arXiv:2601.08632v1 [math.SG] 13 Jan 2026

Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构的辛群胚

Ahmadreza Khazaeipoul

Abstract. Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构自然地出现在对圆上的 n 阶微分算子的研究中，并在泊松几何和可积系统中发挥核心作用。设 G 为李群 PSL(n)、PSp(n)（n 为偶数时）或 PSO(n)（n 为奇数时）之一。本文构造了与 G 相关的 Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构的积分辛群胚，并证明它与积分 Y_n(C) 上 Dirac 结构的拟辛群胚莫里塔等价，其中 Y_n(C) 表示拟周期非退化曲线空间按保持单值化的同伦取商。

Contents

1. 引言 1 2. 曲线与微分算子 3 3. 通过 Drinfeld-Sokolov 方法进行构造 9 附录 A. 通过对李2-群约化辛李群胚 16 参考文献 19

1. Introduction

该*Adler-Gelfand-Dikii* 泊松结构由 Adler、Gelfand 和 Dikii 在其开创性著作中引入 [1, 10, 11]，是定义在圆上的无限维空间中的一种泊松结构，该空间由n阶微分算子构成。当 $n = 2$ 且李群为 PSL(2，$\mathbb{R}$) 时，该空间可与维拉索罗代数在层一处的对偶空间相对应，记作 $\mathfrak{vir}_1^*$ (S^1)。

令C 为一个紧致连通定向一维流形（与 S^1 微分同胚）。对于以下各李群

$$G \in \{\mathrm{PSL}(n),\ \mathrm{PSp}(n)\ (\text{for even } n),\ \mathrm{PSO}(n)\ (\text{for odd } n)\},$$

令 $\mathcal{R}_n^G$(C) 表示作用于C上 $^{1-n}_{2}$ 和 $^{1+n}_{2}$ 密度丛的截面之间的 n 阶微分算子空间，其主符号等于一，并满足取决于 G 的以下附加条件：

- 对于 G =PSL(n)，次主符号为零；
- 对于 G =PSp(n)（n 为偶数），这些算子是自伴的；
- 对于 G =PSO(n)（n为奇数），这些算子是反自伴的。

Drinfeld-Sokolov 约化 [7, 第 8] 节将 $\mathcal{R}_n^G$(C) 实现为 Marsden-Weinstein 约化空间。这种泊松结构的辛叶由 Khesin 和 Ovsienko [17, 定理 4] 分类。近期，Alekseev 和 Meinrenken [3] 完善了 Goldman-Segal 对应 [12, 18]，该对应建立了 $\mathfrak{vir}_1^*$ (C) 的余伴随轨道与某个.....中的共轭类之间的联系

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$开子集 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_+ \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，方法是将其提升为连接 $\mathfrak{vir}_1^*(\mathbf{C})$ 上泊松结构的辛群胚与$\widetilde{\ }$连接 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 上 Cartan-Dirac 结构的拟辛群胚之间的 Morita 等价+。

我们通过构造一个辛群胚来积分 $\mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 上的 Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构，并证明它与在 $Y_n(\mathbf{C})$ 上积分 Dirac 结构的拟辛群胚莫里塔等价，从而推广了他们的结果；后者是将 $\mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ 中保持单值化的非退化曲线按同伦取商所得。

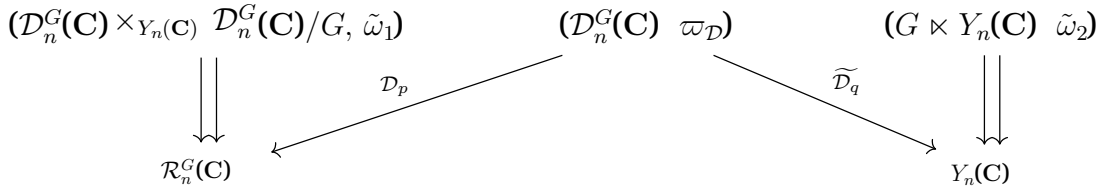
本文结构如下：在第2节中，我们研究 $\mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 中拟周期非退化曲线与微分算子之间的关系。在第3节中，我们构造积分 Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构的辛群胚，并建立它与 $Y_n(\mathbf{C})$ 上拟辛群胚之间的莫里塔等价。

