arXiv:2601.08630v1 [math.OC] 13 Jan 2026

时间周期双稳态常微分方程的最优狄拉克控制：种群替代的应用

Gr´egoire Nadin* David Nahmani† Nicolas Vauchelet‡

2026年1月13日

摘要

本文研究了一个最优控制问题，其动力学由含双稳态时间周期非线性项的非线性微分方程支配。该问题与种群动力学相关，描述了在时变环境中用 B型个体种群替代 A型个体种群的策略，重点关注 B型个体在整个种群中所占比例的演化。控制项表示瞬时释放 B型个体。我们首先揭示该微分方程的一些有趣性质，随后确定实施释放的最优时间，以确保种群替代，同时将释放成本降至最低。研究结果表明，最优释放时间是一个函数的极小化点，该函数涉及环境的环境容纳量和动力学的阈值周期解；研究还描述了整个最优释放策略的收敛性。利用 $Wolbachia$感染个体对蚊子种群进行生物防治的应用，说明了理论结果的相关性。 $Wolbachia$ 是一种细菌，有助于防止某些病毒从蚊子传播给人类，因此，在蚊子种群中优化 $Wolbachia$ 的传播至关重要。

关键词： 双稳态微分方程，时间周期微分方程，最优控制，优化，种群替代， $Wolbachia$

数学学科分类： 34H05, 92D25, 49J15

1 引言与主要结果

1.1 生物学动机

本文的数学研究受到了一个与生态学相关的种群动力学问题的启发。假设我们想用同一物种的 B 型个体种群，替代由任意生物物种的 A 型个体组成的种群。这一操作称为 种群替代 ，可通过在初始的 A 型种群中释放 B 型个体来实现。为简单起见

*CNRS，Institut Denis Poisson UMR 7013，奥尔良大学，Collegium Sciences et Techniques，数学楼，沙特尔街，邮政信箱 6759，45067 奥尔良 cedex 2，法国（gregoire.nadin@univ-orleans.fr）

†LAGA UMR 7539，索邦巴黎北部大学，伽利略研究所，Jean-Baptiste Clément 大道 99 号，93430 Villetaneuse，法国（nahmani@math.univ-paris13.fr）

‡LAGA UMR 7539，索邦巴黎北大学，伽利略研究所，Jean-Baptiste Clément 大道 99 号，93430 Villetaneuse，法国 (vauchelet@math.univ-paris13.fr)

在研究中，我们只考虑时间上的变化，并假设整个问题是在某一给定地点观测的，因此本文忽略空间依赖性。

因此，我们的目标是从数学上优化这一策略，即确定何时以及如何释放 B 型个体，使替代最终得以实现，尤其是以最经济的方式实现，同时考虑到这一过程涉及与繁育和释放后勤相关的财务成本。

首先，我们将围绕这一一般优化问题展开，以获得适用范围尽可能广泛的数学结果。随后，在本文的后续部分，我们将详细介绍一个源自特定公共卫生问题的模型应用：一种针对蚊子种群的生物防治策略。

整个种群中 t 时刻 B 型个体所占的比例记为 $p(t)$，其遵循由非线性微分方程 $p' = f(t, p)$ 所支配的内禀动力学。我们假设该非线性项周期性地依赖于时间，以将栖息地的季节性变化纳入考量。此外，我们考虑相对于 p 而言具有双稳态类型的非线性项。这一假设在种群动力学建模中自然产生（见 [8], [9], [31]），既考虑了两个种群之间的竞争（见 [32]），又导致低密度下的负增长率，即$i.e.$，强阿利效应（见 [34]）。

关于双稳态——更一般地说，涉及空间依赖性的反应扩散偏微分方程的可控性，读者可参阅 [1] 和 [29]。

我们在这一动力学中加入如下形式的控制项： $u(t)w(t, p)$，其中 $u(t)$表示时间 t释放的 B型种群，而 w 是一个函数，它涵盖栖息地对时间的依赖性，并根据 p的取值，对该控制项在整个方程中的权重进行建模。

将内禀动力学与控制项结合起来，我们研究一个控制方程，其中 f 和 w 满足一些最基本的假设。本文旨在获取有关最优释放种群的信息，以便最小化某个损失函数。

已有多项数学研究探讨了此类系统的优化问题，尤其是描述蚊群动力学的模型。在这些研究中，环境的承载能力均被假定为恒定，不随时间变化。

文献 [6] 研究了在固定时间范围内最大化 B型个体比例的问题，同时要求释放个体的总量随时间累积后保持有界。文献 [22], [20]和 [16]从空间角度研究了同类问题。文章 [3] 研究如何最小化释放个体的总量，使微分方程在终止时刻达到临界平衡态，同时假定任一给定时刻释放的个体数量有界。在 [5], 中，作者借助流行病学模型，聚焦于疾病从蚊子向人类的传播，并旨在最小化感染人类的总数。最后，论文 [18] 考虑一个由两个方程组成的系统，研究如何最小化干预时间和释放个体总量，使系统进入良好的吸引域。

在 [6], 和后来的 [3], 中得出的主要数学结果是，最优释放函数呈 bang-bang 形式：在时间窗口开始时取其上界，持续足够长的时间以达到既定目标，然后取 0。

在本研究中，我们不仅建立了适用于其他周期性双稳态现象的一般性结果，还考虑了承载能力随时间变化的情形，这增加了问题的复杂性。

为简化工作，释放的分布将限定为缩放示性函数，并在渐近意义下限定为瞬时脉冲。我们将在本文后文指出，这种简化具有生物学意义。

1.2 无控制的常微分方程

在本小节中，我们研究常微分方程

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ p'(t) = f\big(t, p(t)\big), \tag{1}$$

其中 f： $\mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 满足以下假设：
(H1) f 在 $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$上是 $\mathcal{C}^2$ 的。**(H2)** f 关于变量 t 是 T-周期的。**(H3)** 对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$， $f(t,\ 0) = f(t,\ 1) = 0$。**(H4)** $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \partial_p f\big(t,\ 0\big)\mathrm{d}t < 0$ 且 $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \partial_p f\big(t,\ 1\big)\mathrm{d}t < 0$.

我们已经知道，常微分方程（1）存在平凡周期解，即 $p \equiv 0$ 和 $p \equiv 1$。此外，我们引入 f 在一个周期内的平均值，以得到一个自治函数：

$$\begin{array}{rccl} f_m & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t,p)\mathrm{d}t. \end{array}$$

通过变量代换 $s = t/T$，可得到 $f_m(p) = \displaystyle\int_0^1 \hat{f}(s,\ p)\mathrm{d}s$，其中 $\hat{}$ f表示关于第一变量的 1-周期函数，该函数由 $f(s,\ p) := f(Ts,\ p)$ 定义。注意，假设 (H4) 有一个等价的 $\hat{}$ 表述，记为 **(H4b)**，将 $\partial_p f$ 替换为 $\partial_p f$，并将积分区间由 0 到 T 改为 0 到 1。

现在定义特定解的吸引性。

定义。 T-周期解 p^T 称为吸引的，如果存在 $\eta > 0$，使得对于方程 (1) 的任意 p解，

$$\big|p(0) - p^T(0)\big| < \eta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} \big|p(t) - p^T(t)\big| = 0.$$

正数 η 刻画了 p^T 的吸引域。
B. Contri 在 [14]（命题 2.1、2.2 和 2.3）中提到了与函数f和 T-周期解 p^T相关的主特征值，其表达式为

$$\lambda = -\frac{1}{T}\int_0^T \partial_p f\big(t, p^T(t)\big)\mathrm{d}t.$$

此外，他还证明了以下有用结果：若 $\lambda > 0$（分别地，若 < 0），则 T-周期解 p^T 具有吸引性（分别地，不具有吸引性）。利用这些工具，根据（H4）可直接得出，解 $p \equiv 0$和 $p \equiv 1$ 都具有吸引性。

现在陈述以下存在性结果，该结果已在 [14]（引理 5.1）中得到证明。

命题 1. 至少存在一个 T-周期解 p^T： $\mathbb{R}_+ \to (0,\ 1)$，它是常微分方程(1)的解 .

An另一个重要结果是存在一个最大的和一个最小的 T-周期解 s.

命题2. 在取值于$(0,\ 1)$的常微分方程(1) 的 T-周期解中，存在一个最大解 p_M^T 和一个最小解 p_m^T。

下面的命题将有助于研究最优控制问题。它指出，任何超出周期解范围的小扰动，都会使动力学趋向0或1这两个吸引平衡点。

命题3。 设 $\bar{t} \in \mathbb{R}_+$。令 p 为满足条件 $p(\bar{t}) = p_0$的(1) 的解。此外，分别用 p_M^T 和 p_m^T 表示严格介于 *0* 和 *1* 之间的最大和最小 T-周期解。

(i) 若 $p_0 > p_M^T(\bar{t})$，则 $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 1$; *(ii)* 若 $p_0 < p_m^T(\bar{t})$，则 $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0$。

注 1。若 $p_m^T(\bar{t}) \leqslant p_0 \leqslant p_M^T(\bar{t})$，则对所有 $t \geqslant \bar{t}$，根据柯西-利普希茨定理，有 $p_m^T(t) \leqslant p(t) \leqslant p_M^T(t)$。

1.3 最优控制问题

我们拟研究的控制策略是种群替代，换言之，即用 B型个体组成的种群替代由A型个体组成的种群。在此，我们将从数学角度研究该策略的成功实施。

令 $p(t)$表示 B型个体所占的比例，令 $K(t)$表示时间 t时的环境容纳量。为了从数学上分析种群替代策略的成功实施，我们在此研究一个控制方程，其中通过释放按时间分布的 B型个体 $u(t)$来作用于种群。

控制方程。 我们暂且假设该控制方程满足以下形式，相关应用中的适用性将在后文详细说明:

$$\begin{cases} p'(t) = f\big(t, p(t)\big) + \dfrac{u(t)}{K(t)} g\big(p(t)\big) \quad \text{in } (0, +\infty), \\ p(0) = p_0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 f sa 满足假设（H1）至（H4）， $g:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ 满足以下假设 :

（H5） g 是利普希茨连续且递减的， $g(0) = 1$ 且 $g(1) = 0$,

且 $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 满足以下假设:

(H6) K 关于 $\mathbb{R}_+$ 连续且具有 T 周期。此外，$\min_{[0,T]} K > 0$。

事实上，由于 K 表示在现有资源条件下环境所能承载的最大种群数量，因此假设它取决于一年中的季节似乎是合理的。这就是为什么假设 K 是一个 T 周期函数。

由于控制 u 可以不连续，右端关于 t 不连续，因此初值问题 (2) 需要按照 Carath´eodory 的意义来理解。在这个意义下，如果函数 p 绝对连续，并且对所有 $t \geqslant 0$ 都满足下式，则称其为 (2) 的解,

$$p(t) = p_0 + \int_0^t \Big(f\big(s, p(s)\big) + \frac{u(s)}{K(s)} g\big(p(s)\big) \Big) \mathrm{d}s.$$

此外，所有考虑的控制都属于 $L^\infty(\mathbb{R}_+)$，因此 (2) 有唯一的解 p。

控制项的形式。给定总量为 C 的可用 B型个体，希望一次性将其全部释放。换言之，我们考虑在某个时间 $t_0 > 0$实施允许的最大狄拉克脉冲形式的释放。对狄拉克控制的数学研究使我们能够理解解的行为，也是研究更多样化控制项形式的第一步。

为了逼近狄拉克控制，我们先研究如下定义的控制：存在 $\varepsilon > 0$ 使得$\varepsilon \ll 1$，且对于所有 $t \geqslant 0$，控制项写作：

$$u^\varepsilon(t) = \frac{C}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[t_0-\varepsilon,t_0]}(t).$$

如 [5], [7] 和 [16], 中所述，这种控制项形式很有意义，因为相对于所考虑的时间窗口，释放通常持续时间很短。此外，本文后续将展示的数值模拟表明，将理论研究限于缩放示性函数，并渐近地考虑狄拉克脉冲，是一种自然的选择。

令 p^ε 为解 （按 Carath´eodory 的意义），它是与控制 u^ε相关联的控制方程的解 ：

$$\begin{cases} (p^\varepsilon)'(t) = f\big(t, p^\varepsilon(t)\big) + \dfrac{u^\varepsilon(t)}{K(t)} g\big(p^\varepsilon(t)\big) \quad \text{in } (0,+\infty), \\ p^\varepsilon(0) = p_0. \end{cases} \tag{3}$$

我们要研究的最优控制问题如下，记 $S := 1/\varepsilon$:

确定应实施释放的时间 t_0 以确保投入 C 最小，并 保证问题 (3) 中的种群替代。	$(\mathcal{P}_S)$

读者会注意到，要最小化的目标函数是释放个体的总量 C ，使得任何更大的数量都“保证种群替代”，即，也就是控制方程的解趋于 1；而关于类似控制策略的研究 [6] 和 [16], ，则将给定释放个体数量 C时，观测终止时刻的状态与 1 之间的差值作为目标函数。本文探讨的，是如何仅将状态引导至良好吸引域，让动力学自行确保其收敛至 1。这个问题与 [3]和 [18]中讨论的问题更为接近。

1.4 渐近最小化问题

在以下结果中，我们研究 ε 趋于 0 时的渐近控制方程。

命题 4。 在上述框架下，设 p^ε 是与控制 u^ε相关联的控制方程 (3) 的一个解。则$(p^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 逐点收敛，其极限记为 p，且是以下问题的唯一解

$$\begin{cases} p'(t) = f\big(t, p(t)\big) \quad \textit{for all } t \in (0,t_0) \cup (t_0,+\infty), \\ G\big(p(t_0^+)\big) - G\big(p(t_0^-)\big) = \dfrac{C}{K(t_0)}, \\ p(0) = p_0, \end{cases} \tag{4}$$

其中 G 是 $1/g$的原函数。

注 2: 该结果的证明已在 [24], 命题 2.1 中给出，并针对种群替换问题在 [5], 命题1 中进行了改编。我们在第 3.1 小节中采用了不同的方法：首先利用海利选择定理证明逐点收敛，然后通过重新缩放论证跳跃；而上述两篇论文中的方法则将该解与一个更简单方程的解进行比较，并指出它们在 t_0 处的跳跃相同。

关于渐近最小化问题的启发式讨论。 现在要针对渐近控制方程求解 ($\mathcal{P}_S$)，即。当 ε 趋于0时。假设系统从0开始，即。 $p_0 = 0$，这对应于种群替代前的一种自然情形，因为在时间 $t = 0$时，环境中只有 A型个体。因此，由于系统在0到t_0^- 之间就是无控制的系统，根据柯西-利普希茨定理的唯一性可得， $p \equiv 0$ 属于(0， t_0)。

选取在0处取值为0的原函数后，渐近问题(4)可写为:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \text{ in } (0, t_0), \\ G\big(p(t_0^+)\big) = \dfrac{C}{K(t_0)}, \\ p'(t) = f\big(t, p(t)\big) \quad \text{for all } t \in (t_0, +\infty). \end{cases} \tag{5}$$

根据命题3，问题(5)中 $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 1$ 等价于:

$$\begin{aligned} p(t_0^+) > p_M^T(t_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad G\big(p(t_0)\big) > G\big(p_M^T(t_0)\big) && \text{since } G \text{ is increasing, by (H5), therefore invertible,} \\ &\Longleftrightarrow \quad C > K(t_0) G\big(p_M^T(t_0)\big) && \text{since } K \text{ is positive,} \\ &\Longleftrightarrow \quad C > \underline{C}(t_0) && \text{setting } \underline{C}(t_0) := K(t_0) G\big(p_M^T(t_0)\big). \end{aligned}$$

因此，条件是在时间 t_0至少释放$C(t_0)$ B型个体。渐近方程的最优控制问题($\mathcal{P}_S$)似乎就是找出使 $C(t_0)$最小的时间 t_0 。 —

严格结果。记 $S := 1/\varepsilon$。我们旨在求解渐近控制方程的 ($\mathcal{P}_S$)，即，当S 趋于 $+\infty$ 时。

我们引入以下最小化问题:

$$\boxed{\inf_{t\in[0,T]} \underline{C}(t) \quad \text{with } \underline{C}(t) := K(t) G\big(p_M^T(t)\big).} \tag{$\mathcal{P}_{\text{eq}}$}$$

注意，函数 C 连续，因此最小化问题 ($\mathcal{P}_{\text{eq}}$) 在 $[0, T]$ 中有解。以下定理严格阐述了渐近最小化问题。

定理 1。对于 $S > 0$ 和 $t_0^S \geqslant 1/S$，对于给定的 $C > 0$，我们引入以下控制方程 :

$$\begin{cases} p_S'(t) = f\big(t, p_S(t)\big) + \dfrac{CS}{K(t)} \mathbb{1}_{[t_0^S - \frac{1}{S}, t_0^S]}(t)\, g\big(p_S(t)\big) \quad \textit{for almost every } t \in (0, +\infty), \\ p_S(0) = 0, \end{cases} \tag{$\mathcal{S}_{S,C,t_0^S}$}$$

其中 f 满足 *(H1)* 至 *(H4)*， g 满足 *(H5)*，且 K 满足 *(H6)*。
令 $\mathcal{I}_S := \Big\{ C > 0 : \ \exists t_0^S \geqslant 1/S \textit{ s. t. } p_S \text{ 解 } (\mathcal{S}_{S,\,C,\,t_0^S}) \text{ 满足} \lim_{t\to+\infty} p_S(t) = 1 \Big\}$.

