 与命题 5.1 的证明完全类似，因此略去。

**5.2. 通过德拉姆上同调定义轨形陈数。** — 本小节将介绍一种基于德拉姆上同调的轨形陈数新定义。事实证明，这一定义等价于此前在 [**Mum83**] 和[**GK20**], 中考虑的定义，但正如前文所述，我们的观点在应用中非常有用。

**5.2.1.** 轨形简要回顾. — 回顾一下，在复轨形 $M$ 上，自然的光滑形式是与轨形结构相容的形式。具体而言，$M$ 上的轨形光滑形式是$M$上的光滑微分形式 $\alpha$，并且对于任意一致化图$p: U \to V$，形式 $p^*\alpha|_{U_{\mathrm{reg}}}$ 都能光滑延拓到$V$上。

我们可以考虑轨形 de Rham 上同调和 Dolbeault 上同调，分别记为 $\mathrm{H}^{\bullet}_{d,\mathrm{orb}}(\mathrm{M})$ 和 $\mathrm{H}^{\bullet}_{\partial}{}_{,\mathrm{orb}}(\mathrm{M})$，紧支撑版本也类似。此外，M 上的轨形丛是 $\mathrm{M}^{\mathrm{reg}}$ 上的一个向量丛，并且对于任意一致化图 $\mathrm{p}:\mathrm{U} \to \mathrm{V}$，向量丛 $\mathrm{p}^*\mathrm{E}|_{U_{\mathrm{reg}}}$ 都可以延拓为 V 上的局部自由丛。换言之，反身拉回 $\mathrm{p}^{[*]}\mathrm{E}|_U$ 是局部自由的。可以在 E 上定义光滑轨形厄米度量 h；其对应的陈形式是 d 闭（且也$\partial$闭）的轨形光滑形式，进而诱导出上同调类 $\mathrm{c}_k^{\mathrm{orb}}(\mathrm{E}) \in \mathrm{H}^{2k}_{d}{}_{,\mathrm{orb}}(\mathrm{M})$（分别为 $\mathrm{c}_k^{\overline{\mathrm{orb}}}(\mathrm{E}) \in \mathrm{H}^{k\,k}_{\partial}{}_{,,\mathrm{orb}}(\mathrm{M})$）。更多细节请参阅 [Bla**96**] 。

**5.2.2.** 轨形陈数的定义. — 从现在起，我们固定以下设定 :

设定 ***5.3.*** — 设 $(X,\omega)$ 为一个维数为 $n \geqslant 2$ 的正规紧 *Kähler* 簇。此外，假设存在一个余维至少为三的真解析子集 $Z \subset X$，使得 $X \setminus Z$ 至多具有商奇点，即 $X \setminus Z$ 是一个轨形。最后，设 $E$ 是 $X \setminus Z$ 上的一个轨形丛。

记 $i : Z \hookrightarrow X$ 为闭浸入，记 $j : X \setminus Z \to X$ 为开浸入。正合列

$$0 \longrightarrow j_! j^* \mathbb{R}_X \longrightarrow \mathbb{R}_X \longrightarrow i_* i^* \mathbb{R}_X \longrightarrow 0$$

可得

$$0 = H^{2n-5}(Z,\mathbb{R}) \to H_c^{2n-4}(X \setminus Z,\mathbb{R}) \xrightarrow{\tau} H^{2n-4}(X,\mathbb{R}) \to H^{2n-5}(Z,\mathbb{R}) = 0 \tag{5.7}$$

其中，上同调群的消失是因为 $\dim_{\mathbb{R}} Z \leqslant 2n-6$。特别地，$\tau$ 是一个同构。

现在，存在一个德拉姆-韦伊同构

$$\sigma : H_c^{2n-4}(X \setminus Z,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_{d,c,\mathrm{orb}}^{2n-4}(X \setminus Z)$$

其中，后者是支集紧包含于 $X \setminus Z$中的轨形光滑形式的德拉姆上同调。对于 $E$ 在 $X \setminus Z$ 上的一个轨形丛，Graf 和 Kirschner [GK20] 随后定义

$$\widetilde{c}_2(E) \cdot \{\omega\}^{n-2} := c_2^{\mathrm{orb}}(E) \cdot (\sigma \circ \tau^{-1})(\{\omega\}^{n-2}) \in \mathbb{R}$$

其中 $c_2^{\mathrm{orb}}(E) \in H_{d,\mathrm{orb}}^4(X \setminus Z)$ 是轨形 de Rham 上同调中的通常第二轨形陈类，由与 $E$ 上任意轨形厄米度量相关联的陈微分形式表示。不过，从微分几何的角度来看，这一定义在实际应用中并不十分方便。

现在我们说明如何调整上述论证，从而给出一个更易于处理的 $\widehat{c}_2(E) \cdot \{\omega\}^{n-2}$ 定义。关键依据是以下结果。