我们定义

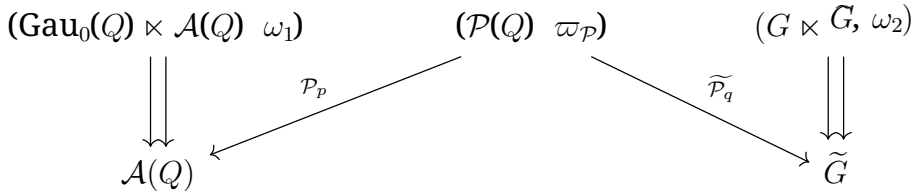
$$\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) = \{\, \tilde{\mathbf{C}} \to \mathbb{R}\mathbf{P}^{n-1} \mid \text{solution curves of operators in } \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}) \,\}.$$

在第3节中，我们证明主要结果：

定理1.1。 设 G 是上文列出的李群之一。则以下拟辛群胚的莫里塔等价成立：



此处 $\varpi_{\mathcal{D}} \in \Omega^2(\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}))$ 表示定理 3.2 中描述的 2-形式。该 Morita 等价在相关的哈密顿空间之间建立了一一对应关系。定理 1.1 的证明基于对下述 Morita 等价进行约化；该等价最初由 Alekseev-Meinrenken 提出 [3]:



为此，我们在附录中证明以下命题。

命题 *1.1.* 假设李 *2*-群 $H \times H \rightrightarrows H$ 在辛群胚 $(\mathcal{G}, \omega) \rightrightarrows (M, \pi)$ 上有一个哈密顿作用。设 $x \in Lie(H)^*$ 是动量映射μ_M的一个正则值，且 $(x, x) \in Lie(H)^* \times Lie(H)^*$ 是动量映射 $\mu_{\mathcal{G}}$ 的一个正则值。假设 x 和 (x, x) 的稳定子分别为 H 和 $H \times H$。若 $H \times H$ 在$\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(x, x)$ 上的作用以及 H 在 $\mu_M^{-1}(x)$上的作用均自由且适当，则商

$$(\mathcal{G}//(H \times H), \omega_{\mathrm{red}}) \rightrightarrows (M//H, \pi_{\mathrm{red}})$$

是一个辛群胚。

致谢。 我想感谢我的导师 Eckhard Meinrenken，是他让我接触到这个问题，给予我持续的支持，并与我进行了许多富有见地的讨论。

2. Curves and Differential Operators

本节将探讨 $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 中的算子与 $\mathbb{RP}^{n-1}$中的拟周期非退化曲线之间的联系。我们沿用 [3, 16]中的记号和约定。

2.1. 微分算子。

记号 1. 全文中，$\mathbf{C}$表示一个紧致连通定向一维流形。

$\tilde{\mathbf{C}}$设$\mathbf{C}$ 是$\mathbf{C}$ 的一个连通覆盖空间，使得$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}/\mathbb{Z}$。商映射记为$\pi : \tilde{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$，与$\tilde{\mathbf{C}}$ 上的平移 $1 \in \mathbb{Z}$ 对应的覆盖变换记为 κ。

本文中，我们使用实密度。对任意 $r \in \mathbb{R}$，我们将-密度丛 r在$\mathbf{C}$ 上的记为 $|\Lambda|^r_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$。其截面空间为

$$|\Omega|^r_{\mathbf{C}} = \Gamma(|\Lambda|^r_{\mathbf{C}}).$$

$\mathbf{C}$ 的定向将 $|\Omega|^r_{\mathbf{C}}$ 分别识别为函数（当 $r = 0$时）、1-形式（当 $r = 1$时）以及向量场（当 $r = -1$时）。如果

$$L : |\Omega|^{r_1}_{\mathbf{C}} \longrightarrow |\Omega|^{r_2}_{\mathbf{C}}$$

是一个阶数为 n的微分算子，其主符号是一个元素

$$\sigma_n(L) \in \Gamma\left(\mathrm{Sym}^n(T\mathbf{C}) \otimes \mathrm{Hom}(|\Lambda|^{r_1}_{\mathbf{C}}, |\Lambda|^{r_2}_{\mathbf{C}})\right) \cong |\Omega|^{r_2-r_1-n}_{\mathbf{C}}.$$