首先，对于足够大的 S，集合 $\mathcal{I}_S$ 有下确界，记为 C_S^*。此外，
记 G 为 $1/g$ 的原函数，且在 0 处取值为零，并且

$$C^* := \inf_{t\in[0,T]}\Big[K(t)G\big(p_M^T(t)\big)\Big] = K(t_0^*)G\big(p_M^T(t_0^*)\big),$$

可得，当 S 趋于 $+\infty$ 时，C_S^* 收敛到 C^*。
最后，集合 $\mathcal{I}_S$ 的极小化子序列 $\big(t_0^{S*}\big)_S$ 经抽取子列后收敛到 $K(\cdot)G\big(p_M^T(\cdot)\big)$的一个全局极小化子。

注 3：如果函数 $K(\cdot)G\big(p_M^T(\cdot)\big)$ 具有唯一的全局极小化子，那么当 S 趋于 $+\infty$ 时，方程（$\mathcal{P}_S$）的解收敛到方程（$\mathcal{P}_{\mathrm{eq}}$）的唯一解。

注 4：无穷下确界序列和极小化子序列的收敛性可以用Γ-收敛性证明（见 [5], [6]）。但在这里，由于渐近最优控制问题实际上是实值区间上的一个最小化问题，我们采用初等且直接的方法对其进行证明（见第3.2小节）。

1.5 周期解的唯一性

本小节详细介绍三种情形，在这些情形下，严格介于 0 和 1 之间的 T-周期解是唯一的。在这些情形下，有 $p_M^T = p_m^T = p^T$。

1.5.1 小周期

首先，我们考虑小周期的情形。为了理解周期趋于 0 时的极限，我们引入 1-周期函数 f。以下结果见 [14]（定理1.3，第5.1小节）。

命题 5. 设 f 是满足假设 *(H1)*、*(H3)*、*(H4b)* 的 *1*-周期函数，并记 $f_m(p) = \int_0^1 f(s,p)\mathrm{d}s$，以下假设成立：

(H7) 存在唯一的 $\theta\in(0,\,1)$ 使得 $f_m(0) = f_m(\theta) = f_m(1) = 0$，且有 $f_m < 0$ 在 $(0,\,\theta)$ 内，而 $f_m > 0$ 在 $(\theta,\,1)$ 内，即 f_m 为双稳态。此外，有 $f_m'(\theta) > 0$。

令 f^T为由 $f^T(t,p) := f(\frac{t}{T},p)$定义的 T-周期函数。
那么，存在 $T_f > 0$（仅取决于 f），使得对于所有 $T\in(0,T_f)$，满足 $0 < p^T(\cdot) < 1$ 的常微分方程 $p' = f^T(t,p)$ 的 T-周期解 p^T是唯一且不具有吸引性的。

1.5.2 扰动非线性

其次，我们考虑非线性项受到扰动的情形。B. Contri 在 [14]（定理 1.5 和第 6.1 小节）中，基于 [2] 的数学框架，证明了以下命题。

命题 6. 设 f^0 为满足假设 *(H1)* 至 *(H4)* 的函数，并设 $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 为一族函数，其中每个函数都满足相同的假设；且存在一个有界函数 $\omega:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$，使得 $\omega(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0$，并且对于所有 $\varepsilon>0$，都有

$$\forall(t,p)\in[0,T]\times[0,1],\quad \big|\partial_p f^0(t,p) - \partial_p f^\varepsilon(t,p)\big| \leqslant \omega(\varepsilon). \tag{6}$$

假设常微分方程 $p' = f^0(t,p)$ 存在唯一一个严格介于 *0* 和 *1* 之间的周期解 p^T，且与 f^0和 p^T相关联的特征值为负，即 $\frac{1}{T}\int_0^T \partial_p f^0\big(t,p^T(t)\big)\mathrm{d}t > 0$。那么存在 $\varepsilon_0>0$，使得对于所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，受扰动的常微分方程 $p' = f^\varepsilon(t,p)$ 也存在唯一一个介于 *0* 和 *1* 之间的周期解，且该唯一的周期解不具有吸引性。

1.5.3 分离变量的非线性项

第三，我们聚焦于一种特定情形：在非线性项的表达式中，时间依赖部分与依赖于 p 的部分彼此分离。由此得到以下结果，我们将在此建立该结果，并在第 2.3 小节详细证明。

命题 7. 设 $f\colon \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 由 $f(t,p) := m(t)f(p)$ 定义，其中 m 和 f 满足以下假设：

(H8) $m\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{C}^1$, T-周期的，且 $\int_0^T m(t)\mathrm{d}t > 0$。

(H9) $\tilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{C}^2$。

(H10) $\tilde{f}'(0) < 0$ 和 $\tilde{f}'(1) < 0$。

(H11) 存在唯一的 $\theta \in (0,1)$ 使得 $f(0) = f(\theta) = f(1) = 0$，$f < 0$ 属于 $(0,\theta)$ 且 $f > 0$ 属于 $(\theta,1)$，也就是说，f 是双稳态的。最后，有 $f'(\theta) > 0$。

那么，常微分方程 (1) 有唯一的 T-周期解 p^T，它严格介于 *0* 和 *1* 之间，并恒等于 θ。此外，该解并不具有吸引性。

注 5。读者可以注意到，这样一个函数 f 满足假设 (H1) 至 (H4) 和 (H7)。

1.6 非线性项具有分离变量形式时的最优问题

在本小节中，我们置身于满足命题 7 的分离变量的非线性框架下。该简化框架刻画了时间和种群比例 p 对非线性项 f 的影响彼此独立的情形。根据命题 7，我们已经知道，存在唯一一个严格介于 0 和 1 之间的周期性解，并且该解恒等于 θ。这一有利框架使我们能够将最优控制问题（$\mathcal{P}_{\mathrm{eq}}$）改写如下：

$$\inf_{t\in[0,T]} \Big[K(t)G(\bar{\theta})\Big],$$

其中 G 是满足在 0 处为零的 $1/g$ 的原函数。

首先考虑在时间 t_0 进行一次释放。由于 G 在 $(0,1)$ 上为正，该优化问题等价于最小化 K。记 $C_{\min} := G(\theta)\min_{t\in[0,T]} K(t)$。释放全部 B 型个体的最佳时间 t_0^* 是环境容纳量 K 达到最小值的时间，并且 $C_{\min} = C(t_0^*)$，其中 t_0^* 是 K 在 $[0,T]$ 中的一个极小化点。

下面的命题给出了关于实施两次释放的结果。通过改写命题 4 的证明，可以证明，在两次释放的情况下，控制方程的一个解 p^ε

$$\begin{cases} (p^\varepsilon)'(t) = f\big(t,p^\varepsilon(t)\big) + \dfrac{u_0^\varepsilon(t)+u_1^\varepsilon(t)}{K(t)} g\big(p^\varepsilon(t)\big) \quad \text{for almost every } t\in(0,+\infty), \\ p^\varepsilon(0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

满足 $u_0^\varepsilon(t) = \frac{C_0}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[t_0-\varepsilon,t_0]}(t)$ 且 $u_1^\varepsilon(t) = \frac{C_1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[t_1-\varepsilon,t_1]}(t)$，逐点收敛到以下方程的解 p

$$\begin{cases} p'(t) = f\big(t,p(t)\big) \quad \text{for all } t \in (0,t_0)\cup(t_0,t_1)\cup(t_1,+\infty), \\ G\big(p(t_0^+)\big) - G\big(p(t_0^-)\big) = \dfrac{C_0}{K(t_0)}, \\ G\big(p(t_1^+)\big) - G\big(p(t_1^-)\big) = \dfrac{C_1}{K(t_1)}, \\ p(0) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

其中 G 是 $1/g$ 的原函数。

~命题 8. 假设非线性项可写为 $f(t,p) = m(t)f(p)$，且满足命题 7。此外，假设对所有 $t > 0$，都有 $m(t) > 0$。记 t_0^* 为 K 在 $[0,T]$ 中的一个极小化点，记 G 为 $1/g^-$ 在 0 处取值为零的原函数，并记 $C_{\min} := G(\theta)K(t_0^*)$。记 t_0, t_1 为两个固定时间，满足 $t_1 > t_0$，并考虑系统 (8) 的解 p，其中 $C_0, C_1 > 0$ 满足 $C_0 + C_1 = C_{\min}$。则有 $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0$。

备注 6. 换句话说，在时间 t_0，我们进行首次瞬时释放，释放 C_0 个体；在时间t_1，我们进行第二次瞬时释放，释放 C_1 个体。这种两次释放的策略无法进入 1 的吸引域，因此效率低于在时间 t_0^*. 单次释放 $C_{\min}$ 个体。我们可以思考，这一有趣的实际结果在不采用分离变量假设的一般框架下是否仍然成立。这个开放问题或许可以在未来的工作中得到解答。

1.7 文章结构

无控制微分方程的主要结果，例如命题 2、3 和 7，将在第2节中建立。关于最优控制方程的主要结果，例如命题 4 和 8 以及定理 1，将在第 3[1] 节中证明。第4节将运用这些数学结果，探讨一种针对蚊子种群的具体控制策略；该策略已在一些地区成功实施：基于细菌 沃尔巴克氏体 的种群替代。

2 无控制微分方程

本节研究满足假设 (H1) 至 (H4) 的 f 下的常微分方程 (1)。

首先，假设 (H1) 和 (H2) 表明 $\partial_p f$ 连续，且关于 t 以 T 为周期，因此在 $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ 上有界；由此，f 关于 p 利普希茨连续，这使我们可以使用柯西-利普希茨定理。特别地，该定理表明：已知 $p \equiv 0$ 和 $p \equiv 1$ 是方程 (1) 的解，若 p 表示方程 (1) 的一个解，且 $p(0) \in [0,1]$，则对所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$p(t) \in [0,1]$。

2.1 极大周期解和极小周期解，命题2的证明

定义。对于任意 $p_0 \in [0,1]$，令 $p(\,\cdot\,; p_0)$ 为柯西问题的解

$$\begin{cases} p'(t) = f\big(t,p(t)\big) \quad \text{for all } t \geqslant 0, \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

[1]命题 1、5 和 6 已在 [14] 中得到证明。

庞加莱 r 映射 与 f 相关联，是由 $P\colon [0,1]\to[0,1]$ 定义的函数，满足 $P(p_0):=p(T;\,p_0)$.

命题2的证明。令 P 为与 f 相关的庞加莱映射，并令 $\Phi:=P-\mathrm{Id}$；记 $Z:=\{x\in(0,\,1)\colon\ \Phi(x)\ =\ 0\}$。[14] 中的命题2.4指出，对于 P 的一个不动点 α，有 $P'(\alpha)\ =\ e^{-\lambda T}$，其中 $\lambda=-\frac{1}{T}\int_0^T\partial_p f\big(t,\ p(t;\ \alpha)\big)\,\mathrm{d}t$。

由于 $\Phi(0)\ =\Phi(1)=0,\ \ \Phi'(0)<0,\ \ \Phi'(1)<0$，根据 [14] (命题2.2、2.3和2.4)，且 Φ' 在 $[0,1],$ 上连续，因此存在 b 和 c，它们属于 $(0,\ 1)$，使得 $\Phi<0$ 属于 $(0,\ b)$，且 $\Phi>0$ 属于 $(c,\ 1)$。因此，可以将集合 Z 改写为 $Z=\{x\in[b,c]\colon\ \Phi(x)\ =0\}$；又由于 $\Phi\colon[b,c]\to\mathbb{R}$ 连续，Z 是 $[b,c]$ 的闭子集，因而也是 $\mathbb{R}$ 的闭子集。此外，作为一个非空且有上界的集合，Z 存在上确界，该上确界是最大值，记为 x_M。

显然，Φ 的零点就是 T-周期解的初值。因此，从 x_M 出发的解 p_M^T 是 T-周期的；根据柯西-利普希茨定理中的唯一性，它始终严格介于0和1之间，并且始终大于任何其他 T-周期解，$i.e.$ 即它是最大的。

同理，存在 $x_m\in[b,c]$，使得从 x_m 出发的解 p_m^T 在严格介于0和1之间的 T-周期解中是最小的。

□

2.2 平衡态的吸引域，命题3的证明

命题3的证明。记 P 为在时间 $\bar{t}$ 平移后的Poincar´e映射，$i.e.$:

$$\begin{array}{rccc}\overline{P} & : & [0,1] & \to & [0,1]\\ & & p_0 & \mapsto & p(\bar{t}+T;p_0),\end{array}$$

其中，$p(t;\,p_0)$ 表示对所有 $t\in[\bar{t},\bar{t}+T]$，在 t 处对满足条件 $p(\bar{t})\ =\ p_0$ 的解 p 进行求值。第2节中关于这个平移后的Poincar´e映射所建立的性质仍然成立。记 $\Phi:=P-\mathrm{Id}$，根据命题2.2、2.3和2.4，有 $\Phi(0)\ =\Phi(1)=0$、$\Phi'(0)\ <0$ 以及 $\Phi'(1)\ <0$。

由于 p_M^T 和 p_m^T 分别是取值于 $(0,1)$ 内的最大和最小 T-周期解，因此，$p_M^T(\bar{t})$ 和 $p_m^T(\bar{t})$ 分别是 Φ 在 $(0,1)$ 内的最大和最小零点。由此，根据 Φ 在 $[0,1]$ 上的连续性，可得 $\Phi<0\,\mathrm{in}\big(0,p_m^T(\bar{t})\big)\,\mathrm{and}\,\Phi>0\,\mathrm{in}\ \ \big(p_M^T(\bar{t})\ 1\big)$。