***Pr*** $\widehat{}$命题 ***5.4***。— 采用命题 5.2中的记号，态射 $\Phi$ 可分解如下

$$\begin{array}{ccc} & & H_{d,c}^{2n-4}(X \setminus Z) \\ & \overset{\widehat{\Psi}}{\nearrow} & \downarrow \\ H^{2n-4}(X,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\widehat{\Phi}} & H_d^{2n-4}(X) \end{array}$$

特别地，给定 $X$ 上任意一个 *Kähler* 形式 $\omega$，可以写成 $\omega^{n-2} = \widehat{\Omega} + d\gamma$，其中 $\widehat{\Omega}$ 的支集与 $Z$ 相离，而 $\gamma$ 是一个光滑$(2n-5)$形式。

证明。——首先，我们断言存在 $X$ 中的一个$Z$ 的邻域 $\mathcal{U}$，使得

$$H^{2n-5}(\mathcal{U},\mathbb{R}) = H^{2n-4}(\mathcal{U},\mathbb{R}) = 0. \tag{5.8}$$

确实，我们采用 Łojasiewicz 定理的对版本，即（半代数集，闭子集），将 $X$ 三角剖分为使得 $Z$ 是子复形的形式，参见 [Hir75] 及其中的参考文献。特别地，我们可以找到一个较小的 $\mathcal{U}$ 邻域 $Z$，它

与$Z$同伦等价，因此其次数大于 $\dim_{\mathbb{R}} Z$ 的奇异上同调消失。

现在，令 $\beta \in H^{2n-4}(X,\mathbb{R})$，并令 $\alpha$ 为 $\widehat{\Phi}(\beta)$的一个代表。由于 $\widehat{\Phi}$ 的构造与限制到开集相交换，我们可知存在一个光滑的$(2n-5)$-微分形式 $\gamma$，定义在 $\mathcal{U}$ 上，使得 $\alpha|_{\mathcal{U}} = d\gamma$。令 $\chi$ 为一个在$\mathcal{U}$中具有紧支撑的光滑函数，使其在$Z$附近满足 $\chi \equiv 1$，并令 $\widehat{\Omega} = \alpha - d(\chi\gamma)$，其支集远离$Z$。

若在上述构造中选取 $\alpha|_{\mathcal{U}}$ 的另一个原函数，即 $\alpha|_{\mathcal{U}} = d\gamma'$，则$\gamma - \gamma'$ 是 $(2n-5)$-上循环在 $\mathcal{U}$ 上经由 Leray 映射，取值于 $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$的像。由 (5.8)，我们可以找到一个光滑的$(2n-6)$-微分形式 $\eta$，定义在 $\mathcal{U}$上，使得 $\gamma - \gamma' = d\eta$。特别地，若对于一个可能不同的截断函数 $\chi'$，有 $\widehat{\Omega}'$: $= \alpha - d(\chi'\gamma')$，则

$$\widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}' = d(\chi\gamma - \chi'\gamma') = d\Big((\chi - \chi')\gamma' - d\chi \wedge \eta\Big),$$

且微分形式 $(\chi - \chi')\gamma' - d\chi \wedge \eta$ 的支集避开$Z$。这表明，类$[\Omega] \in H^{2n-4}{}_{d,c}(X \setminus Z)$ 仅取决于 $\beta$。因此可以无歧义地定义$\widehat{\Psi}(\beta) = [\Omega]$，事实上，由于 $\alpha = \Omega + d(\chi\gamma)$</style}，它可分解为 $\widehat{\Phi}$。 □

回顾一下，轨形 $X \setminus Z$ 上的光滑形式是轨形光滑的。特别地，我们有一个自然映射

$$r : H^{2n-4}_{d,c}(X \setminus Z) \to H^{2n-4}_{d,c,\mathrm{orb}}(X \setminus Z).$$

现在我们可以如下定义第二轨形陈数。

定义 ***5.5***。—— 设$E$ 是$X \setminus Z$ 上的轨形丛，且 $\omega$ 是$X$上的 Kähler 形式。记作

$$c_2(E) \cdot \{\omega\}^{n-2} := c_2^{\mathrm{orb}}(E) \cdot (r \circ \widehat{\Psi})(\{\omega\}^{n-2})$$

其中，$c_2^{\mathrm{orb}}(E) \in H^4_{d,\mathrm{orb}}(X \setminus Z)$ 是轨形 de Rham 上同调中的通常第二轨形陈类。

我们可以用以下更具体的方式重新表述上述定义。取h 为$E$ 上的轨形厄米度量，并记 $\omega^{n-2} = \widehat{\Omega} + d\gamma$，其中 $\widehat{\Omega}$ 的支集避开 $Z$；根据命题5.4，这是可能的。于是有

$$c_2(E) \cdot \{\omega\}^{n-2} = \int_{X \setminus Z} c_2(E,h) \wedge \widehat{\Omega}, \tag{5.9}$$