因此，$\sigma_n(L)$ 当且仅当 $r_2 - r_1 = n$ 时是标量值的。复合算子的主符号是各主符号的乘积。

L 的形式伴随 是一个阶数为 n 的算子

$$L^* : |\Omega|^{1-r_2}_{\mathbf{C}} \to |\Omega|^{1-r_1}_{\mathbf{C}}, \qquad \int_{\mathbf{C}} (Lu)\, v = \int_{\mathbf{C}} u\, (L^* v).$$

其主符号满足

$$\sigma_n(L^*) = (-1)^n \sigma_n(L).$$

若 $r_2 + r_1 = 1$，则 L 和 L^* 作用于相同的密度丛。因此，若要使主符号为标量值，且 L，L^* 作用于相同的丛，我们取 $r_1 = \frac{1-n}{2}$ 和 $r_2 = \frac{1+n}{2}$。在这种情况下，若 $L^* = L$，则称 L 为~~自伴~~；若 $L^* = -L$，~~则称其为~~反自伴。

注 2.1。设 $\mathbf{C} = S^1$ 和

$$L : |\Omega|^{\frac{1-n}{2}}_{\mathbf{C}} \longrightarrow |\Omega|^{\frac{1+n}{2}}_{\mathbf{C}}, \qquad L = \sum_{i=0}^{n} a_i(\theta)\, \frac{d^i}{d\theta^i},$$

其中 θ 是 S^1 上的坐标。对于 $\mu = u(\theta)\, |\partial\theta|^{\frac{n-1}{2}}$，有

$$L^*(\mu) = \Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{d\theta^i} \big(a_i(\theta)\, u(\theta)\big) \Big)\, |\partial\theta|^{\frac{n+1}{2}}. \tag{2.1}$$

例 2.1. 每个 $v \in \mathrm{Vect}(\mathbf{C})$都定义了一个一阶算子 $\mathcal{L}_v : |\Omega|^{r_1}_{\mathbf{C}} \to |\Omega|^{r_1}_{\mathbf{C}}$（李导数），满足 $\sigma_1(\mathcal{L}_v) = v$。其形式伴随作为算子 $|\Omega|^{1-r_1}_{\mathbf{C}} \to |\Omega|^{1-r_1}_{\mathbf{C}}$ 为 $\mathcal{L}^*_v = -\mathcal{L}_v$。

存在　　它是一个 n-线性、斜对称的多重微分算子，即朗斯基行列式　　，

$$W : |\Omega|^r_{\tilde{\mathbf{C}}} \otimes \cdots \otimes |\Omega|^r_{\tilde{\mathbf{C}}} \longrightarrow |\Omega|^{n\left(r+\frac{n-1}{2}\right)}_{\tilde{\mathbf{C}}},$$

在局部坐标 θ 中给出为

$$W[u_1, \ldots, u_n] = \det \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

我们特别关注以下情形$r = {}^{1-n}_{2}$，此时朗斯基行列式是一个标量。微分算子 u_1、……、u_n 的解的朗斯基行列式 L 非零，当且仅当这些解构成一个基本解系。若 L 的主符号为 1，则朗斯基行列式满足刘维尔方程（见 [14, 第 3]节）

$$\frac{d}{d\theta} W[u_1, \ldots, u_n] = a_{n-1}(\theta)\, W[u_1, \ldots, u_n].$$

该 n 阶算子的次主符号

$$L : |\Omega|^{\frac{1-n}{2}}_{\mathbf{C}} \longrightarrow |\Omega|^{\frac{1+n}{2}}_{\mathbf{C}} \tag{2.2}$$

定义为

$$\sigma^{\mathrm{sub}}(L) := \sigma_{n-1}\left(\frac{L - (-1)^n L^*}{2}\right) \in |\Omega|^1_{\mathbf{C}}.$$

用这些术语表示，刘维尔方程变为

$$d\, W[u_1, \ldots, u_n] = \sigma^{\mathrm{sub}}(L)\, W[u_1, \ldots, u_n].$$

特别地，若 $\sigma^{\mathrm{sub}}(L) = 0$，则 W 为常数；因此可以选取一个满足 $W \equiv 1$的基本解系。考虑 n阶算子

$$L : |\Omega|^{\frac{1-n}{2}}_{\mathbf{C}} \longrightarrow |\Omega|^{\frac{1+n}{2}}_{\mathbf{C}},$$