(i) 假设 $p_0>p_M^T(\bar{t})$ 成立。可得 $p(\bar{t}+T)\ -p(\bar{t})=\ P(p_0)\ -p_0\ =\ \Phi(p_0)\ >\ 0$，从而得到 $p(\bar{t}+T)\ >p(\bar{t})$。

函数 $p(\ \cdot+T)$ 满足与 p 相同的方程。我们可以将相同的不等式应用于函数 $p(\ \cdot+T)$，并类似地得到，由于 $p(\bar{t}+T)\ >p(\bar{t})\ =p_0>p_M^T(\bar{t})$,

$$p(\bar{t}+2T)>p(\bar{t}+T).$$

对于所有 $n\in\mathbb{N}^*$，我们都可以通过数学归纳法证明 $p(\bar{t}+nT)\ >p\big(\bar{t}+(n-1)T\big)$。序列 $\Big(p\big(\bar{t}+nT\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ 是递增且有界的，因此它收敛于某个极限 p^∞。此外，对于所有 $n\in\mathbb{N},\ P\big(p(\bar{t}+nT)\big)=p\big(\bar{t}+(n+1)T\big)$，已知 p^∞ 是不动点 P。根据柯西-利普希茨定理中的唯一性，解 p 不能穿过 p_M^T，因此，$p^\infty=1$。

可以理解为，$\bar{t}$ 可以任意选取，且结论 $p(\bar{t}+nT)\ \xrightarrow[n\to\infty]{}1$ 仍然成立。

现在，令 $\varepsilon>0$ 和 $m\in\mathbb{N}^*$ 满足 $m\varepsilon>T$，并令 $l=T/m\in\mathbb{R}_+^*$。对于所有 $i\in\{0,...,m\}$，设 $t_i=il$。由于 $p(t_i+nT)$ 趋于 1，因此存在 $N_i\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $n\geqslant N_i,\ \ p(t_i+nT)\ >1-\varepsilon$。

令 $N=$为 $\max_{i\in\{0,\dots,m\}} N_i$的最大值，并令 $t>NT$。设 $n=\lfloor \frac{t}{T} \rfloor$，可得 $n\geqslant N$和 $t-nT\in[0,T)$。因此，对于$i=\lfloor \frac{t-nT}{l} \rfloor$，有 $t-nT\in[t_i,t_{i+1})$，即。$e.\ 0\leqslant t-(t_i+nT)<l<\varepsilon$。

最后，由于已知 p'有界，根据中值定理，对于所有 $t>NT$，

$$\left|p(t)-p(t_i+nT)\right|<\|p'\|_\infty\,\varepsilon,$$

这意味着

$$1>p(t)>p(t_i+nT)-\|p'\|_\infty\,\varepsilon>1-(\|p'\|_\infty+1)\varepsilon.$$

因此 $\lim_{t\to+\infty} p(t)=1$。

(ii) 现在假设 $p_0<p_m^T(\bar{t})$。可得 $p(\bar{t}+T)-p(\bar{t})=P(p_0)-p_0=\Phi(p_0)<0$，由此得到$p(\bar{t}+T)<p(\bar{t})$。同样，对于所有 $n\in\mathbb{N}^*$，我们可以通过数学归纳法证明 $p(\bar{t}+nT)<p\big(\bar{t}+(n-1)T\big)$。序列 $\Big(p\big(\bar{t}+nT\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$单调递减且有界，因此收敛到某个极限 p^∞，它是 P的不动点。

根据柯西-利普希茨定理的唯一性，解 p 无法与 p_m^T相交，因此 $p^\infty=0$。同样的论证可得 $\lim_{t\to+\infty} p(t)=0$。

□

2.3 分离变量的非线性项的周期解，命题 7 的证明

~命题 7 的证明。令 $f\colon \mathbb{R}_+\times[0,1]\to\mathbb{R}$由 $f(t,p):=m(t)f(p)$定义，其中 m和 f满足假设 (H8) 至 (H11)。

首先注意，恒等于 θ 的解是 T-周期的，且严格介于 0 和 1 之间。反设存在另一个严格介于 0 和 1 之间的 T-周期解 p^T。根据柯西-利普希茨定理的唯一性，对所有 $t\in\mathbb{R}_+$, $p^T(t)\notin\{0,\bar{\theta},1\}$，从而得到 $\tilde{f}\left(p^T(t)\right)\neq 0$。

对于所有 $t\in\mathbb{R}_+$，$(p^T)'(t)\,\tilde{f}\left(p^T(t)\right)=m(t)$ 均成立，因此，在 0 和 T 之间积分，记 F为 $1/\tilde{f}$，$0=F\big(p^T(T)\big)-F\big(p^T(0)\big)=\int_0^T m(t)\mathrm{d}t>0$ 的原函数，可得矛盾。

这一常数解的非吸引性可以从以下事实推断：

$$\int_0^T \partial_p f(t,\bar{\theta})\mathrm{d}t=\tilde{f}'(\bar{\theta})\int_0^T m(t)\mathrm{d}t>0$$

根据 (H8) 和 (H11)，利用 [14], 命题 2.3，至此命题 7 的证明完成。 □

3 最优控制问题

本节旨在寻找最优控制问题的一个渐近简化版本，该版本等价于最小化一个可测函数，并对这一收敛性作出恰当论证。

3.1 渐近控制方程，命题4的证明

在本小节中，我们研究当 ε趋于 0 时的渐近控制方程。

首先，我们简要评述一下这个命题。$1/g$ 的正性确保给定 $p(t_0^-)$ 时，$p(t_0^+)$ 的定义是明确的。事实上，$G\big(p(t_0^+)\big) - G\big(p(t_0^-)\big) = \int_{(t_0^+)\,p\,(t_0^-)}^{p} \frac{1}{g}$，因此选择哪个原函数并无影响。

命题 4 的证明。我们先证明逐点收敛。

设置 $t_f \in (t_0, +\infty)$。首先，记 $(r_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ 为 $[0, t_0-\varepsilon]$ 的一个剖分。

令 $i \in \{1,\dots,n\}$；对于所有 $t \in [r_{i-1}, r_i]$，$\big|(p^\varepsilon)'(t)\big| = \big|f\big(t, p^\varepsilon(t)\big)\big| \leqslant \|f\|_\infty$。因此 $\big|p^\varepsilon(r_i) - p^\varepsilon(r_{i-1})\big| \leqslant \|f\|_\infty |r_i - r_{i-1}|$，于是 $\sum_{i=1}^{n} \big|p^\varepsilon(r_i) - p^\varepsilon(r_{i-1})\big| \leqslant \|f\|_\infty t_f$。这个上界不依赖于剖分，也不依赖于 ε。

记 $(r_i')_{i\in\{0,\dots,n\}}$ 为 $[t_0, t_f]$ 的一个剖分，同样的计算会得出相同的结论。

最后，记 $(s_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ 为区间 $[t_0-\varepsilon, t_0]$ 的一个剖分。

令 $i \in \{1,\dots,n\}$。对所有 $t \in [s_{i-1}, s_i]$，$\big|(p^\varepsilon)'(t)\big| = \Big|f\big(t, p^\varepsilon(t)\big) + \frac{C}{\varepsilon K(t)} g\big(p^\varepsilon(t)\big)\Big| \leqslant \|f\|_\infty + \frac{C}{\varepsilon \min_{[0,T]} K}$.

因此，$\big|p^\varepsilon(s_i) - p^\varepsilon(s_{i-1})\big| \leqslant \Big(\|f\|_\infty + \frac{C}{\varepsilon \min_{[0,T]} K}\Big)|s_i - s_{i-1}|$。

因此 $\sum_{i=1}^{n} \big|p^\varepsilon(s_i) - p^\varepsilon(s_{i-1})\big| \leqslant \Big(\|f\|_\infty + \frac{C}{\varepsilon \min_{[0,T]} K}\Big)\varepsilon = \|f\|_\infty \varepsilon + \frac{C}{\min_{[0,T]} K}$，其上界与剖分及 ε 无关。

综合以上结果，序列 $(p^\varepsilon)_\varepsilon$ 在 $[0, t_f]$ 中的总变差一致有界。此外，该序列也一致有界。因此，根据海利选择定理（见 [23], 第 VIII.4 节；另见 [11]），我们可以得出结论：在 $[0, t_f]$ 中，序列 $(p^\varepsilon)_\varepsilon$ 存在一个逐点收敛子序列。由于对每个区间 $[0, t_f]$，且 $t_f \in (t_0, +\infty)$，这一结论都成立，因此通过对角线论证可知，在 $[0, +\infty)$ 中，序列 $(p^\varepsilon)_\varepsilon$ 存在一个逐点收敛子序列，其极限记为 p。现在我们分别考察 t_0 之外和 t_0 处这两种情况，以获取关于 p 的信息。

在……之外 t_0。 </style}对于，由 (3) 可知，在 $(0, t_0-\varepsilon) \cup (t_0, +\infty)$ 上满足方程 $(p^\varepsilon)' = f(t, p^\varepsilon)$，并满足初始条件 $p^\varepsilon(0) = p_0$。因此令 ε 趋于 0，p 在弱意义下满足初始条件 $p(0) = p_0$ 以及方程 $p' = f(t,p)$ in $(0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$，其中 p' 表示 p 的弱导数。下面证明这一结论在经典意义下仍然成立。

令 $t_f \in (t_0, +\infty)$。记 $I := (0, t_0)$（分别为 (t_0, t_f)），可得 $\int_I |p'| = \int_I \big|f(t,p)\big| < +\infty$，因为 f 有界。

因此 $p \in W^{1,1}(0, t_0)$（分别为 $W^{1,1}(t_0, t_f)$），即. p 在 $(0, t_0) \cup (t_0, t_f)$ 上连续（严格来说，它可被视为等价类的连续代表）。因此，函数 $t \mapsto f\big(t, p(t)\big)$ 在 $[0, t_0) \cup (t_0, t_f]$ 上连续，且等于 p'。这意味着 p' 在 $[0, t_0) \cup (t_0, t_f]$ 上连续。由于该结论对任意 $t_f \in (t_0, +\infty)$ 都成立，我们可以推断 p' 在 $[0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$ 上连续，因此方程 $p' = f(t,p)$ 在经典意义下成立。

在时间 t_0。 作变量代换 $t = t_0 + (\tau - 1)\varepsilon$。我们关注区间 $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$，即. $\tau \in [0, 1]$。对所有 $\tau \in [0,1]$，$\tilde{p^\varepsilon}(\tau)$ 定义为：$= p^\varepsilon(t) = p^\varepsilon\big(t_0 + (\tau-1)\varepsilon\big)$。

对于所有 $\tau \in [0,1]$，可得

$$(\tilde{p^\varepsilon})'(\tau) = \varepsilon f\big(t_0 + (\tau-1)\varepsilon, \tilde{p^\varepsilon}(\tau)\big) + \frac{C}{K\big(t_0 + (\tau-1)\varepsilon\big)} \mathbb{1}_{[t_0-\varepsilon, t_0]}\big(t_0 + (\tau-1)\varepsilon\big) g\big(\tilde{p^\varepsilon}(\tau)\big).$$

由于示性函数恒等于 1，在 $[0,1]$, 上可得

$$(\tilde{p^\varepsilon})' = \varepsilon f\big(t_0 + (\tau-1)\varepsilon, \tilde{p^\varepsilon}\big) + \frac{C}{K\big(t_0+(\tau-1)\varepsilon\big)} g\big(\tilde{p^\varepsilon}\big).$$

可以注意到，由于 f 和 g 有界，且 K 有一个正的下界，因此 $\big((\tilde{p^\varepsilon})'\big)_\varepsilon$ 有界。此外，$\big(\tilde{p^\varepsilon}\big)_\varepsilon$ 在 $\mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$ 中有界，因此 $\big(\tilde{p^\varepsilon}\big)_\varepsilon$ 在 $\mathcal{C}^1\big([0,1]\big)$ 中有界。根据 Arzel`a-Ascoli 定理可知，$\big(\tilde{p^\varepsilon}\big)_{\varepsilon>0}$ 存在一个子序列一致收敛到某个 $\tilde{p}$。上述结论对 $\big(\tilde{p^\varepsilon}\big)_{\varepsilon>0}$ 的任意子序列仍然成立。

还可得到，对所有 $\tau \in [0,1]$,

$$\tilde{p^\varepsilon}(\tau) = \tilde{p^\varepsilon}(0) + \varepsilon \int_0^\tau f\big(t_0+(s-1)\varepsilon, \tilde{p^\varepsilon}(s)\big)\mathrm{d}s + C\int_0^\tau \frac{g\big(\tilde{p^\varepsilon}(s)\big)}{K\big(t_0+(s-1)\varepsilon\big)}\mathrm{d}s.$$

f 的有界性以及对 g 应用中值定理，使得我们可以在 $\varepsilon \to 0$ 时（经抽取子序列后）在该方程中取极限，并对所有 $\tau \in [0,1]$ 写出：

$$\tilde{p}(\tau) = \tilde{p}(0) + \frac{C}{K(t_0)}\int_0^\tau g\big(\tilde{p}(s)\big)\mathrm{d}s,$$

$$i.e.\quad \tilde{p}'(\tau) = \frac{C}{K(t_0)} g\big(\tilde{p}(\tau)\big).$$

记 G 为 $1/g$ 的一个原函数，可得，在 $[0,1], (G\circ\tilde{p})' = \frac{C}{K}(t_0)$ 中。

在 0 和 1 之间积分，得到：

$$G\big(\tilde{p}(1)\big) - G\big(\tilde{p}(0)\big) = \frac{C}{K(t_0)}. \tag{9}$$

一方面，由逐点收敛，经过抽取子列可得 $\tilde{p^\varepsilon}(1) = p^\varepsilon(t_0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} p(t_0^+)$，且经过抽取子列可得 $\tilde{p^\varepsilon}(1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \tilde{p}(1)$，因此通过两次抽取子列可得 $\tilde{p}(1) = p(t_0^+)$。

另一方面，我们来证明 $\tilde{p}(0) = p(t_0^-)$。

已知序列 $\big(\mathbb{1}_{[0,t_0-\varepsilon]}\big)_\varepsilon$ 几乎处处逐点收敛于 $\mathbb{1}_{[0,t_0]}$，并且由于 f 关于第二个变量连续，也可得 $f(t, p^\varepsilon)$ 逐点收敛于 $f(t, p)$。因此，由控制收敛，经过抽取子列可得：

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} f\big(t, p^\varepsilon(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \mathbb{1}_{[0,t_0-\varepsilon]}(t) f\big(t, p^\varepsilon(t)\big)\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^{t_0} f\big(t, p(t)\big)\mathrm{d}t.$$

此外，根据（2），在 $[0, t_0-\varepsilon]$ 中，有（p^ε）$' = f$（t, p^ε），因此，经过抽取 on,

$$\tilde{p^\varepsilon}(0) = p^\varepsilon(t_0-\varepsilon) = p^\varepsilon(0) + \int_0^{t_0-\varepsilon} f\big(t, p^\varepsilon(t)\big)\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} p(0) + \int_0^{t_0} f\big(t, p(t)\big)\mathrm{d}t.$$