且命题 5.4 ̂断言， $\Omega$ 在相关紧支撑上同调中的类仅取决于 $\{\omega\}^{n-2}$。

5.2.3. 与先前定义的比较。——当 X 是射影的、E 是 X 上的反身层且 L 是丰线丛时，Mumford [Mum83] 证明，可以为 E 和 L 赋予有理数 ˆc2(E) ·c1(L)$^{n-2}$，使其满足以下性质。取一般元素 $H_i \in |mL|$，其中 $m \gg 1$，使得 $S := H_1 \cap \cdots H_{n-2} \subset X$ 是一条轨形曲面，且 $E|_S$ 是一个轨形丛。那么我们有 ˆc2(E) · c1(L)$^{n-2}$ = $^1$ m$^{n-2}$c$_2^{\mathrm{orb}}$(E|$_S$)。

引理 ***5.6.*** — 设$(X,\omega)$ 是一个维数为 $n$、余维二处至多具有商奇点的正规紧 *Kähler* 簇。假设 $\{\omega\} \in H^2(X,\mathbb{R})$ 是丰线丛 $L$ 的第一陈类的像。那么

$$\hat{c}_2(E) \cdot c_1(L)^{n-2} = c_2(E) \cdot \{\omega\}^{n-2}.$$

证明。— 将 X $\subset \mathbb{P}^N$ 嵌入，使得 $[\omega] = [\omega_{\mathrm{FS}}|_X]$。此外，经过适当缩放，可以假设存在除子 $H_1, \ldots, H_{n-2} \in |L|$，使得完全交曲面 S $:= H_1 \cap \ldots \cap H_{n-2} \cap$ X 满足 S $\cap$ Z $= \emptyset$。构造一族显式的光滑 d-闭 (n $-$ 2, n $-$ 2)-微分形式 $(\Omega_\varepsilon)$ 并不困难（例如参见 [CGG24, 引理 32]），它们满足

1. $[\Omega_\varepsilon] = [\omega^{n-2}]$FS 在 $H^{n-2,n-2}{}_d(\mathbb{P}^N)$。 2. $\Omega_\varepsilon|_X$ 支集位于$S$的邻域内，因此远离$Z$。 3. $\Omega_\varepsilon \wedge [X] \to [S]$ 在 $\varepsilon \to 0$ 意义下弱收敛。

特别地，我们看到，对于 $(E,h)$ 上的任意厄米轨形丛，其中 $X \setminus Z$，以及任意$\varepsilon > 0$，有

$$c_2(E) \cdot \{\omega\}^{n-2} = \int_{X\setminus Z} c_2(E,h) \wedge \Omega_\varepsilon,$$

因此

$$c_2(E) \cdot \{\omega\}^{n-2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{X\setminus Z} c_2(E,h) \wedge \Omega_\varepsilon = c_2^{\mathrm{orb}}(E|_S).$$

□

我们以证明定义 5.5 中所考虑的轨形陈数与 Graf-Kirschner 所考虑的轨形陈数一致来结束本节。由于后者已知是 Mumford 所考虑结果的推广，引理 5.7 推广了引理 5.6。

引理 ***5.7***。——设 $E$ 是 $X \setminus Z$ 上的一个轨形丛，且 $\omega$ 是 $X$ 上的一个 *Kähler* 形式。我们有等式 $\widehat{c}_2(E)\cdot\{\omega\}^{n-2} = c_2(E)\cdot\{\omega\}^{n-2}$。

证明。——我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} H_c^{2n-4}(X\setminus Z,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\tau} & H^{2n-4}(X,\mathbb{R}) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\Psi}} \\ H_{d,c,\mathrm{orb}}^{2n-4}(X\setminus Z,\mathbb{R}) & \xleftarrow[r]{} & H_{d,c}^{2n-4}(X\setminus Z) \end{array}$$

其中$j$ 是由光滑形式包含到轨形丛光滑形式中所诱导的自然映射，定义在$X \setminus Z$上。我们声称这是一个交换图。事实上，这是$\widehat{\ }$因为映射 $\Psi \circ \tau$ 是从奇异上同调到德拉姆上同调（带紧支撑）的通常 Leray 映射。换言之，我们有 $r \circ \widehat{\Psi} = \sigma \circ \tau^{-1}$，因此$\widetilde{\ }c_2(E)\cdot\{\omega\}^{n-2} = c_2(E)\cdot\{\omega\}^{n-2}$，如所声称。

□

**5.3. 通过 Dolbeault 上同调定义轨形陈数。** — 在设定5.3中，我们可以将 Kähler 形式 $\omega$ 与其上同调类 $\kappa(\omega) \in H^1(X, \mathrm{PH}_X)$ 对应起来，然后考虑

– 奇异上同调类 $\{\omega\} \in H^2(X, \mathbb{R})$，或– 凝聚上同调类 $[\omega] \in H^1(X, \Omega^1_X)$。