$_{1-n}$，其主符号为 1。设 $u = (u_1, \ldots, u_n)$ 是一个基本解系，　$u_i \in |\Omega|^{\cdot^2}_{\mathbf{C}}$。那么 —

$$\kappa^* u_i = \sum_j M_{ij}\, u_j.$$

矩阵 $M_u = (M_{ij})$ 称为单值化矩阵。若 v 表示另一个基本解系，则相应的单值化矩阵 M_v 与 M_u共轭。因此，共轭类由 L确定。

引理 2.1。　若 $\sigma^{\mathrm{sub}}(L) = 0$ 对于 (2.2)，则 L 的单值化矩阵属于 SL(n, $\mathbb{R}$　　).

证明。当 $\sigma^{\mathrm{sub}}(L) = 0$ 时，朗斯基行列式为常数，并在解空间上给出一个平行体积形式，而单值化保持该形式不变。□

引理 2.2. 若 n 是偶数阶且（2.2）是自伴的，则其单值化属于 Sp(n, $\mathbb{R}$)。

证明。在此情形下，解空间具有一个自然的辛形式，且该形式在平行传输下保持不变；因此，单值化是辛的。参见 [4, 第 2 节。2]。□

引理 2.3。若 n 为奇数且（2.2）是反自伴的，则其单值化属于 SO(n)。

证明。解空间带有一个自然的非退化对称双线性形式，该形式在平行传输下保持不变，因此单值化是正交的。参见 [4, 第 2 节。2]。 □

记号 2。若 $E \to \mathbf{C}$ 是一个向量丛，其 r 阶射流丛为 $J^r(E) \to \mathbf{C}$。

记号 3。对于 $k \geq 0$ 以及定义在 $\mathbf{C}$ 上的向量丛 E， F，$\mathrm{DO}^k(E,F)$ 表示 k 阶微分算子 $\Gamma(E) \to \Gamma(F)$ 所成的空间。

令 $\mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 为 主符号为 1 的 n 阶算子（2.2），满足：

(1) $G = \mathrm{PSL}(n)$： $\sigma^{\mathrm{sub}}(L) = 0$；(2) $G = \mathrm{PSp}(n)$，其中 n 为偶数： L 是自伴；(3) $G = \mathrm{PSO}(n)$，其中 n 为奇数： L 是反自伴。

记号 4。对于 $G = \mathrm{PSL}(n)$，将 $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 记作 $\mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$。

那么， $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 是一个以.....为模型的仿射空间

$$\mathrm{DO}^{n-2}\big(|\Lambda|_{\mathbf{C}}^{\frac{1-n}{2}},\ |\Lambda|_{\mathbf{C}}^{\frac{1+n}{2}}\big).$$

对于偶数 n ($G = \mathrm{PSp}(n)$) 和奇数 n ($G = \mathrm{PSO}(n)$)，空间 $\mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 分别是自伴与反自伴轨迹集和 $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 的交集；其底层线性空间是上文 DO^{n-2} 中相应的自伴／反自伴子空间。

2.2. **解曲线**。

记号 5.贯穿　　本小节中， $G \in \{\mathrm{PSL}(n),\ \mathrm{PSp}(n)$（偶数 n），$\mathrm{PSO}(n)$（奇数 n）$\}$　.

定义 2.1。一条曲线

$$\gamma : \tilde{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$$

是拟周期的非退化且具有单值化 $h \in G$ 当且仅当：

(1) 令 $F_k(x)$ 为 $\gamma'(x)$.....， $\gamma^{(k)}(x)$ 的射影张成。则

$$F_1(x) \subset \cdots \subset F_{n-1}(x) = \mathbb{RP}^{n-1}.$$

(2) 存在 $h \in G$ 使得

$$\gamma(\kappa(x)) = h \cdot \gamma(x).$$

˜条件1 等价于：对于任意将 Γ 提升 γ 至 $\mathbb{R}^n$ 的提升，以及任意 $x \in \mathbf{C}$,

$$\det\big(\Gamma(x), \Gamma'(x), \ldots, \Gamma^{(n-1)}(x)\big) \neq 0.$$

对于每个 $x \in \tilde{\mathbf{C}}$，子空间 $F_{n-2}(x) \subset \mathbb{RP}^{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个超平面，它确定对偶射影空间 $\mathbb{RP}^{n-1*} \cong \mathbb{RP}^{n-1}$ 中的一个点。因此我们定义对偶曲线