由双重抽取过程中极限的唯一性可得 $\tilde{p}(0) = p(0) + \int_0^{t_0} f\big(t, p(t)\big)\mathrm{d}t$。由于在 $[0, t_0)$ 中，有 $p' = f(t, p)$，因此得到 $\tilde{p}(0) = p(t_0^-)$。现在可以将 (9) 改写如下，其中 $G\circ p$ 的取值发生跳跃：

$$G\big(p(t_0^+)\big) - G\big(p(t_0^-)\big) = \frac{C}{K(t_0)}.$$

根据上述两个结论，我们推知 p 是唯一的，因此 $(p^\varepsilon)_\varepsilon$ 的所有逐点收敛子序列都具有相同的极限。对于所有 $t \in (0,\ t_f)$，序列 $\left(p^\varepsilon(t)\right)_\varepsilon$ 只有一个聚点，且集合 $\{p^\varepsilon(t)\ \varepsilon > 0\}$ 的闭包是紧的；因此序列 $\left((p^\varepsilon(t)\right)_\varepsilon$ 收敛到 $p(t)$，也就是说， p^ε 逐点收敛到 p。

□

3.2 最优控制问题的收敛性，定理 1 的证明

定理 *1* 的证明。由命题3可知，可以改写为

$$\mathcal{I}_S = \left\{C > 0 : \exists t_0^S \geqslant 1/S \ \text{ s. t. } p_S \text{ solution of } (\mathcal{S}_{S,C,t_0^S}) \text{ satisfies } p_S(t_0^S) > p_M^T(t_0^S)\right\}.$$

Exis下确界的存在性。这里证明 $\mathcal{I}_S$ 是一个非空集合。令 $K = \sup K$。我们选择 $C > g\Big(\max_{[0,T]} p_M^T\Big)$。下面证明 C 属于 $\mathcal{I}_S$。设 $t_0^S \geqslant \frac{1}{S}$。我们要证明，一个较简单问题的解（它为初始问题的解提供下界）在时间 t_0^S 处大于 p_M^T。

有 $p_M^T(t_0^S) \leqslant \max_{[0,T]} p_M^T < 1$。事实上， p_M^T 不会达到 1，否则根据柯西-利普希茨定理的唯一性， p_M^T 将恒等于 1。此外，函数 g 单调递减，因此对所有 S，都有 $0 < g\Big(\max_{[0,T]} p_M^T\Big) \leqslant \min_{[0,p_M^T(t_0^S)]} g$。因此，有 $C > K \min_{[0,p_M^T(t_0^S)]} g$ (t_0^S)。

记 $f(p) := \inf_{t\in[0,T]} f(t,\ p) < 0$。取足够大的 S，使得 $C > K \min_{[0,p_M^T(t_0^S)]} g \left[p_M^T(t_0^S) - \min_S^{[0,1]} f \right]$。有 $p_M^T(t_0^S) \min_{[0,1]} f + \frac{CS}{K} \min_{[0,p_M^T(t_0^S)]} g < \frac{1}{S}$），这意味着：现在

记 $\tilde{G}$ 为 $\frac{1}{f + \frac{CSg}{K}}$ 在 0 处取值为零的原函数，则有 $\tilde{G}\left(p_M^T(t_0^S)\right) < \frac{1}{S}$。

$$\frac{1}{S} > \frac{p_M^T(t_0^S)}{\frac{CS \min_{[0,p_M^T(t_0^S)]} g}{\min_{[0,1]} \underline{f} + \overline{K}}} = \int_0^{p_M^T(t_0^S)} \frac{\mathrm{d}s}{\frac{CS \min_{[0,p_M^T(t_0^S)]} g}{\min_{[0,1]} \underline{f} + \overline{K}}} \geqslant \int_0^{p_M^T(t_0^S)} \frac{\mathrm{d}s}{\underline{f}(s) + \frac{CSg(s)}{\overline{K}}}.$$

Let $\tilde{p}_S$ 为柯西问题的解

$$\begin{cases} \tilde{p}_S' = \underline{f}(\tilde{p}_S) + \dfrac{CS}{\overline{K}} \mathbb{1}_{[t_0^S - \frac{1}{S}, t_0^S]}\, g(\tilde{p}_S) \quad \text{a. e. in } (0, +\infty), \\ \tilde{p}_S(0) = 0. \end{cases} \qquad (\tilde{\mathcal{S}}_{S,C,t_0^S})$$

注意到， $\tilde{p}_S$ 存在且唯一，因为函数 $(t,\ p) \mapsto f(p) + \frac{CS}{K} \mathbb{1}_{[t_0^S - \frac{1}{S}, t_0^S]}(t)\ g(p)$ 关于变量 p 利普希茨连续，且关于变量 t 局部可积。

在区间 $[t_0^S - \frac{1}{S}, t_0^S]$ 中，($\tilde{\mathcal{S}}_{S,\ C,\ t_0^S}$) 得出 $\big(\tilde{G} \circ \tilde{p}_S\big)' = 1$。在 $t_0^S - \frac{1}{S}$和t_0^S 之间对该等式积分，由于 $\tilde{G}$ 单调递增且在 0 处为零，可得

$$\tilde{G}\Big(\tilde{p}_S(t_0^S)\Big) = \tilde{G}\Big(\tilde{p}_S(t_0^S)\Big) - \tilde{G}\bigg(\tilde{p}_S\Big(t_0^S - \frac{1}{S}\Big)\bigg) = \frac{1}{S} > \tilde{G}\Big(p_M^T(t_0^S)\Big).$$

最后，由于 $\tilde{G}$ 可逆且单调递增，因此当 S 足够大时，有 $\tilde{p}_S(t_0^S) > p_M^T(t_0^S)$。由于 p_S 是($\mathcal{S}_{S,C,t_0^S}$)的解，而 $\tilde{p}_S$ 是($\mathcal{S}_{S,C,t_0^S}$)的解，且两个问题具有相同的初值，因此对所有 $t > 0$, p_S，都有(t) $\geqslant \tilde{p}_S(t)$，从而 $p_S(t_0^S) > p_M^T(t_0^S)$。 $\mathcal{I}_S$ 是一个非空集合，因此它有下确界。

下确界序列收敛到某个 C_∞。假设 S 足够大，我们已经证明，若 $C > g\Big(K \max_{[0,T]} p_M^T\Big)$，则 C属于 $\mathcal{I}_S$。这意味着 $C_S^* \leqslant g\Big(K \max_{[0,T]} p_M^T\Big)$。

序列 $(C_S^*)_S$ 有界，因此在 S 趋于 $+\infty$时，经过抽取子序列后它收敛。记 C_∞ 为此极限。我们将用一个双重不等式证明 $C_\infty = C^*$ 。

证明 **当 $C_\infty \leqslant C^*$。**令 $\delta > 0$，并令 p_S^δ 为以下控制方程的解：

$$\begin{cases} (p_S^\delta)'(t) = f\big(t, p_S^\delta(t)\big) + \dfrac{(C^* + \delta)S}{K(t)} \mathbb{1}_{[t_0^* - \frac{1}{S}, t_0^*]}(t)\ g\big(p_S^\delta(t)\big) \quad \text{for almost every } t \in (0, +\infty), \\ p_S^\delta(0) = 0. \end{cases}$$

根据命题 4， $\big(p_S^\delta\big)_S$ 有一个逐点收敛的子序列，其极限记为 p^δ，它是柯西问题的解

$$\begin{cases} (p^\delta)'(t) = f\big(t, p^\delta(t)\big) \quad \text{for all } t \in (0, t_0^*) \cup (t_0^*, +\infty), \\ G\big(p^\delta(t_0^*)\big) = \dfrac{C^* + \delta}{K(t_0^*)}, \\ p^\delta(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

根据 C^*的定义，此方程给出 $G\big(p^\delta(t_0^*)\big) > \dfrac{C^*}{K}(t_0^*) = G\big(p_M^T(t_0^*)\big)$，因此，由于 G 是递增且可逆的，$p^\delta(t_0^*) > p_M^T(t_0^*)$。于是，存在 $S_\delta > 0$ ，使得对所有 $S \geqslant S_\delta$， $p_S^\delta(t_0^*) > p_M^T(t_0^*)$。这意味着，对所有 $S \geqslant S_\delta$， $C^* + \delta$ 都属于 $\mathcal{I}_S$，因此 $C^* + \delta \geqslant C_S^*$。

沿收敛子序列取极限，得到 $C^* + \delta \geqslant C_\infty$；该不等式对所有 $\delta > 0$ 均成立，因此 $C^* \geqslant C_\infty$。

证明 **$C_\infty \geqslant C^*$。**假设 $C_\infty < C^*$。那么，存在 $\delta > 0$，使得 $C_\infty < C^*(1 - \delta)$，即对某个 $S > 0$，有 $\inf \mathcal{I}_S = C_S^* < C^*(1 - \delta)$。因此存在 $C \in \mathcal{I}_S$，使得$C < C^*(1 - \delta)$。

设 $t_0 \geqslant 1/S$，使得方程 ($\mathcal{S}_{S,\ C,\ t_0^S}$) 的解 p_S 满足 $p_S(t_0) > p_M^T(t_0)$。由于 G 单调递增，有 $G\big(p_S(t_0)\big) > G\big(p_M^T(t_0)\big)$，因此存在 $\rho > 0$，使得

$$G\big(p_S(t_0)\big) > \frac{1}{1 - \rho} G\big(p_M^T(t_0)\big). \tag{11}$$

我们希望能够 并从上方估计 p_S 所满足方程的右端。为此，

我们来求 K 的下界和 f 的上界。

根据（H6），存在 δ，使得若 $|t-t_0|\leqslant\delta$，则 $|K(t)-K(t_0)|\leqslant\rho K(t_0)$。令 $S\geqslant 1/\delta$；对于所有 $t\in[t_0-\frac{1}{S},t_0]$，都有 $K(t)\geqslant K(t_0)(1-\rho)$。

此外，对于所有 $p\in[0,1]$，$\bar{f}(p):=\max_{t\in[0,T]} f(t,p)$，定义后，在 $[t_0-\frac{1}{S},t_0]$ 中有，

$$p_S'=f(t,p_S)+\frac{CS}{K(t)}g(p_S)\leqslant\bar{f}(p_S)+\frac{CS}{K(t_0)(1-\rho)}g(p_S).$$

这里我们陈述一个重要的备注。假设存在 $C_{\max}>0$，使得方程的解 p_S

$$\begin{cases}p_S'(t)=f\big(t,p_S(t)\big)+\dfrac{C_{\max}S}{K(t)}\mathbb{1}_{[t_0-\frac{1}{S},t_0]}(t)\;g\big(p_S(t)\big) & \text{for almost every } t\in(0,+\infty),\\ p_S(0)=0,\end{cases}\qquad(\mathcal{S}_{S,C_{\max},t_0})$$

达到 1，即。满足 $p_S(t_0)=1$。

在区间 $[t_0-\frac{1}{S},t_0]$ 内，函数 p_S 是柯西问题的一个解

$$\begin{cases}p_S'(t)=f\big(t,p_S(t)\big)+\dfrac{C_{\max}S}{K(t)}\;g\big(p_S(t)\big),\\ p_S(t_0)=1.\end{cases}\qquad(12)$$

恒等于 1 的函数是 (12) 的解，因此，根据柯西-利普希茨定理的唯一性，$p_S\equiv 1$ 属于 $[t_0-\frac{1}{S},t_0]$。这意味着 $p_S(t_0-\frac{1}{S})=1$，与 $p_S\equiv 0$ 属于 $[0,t_0-\frac{1}{S})$ 矛盾。

因此，$p_S<1$ 属于 $[0,+\infty)$ 且 $\min_{[0,p_{S,\max}]} g>0$，记 $p_{S,T,\max}:=\max_{[0,T]} p_S$

设 $\chi:=C^*(1-\delta)-C>0$，并在足够大的 S，使得 $S\geqslant\sup_{[0,1]}\dfrac{\rho K(t_0)}{\chi}$ 且 $\dfrac{\max_{[0,T]}|K'|}{K(t_0)(1-\rho)}\min_{p_{S,T,\max}} g$。

可得 $[t_0-\frac{1}{S},t_0]$，

$$p_S'\leqslant\frac{(C+\chi)S}{K(t_0)(1-\rho)}g(p_S)=\frac{C^*(1-\delta)S}{K(t_0)(1-\rho)}g(p_S),$$

这意味着 $K(t_0)(1-\rho)\,C^*(1-\delta)S\,(G\circ p_S)'\leqslant 1$。在 $t_0-\frac{1}{S}$ 和 t_0 之间积分，并利用 (11) 以及 $p_S(t_0-\frac{1}{S})=0$，可得：

$$\frac{K(t_0)}{C^*(1-\delta)S}G\big(p_M^T(t_0)\big)<\frac{K(t_0)(1-\rho)}{C^*(1-\delta)S}G\big(p_S(t_0)\big)\leqslant\frac{1}{S}.$$

最后，得到

$$K(t_0)G\big(p_M^T(t_0)\big)<C^*(1-\delta)<C^*=\inf_{[0,T]}\Big[K(\cdot)G\big(p_M^T(\cdot)\big)\Big],$$

这就产生了矛盾。

由于极限 C^* 是唯一确定的，整个序列 $(C_S^*)_S$ 都收敛于 C^*，而不仅仅是某个子序列。

极小化子序列的收敛性。 C_S^* 是 $\mathcal{I}_S$的下确界，因此存在 $t_0^{S*} \in [1/S, +\infty)$，使得解 p_S^* 满足 $(\mathcal{S}_{S,C_S^*,t_0^{S*}})$，且 $\forall t < t_0^{S*}$，$p_S^*(t) < p_M^T(t)$，以及 $\forall t \geqslant t_0^{S*}$，$p_S^*(t) = p_M^T(t)$。

事实上，反设并假设对于所有 $t_0^{S*} \in [1/S, +\infty)$，解 p_S^* 满足（$\mathcal{S}_{S,\ C_S^*,\ t_0^{S*}}$）中的条件（a）$\exists t < t_0^{S*}$：$p_S^*(t) \geqslant p_M^T(t)$ 或（b）$\exists t \geqslant t_0^{S*}$：$p_S^*(t) \neq p_M^T(t)$。

假设（a）。由于控制作用持续到时间 t_0^{S*}，可得 $p_S^*(t_0^{S*}) > p_M^T(t_0^{S*})$。因此$C_S^* \in \mathcal{I}_S$，且 $\mathcal{I}_S$ 是一个开集，这就产生了矛盾。

假设（b）。由柯西-利普希茨定理的唯一性可知，这意味着（b1）对于所有 $t \geqslant t_0^{S*}$，$p_S^*(t) < p_M^T(t)$，或（b2）对于所有 $t \geqslant t_0^{S*}$，$p_S^*(t) > p_M^T(t)$。（b1）意味着存在一个 $C > C_S^*$，它从下方界定$\mathcal{I}_S$；而（b2）则给出 $C_S^* \in \mathcal{I}_S$。两者都与假设矛盾。

极小化子序列 $\left(t_0^{S*}\right)_S$ 有界，因此经过抽取后收敛到一个极限，记为 t_0^∞。目标是用两个足够接近于 $G\left(p_M^T(t_0^\infty)\right)$的量来界定 $\overset{C^*}{K}(t_0^\infty)$。

对于所有 $(t,\ p) \in [0,T] \times [0,1]$，$\left| \frac{f(t,\ p)\ K\ t}{p} \right| \leqslant \|\partial_p f\|_\infty \max_{[0,T]} K := M_f$。