在第一种情况下，命题 5.4 允许我们为 $\{\omega\}^{n-2}$ 关联一个次数为 $2n-4$ 的德拉姆上同调类$X$，其紧支撑位于 $X \setminus Z$中。

与奇异上同调相比，使用凝聚上同调有一些优点，下面将对此加以说明。由于 $\dim Z \leqslant n-3$，根据 [**Ohs**（另见 [**Dem90**，定理 2]）可知，$Z$ 是强$(n-2)$-完备的，即存在一个光滑（穷竭）函数 $\varphi$，使得 $i\partial\bar\partial\varphi$ 至多有 $n-3$ 个负特征值或零特征值。根据 [**Dem90**，定理 1]，，这意味着$Z$ 存在一个由强$(n-2)$-完备邻域构成的基本族

$$Z \hookrightarrow \mathcal{V} \subset X.$$

根据 Andreotti-Grauert消失定理 [**AG62**]，可知，对于任意凝聚层 $\mathcal{F}$ 在$X$上，我们有

$$H^{n-2}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = 0. \tag{5.10}$$

这可以看作（5.8）的凝聚层类比。作为命题5.1的推论，我们得到以下陈述，它是命题5.4的部分类比。

命题 ***5.8.*** — 给定任意类 $\beta \in H^{n-2}(X, \Omega^{n-2}_X)$，*Dolbeault*类 $\Phi(\beta) \in H^{n-2\,n-2}_{\bar\partial,c}(X)$ 存在一个光滑代表元，其支集包含于 $Z$ 的补集中。特别地，存在一个分解

$$\omega^{n-2} = \Omega + \bar\partial\gamma \tag{5.11}$$

使得 $\Omega$ 是一个光滑的$(n-2,n-2)$型微分形式，且 支集$(\Omega) \subset X \setminus Z$，并且 $\gamma$ 是一个光滑的$(n-2,n-3)$型微分形式。

证明. — 取一个代表元 $\alpha \in \Phi(\beta)$。由（5.10）可得 $\beta|_{\mathcal{V}} = 0$。由于 $\Phi$与开集上的限制相交换，我们推知 $\Phi(\beta)|_{\mathcal{V}} = [\alpha|_{\mathcal{V}}]_{\bar\partial} = 0$。这意味着存在一个定义在 $\mathcal{V}$ 上的光滑$(n-2,n-3)$型微分形式 $\gamma_{\mathcal{V}}$，使得

$$\alpha|_{\mathcal{V}} = \bar\partial\gamma_{\mathcal{V}}.$$

现在，令 $\chi$为一个截断函数，使得 $\chi \equiv 1$在$Z$附近成立，且 $\mathrm{Supp}(\chi) \Subset \mathcal{V}$，令 $\gamma := \chi\gamma_{\mathcal{V}}$。闭的 $\bar\partial$-闭$(n-2,n-2)$微分形式

$$\Omega := \alpha - \bar\partial\gamma \tag{5.12}$$

确实具有紧支集，且其支集避开 $Z$ 并满足 $[\alpha]_{\bar\partial} = [\Omega]_{\bar\partial}$。命题的最后一部分只需取 $\alpha = \omega^{n-2}$即可得出；根据命题 5.1 的后半部分，这样做是合理的。 □

此时，人们希望论证 $[\Omega] \in H^{n-2\,n-2}_{\bar\partial,c}(X \setminus Z)$ 在具有紧支撑的 Dolbeault 上同调中仅取决于 $[\omega]^{n-2} \in H^{n-2}(X, \Omega^{n-2}_X)$，正如命题5.4中那样。例如，这将是以下消失结论的推论

$H^{n-3}(\mathcal{V},\Omega_{\mathcal{V}}^{n-2}) = 0$ (例如，若$Z$的余维至少为四，则由 Andreotti-Grauert 消失定理可知该结论成立)，但我们不知道后一结论是否在一般情况下成立。原则上，这可能会妨碍通过 Dolbeault 上同调明确定义轨形陈数。

然而，为了妥善定义这些数，我们只需要一个稍弱的条件。也就是说，需要知道：对于 $E$ 上的任意厄米度量$h$，以及任意满足下述条件的光滑$(n-2,n-3)$-微分形式 $\eta$：

$$\mathrm{supp}(\bar{\partial}\eta) \subset \mathcal{V} \setminus Z,$$

则等式

$$\int_{X\setminus Z} c_2(E,h) \wedge \bar{\partial}\eta = 0 \tag{5.13}$$

成立。问题在于，先验地我们对 $\eta$ 本身的支集一无所知，只知道它包含于 $\mathcal{V}$。若直接在$X$ 上，或在$X$ 的一个解消上进行研究（在该解消上，$E$ 的拉回模去其挠部分后成为无挠的），上述消失性似乎很难得到。