$$\gamma^* : \tilde{\mathbf{C}} \to \mathbb{RP}^{n-1}, \qquad \gamma^*(x) := \mathrm{ann}(F_{n-2}(x)).$$

引理2.4（[16], 定理 1.1.3）。若 γ 是拟周期的非退化曲线，则 γ^* 是拟周期的非退化曲线，且 $(\gamma^*)^* = \gamma$。

我们称 γ 自对偶，如果 $\gamma^* = \gamma$。

1−n假设 $L \in \mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 和 $u_1, \ldots, u_n \in |\Omega|^{\frac{1-n}{2}}$ 是一个基本解系。根据 [17, 定义 3.2]，，曲线

$$\gamma : \tilde{\mathbf{C}} \to \mathbb{RP}^{n-1}, \qquad x \mapsto (u_1(x) : \cdots : u_n(x)),$$

是拟周期、非退化的，且单值化属于 $\mathrm{PSL}(n)$。若 $L \in \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$，则由引理 2.1–2.3可知，$\gamma$ 的单值化属于 G。对于这些李群，朗斯基行列式$W[u_1, \dots, u_n]$ 是常数。

2.3. 从曲线到微分算子。 设 $(u_1, \dots, u_n)$ 是一条拟周期非退化曲线 γ 到 $\mathbb{R}^n$ 的提升，其朗斯基行列式为 1。定义

$$L(u) = (-1)^n W[u, u_1, \dots, u_n]. \tag{2.3}$$

定义（2.3）不依赖于将 γ 提升到 $\mathbb{R}^n$ 时的选择。

定义 2.2。设 $\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C})$ 是拟周期非退化曲线的空间

$$\gamma : \tilde{\mathbf{C}} \to \mathbb{RP}^{n-1}$$

满足：

(1) $G = \mathrm{PSL}(n)$：γ 存在朗斯基行列式为常数的提升；(2) $G = \mathrm{PSp}(n)$，n 为偶数：γ 是自对偶的；(3) $G = \mathrm{PSO}(n)$，n 为奇数：γ 是自对偶的。

记号 6。当 $G = \mathrm{PSL}(n)$ 时，记 $\mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ 为 $\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C})$。

命题 2.1 ([16], 定理 2.2.6). 设 $L : \Omega^{\frac{1-n}{2}}\mathbf{C} \to \Omega^{\frac{1+n}{2}}\mathbf{C}$ 为与准周期非退化曲线 $\gamma : \tilde{\mathbf{C}} \to \mathbb{RP}^{n-1}$相关联、主符号为1 的算子。那么，与对偶曲线 γ^* 相关联的算子为$(-1)^n L^*$。

因此，$\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C})$ 中的元素与 $\mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 中的算子一一对应，反之亦然。这定义了一个主 G-丛

$$\mathcal{D}_p : \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \to \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}),$$

其中，G 在 $\gamma \in \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C})$ 上的作用为

$$(g \cdot \gamma)(x) = g \cdot \gamma(x), \qquad g \in G,\ x \in \tilde{\mathbf{C}}.$$

将其单值化与 γ 关联起来，得到

$$\mathcal{D}_q : \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \to G, \qquad \gamma \mapsto h.$$

因此，通过转而考察解曲线，消除了圆上微分方程的单值化在共轭作用下的不确定性。注意，对于 G 上的共轭作用，$\mathcal{D}_q$ 是 G-等变的。

注 2.2. 对于 $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ 和 $\mathbf{C} = S^1$，取具有常系数的三阶线性常微分方程，可知以下行列式为 1 的若尔当形的共轭类属于 $\mathcal{D}_q$ 的像：

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha}\cos\beta & -e^{\alpha}\sin\beta \\ 0 & e^{\alpha}\sin\beta & e^{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix},$$