由于 $(p_S^*)' = f(t,\ p_S^*) + \frac{C_S^* S}{K} \mathbb{1}_{[t_0^{S*} - \frac{1}{S}, t_0^{S*}]}\ g(p_S^*)$ 属于 $\mathbb{R}_+$，因此该界对所有 $t \geqslant 0$ 均成立，

$$-\frac{M_f p_S^*(t)}{K(t)} + \frac{C_S^* S}{K(t)} \mathbb{1}_{[t_0^{S*} - \frac{1}{S}, t_0^{S*}]}(t)\ g\left(p_S^*(t)\right) \leqslant (p_S^*)'(t) \leqslant \frac{M_f p_S^*(t)}{K(t)} + \frac{C_S^* S}{K(t)} \mathbb{1}_{[t_0^{S*} - \frac{1}{S}, t_0^{S*}]}(t)\ g\left(p_S^*(t)\right).$$

有 $p_S^*(t_0^{S*}) = p_M^T(t_0^{S*}) < 1$，因此对于所有 $t \in [t_0^{S*} - \frac{1}{S}, t_0^{S*}]$，可得 $g\left(p_S^*(t)\right) \geqslant \min_{[0, C_S^* S(t_0^{S*})]} g = g\left(p_S^*(t_0^{S*})\right) > 0$。在 $[t_0^{S*} - \frac{1}{S}, t_0^{S*}]$ 中，只要 S足够大以得到 $C_S^* \geqslant \frac{C^*}{2}$ 和 $-\frac{M_f}{K}\ t\ (\ ) + 2K\ t\ (\ ) \min_{[0, p_S^*(t_0^{S*})]} g > 0$，便可写成 $-\frac{M_f p_S^*}{K}(t)\ K(t) + \frac{C_S^* S}{K}\ t\ (\ )\ g\left(p_S^*(t)\right) > 0$，因此：

$$\frac{(p_S^*)'(t)}{\frac{M_f p_S^*(t)}{C_S^* S} + g\left(p_S^*(t)\right)} \leqslant \frac{C_S^* S}{K(t)} \leqslant \frac{(p_S^*)'(t)}{-\frac{M_f p_S^*(t)}{C_S^* S} + g\left(p_S^*(t)\right)}. \tag{13}$$

令所有 $p \in \left[0, \max_{[0,T]} p_M^T\right]$，$G_S(p) := \int_0^p \mathrm{d}\frac{u}{\frac{M_f u}{C_S^* S} + g(u)}$ 和 $G_S(p) := \int_0^p \mathrm{d}-\frac{u}{\frac{M_f u}{C_S^* S} + g(u)}$，不等式（13）可写为：

$$\left(\underline{G_S} \circ p_S^*\right)'(t) \leqslant \frac{C_S^* S}{K(t)} \leqslant \left(\overline{G_S} \circ p_S^*\right)'(t),$$

我们对其进行积分，积分区间为 $t_0^{S*} - \frac{1}{S}$ 和 t_0^{S*}。由于 p_S^* 一直等于 0，直到 $t_0^{S*} - \frac{1}{S}$，

$$\underline{G_S}\left(p_S^*(t_0^{S*})\right) \leqslant C_S^* S \int_{t_0^{S*} - \frac{1}{S}}^{t_0^{S*}} \frac{\mathrm{d}t}{K(t)} \leqslant \overline{G_S}\left(p_S^*(t_0^{S*})\right). \tag{14}$$

现在，我们有两个界，它们似乎都接近于 $G\left(p_M^T(t_0^\infty)\right)$。下一步是对这一近似进行严格的详细论证。

对于所有 $u \in \left[0, \max_{[0,T]} p_M^T\right]$，记 $g_S(u) := \dfrac{M_f u}{C_S^* S} + g(u)$ 和 $\underline{g}_S(u) := -\dfrac{M_f u}{C_S^* S} + g(u)$。一方面，$\left(g_S\right)_{S>0}$ 一致收敛于 g，且 $\inf_{[0,\max_{[0,T]} p_M^T]} g > 0$，因此 $\left(\dfrac{1}{g_S}\right)_{S>0}$ 一致收敛于 $1/g$。另一方面，$(g_S)_{S>0}$ 一致收敛于 g，且 $g_S \geqslant -\dfrac{M_f}{C_S^* S} \max_{[0,T]} p_M^T + g$；当 S 足够大时，$\inf_{[0,\max_{[0,T]} p_M^T]} \left[-\dfrac{M_f}{C_S^* S} \max_{[0,T]} p_M^T + g\right] > 0$，因此 $\left(\dfrac{1}{g_S}\right)_{S>0}$ 一致收敛于 $\dfrac{1}{g}$。对于所有 $p \in \left[0, \max_{[0,T]} p_M^T\right]$，有：

$$\left|\underline{G}_S(p) - G(p)\right| = \left|\int_0^p \left(\frac{1}{\underline{g}_S(u)} - \frac{1}{g(u)}\right) \mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^p \left\|\frac{1}{\underline{g}_S} - \frac{1}{g}\right\|_\infty \mathrm{d}u \leqslant \left\|\frac{1}{\underline{g}_S} - \frac{1}{g}\right\|_\infty,$$

这表明 G_S 一致收敛于 G；同理可证，$\underline{G}_S$ 一致收敛于 G。

设 $\varepsilon > 0$。存在足够大的 S，使得 $\left\|G_S - G\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$ 且 $\left\|\underline{G}_S - G\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$。当 S 足够大时，不等式 (14) 得出：

$$G\left(p_M^T(t_0^{S*})\right) - \varepsilon = G\left(p_S^*(t_0^{S*})\right) - \varepsilon \leqslant C_S^* S \int_{t_0^{S*} - \frac{1}{S}}^{t_0^{S*}} \frac{\mathrm{d}t}{K(t)} \leqslant G\left(p_S^*(t_0^{S*})\right) + \varepsilon = G\left(p_M^T(t_0^{S*})\right) + \varepsilon.$$

根据中值定理，存在 $\bar{t}_S \in \left(t_0^{S*} - \frac{1}{S},\ t_0^{S*}\right)$，使得 $S \int_{t_0^{S*} - \frac{1}{S}}^{t_0^{S*}} \mathrm{d}K\ t() = \overset{1}{K}(\bar{t}_S)$。因此，由于 K 的连续性，有 $C_S^* S \int_{t_0^{S*} - \frac{1}{S}}^{t_0^{S*}} \mathrm{d}K\ t() \xrightarrow[S \to +\infty]{} \overset{C^*}{K}(t_0^\infty)$。

此外，由于 p_M^T 和 G 的连续性，可得 $G\left(p_M^T(t_0^{S*})\right) \xrightarrow[S \to +\infty]{} G\left(p_M^T(t_0^\infty)\right)$，最终得到：

$$G\left(p_M^T(t_0^\infty)\right) - \varepsilon \leqslant \frac{C^*}{K(t_0^\infty)} \leqslant G\left(p_M^T(t_0^\infty)\right) + \varepsilon.$$

令 ε 趋于 0，可得 $G\left(p_M^T(t_0^\infty)\right) = \overset{C^*}{K}(t_0^\infty)$，即 t_0^∞ 是函数 $K(\cdot)G\left(p_M^T(\cdot)\right)$ 的极小化点。

□

3.3 分离变量的非线性，命题 8 的证明

命题 8 的证明。我们先来证明以下引理。

引理 1。设 $0 < C_0 < C_{\min}$ 和 p 是控制方程 (5) 的解，对应于在 t_0 释放 C_0 个体的单次释放。

那么，对所有 $t_1 > t_0$，$p(t_1) < p(t_0)$。

证明。有 $C_0 < C_{\min} = G(\bar{\theta})K(t_0^*)$，因此 $\overset{C_0}{K}(t_0) \leqslant \overset{C_0}{K}(t_0^*) < G(\bar{\theta})$，从而得到 $G^{-1}\left(\overset{C_0}{K}(t_0)\right) < \bar{\theta}$。

方程 (5) 可在 $(t_0,+\infty)$ 中改写，令 $p_0:=G^{-1}\Big(\frac{C_0}{K}(t_0)\Big)$，则有

$$\begin{cases} p'(t)=f\big(t,p(t)\big), \\ p(t_0)=p_0 \text{ with } p_0<\bar{\theta}. \end{cases}$$

反设存在某个时间 $t_1>t_0$，使得 $p(t_1)=p(t_0)$。记 F为 $\frac{1}{\tilde{f}}$的一个原函数，则有

$$0=F\big(p(t_1)\big)-F\big(p(t_0)\big)=\int_{t_0}^{t_1}p'(t)\frac{1}{\tilde{f}\big(p(t)\big)}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}m(t)\mathrm{d}t>0,$$

这就产生了矛盾。

令 $t_1>t_0$。刚才已经证明了 $p(t_1)\neq p(t_0)$。但是，如果 $p(t_1)>p(t_0)$，那么由于根据命题3，已知 $\lim_{t\to+\infty}p(t)=0$，且 p在 $[t_0,+\infty)$ 上连续，因此存在一个时间$t_1'>t_1>t_0$，使得 $p(t_1')=p(t_0)$，这就产生了矛盾。因此我们得出结论： $p(t_1)<p(t_0)$。 □

第一次释放 C_0 在时间 t_0 产生一个跳跃 $G\big(p(t_0)\big)=\frac{C_0}{K}(t_0)$。第二次释放 C_1 在时间 t_1 产生一个跳跃 $G\big(p(t_1)\big)-G\big(p(t_1^-)\big)=\frac{C_1}{K}(t_1)$。将这两个跳跃相加，得到:

$$G\big(p(t_0)\big)-G\big(p(t_1^-)\big)+G\big(p(t_1)\big)=\frac{C_0}{K(t_0)}+\frac{C_1}{K(t_1)}.$$

根据引理 1，有 $G\big(p(t_0)\big)>G\big(p(t_1^-)\big)$。因此，$G\big(p(t_1)\big)<\frac{C_0}{K}(t_0)+\frac{C_1}{K}(t_1)\leqslant\frac{C_{\min}}{K}(t_0^*)=G(\bar{\theta})$，由此可得 $p(t_1)<\theta$。该系统在 t_1时尚未达到阈值 θ，因此根据命题3，它将收敛到 0。 □

4 沃尔巴克氏体种群替代的应用

埃及伊蚊是传播登革热、基孔肯雅热、寨卡热和黄热病的主要媒介之一。这些疾病均无法通过特效疗法治疗；此外，目前尚无寨卡热疫苗，而基孔肯雅热和登革热疫苗仅适用于特定人群（见 [25], [26], [27], [28]）。因此，这些疾病预防工作的重要组成部分是媒介控制。

科学家一直在研究内共生细菌沃尔巴克氏体，主要是因为它具有一种有趣的特性，称为病原体干扰 （PI）。这种特性使沃尔巴克氏体感染的蚊子叮咬人类时传播疾病的能力显著降低（见 [12], [21], [33]）。因此，用感染沃尔巴克氏体 的蚊子种群取代野生蚊群，似乎是消除这些疾病传播的一种有效选择；这种以沃尔巴克氏体为基础的生物防治措施行之有效，而且似乎不像杀虫剂那样会对环境造成不利影响。世界蚊子计划已在亚洲和南美洲的多个国家成功实施沃尔巴克氏体 方法（见 [30]）。

首先，通过显微注射将细菌传入蚊卵，随后再经母系遗传传给后代。此外，感染雄蚊与未感染雌蚊交配时，胚胎会因一种称为细胞质不相容 （CI）的现象而在发育早期死亡（见 [33]）。因此，如果将一群感染蚊子释放到野生种群中，随着时间推移，预计

在某些条件下，由于 CI，几乎所有蚊子都会携带沃尔巴克氏体：这就是我们关注的种群替代 。

因此，设计释放计划至关重要：既要实现感染沃尔巴克氏体的蚊子长期存续这一目标，又要优化与感染蚊子的繁育和释放相关的经济资源。

许多数学研究（见 [3], [4], [6], [18]）探讨了基于沃尔巴克氏体的生物控制或种群替代的优化问题，但都将环境容纳量视为常数。然而，文献 [15] 研究了时变环境容纳量，并指出，给定时刻的环境容纳量可以写成该时刻可用水量的仿射函数。本节将说明，如何从种群动力学模型出发，得到一个符合前几节所证明理论结果的标量控制方程。

需要注意的是，另一种广为人知的媒介控制策略是不育昆虫技术，一些数学研究（见 [13]）也探讨了针对这一策略的最优控制方法。

4.1 标量控制方程

关于本小节严谨的数学细节，请参见 [6] 和 [32]。我们以形式化的方式重新推导计算，以便获得与 [6] 和 [32], 相同的结果，但这里采用时变环境容纳量。尽管这些计算并非严谨证明，但足以使我们相信，运用所引论文中的相同论证，可以得到类似的模型。此外，读者可以注意到， [6] 中得到的不含控制项的标量模型，恰好对应于[9]中的方程 (6a)。

4.1.1 竞争模型

为了从数学上分析种群替代策略的成功与否，我们在此考察一个控制方程，其中通过释放随时间分布的一定数量感染个体$u(t)$来作用于野生种群。

我们使用的演化方程刻画了释放个体与野生个体之间的竞争。令$n_1(t)$表示沃尔巴克氏体阴性蚊子（野生个体）的密度， $n_2(t)$表示时间 t时沃尔巴克氏体阳性蚊子的密度。如 [6], 中所述，蚊群动力学由以下竞争隔室系统建模：

$$\begin{cases} n_1'(t) = b_1 n_1(t)\left(1 - s_h \dfrac{n_2(t)}{n_1(t)+n_2(t)}\right)\left(1 - \dfrac{n_1(t)+n_2(t)}{K(t)}\right) - d_1 n_1(t), \\ n_2'(t) = b_2 n_2(t)\left(1 - \dfrac{n_1(t)+n_2(t)}{K(t)}\right) - d_2 n_2(t) + u(t). \end{cases} \tag{15}$$

在该系统中， s_h 表示细胞质不相容率，且有 $0 \leqslant s_h \leqslant 1$； $s_h = 1$ 对应完全不相容，而$s_h = 0$ 则对应完全相容。对于 $i \in \{1, 2\}$， b_i 表示内禀出生率， d_i 表示内禀死亡率。在本节中，我们对函数 K作出一项额外假设：**(H12)** K 在 $\mathbb{R}_+$中是 $\mathcal{C}^2$ 。

4.1.2 大繁殖力情况下的模型约化

关于参数的假设。 下面详细说明若干必要的参数假设：

- 由于伊蚊具有很强的繁殖能力，因此可以认为内禀出生率远高于内禀死亡率，也就是说，对于 $i \in \{1,2\}$，$b_i \gg d_i$，这促使我们引入 b_i^0，它与 d_i 相当，定义为 $b_i = b_i^0/\sigma$，其中 $\sigma \ll 1$。

- 在之前的尺度变换中，我们始终确保对于 $i \in \{1,2\}$，$b_i^0 > d_i$，使其符合蚊群存活所需的生物承载能力（见 [6] 和 [19]）。

- 与野生蚊相比，感染沃尔巴克氏体 的蚊子繁殖力和寿命略低（见 [19] 和 [33]），*i.e.* $b_1^0 > b_2^0$ 和 $d_1 < d_2$。

- 细胞质不相容率 s_h 满足以下条件（见 [6]）：

$$1 - s_h < \frac{d_1 b_2^0}{d_2 b_1^0} < 1. \tag{16}$$

该条件具有生物学意义。事实上，[17] 和 [33] 表明细胞质不相容几乎是完全的，因为未感染雌蚊与感染雄蚊杂交所产的卵几乎都无法孵化。

设 n_1^σ 和 n_2^σ 为方程（15）的解，其中 b_1 和 b_2 由依赖于 σ的约化给出；设$N^\sigma = n_1^\sigma + n_2^\sigma$为个体总数，$p^\sigma = \frac{n_2^\sigma}{N^\sigma}$为感染个体所占比例，$u$ 为控制。记 $n^\sigma = \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{N^\sigma}{K}\right)$，系统（15）可写为：

$$\begin{cases} (n_1^\sigma)'(t) = b_1^0 n_1^\sigma(t)\big(1 - s_h p^\sigma(t)\big) n^\sigma(t) - d_1 n_1^\sigma(t), \\ (n_2^\sigma)' t(t) = b_2^0 n_2^\sigma(t) n^\sigma(t) - d_2 n_2^\sigma(t) + u(t). \end{cases} \tag{17}$$