若利用所谓轨形部分解消 [KO25], [Ou24],以及 [Kol26], 的存在，等式（5.13）便可轻易得到。我们现在回顾这一结果。

在这里，$X$ 是 $Z$ 中，通过扩大 $Z$ 的，$\widehat{X} \to X$，使得 $g$ 在$X \setminus Z$ 上是同构，并且$E$作为$X \setminus Z \simeq \widehat{X} \setminus \mathrm{Exc}(g)$上的轨形丛，可扩张为$X$上的轨形丛 $\widehat{E}$。利用$g$的存在性，可以证明：

**命题 *5.9*。**——积分

$$\int_{X\setminus Z} c_2(E,h) \wedge \Omega$$

与在 $E$ 上选取的轨形厄米度量 $h$ 及满足 $\Omega$ 条件的微分形式(5.11)无关。此外，它与定义 $c_2(E)\cdot\{\omega\}^{n-2}$ 中的 $c$5.5一致。

证明。——首先，若 h′ 是 E 上另一个轨形厄米度量，则 $c_2(E,h) - c_2(E,h') = \partial\alpha$ 对某个轨形光滑的 (4, 3)-微分形式成立，并且 $\int_{X\setminus Z} \partial\alpha \wedge \bar{\Omega} = 0$，因为 $\partial\bar{\Omega} = 0$。接下来，假设我们有两个如 (5.11) 中所示的分解 $\omega^{n-2} = \Omega + \partial\bar{\gamma} = \Omega' + \partial\bar{\gamma}'$，并令 $\eta := \gamma - \gamma'$。然后，选取 h，使得 $g^*h$ 可延拓为 E 上的轨形厄米度量 $\widehat{h}$。于是我们有

$$\begin{aligned}\int_{X\setminus Z} c_2(E,h) \wedge (\Omega - \Omega') &= \int_{\widehat{X}\setminus \mathrm{Exc}(g)} g^*(c_2(E,h) \wedge \bar{\partial}\eta) \\ &= \int_{\widehat{X}} c_2(\widehat{E},\widehat{h}) \wedge \bar{\partial}(g^*\eta)\end{aligned}$$

根据斯托克斯公式，该项为零。这里我们利用了 $g^*\eta$ 是轨形 $X$上的光滑形式，因此它也是轨形光滑的，可以合法地应用斯托克斯公式。

类似地，若 $\omega^{n-2} = \Omega' + d\gamma'$ 如式（5.4）所示，则

$$\begin{aligned}\int_{X\setminus Z} c_2(E,h)\wedge(\Omega-\Omega') &= \int_{\widehat{X}\setminus \mathrm{Exc}(g)} g^*(c_2(E,h)\wedge(\bar{\partial}\gamma - d\gamma')\\ &= \int_{\widehat{X}} c_2(\widehat{E},\widehat{h})\wedge\bar{\partial}(g^*\gamma) - \int_{\widehat{X}} c_2(\widehat{E},\widehat{h})\wedge d(g^*\gamma')\end{aligned}$$

由于斯托克斯公式，该项为零，因为$c_2(\widehat{E},\widehat{h})$是轨形丛光滑$d$，且 $\partial$-闭形式，而$g^*\gamma$和$g^*\gamma'$均光滑，因此是轨形丛光滑形式。命题由此可由（5.9）得证。 □

注 ***5.10***。—正如上述讨论所示，利用奇点的部分解消的存在性，完全可以在背景5.3 中通过 Dolbeault 上同调定义轨形陈数。若不援引这一结果也能做到这一点，将会非常有趣。我们感兴趣的上同调类由 $\partial\eta$ 在（5.13）中诱导，显然属于映射的核

$$H^{n-2,n-2}_{\bar{\partial},c}(\mathcal{V}\setminus Z) \to H^{n-2,n-2}_{\bar{\partial}}(\mathcal{V}),$$

这个核似乎并不容易确定。

## 6. Bogomolov-Gieseker 不等式

定理 ***6.1***。—在我们的主要设定中，有

$$(2rc_2(\mathcal{F}) - (r-1)c_1(\mathcal{F})^2)\cdot[\omega_X]^{n-2} \geqslant 0,$$