其中 λ、μ、$\nu > 0$ 两两不同。

G 对 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 的作用提升为万有覆盖 S^{n-1} 上的 $\tilde{G}$ 作用。如果

$$\gamma(\kappa(x)) = h \cdot \gamma(x),$$

且 Γ 是 γ 到 $\mathbb{RP}^{n-1}$的一个提升，则

$$\Gamma(\kappa(x)) = \tilde{h} \cdot \Gamma(x).$$

因此，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{D}'_q}} & \tilde{G} \\ & \searrow^{\mathcal{D}'_q} & \downarrow p \\ & & G \end{array}$$

其中 $\mathcal{D}'_q$ 是提升单值化，而 p 是万有覆盖映射。

命题 2.2. $\mathcal{D}'_q$ 是一个浸没。

证明。 设 $\mathbf{C} = S^1$，于是 $\kappa(x) = x + 1$。我们构造局部截面。令 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，并令 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 为指数映射。若 h属于 $\mathcal{D}'_q$的像，取 γ 使得$\gamma(x+1) = h \cdot \gamma(x)$。对于一个较小的 $\xi : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$，令 $\gamma_\xi(x) = \exp(\xi(x)) \cdot \gamma(x)$，并寻找一个接近 h 的 h_ξ，使得

$$\gamma_\xi(x+1) = h_\xi \cdot \gamma_\xi(x).$$

利用 $\gamma(x+1) = h \cdot \gamma(x)$，这可写为

$$\exp(\xi(x+1)) = h_\xi \, \exp(\xi(x)) \, h^{-1}.$$

对于小的 $\eta \in \mathfrak{g}$，考虑 $h_\xi = h \exp(\eta)$。由于 exp 在 0 附近是局部微分同胚，因此可以求解

$$\xi(x+1) = \eta + \mathrm{Ad}_h \, \xi(x)$$

关于 ξ 的方程（例如，在 $[0,1$ 上选取 ξ 并对其进行归纳定义），从而得到一个具有单值化 h_ξ 的族 γ_ξ。非退化性是开条件，因此这给出了经过 h 的局部截面。□

由于 $p : G \to G$ 是局部微分同胚，命题 2.2 表明 $\mathcal{D}'_q$ 是浸没。因此其像是开集；将其记为 G_+。

2.4. $\mathrm{Diff}_+(\mathbf{C})$ **的作用。**

记号 7. $\mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{C})$ 是与 κ 可交换的 $\mathbf{C}$ 的微分同胚群。令 $\mathrm{Diff}_+(\mathbf{C})$ 为 $\mathbf{C}$ 的保定向微分同胚群。

群 $\mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{C})$ 是 $\mathrm{Diff}_+(\mathbf{C})$ 的万有覆盖。它通过以下方式作用于 $\gamma \in \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C})$：

$$(F \cdot \gamma)(x) = \gamma(F^{-1}(x)).$$

此外，D 当且仅当+(C)通过拉回/推前作用于 r-密度。在局部坐标中 ，

$$F^* : \phi(x) \, |\partial x|^r \longmapsto \big(F'(x)\big)^r \, \phi(F(x)) \, |\partial x|^r.$$

无穷小地，对于 $v = h(x) \frac{d}{dx} \in$Vect(C)，

$$\mathcal{L}_v\big(\phi \, |\partial x|^r\big) = \big(h \, \phi' + r \, h' \phi\big) \, |\partial x|^r.$$

这通过以下方式在 $L \in \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 上诱导出一个作用

$$F \cdot L = F_* \circ L \circ F^*, \qquad F \in \mathrm{Diff}_+(\mathbf{C}),$$

且无穷小作用为 $[\mathcal{L}_v, L]$。

引理 2.5. 设 $L \in \mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 是一个具有如下形式的 n 阶算子

$$L = \frac{d^n}{d\theta^n} + \cdots + a_1(\theta)\frac{d}{d\theta} + a_0(\theta).$$

若 $F^{-1} \in \mathrm{Diff}_+(\mathbf{C})$ 作用于 L，则变换后的算子

$$\tilde{L} = \frac{d^n}{d\theta^n} + \cdots + \tilde{a}_1(\theta)\frac{d}{d\theta} + \tilde{a}_0(\theta)$$