将（17）的两个方程相加，一方面用 $p^\sigma N^\sigma$ 替换 n_2^σ，另一方面用 $\big(1-p^\sigma\big)N^\sigma$ 替换 n_1^σ，再除以 N^σ，可得：

$$\frac{1}{N^\sigma}(N^\sigma)' = \Big[b_1^0\big(1-p^\sigma\big)\big(1 - s_h p^\sigma\big) + b_2^0 p^\sigma\Big] n^\sigma - \Big[d_1\big(1-p^\sigma\big) + d_2 p^\sigma\Big] + \frac{u}{N^\sigma}. \tag{18}$$

又由于 $(p^\sigma)' = \frac{1}{N^\sigma}(n_2^\sigma)' - p^\sigma \frac{1}{N^\sigma}(N^\sigma)'$，（17）蕴含：

$$(p^\sigma)' = b_2^0 p^\sigma n^\sigma - d_2 p^\sigma + \frac{u}{N^\sigma} - p^\sigma \frac{1}{N^\sigma}(N^\sigma)'. \tag{19}$$

此外，有 $n^\sigma = \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{N^\sigma}{K}\right)$，因此 $N^\sigma = K\big(1 - \sigma n^\sigma\big)$ 且 $\frac{1}{N^\sigma}(N^\sigma)' = \frac{1}{N^\sigma} K'\big(1 - \sigma n^\sigma\big) - \sigma \frac{K}{N^\sigma}(n^\sigma)'$。以下推导是形式上的，但主要受到文献 [6] 的启发；该文在 K 不依赖时间时严格证明了所有收敛性。假设当 σ 趋于 0 时，N^σ 一致收敛到 K，$\frac{1}{N^\sigma}(N^\sigma)'$ 在提取一个子列后弱收敛到 $\frac{K'}{K}$。此外，当 σ 趋于 0 时，p^σ 一致收敛到某个 p。

此外，由（18）可得：

$$n^\sigma = \frac{\frac{1}{N^\sigma}(N^\sigma)' + d_1\big(1-p^\sigma\big) + d_2 p^\sigma - \frac{u}{N^\sigma}}{b_1^0\big(1-p^\sigma\big)\big(1 - s_h p^\sigma\big) + b_2^0 p^\sigma}.$$

由前面的论证可知，n^σ 弱收敛于 $\frac{\frac{K'}{K} + d_1\big(1-p\big) + d_2 p - \frac{u}{K}}{b_1^0\big(1-p\big)\big(1 - s_h p\big) + b_2^0 p}$。

现在，在（19）中取极限，可得：

$$p' = b_2^0 p \frac{\frac{K'}{K} + d_1\big(1-p\big) + d_2 p - \frac{u}{K}}{b_1^0\big(1-p\big)\big(1-s_h p\big) + b_2^0 p} - d_2 p + \frac{u}{K} - p\frac{K'}{K},$$

i.e.

$$p' = p(1-p)\frac{\frac{K'}{K}b_2^0 + d_1 b_2^0 - d_2 b_1^0(1-s_h p) - \frac{1}{K}K' b_1^0(1-s_h p)}{b_1^0\big(1-p\big)\big(1-s_h p\big) + b_2^0 p} + \frac{u}{K}\frac{b_1^0(1-p)(1-s_h p)}{b_1^0\big(1-p\big)\big(1-s_h p\big) + b_2^0 p},$$

且 $n_2(0) = 0$，因此 $p(0) = 0$。

定义

$$\begin{cases} f(t,p) = \dfrac{p(1-p)}{b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p}\left\{ s_h\Big(d_2 b_1^0 + \dfrac{K'(t)}{K(t)} b_1^0\Big)p - \left[d_2 b_1^0 - d_1 b_2^0 + \dfrac{K'(t)}{K(t)}\big(b_1^0 - b_2^0\big)\right]\right\}, \\ g(p) = \dfrac{b_1^0(1-p)(1-s_h p)}{b_1^0\big(1-p\big)\big(1-s_h p\big) + b_2^0 p}. \end{cases}$$

得到：

$$\begin{cases} p'(t) = f\big(t, p(t)\big) + \dfrac{u(t)}{K(t)} g\big(p(t)\big), \\ p(0) = 0. \end{cases}$$

记 $\alpha(t) = s_h\Big(d_2 b_1^0 + \underline{\dfrac{K'}{K}(t)\,(t)\,b_1^0}\Big)$ 以及 $\beta(t) = d_2 b_1^0 - d_1 b_2^0 + \underline{K'(t)\,K(t)}\,(b_1^0 - b_2^0)$，可得：

$$\begin{cases} f(t,p) = \dfrac{p(1-p)}{b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p}\big(\alpha(t)p - \beta(t)\big), \\ g(p) = \dfrac{b_1^0(1-p)(1-s_h p)}{b_1^0\big(1-p\big)\big(1-s_h p\big) + b_2^0 p}. \end{cases} \tag{20}$$

我们来考察这些定义是否确保 f 满足假设 (H1) 至 (H4) 和 (H7)，以及 g 满足 (H5)。

根据表达式 (20)，显然 f 满足 (H1)、(H2) 和 (H3)，而 g 满足 (H5)。此外，$\partial_p f(t,0) = -\underline{\beta(t)}\, b_1^0$ 给出：

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T \partial_p f(t,0)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\beta(t)}{b_1^0}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{b_1^0 T}\int_0^T \left(d_2 b_1^0 - d_1 b_2^0 + \frac{K'(t)}{K(t)}\big(b_1^0 - b_2^0\big)\right)\mathrm{d}t \quad \text{and } K \text{ is } T\text{-periodic} \\ &= d_1\frac{b_2^0}{b_1^0} - d_2 < 0 \quad \text{by (16)}, \end{aligned}$$

并且 $\partial_p f(t,1) = \beta(t) - \alpha(t)\, b_2^0$
给出：

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \partial_p f(t,1)\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\beta(t)-\alpha(t)}{b_2^0}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{b_2^0 T}\int_0^T \left(d_2 b_1^0 - d_1 b_2^0 + \frac{K'(t)}{K(t)}\left(b_1^0 - b_2^0\right) - s_h\left(d_2 b_1^0 + \frac{K'(t)}{K(t)} b_1^0\right)\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{d_2 b_1^0}{b_2^0}(1-s_h) - d_1 < 0 \quad \text{by (16)},\end{aligned}$$

这意味着 f 满足 (H4)。
已知 $f_m(p) = p(1-p)\, b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p\left(s_h d_2 b_1^0 p - d_2 b_1^0 + d_1 b_2^0\right)$，我们推断 f_m 在 0、1 和 $\bar\theta := \frac{1}{s_h}\left(1 - \frac{d_1 b_2^0}{d_2 b_1^0}\right)$ 处为零，并且显然 $f_m < 0$ 在 $(0,\ \bar\theta)$ 内，$f_m > 0$ 在 $(\bar\theta,\ 1)$ 内。此外，(H4) 意味着 $f_m'(0) < 0$ 且 $f_m'(1) < 0$，由连续性可得 $f_m'(\theta) > 0$。因此，假设 (H7) 成立。

现在来讨论环境容纳量 K。考虑到它很大程度上取决于环境中的可用水量（见 [15]），因此考虑 K 取决于一年中的季节是合理的，这就是为什么我们从现在起假设 K 满足 (H6)。

4.2 死亡率相等时周期解的唯一性与最小化问题

命题 9. 令 f 为由 (20) 定义的函数，并假设 $d_1 = d_2$。那么，常微分方程 (1)存在唯一一个严格介于 *0* 和 *1* 之间的 T-周期解。此外，最优控制问题 $(\mathcal{P}_{\mathrm{eq}})$ 等价于最小化函数 K。

注 7。 情形 $d_1 = d_2$ 与生物学假设不一致，但对于研究一般情形具有相关性；一般情形将在下一小节中考察。

证明。 假设 $d_1 = d_2$ 蕴含 $\beta(t) = \bar\theta\alpha(t)$，其中 $\bar\theta = \frac{b_1^0 - b_2^0}{s_h b_1^0}$，且 f 的表达式变为

$$f(t,p) = \alpha(t)\frac{p(1-p)}{b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p}(p-\bar\theta) = \alpha(t)\tilde f(p),$$

其中 $\tilde f(p) := p(1-p)\, b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p(p-\bar\theta)$。
首先，K 满足 (H12)，且 $\int_0^T \alpha = s_h b_1^0 d_2 T > 0$，因此 α 满足 (H8)。此外，有 $f_m(p) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,\ p)\mathrm{d}t = \tilde f(p\ \int_0^T \alpha)$ $(t)\mathrm{d}t = s_h b_1^0 d_2 \tilde f(p)$，由此得到 $f_m'(p) = s_h b_1^0 d_2 \tilde f'(p)$。因此，$f$ 满足 (H9)，由 (H4) 和 (H7) 可推知 f 满足 (H10) 和 (H11)。命题 7 证明了严格介于 0 和 1 之间的 T-周期解的唯一性。此外，我们处于第 3.3 小节所述的简化框架中，因此优化问题 $(\mathcal{P}_{\mathrm{eq}})$ 等价于最小化函数 K。

□

4.3 Dep周期解对死亡率差的依赖性

对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$\theta(t) := \beta(t) - \alpha(t)$，记作。对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$f(t,\ \cdot)$ 在 $\theta(t)$ 处为零。

在下面的引理中，我们将上一小节的结果推广到死亡率差为正且较小的情形。考虑到文献中（参见 [6], [18]）相对差异 $\frac{d_2-d_1}{d_2}$约为 10%，这一情形似乎具有现实意义。

引理2. 假设函数 K 满足 *(H12)*。设 $\eta = d_2 - d_1 > 0$。对于足够小的固定 η，常微分方程 (1) 有一个唯一的、严格介于 *0* 和 *1* 之间的 T-周期解，记为 p_η^T。令 $\bar{\theta}_d = \frac{b_1^0 - b_2^0}{s_h b_1^0}$ 为极限情形 $d_1 = d_2$下 $\theta(t)$ 的值。则对所有 $t \in [0,T]$, $p_\eta^T(t) \overset{=}{\eta \to 0} \bar{\theta}_d + O(\eta)$，均有。

证明. 对所有 $t \in \mathbb{R}_+$，均有

$$\beta(t) = d_2 b_1^0 - (d_2 - \eta) b_2^0 + \frac{K'(t)}{K(t)}(b_1^0 - b_2^0) = \Big(d_2 + \frac{K'(t)}{K(t)}\Big)(b_1^0 - b_2^0) + \eta b_2^0 = \bar{\theta}_d \alpha(t) + \eta b_2^0.$$

将 $\beta(t)$ 替换为其表达式，可得对所有 $(t,p) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$,

$$\begin{aligned} f(t,p) &= \frac{p(1-p)}{b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p}\big(\alpha(t)(p - \bar{\theta}_d) - \eta b_2^0\big) \\ &= \alpha(t)\frac{p(1-p)}{b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p}(p - \bar{\theta}_d) - \eta b_2^0 \frac{p(1-p)}{b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p}. \end{aligned}$$

令对所有 $(t,p) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$, $f^0(t,p) := \alpha(t) \overset{p}{=} (1-p)\, b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p(p - \bar{\theta}_d)$, $f^1(t,p) = f^1(p) := -b_2^0 \overset{p}{=} (1-p)\, b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p$和 $f^\eta := f$，可得 $f^\eta = f^0 + \eta f^1$。

周期解的唯一性。记 $\tilde{f}^0(p) := \overset{p}{=} (1-p)\, b_1^0(1-p)(1-s_h p) + b_2^0 p(p - \bar{\theta}_d)$，则有 $f^0(t,p) = \alpha(t)\, \tilde{f}^0(p)$。已知 $p \equiv \bar{\theta}_d$是常微分方程 $p' = f^0(t,p)$ 的一个 T-周期解。

我们来考察其唯一性。函数 $\alpha(\cdot)$ 满足 (H8)。此外，直接计算可得 $(\tilde{f}^0)'(0) < 0$、$(\tilde{f}^0)'(1) < 0$, 以及 $(\tilde{f}^0)'(\bar{\theta}_d) > 0$, 因此 $\tilde{f}^0$ 满足假设 (H9) 至 (H11)；由命题 7 可知，$p \equiv \theta_d$ 是常微分方程 $p' = f^0(t,p)$ 在 0 与 1 之间的唯一 T- 周期解。此外，$\int_0^T \partial_p f^0\left(t, \bar{\theta}_d\right) \mathrm{d}t > 0$ （见命题 7 的证明），也就是说，与该解对应的特征值为负。

现在来验证命题 6 的其他条件。首先，函数 f^0与所有函数 f^η一样，对于 $\eta > 0$, 均满足假设 (H1) 至 (H4)。此外，对于所有 $(t,p) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$, $\partial_p f^\eta(t,p) = \partial_p f^0(t,p) + \eta\big(f^1\big)'(p)$。令 $\Delta := \left\|\big(f^1\big)'\right\|_\infty$，由于 $\big(f^1\big)'$在 $[0,1]$上连续，因此该值有限；由此，对于所有 $(t,p) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$, $\left|\partial_p f^0(t,p) - \partial_p f^\eta(t,p)\right| \leqslant \Delta\eta$。记$\omega(\eta) := \Delta\eta$，可得 f^0和族 $\left(f^\eta\right)_{\eta>0}$满足 (6)。

因此，根据命题 6，当 η 足够小时，常微分方程 $p' = f^\eta(t,p)$ 在 0 和 1 之间有唯一的周期解，但该解并不具有吸引性。

收敛速度。命题 6.2 在 [14] 中证明了存在一个常数 C_1，使得对任意$\eta > 0$，都有 $\left\|P^0 - P^\eta\right\|_\infty < C_1 \Delta\eta$, 其中 P^0 和 P^η 分别表示与 f^0 和 f^η 相关的庞加莱映射。令 $\Phi := P - \mathrm{Id}$，便可立即得到 $\left\|\Phi^0 - \Phi^\eta\right\|_\infty < C_1 \Delta\eta$。

因此，对于所有 $\gamma > 0$，可得:

$$-C_1\Delta\eta < \Phi^0\left(\bar{\theta}_d + \gamma\eta\right) - \Phi^\eta\left(\bar{\theta}_d + \gamma\eta\right) < C_1\Delta\eta,$$

因此

$$\Phi^{\eta}\left(\bar{\theta}_d+\gamma\eta\right)>\Phi^{0}\left(\bar{\theta}_d+\gamma\eta\right)-C_1\Delta\eta.$$

读者可注意到，根据柯西-利普希茨定理的推广，函数 Φ^0 与函数 f^0 具有相同的正则性，因此，在此应用中， Φ^0 至少是 $\mathcal{C}^2([0,1])$。因此，当 η 足够小时，根据泰勒余项定理，存在 $\theta_\eta^+\in\left(\bar{\theta}_d,\ \bar{\theta}_d+\gamma\eta\right)$，使得:

$$\Phi^{\eta}\left(\bar{\theta}_d+\gamma\eta\right)>\Phi^{0}\left(\bar{\theta}_d\right)+\gamma\eta(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)+\frac{\gamma^2\eta^2}{2}(\Phi^0)''(\theta_\eta^+)-C_1\Delta\eta=\eta\left(\frac{\gamma^2\eta}{2}(\Phi^0)''(\theta_\eta^+)+\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)-C_1\Delta\right),$$