当且仅当 $\mathcal{F}|_{X_{\mathrm{reg}}}$ 局部自由且射影酉平坦时，等号成立。

证明。——我们先证明较容易的方向，并假设 $\mathcal{F}|_{X_{\mathrm{reg}}}$ 局部自由且射影酉平坦。这意味着存在 $\mathcal{F}|_{X_{\mathrm{reg}}}$ 上的光滑厄米度量 h，使其陈曲率张量满足 $\Theta_h(\mathcal{F}) = \alpha\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$，其中 $\alpha$ 是 $X^{\mathrm{reg}}$ 上的某个 (1, 1)- 微分形式。此时还不能完全确定 h 是 X \Z 上的轨形度量，也不确定它能否用于计算陈数。因此，我们考虑在 $X^{\mathrm{reg}}$上的诱导厄米向量丛 (End($\mathcal{F}$), End(h))，该向量丛是平坦的。现在，给定一个开子集 $U \subset X\setminus Z$，并设其具有一致化图 $p : V \to U$，则 $V_0$ 上的厄米平坦向量丛 $p^*(\mathrm{End}(\mathcal{F}), \mathrm{End}(h))|_{U_{\mathrm{reg}}}$，即 $= p^{-1}(U^{\mathrm{reg}})$，可延拓为 V 上的厄米平坦丛。事实上，$p^*(\mathrm{End}(\mathcal{F}), \mathrm{End}(h))|_{U_{\mathrm{reg}}}$ 由一个表示 $\pi_1(V_0) \to U(r^2,\mathbb{C})$ 给出，而自然态射 $\pi_1(V_0) \to \pi_1(V)$ 是同构，因为 $V\setminus V_0$ 的补集在光滑流形 V 中余维至少为二。这表明 End($\mathcal{F}$) 可以赋予 X \Z 上的厄米平坦轨形丛结构。特别地，我们得到

$$c_2^{\mathrm{orb}}(\mathrm{End}(\mathcal{F}|_{X\setminus Z})) = 0 \in H^4_{\mathrm{dR,orb}}(X\setminus Z).$$

现在，轨形丛 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 的轨形陈类满足 $2rc_2^{\mathrm{orb}}(\mathcal{F}|_{X\setminus Z}) - (r-1)c_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{F}|_{X\setminus Z})^2 = c_2^{\mathrm{orb}}(\mathrm{End}(\mathcal{F}|_{X\setminus Z}))$，例如可从 [**Bla96**，第 23] 页中的命题看出。这就完成了定理第一部分的证明。

反过来，设 $h_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{F}$ 由[CGN+23]给出的奇异厄米度量，满足（2.3）。令

$$\Delta(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}}) := 2rc_2(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}}) - (r-1)c_1(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}})^2) \quad \text{on} \quad X_{\mathrm{reg}} \setminus Z.$$

我们有

$$\Delta(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}}) \wedge \omega^{n-2} \geqslant 0 \quad \text{on} \quad X_{\mathrm{reg}} \setminus Z, \tag{6.1}$$

当且仅当 $(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$ 在 $X_{\mathrm{reg}} \setminus Z$ 上射影酉平坦时取等号，这归功于 (2.3)。更确切地说，由于 $h_{\mathcal{F}}$ 关于 $\omega$ 是 Hermite–Einstein，项 $\Delta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \wedge \omega^{n-2}$ 与 $\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) - \frac{1}{r}\mathrm{Tr}\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \cdot \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ 的平方范数相差一个维数常数，参见例如 Kob87 的证明，定理 4.4.7]。

我们在命题 5.8 中看到，可以将 $\omega_X^{n-2} = \widehat{\Omega} + d\gamma$ 写成 $\widehat{\Omega}, \gamma$ 光滑形式$\widehat{\ }$，且 $\Omega$ 的支集紧支撑，并远离 $Z$。不失一般性，可以假设 $\mathrm{Supp}(\widehat{\Omega}) \subset W'$，从而 $h_{\mathcal{F}}$ 在 $\mathrm{Supp}(\widehat{\Omega})$ 上轨形光滑。特别地，我们有

$$(2rc_2(\mathcal{F}) - (r-1)c_1(\mathcal{F})^2) \cdot [\omega_X]^{n-2} = \int_{X\setminus Z} \Delta(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}}) \wedge \widehat{\Omega} \tag{6.2}$$

现在，回顾（2.1）可知 $\omega = \omega_X + dd^c\varphi$。特别地，可以写成

$$\omega^{n-2} = \omega_X^{n-2} + d\tau, \quad \text{with } \tau := d^c\varphi \wedge \sum_{k=0}^{n-3} \omega^k \wedge \omega_X^{n-3-k}.$$

由（2.2）容易验证，$d^c\varphi$ 和 $\omega_X$ 关于 $\omega$ 有界，并且 $\tau$ 在 $Z$附近消失。特别地，若设 $\alpha := \gamma + \tau$，则有

$$\omega^{n-2} = \widehat{\Omega} + d\alpha \quad \text{with} \quad \alpha \in \mathcal{E}^{n-2,n-3}(X). \tag{6.3}$$

由定理 4.1，可得

$$\int_{X_{\mathrm{reg}}\setminus Z} \Delta(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}}) \wedge d\alpha = 0. \tag{6.4}$$

将（6.2）、（6.3）和（6.4）合并，得到因此，

$$(2rc_2(\mathcal{F}) - (r-1)c_1(\mathcal{F})^2) \cdot [\omega_X]^{n-2} = \int_{X_{\mathrm{reg}}\setminus Z} \Delta(\mathcal{F},h_{\mathcal{F}}) \wedge \omega^{n-2}$$