满足以下变换规则：

- 对于 $n = 2$,

$$\tilde{a}_0 = F^* a_0 + \mathcal{S}(F).$$

- 对于 $n = 3$,

$$\tilde{a}_1 = (F')^2\, F^* a_1 + 2\,\mathcal{S}(F), \qquad \tilde{a}_0 = (F')^3\, F^* a_0 + F' F''\, F^* a_1 + \mathcal{S}(F)',$$

其中， F 的施瓦茨导数为

$$\mathcal{S}(F) = \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2.$$

记号 8。 对于 $\gamma \in \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C})$，令 $\left(\mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathbf{C}})\right)_\gamma$ 为其稳定子。

引理 2.6。 若 $F \in \left(\mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathbf{C}})\right)_\gamma$，则要么 F 在 $\tilde{\mathbf{C}}$上没有不动点，要么 $F = \mathrm{Id}$。

证明。 假设 $\mathbf{C} = S^1$ 且 $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbb{R}$。由于 γ 是浸入，对每个 $x \in \mathbb{R}$，都存在一个开区间 I_x，使得 γ 是一个嵌入。若 $\alpha \in I_x$ 且 $\beta = F(\alpha) \in I_x$，则

$$\gamma(\beta) = \gamma(F(\alpha)) = \gamma(\alpha).$$

在 I_x 上的单射性推出 $\beta = \alpha$。因此， $I_x \cap F(I_x) = \{\alpha \in I_x \mid F(\alpha) = \alpha\}$ 在 I_x中既开又闭，故要么 $I_x \cap F(I_x) = I_x$，要么 $= \varnothing$。因此，不动点集

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid F(\alpha) = \alpha\}$$

是开且闭的。如果 $S \neq \varnothing$，那么 $S = \mathbb{R}$ 和 $F = \mathrm{Id}$。 □

引理 2.7. $\left(\mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathbf{C}})\right)_\gamma$ 在 $\tilde{\mathbf{C}}$ 上适当不连续地作用。

证明。 如上所述，对每个 x，选取一个区间 I_x，使得 γ 在该区间上是一个嵌入。如果 $F \neq \mathrm{Id}$ 属于稳定子，那么 $I_x \cap F(I_x) = \varnothing$. □

命题 2.3。 映射 $\mathcal{D}_p \colon \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \to \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 是 $\mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathbf{C}})$-等变的。

证明。 这是 [16, 定理 2.2。3]。 □

3. Constructions via Drinfeld-Sokolov method

本节首先讨论一个 Morita 等价：一侧是积分主 G-丛 $Q \to \mathbf{C}$ 上联络空间的辛群胚，另一侧是~上 Cartan-Dirac 结构的拟辛群胚，路径空间 $\mathcal{P}(Q)$ 作为双模。然后，利用 Drinfeld-Sokolov 约化 [7], ，我们将这一 Morita 等价约化为两个群胚之间的等价：一个是积分 $\mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 上 Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构的辛群胚，另一个是积分$Y_n(\mathbf{C}$上 Dirac 结构的拟辛群胚。第一部分的参考文献是 [2, 3]。第二部分参见 [3, 7]。

3.1. Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构。 本节介绍 $\mathcal{R}_n^G(\mathbf{C})$ 上的 *Adler-Gelfand-Dikii* 泊松结构。主要参考文献为 [16, 附录 A.7]。假设 θ 是 $\mathbf{C}$ 上的坐标，并且

$$L \;=\; \frac{d^n}{d\theta^n} \;+\; a_{n-1}(\theta)\frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}} \;+\; \cdots \;+\; a_0(\theta),$$

是 $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 的一个元素，其中每个 $a_i \in C^\infty(\mathbf{C}\ \mathbb{R})$ 都是光滑函数。设

$$X \;=\; \sum_{j=1}^{n} X_j(\theta)\Big(\frac{d}{d\theta}\Big)^{-j}.$$

于是，利用莱布尼茨法则，

$$\Big(\frac{d}{d\theta}\Big)^{-1} \circ a(\theta) \;=\; a(\theta)\Big(\frac{d}{d\theta}\Big)^{-1} \;+\; \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a^{(i)}(\theta)\Big(\frac{d}{d\theta}\Big)^{-i-1}.$$