因为 $p\equiv\bar{\theta}_d$ 是 $p'=f^0(t,\ p)$ 的平衡态。

设 $\gamma>\dfrac{C_1\Delta}{(\Phi^0)'(\bar{\theta}_d)}$，这个下界为正，因为 $(\Phi^0)'(\bar{\theta}_d)=\exp\left(\int_0^T\partial_p f^0(t,\ \bar{\theta}_d)\mathrm{d}t\right)-1>0$。

如果 $(\Phi^0)''(\theta_\eta^+)\geqslant 0$，那么对于所有 $\eta>0,\ \eta\left(\dfrac{\gamma^2\eta}{2}(\Phi^0)''(\theta_\eta^+)+\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)-C_1\Delta\right)>0$。如果 $(\Phi^0)''(\theta_\eta^+)<0$，令 $0<\eta<\dfrac{\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)-C_1\Delta}{\frac{\gamma^2}{2}\max_{[\bar{\theta}_d,\bar{\theta}_d+\gamma\eta]}|\Phi^0)''|}$，则得到 $0<\eta<\dfrac{C_1\Delta-\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)}{\frac{\gamma^2}{2}\overline{\Phi^0)''}\theta_\eta^+}$，从而推得 $\eta\left(\dfrac{\gamma^2\eta}{2}(\Phi^0)''(\theta_\eta^+)+\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)-C_1\Delta\right)>0$。

最后，当 η 足够小时， $\Phi^{\eta}\left(\bar{\theta}_d+\gamma\eta\right)>0$。

类似地，当 η 足够小时，根据泰勒余项定理，存在 $\theta_\eta^-\in\left(\bar{\theta}_d-\gamma\eta,\ \bar{\theta}_d\right)$ 使得:

$$\Phi^{\eta}\left(\bar{\theta}_d-\gamma\eta\right)<\eta\left(\frac{\gamma^2\eta}{2}(\Phi^0)''(\theta_\eta^-)-\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)+C_1\Delta\right).$$

If $(\Phi^0)''(\theta_\eta^-)\leqslant 0$, for all $\eta>0$, $\eta\left(\dfrac{\gamma^2\eta}{2}(\Phi^0)''(\theta_\eta^-)-\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)+C_1\Delta\right)<0$. If $(\Phi^0)''(\theta_\eta^-)>0$, taking $0<\eta<\dfrac{\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)-C_1\Delta}{\frac{\gamma^2}{2}\max_{[0,\bar{\theta}_d]}(\Phi^0)''}$, we get $\eta\left(\dfrac{\gamma^2\eta}{2}(\Phi^0)''(\theta_\eta^-)-\gamma(\Phi^0)'\left(\bar{\theta}_d\right)+C_1\Delta\right)<0$.

最后，当 η 足够小时， $\Phi^{\eta}\left(\bar{\theta}_d-\gamma\eta\right)<0$。

现在，根据 Φ^η 的连续性，我们可以推得存在一个实数 $\theta_\eta\in\left(\bar{\theta}_d-\gamma\eta\,,\ \ \bar{\theta}_d+\gamma\eta\right)$ 使得 $\Phi^\eta(\theta_\eta)=0$, *i.e.* 即，从 θ_η 出发的 $p'=f^\eta(t,\ p)$ 的解是一个 T-周期解，记为 p_η^T。

根据 [14], 中命题 6.2 的证明，对所有 $t\in[0,T]$,

$$|p^0(t;\theta_\eta)-p_\eta^T(t)|=|p^0(t;\theta_\eta)-p^\eta(t;\theta_\eta)|\leqslant C_1\Delta\eta. \tag{21}$$

此外，当 η 足够小且 $t\in[0,T]$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|p^0(t;\theta_\eta)-p^0(t;\bar{\theta}_d)\right| &= \left|\theta_\eta+\int_0^t f^0\left(s,p^0(s;\theta_\eta)\right)\mathrm{d}s-\bar{\theta}_d-\int_0^t f^0\left(s,p^0(s;\bar{\theta}_d)\right)\mathrm{d}s\right|\\ &\leqslant |\theta_\eta-\bar{\theta}_d|+\int_0^t\left|f^0\left(s,p^0(s;\theta_\eta)\right)-f^0\left(s,p^0(s;\bar{\theta}_d)\right)\right|\mathrm{d}s\\ &\leqslant |\theta_\eta-\bar{\theta}_d|+\int_0^t\left\|\partial_p f^0\right\|_\infty\left|p^0(t;\theta_\eta)-p^0(t;\bar{\theta}_d)\right|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据中值定理。

因此，Gr¨onwall 引理表明，对所有 $t \in [0,T]$,

$$\left|p^0(t;\theta_\eta) - p^0(t;\bar{\theta}_d)\right| \leqslant |\theta_\eta - \bar{\theta}_d| \exp\left(\left\|\partial_p f^0\right\|_\infty t\right) \leqslant \frac{C_1\Delta}{(\Phi^0)'(\bar{\theta}_d)}\eta \exp\left(\left\|\partial_p f^0\right\|_\infty T\right). \tag{22}$$

最后，当 η 足够小时，对于所有 $t \in [0,T]$,

$$\left|p_\eta^T(t) - \bar{\theta}_d\right| \leqslant \left|p_\eta^T(t) - p^0(t;\theta_\eta)\right| + \left|p^0(t;\theta_\eta) - \bar{\theta}_d\right| = \left|p^0(t;\theta_\eta) - p_\eta^T(t)\right| + \left|p^0(t;\theta_\eta) - p^0(t;\bar{\theta}_d)\right|,$$

也就是说，由 (21) 和 (22) 可得,

$$\left|p_\eta^T(t) - \bar{\theta}_d\right| \leqslant C_1\Delta\eta + \frac{C_1\Delta}{(\Phi^0)'(\bar{\theta}_d)}\eta \exp\left(\left\|\partial_p f^0\right\|_\infty T\right) = C_4\Delta\eta,$$

where $C_4 := C_1\left(1 + \dfrac{\exp\left(\left\|\partial_p f^0\right\|_\infty T\right)}{(\Phi^0)'(\bar{\theta}_d)}\right)$.

□

4.4 一般情形下最小化问题的结论

在一般情形下，有 $d_1 = d_2 - \eta$，其中 $\eta > 0$。对于给定的 η，我们将 p_η^T 严格介于 0 和 1 之间的最大 T-周期解记为。

命题10。 假设函数 K 满足 *(H12)*。对于给定的 $\eta > 0$，记 p_η^T 为严格介于 *0* 和 *1* 之间的最大 T-周期解，并记 t_η^* 为函数 $K(\cdot)G\big(p_\eta^T(\cdot)\big)$的一个极小化点。此极小化点满足以下两个断言：

(i) 当$\eta \to 0$时，序列 $\left(t_\eta^*\right)_{\eta>0}$经抽取子列后收敛到 $[0,T]$中的一个极小化点，记为 τ_i^*。

(ii) 此外，假设 K'' 在 K的每一个极小化点处均为正。经过与 *(i)* 中相同的子列抽取，可得 $|t_\eta^* - \tau_i^*| \underset{\eta\to 0}{=} O(\sqrt{\eta})$。

(i) 的含义如下：只要 $d_2 - d_1$ 足够小，释放全部感染蚊子的最佳时间就可以任意接近环境容纳量 K 达到最小值的时间。(ii) 给出了收敛速度的刻画。

证明。

(i) 极小化子序列 $\left(t_\eta^*\right)_{\eta>0}$ 有界，因此经过抽取后收敛到一个极限，记为 t_0^*。引理2说明，当 $\eta \to 0$时， p_η^T 逐点收敛到 $\bar{\theta}_d$。对于所有 $t \in [0,T]$，不等式 $K(t)G\big(p_\eta^T(t)\big) \geqslant K(t_\eta^*)G\big(p_\eta^T(t_\eta^*)\big)$ 表明，当令 η趋于0时，$K(t)G(\theta_d) \geqslant K(t_0^*)G(\theta_d)$；也就是说，由于 G 为正， t_0^* 是 K的极小化点。

(ii) 由于 K'' 在其每一个极小化点处均为正，每个极小化点都是孤立的。博雷尔-勒贝格定理使我们能够证明 K 有有限个极小化点。

现在记（τ_i^*）$_{i\in I}$ K的极小化点组成的有限族。引入有界函数q，使得对于所有 $t \in [0,T]$， p_η^T（t）$= \bar{\theta}_d + q$（t）η，并设 $M_q := \|q\|_\infty$。

由于对于所有 $i \in I$, $K''(\tau_i^*) > 0$, 根据连续性, 存在 $\zeta > 0$, 使得对于所有 $i \in I$, $K'' > 0$ 属于$[\tau_i^* - \zeta, \tau_i^* + \zeta]$。记 $K_\zeta'' := \min_{i\in I} \min_{[\tau_i^*-\zeta,\tau_i^*+\zeta]} K'' > 0$

令 $C_5 > 2 \frac{M_q}{g(\bar{\theta}_d) G(\bar{\theta}_d)} \frac{\max_{[0,T]} K}{K_\zeta''}$。对于 $\eta > 0$, 有

$$1 + C_5\eta \frac{K_\zeta''}{\min\limits_{[0,T]} K} > 1 + 2\frac{M_q\eta}{g(\bar{\theta}_d)G(\bar{\theta}_d)}.$$

记作, 对于 $x > 0$, $h(x) := \frac{1 + \frac{M_q x}{g(\bar{\theta}_d)}}{1 - \frac{M_q x}{g(\bar{\theta}_d)}}$, 在 0 处作一阶泰勒展开可得$h(x) = 1 + 2\frac{M_q x}{g(\bar{\theta}_d)} + o(x)$, 因此, 当 η 足够小时, 可得

$$1 + C_5\eta \frac{K_\zeta''}{\min\limits_{[0,T]} K} > h\left(\frac{\eta}{G(\bar{\theta}_d)}\right) = \frac{G(\bar{\theta}_d) + \frac{M_q\eta}{g(\bar{\theta}_d)}}{G(\bar{\theta}_d) - \frac{M_q\eta}{g(\bar{\theta}_d)}},$$

这意味着 $\min_{[0,T]} K + C_5\eta K_\zeta'' > \min_{[0,T]} K \frac{G(\bar{\theta}_d) + \frac{M_q\eta}{g(\bar{\theta}_d)}}{G(\bar{\theta}_d) - \frac{M_q\eta}{g(\bar{\theta}_d)}}$。
因此, 当 η 足够小时,

$$\left(\min_{[0,T]} K + C_5\eta K_\zeta''\right)\left(G(\bar{\theta}_d) - \frac{M_q\eta}{g(\bar{\theta}_d)}\right) > \min_{[0,T]} K \left(G(\bar{\theta}_d) + \frac{M_q\eta}{g(\bar{\theta}_d)}\right),$$

由此可得, 即使这意味着要选择更小的 η, 在 处进行一阶泰勒展开 0,

$$\left(\min_{[0,T]} K + C_5\eta K_\zeta''\right) G\big(\bar{\theta}_d - M_q\eta\big) > \min_{[0,T]} K \times G\big(\bar{\theta}_d + M_q\eta\big). \tag{23}$$

令 $\nu := \sqrt{2C_5} > 0$。考虑使 (23) 成立且满足 $\nu\sqrt{\eta} < \zeta$ 的 η, 并记 $\mathcal{V}_{\eta,i} := [\tau_i^* - \nu\sqrt{\eta}, \tau_i^* + \nu\sqrt{\eta}]$。
即使这意味着要选择更小的 η, 对所有 $t \notin \bigcup_{i\in I} \mathcal{V}_{\eta,i}$, 都有 $K(t) \geqslant \min_{i\in I} \min\Big(K(\tau_i^* - \nu\sqrt{\eta}), K(\tau_i^* + \nu\sqrt{\eta})\Big)$, 因此根据泰勒余项定理, 存在 $i_0 \in I$ 和 $\xi_{i_0} \in (\tau_{i_0}^* - \nu\sqrt{\eta}, \tau_{i_0}^* + \nu\sqrt{\eta})$, 使得

$$K(t) \geqslant K(\tau_{i_0}^*) + \frac{\nu^2\eta}{2}K''(\xi_{i_0}) \geqslant K(\tau_{i_0}^*) + \frac{\nu^2\eta}{2}K_\zeta'' = \min_{[0,T]} K + C_5\eta K_\zeta''.$$

因此, 根据 (23), 对所有 $t \notin \bigcup \mathcal{V}_{\eta,i}: i \in I$, 可得

$$K(t)G\big(\bar{\theta}_d - M_q\eta\big) \geqslant \left(\min_{[0,T]} K + C_5\eta K_\zeta''\right) G\big(\bar{\theta}_d - M_q\eta\big) > \min_{[0,T]} K \times G\big(\bar{\theta}_d + M_q\eta\big).$$

此外, $\bar{\theta}_d - M_q\eta \leqslant p_\eta^T(\cdot) \leqslant \bar{\theta}_d + M_q\eta$ 给出 $G\big(\bar{\theta}_d - M_q\eta\big) \leqslant G\big(p_\eta^T(\cdot)\big) \leqslant G\big(\bar{\theta}_d + M_q\eta\big)$, 从而对所有 $i \in I$,

$$K(t)G\big(p_\eta^T(t)\big) \geqslant K(t)\, G\big(\bar{\theta}_d - M_q\eta\big) > \min_{[0,T]} K \times G\big(\bar{\theta}_d + M_q\eta\big) \geqslant K(\tau_i^*)G\big(p_\eta^T(\tau_i^*)\big).$$

最后，当 η足够小时，对所有$t \notin \bigcup \mathcal{V}_{\eta,\, i}$， $K(t)G\big(p_\eta^T(t)\big) > K(\tau_i^*)G\big(p_\eta^T(\tau_i^*)\big)$。$_{i\in I}$记 τ^*为族 (τ_i^*) $_{i\in I}$中满足 $G\left(p_\eta^T(\tau^*)\right) = \min\limits_{i\in I}\left[G\left(p_\eta^T(\tau_i^*)\right)\right]$的元素，则当 η足够小时，对所有$t \notin \bigcup \mathcal{V}_{\eta,\, i}$， $K(t)$ $G\big(p_\eta^T(t)\big) > K(\tau^*)G\big(p_\eta^T(\tau^*)\big)$。$_{i\in I}$

因此， t_η^*在 $[0,T]$ 中， $K(\cdot)G\big(p_\eta^T(\cdot)\big)$ 的任何极小化点都属于$\bigcup \mathcal{V}_{\eta,\, i}$。最后，给定一个收敛子序列$_{i\in I}$ $\left(t^*_{\sigma(\eta)}\right)_{\eta>0}$，存在 $i \in I$ ，使得该子序列中的所有元素最终都属于$\mathcal{V}_{\eta,\, i}$，由此完成证明。

□

4.5 数值模拟

在本小节中，我们实现一个最优控制问题，旨在计算使其积分随时间保持低于固定上界并趋于最小的控制，同时使解收敛到 1。我们使用 Python 的 Gekko 软件包（见 [10]），该软件包依赖 IPOPT（内点优化器）作为大型非线性优化问题的主求解器，通过 优化环境 APMonitor。

定义域。 记 T 为环境容纳量的时间周期，我们设定一个观测时间窗口 $[0,t_f]$，使得 $t_f = NT$，其中 $N \geqslant 2$为整数（t_f只需大于 T即可）。

数值离散。 控制方程通过显式欧拉法实现，并使用复合梯形公式计算 u 的积分。

所实现的函数。 为简化处理，将具有 T-周期且二阶可微的环境容纳量建模为余弦函数：

$$K(t) = K_0 + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

其中 K_0 为平均值， A 为幅值，且满足 $K_0 > A > 0$。

f 和 g 的具体表达式由（20）给出。

约束条件。 我们为 u设定一个上界，记为 M。为确保控制发生在 $t = T$之前，在 $[T,t_f]$中将控制 $u(\cdot)$ 设为恒等于 0。此外，为了得到一个收敛于 1 的解p ，我们实施约束 $p(2T) > p(T)$。下面证明该条件是充分的。

我们考虑这样一种情形：常微分方程 (1) 的 T**-周期解**严格介于 0 和 1 之间且唯一；当庞加莱映射具有图1所示的形式时，便是这种情形。我们将其记为 p^T。

当 $u(\cdot) = 0$属于 $[T,t_f]$时，控制方程 (2) 的解 p在 $[T,t_f]$中满足常微分方程 (1)。与命题3的证明类似，我们考虑在时间 T处平移的庞加莱映射 P_T ，其定义为：对所有p_0、$_T \in [0,1]$，有 $P_T(p_{0,T}) := p($ $T+T; p_{0,T})$；其中 $p(t; p_{0,T})$ 表示对所有 $t \in [T,t_f]$，满足条件 $p(T) = p_{0,T}$ 的方程 (1) 的解 p在 $[T,t_f]$ 处的取值。我们还记 $\Phi_T := P_T - \mathrm{Id}$。注意，条件 $p(2T) > p(T)$ 可表示为 $\Phi_T\big(p(T)\big) > 0$。由 p^T的唯一性可知， $p(T)$ 属于区间 $(\theta_T, 1)$，其中 $\theta_T := p^T(T)$；根据命题3，这意味着如果 p是在 $[0,+\infty)$ 中定义的，它将收敛到 1。

目标 **ve.** 根据上述约束，目标是使积分 $\int_0^{t_f} u(t)\mathrm{d}t$ 最小 ts.