定理的第一部分由（6.1）得出。

在等号情形下，我们得到 $\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) = \frac{1}{r}\mathrm{Tr}\Theta(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \cdot \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ 在 $X_{\mathrm{reg}} \setminus Z$上成立。也就是说，$(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})|_{X_{\mathrm{reg}}\setminus Z}$ 是射影 Hermite 平坦的。现在，定理的第二部分可沿用 [GP25] 中推论 5.4 的证明思路得到。 □

## 7. 一致化的应用

本节将解释如何利用主要结果，推导出对（可能是）奇异复环面商空间的数值刻画。该结果最初由 [GKP16a在射影情形下证明，LT18] 随后推广到了 Kähler 情形[CGG22，CGG24] 但仍依赖于代数情形和 Beauville–Bogomolov 分解 [BGL22]。

定理 ***7.1***。— 设 $X$ 是一个维数为 $n$、具有对数终端奇点且 $c_1(X) = 0 \in H^2(X, \mathbb{R})$ 的紧 *Kähler*簇。以下条件等价：

*1.* 存在一个拟*étale* 覆盖 $T \to X$，其中 $T$ 是一个复环面。*2.* 存在一个 *Kähler* 类 $\alpha$ 使得 $c_2(X) \cdot \alpha^{n-2} = 0$。

与 [CGG24]，中一样，可以从上述定理推出其“对版本”，即刻画 $T/G$，其中 $G$ 是一个自同构有限群，可能在余维一处有不动点，参见 [CGG24，推论 7]。

证明概要。— 根据 [Gue16]，我们知道 $T_X$ 是 $\alpha$-多稳定的，因此可分解为具有平凡第一陈类的稳定部分 $T_X = \bigoplus \mathcal{F}_i$。由 BG 不等式可知，对所有指标 i，均有 $c_2(\mathcal{F}_i) \cdot \alpha^{n-2} = 0$。等号情形意味着 $\mathcal{F}_i|_{X_{\mathrm{reg}}}$ 是酉平坦的。根据 [GKP16a] 的解析版本（这得益于 [Fuj22], [LM22]，关于射影态射的相对极小模型纲领，另见 [DHP24]），存在一个有限拟étale 伽罗瓦覆盖 $p : Y \to X$，使得 $p^{[*]}\mathcal{F}_i$ 平坦，因而局部自由。由于这对所有指标 i 均成立，且 $p^{[*]}T_X = T_Y$，我们可知 $T_Y$ 局部自由。特别地，由于 klt 簇的 Zariski-Lipman 猜想的解决 [Dru14, GKKP11]，可得 Y 光滑且满足 $c_2(Y) \cdot p^*\alpha^{n-2} = 0$。借助 Yau 定理，Y 是一个环面商。 □

## 参考文献

[AG62] A. ANDREOTTI & H. GRAUERT – “复空间上同调的有限性定理”，Bull. Soc. Math. Fr. 90 (1962), p. 193–259（法语）。[BGL22] B. BAKKER, H. GUENANCIA & C. LEHN – “Kähler Calabi–Yau 簇的代数逼近与分解定理”，Invent. Math. 228 (2022), no. 3, p. 1255–1308（英语）。[Bla96] R. BLACHE – “具有孤立奇点的复射影轨形上凝聚层的陈类与 Hirzebruch–Riemann–Roch 定理”，Math. Z. 222 (1996), no. 1, p. 7–57。[CGG22] B. CLAUDON, P. GRAF & H. GUENANCIA –“复环面商的数值刻画”，Comment. Math. Helv. (2022), no. 4, p. pp. 769–799。[CGG24] ，“Miyaoka-Yau 不等式中的等号情形与非正曲率 klt 对的一致化”，C. R., Math., Acad. Sci. Paris 362 (2024), no. S1, p. 55–81（英语）。[CGN+23] J. CAO, P. GRAF, P. NAUMANN, M. P ˇAUN, T. PETERNELL & X. WU – “奇异情形下的 Hermite–Einstein 度量”，预印本 arXiv:2303.08773, 2023。[Dem90] J.-P. DE MAILLY – “q-凸空间高次数上的上同调”，Math. Z. 204 (1990), no. 2, p. 283–295（英语）。[DHP24] O. DAS, C. HACON & M. P ˇAUN – “Kähler 簇的四维极小模型纲领”，Adv. Math. 443 (2024), p. 68（英语），编号 109615。[Dru14] S. DRUEL – “对数典范空间上的 Zariski–Lipman 猜想”，Bull. Lond. Math. Soc. 46 (2014), no. 4, p. 827–835。[FO25] X. FU & W. OU – “紧 Kähler 簇上的轨形 Bogomolov-Gieseker 不等式”，预印本 arXiv:2511.03530, 2025。[Fuj22] O. FUJINO – “复解析空间之间射影态射的极小模型纲领”，预印本 arXiv:2201.11315, 2022。