结果。 三种不同上界取值下，最优控制 u 的数值结果绘于图2： $M = 0.02$， 0。04，0。06。此外，所得 C 的值也已给出，约为 0.01742；正如预期，它与通过梯度下降数值求得的函数 $K \times G \circ p^T$ 的最小值 0.01739 非常接近。图3绘出了相应比例 p的数值近似解，该解是控制方程 (2) 在所计算的最优控制 u下的解。

该算法得到的最优控制 u恰好是一个短脉冲，其形式为缩放示性函数，并在其上界 M处呈现平台段。这意味着该最优控制也是持续时间最短的控制。这一最优控制的施加时刻似乎与命题10所确定的函数 K 在区间 $[0, T]$上的极小化点相当接近。

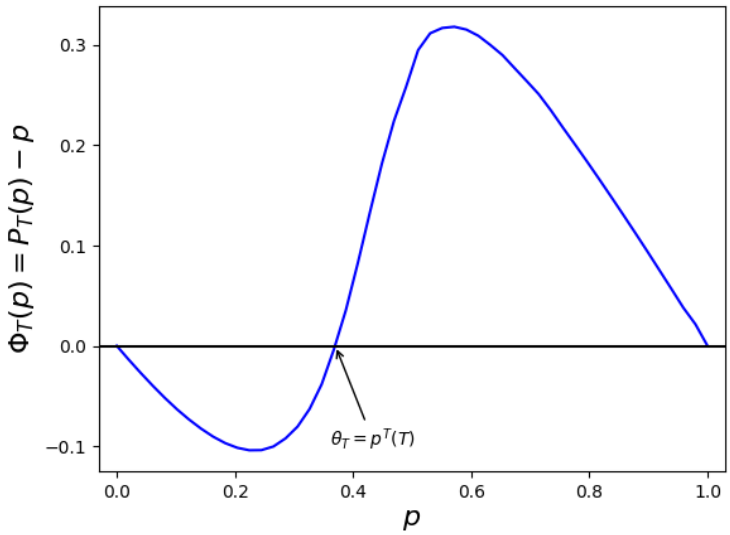

图1： $\Phi_T = P_T - \mathrm{Id}$ 的图像，其中 P_T为在时间 T处平移的庞加莱映射，由 Python 脚本生成。该脚本中采用的数值为 $K_0 = 0.06$， $T = 12$， $b_1^0 = 0.8$， $b_2^0 = 0.6$， $d_1 = 0.27$， d_2 =0。3 和 $s_h = 0.9$，这些数值与文献中的数据（见 [6], [16]）相符；而 $A = 0.02$ 则任意选取。对于此实现，我们在区间 $[0, 1]$内取 50 个点。

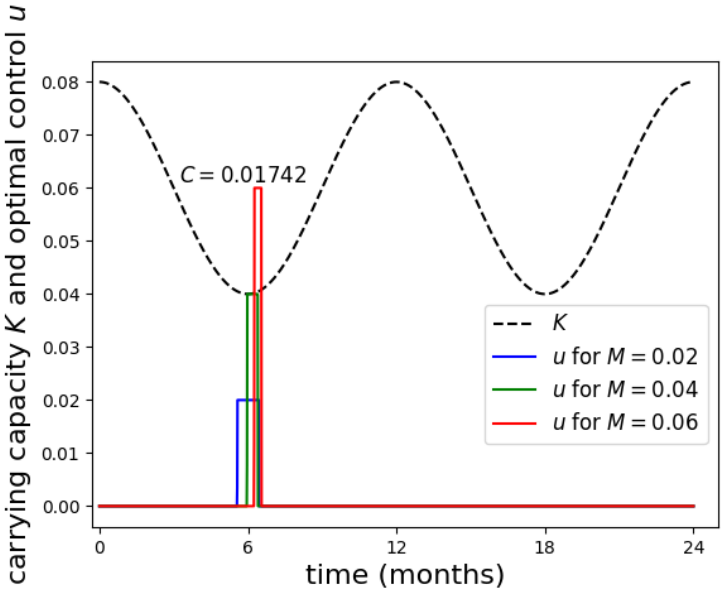

图2：使用带有 Gekko 软件包的 Python脚本获得的最优控制 u 。数值与图1中的完全相同。此外，我们设定 $N = 2$ 和 $n = 1000$，并考虑三种不同的情景：$M = 0.02$，$M = 0.04$和 $M = 0.06$。

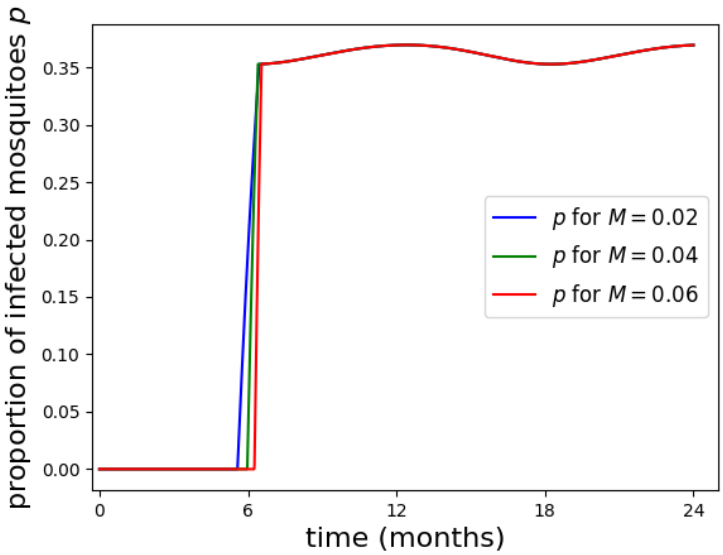

图3：最优解 p，随时间变化的沃尔巴克氏体感染蚊子比例，使用相同的 Python脚本和 Gekko 获得。数值与图2中的完全相同。

在第1.3小节中，在理论上寻找最优控制时，我们将范围限定为形式为缩放示性函数的控制项，以及渐近意义下的狄拉克脉冲。就沃尔巴克氏体种群替代而言，数值模拟证实了这一理论假设的合理性。

致谢。



G. N. 得到了法国国家研究署项目 ReaCh（*R´eaction-diffusion : nouveauxChallenges*）和法国国家研究署项目 Optiform（形状优化）的部分资助；D. N. 获得了 ANRS MIE 的资助（AAP 2024 - 2024年奖学金计划 - FRAME）；N. V. 得到了 STIC AmSud 项目 BIO-CIVIP（昆虫媒介和害虫的生物防治）23-STIC-02 以及 ANR项目Maths-ArboV（*Mod´elisation math´ematique et outils de gestion des arboviroses ´emergentes*）24-EXMA- 的部分资助。

0004，获得法国2030计划下 PEPR Maths-Vives 的支持。

参考文献

[1] E. Affili 和 E. Zuazua. “边界约束控制下扩散型洛特卡–沃尔泰拉强竞争系统的可控性”。载于：预印本 (2026年)。[2] N. D. Alikakos、P. W. Bates 和 X. Chen. “多维区域中的周期行波与振荡模式定位”。载于：《美国数学会汇刊》351.7 (1999), 第2777–2805页。[3] L. Almeida、J. Bellver Arnau、M. Duprez 和 Y. Privat. “蚊群替代的最小成本—时间策略”。载于：偏微分方程的优化与控制。柏林、波士顿：De Gruyter, 2022，第73–90页。[4] L. Almeida、J. Bellver Arnau 和 Y. Privat. “双稳态常微分方程的最优控制策略：在蚊群替代中的应用”。载于：《应用数学与优化》87.10 (2023)。[5] L. Almeida、J. Bellver Arnau、Y. Privat 和 C. Rebelo. “通过即时释放控制媒介传播疾病暴发”。载于：《数学生物学杂志》89-6.63 (2024)。[6] L. Almeida、Y. Privat、M. Strugarek 和 N. Vauchelet. “种群替代策略的最优释放：沃尔巴克氏体的应用”。载于：沃尔巴克氏体。载于：《*SIAM*数学分析杂志》51-4 (2019)，第3170–3194页。[7] L. Almeida 等. “控制登革热传播的蚊子最优释放”。载于：《*ESAIM*：论文集与调查》67 (2020)，第16–29页。[8] D. G. Aronson 和 H. F. Weinberger. “群体遗传学、燃烧与神经脉冲传播中的非线性扩散”。载于：《数学讲义》446.1 (1975)，第5–49页。[9] N. H. Barton 和 M. Turelli. “具有双稳态动力学的空间推进波：阿利效应的细胞质与遗传类似现象”。载于：《美国博物学家》178.3 (2011)，E48–E75。[10] L. Beal、D. Hill、R. Martin 和 J. Hedengren. “GEKKO优化套件”。载于：《*Processes*》6.8 (2018)，第106页。[11] S. A. Belov 和 V. V. Chistyakov. “有界变差映射的选择原理”。载于：《数学分析与应用杂志》249-2 (2000)，第351–366页。[12] G. Bian、Y. Xu、P. Lu、Y. Xie 和 Z. Xi. “内共生细菌沃尔巴克氏体使埃及伊蚊对登革病毒产生抗性”。载于：《*PLOS*病原体》6.4 (2010)，第1–10页。[13] P.-A. Bliman、D. Cardona-Salgado、Y. Dumont 和 O. Vasilieva. “实施不育昆虫技术的最优控制方法”。载于：《数学科学杂志》279.5 (2024)，第607–622页。

[14] B. Contri. “时间周期环境中平均意义下双稳态反应扩散方程的脉动前沿”。载于：《数学分析与应用杂志》437-1 (2016)，第90–132页。[15] Y. Dumont 和 M. Duprez. “热带环境中降雨和温度对不育昆虫控制策略的影响建模”。载于：《生物系统杂志》32.01 (2024)，第311–347页。[16] M. Duprez、R. H´elie、Y. Privat 和 N. Vauchelet. “种群替代空间控制策略的优化：沃尔巴克氏体的应用”。载于：ESAIM: COCV 27.74 (2021)。[17] H. L. C. Dutra 等. “从实验室到实地：城市景观对沃尔巴克氏体在巴西埃及伊蚊中入侵潜力的影响”。载于：《PLOS被忽视的热带病》9 (2015)，第1–22页。[18] J. L. Orozco Gonzales 等. “基于沃尔巴克氏体的生物防治优化方法”。载于：《应用数学建模》137 (2025)。[19] H. Hughes 和 N. F. Britton. “利用沃尔巴克氏体控制登革热传播的建模研究”。载于：《数学生物学通报》75 (2013)，第796–818页。[20] I. Mazari、G. Nadin 和 A. I. Toledo Marrero. “半线性抛物方程总种群规模关于初始条件的优化：双尺度展开与对称化”。载于：Nonlinearity 34.11 (2021)，第7510–7539页。[21] L. A. Moreira 等. “埃及伊蚊中的沃尔巴克氏体共生体可限制登革热、基孔肯雅热和疟原虫感染”。载于：《细胞》139.7 (2009)，第1268–1278页。[22] G. Nadin 和 A. I. Toledo Marrero. “关于反应扩散方程解相对于初始数据的最大化问题”。载于：《自然现象数学建模》15.71 (2020)。[23] I. P. Natanson.《实变量函数论》。纽约：Frederick Ungar Publishing Co., 1965。[24] M. Nedeljkov 和 M. Oberguggenberger. “含狄拉克δ函数项的常微分方程”。载于：Publications de l’Institut Math´ematique. Nouvelle s´erie 91–105 (2012)，第125–135页。[25] 世界卫生组织。黄热病——问答。https://www.who.int/news-room/questions-and-answers/item/yellow-fever。访问日期：2025/07/29。2017年。[26] 世界卫生组织。寨卡病毒。https://www.who.int/news- room/fact- sheets/detail/ zika-virus。访问日期：2025/07/29。2022年。[27] 世界卫生组织。登革热和重症登革热——问答。https://www.who.int/news-room/questions-and-answers/item/dengue-and-severe-dengue。访问日期：2025/07/29。2024年。[28] 世界卫生组织。基孔肯雅热。https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/chikungunya。访问日期：2025/07/29。2025年。[29] C. Pouchol、E. Tr´elat 和 E. Zuazua. “一维单稳态与双稳态反应扩散方程的相图控制”。载于：Nonlinearity 32.3 (2019)，第884–909页。[30] 世界蚊子计划。我们的沃尔巴克氏体方法。https://www.worldmosquitoprogram.org/en/ work/wolbachia-method。访问日期：2025/11/18。[31] J. G. Schraiber 等. “使用缩短寿命的沃尔巴克氏体控制登革热的限制因素”。载于：《理论生物学杂志》297 (2012)，第26–32页。

[32] M. Strugarek 和 N. Vauchelet。《Lotka–Volterra型2×2反应扩散系统约化为单个闭方程》。发表于：*SIAM*应用数学杂志 76.5（2016），第2060–2080页。[33] T. Walker、P. H. Johnson、L. A. Moreira、I. Iturbe-Ormaetxe 和 F. D. Frentiu。《wMel 沃尔巴克氏体菌株阻断登革热，并侵入笼养的埃及伊蚊 种群》。发表于：《自然》 476（2011），第450–453页。[34] M.-H. Wang 和 M. Kot。《具有强或弱阿利效应的模型中的入侵速度》。发表于：数学生物科学 171.1（2001），第83–97页。