[GK20] P. GRAF & T. KIRSCHNER – “三维复环面的有限商”，Ann. Inst. Fourier (格勒诺布尔) 70 (2020), no. 2, p. 881–914。[GKKP11] D. GREB, S. KEBEKUS, S. J. KOVÁCS & T. PETERNELL – “对数典范空间上的微分形式”，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2011), no. 114, p. 87–169。[GKP16a] D. GREB, S. KEBEKUS & T. PETERNELL – “Kawamata 对数终端空间的 étale 基本群、平坦层及阿贝尔簇的商”，Duke Math. J. 165 (2016), no. 10, p. 1965–2004。[GKP16b] , “平凡典范类的奇异空间”，载于《极小模型与极端射线》，京都，2011, ~~Adv~~. Stud. Pure Math., vol. 70，日本数学会，东京，2016，预印本 arXiv:1110.5250, p. 67–113。[GM88] M. GORESKY & R. MACPHERSON –《分层莫尔斯理论》，Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, vol. 14, Berlin 等：Springer-Verlag, 1988（英语）。[GP25] H. GUENANCIA & M. P ˇAUN – “对数终端 Kähler 三维簇的 Bogomolov-Gieseker 不等式”，Commun. Pure Appl. Math. 78 (2025), no. 11, p. 2206–2244（英语）。[GPSS24] B. GUO, D. H. PHONG, J. SONG & J. STURM – “Kähler 几何中的直径估计”，Commun. Pure Appl. Math. 77 (2024), no. 8, p. 3520–3556（英语）。[Gue16] H. GUENANCIA – “奇异簇切层的半稳定性”，Algebraic Geometry 3 (2016), no. 5, p. 508–542。[Hir75] H. HIRONAKA – “代数集的三角剖分”，Algebraic Geom., Proc. Symp. Pure Math. 29, 阿卡塔 1974, 165-185 (1975)., 1975。[Joy00] D. D. JOYCE –《具有特殊 holonomy 的紧流形》，Oxford Math. Monogr., 牛津：牛津大学出版社，2000（英语）。[KO25] J. KOLLÁR & W. OU – “复解析簇的轨形修改”，预印本 arXiv:2512.20708, 2025。[Kob87] S. KOBAYASHI –《复向量丛的微分几何》，Princeton, NJ：Princeton University Press；东京：岩波书店，1987（英语）。[Kol26] J. KOLLÁR – “致作者的私人通信”，2026年1月2日。[LM22] S. LYU & T. MURAYAMA – “等特征零下优秀代数空间与解析空间的相对极小模型纲领”，预印本 arXiv:2209.08732, 2022。[LT18] S. LU & B. TAJI – “阿贝尔簇有限商的一种刻画”，Int. Math. Res. Not. 2018 (2018), no. 1, p. 292–319（英语）。[MR84] V. B. MEHTA & A. RAMANATHAN – “稳定层的限制与基本群的表示”，Invent. Math. 77 (1984), p. 163–172（英语）。[Mum83] D. MUMFORD – “迈向曲线模空间的计数几何”，载于《算术与几何》，第 II 卷，Progr. Math., vol. 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 271–328。[Ohs84] T. OHSAWA – “非紧解析空间的完备性”，Publ. Res. Inst. Math. Sci. 20 (1984), p. 683–692（英语）。[Ou24] W. OU – “复解析簇的轨形修改”，预印本 arXiv:2401.07273, 2024。[Ou25] , “轨形陈类与 Bogomolov-Gieseker 不等式”，预印本 arXiv:2512.22273, 2025。[Ros68] H. ROSSI – “孤立奇点的皮卡簇”，Rice Univ. Stud. 54 (1968), no. 4, p. 63–73（英语）。[Sch24] J. SCHEFFLER – “轨形情形下的辅助 Monge-Ampère 方程——一个均值不等式”，预印本 arXiv:2404.02812, 2024。

[Yau78] S.-T. YAU – “论紧致凯勒流形的 Ricci 曲率与复蒙日-安培方程 I.”，*Commun.Pure Appl.Math.***31** (1978)，第 339–411 页。[ZZZ25] C. ZHANG，S. ZHANG & X. ZHANG – “极小凯勒 klt 空间的宫冈-丘不等式”，预印本 arXiv:2503.13365，2025 年。

---

*2026* 年 *1* 月 *14* 日HENRI GUENANCIA，波尔多大学、法国国家科学研究中心、波尔多国立综合理工学院、波尔多数学研究所，UMR 5251，F-33400 塔朗斯，法国电子邮箱：henri.guenancia@math.cnrs.fr MIHAI P˘AUN，拜罗伊特大学，数学研究所，数学教席 VIII，德国电子邮箱：mihai.paun@uni-bayreuth.de