我们可以定义

$$X \cdot L \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} p_m\Big(\frac{d}{d\theta}\Big)^{m}.$$

利用 X，在 $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 上定义泛函 ℓ_X，其定义为

$$\ell_X(L) \;=\; \mathrm{res}(X\cdot L) \;=\; \int_{\mathbf{C}} p_{-1}(\theta)\,d\theta.$$

事实证明， $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 上的每个连续线性泛函都具有 ℓ_X 的形式，其中 X是某个伪微分算子。Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构的哈密顿算子

$$\pi^\sharp\colon T^*\mathcal{R}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow T\,\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$$

由下式给出

$$\ell_X \longmapsto V_X, \qquad V_X(L) \;=\; L(XL)_+ - (LX)_+L \quad \text{for } L\in\mathcal{R}_n(\mathbf{C}).$$

对于经典李群 G，我们将范围限制为满足以下性质的伪微分符号 X

$$\frac{d^n}{d\theta^n} + V_X(L) \;\in\; \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}).$$

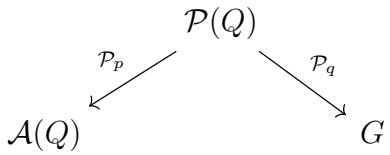
命题 3.1 ([16], 附录 A)。 *Adler-Gelfand-Dikii* 泊松结构的辛叶与具有固定单值化的非退化曲线的同伦类一一对应。

3.2. C 上的主丛。 设 G 是一个连通李群，$Q \to \mathbf{C}$ 是一个主G丛。定义

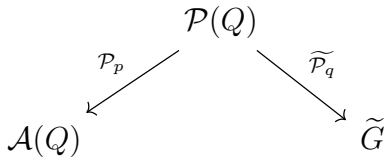
$$\mathcal{P}(Q) \;=\; \{\tau \in \Gamma(\pi^* Q) \mid \exists\, h \in G \text{ such that } \kappa^* \tau = h \cdot \tau\}.$$

记号9。我们用 $\mathcal{A}(Q)$ 表示 Q上的联络空间，并用 Gau(Q) 表示规范变换群。

我们有如下图表



其中，$\mathcal{P}_q\colon \mathcal{P}(Q) \to G$ 将 τ映射到 h，而 $\mathcal{P}_p\colon \mathcal{P}(Q) \to \mathcal{A}(Q)$ 将 τ映射到这样一个联络：其拉回具有 τ 作为水平截面。映射 $\mathcal{P}_p$ 和 $\mathcal{P}_q$ 分别是 Gau(Q) 和 G 在 $\mathcal{P}(Q)$ 上的交换作用所对应的商映射。如果 G 不是单连通的，那么 Gau(Q) 就不是连通的；在这种情况下，我们使用其单位连通分支 $\mathrm{Gau}_0(Q)$。于是有



$\widetilde{\ }$其中 $\mathcal{P}_q$ 是提升单值化。

3.3. () 上的泊松结构 $\mathcal{A}(Q)$。令 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$。仿射空间 $\mathcal{A}(Q)$ 的底层线性空间为 $\Omega^1(\mathbf{C}\ Q \times_G \mathfrak{g})$。群 Gau$(Q)$ 通过拉回作用于 $\mathcal{A}(Q)$。$\mathfrak{gau}(Q) = \Omega^0(\mathbf{C}\ Q \times_G \mathfrak{g})$ 在 $A \in \mathcal{A}(Q)$ 处的无穷小作用为

$$\partial_A\colon \Omega^0(\mathbf{C}, Q \times_G \mathfrak{g}) \to \Omega^1(\mathbf{C}, Q \times_G \mathfrak{g}).$$

选取一个不变度量 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 定义在 $\mathfrak{g}$ 上。我们将 $\mathfrak{gau}^*(Q) = \Omega^1(\mathbf{C}\ Q \times_G \mathfrak{g})$ 视为光滑对偶。Gau(Q) 在 $\mathcal{A}(Q)$ 上的作用是仿射的，其底层线性作用为余伴随作用。

注 3.1 ([3], §2.2). 给定李群 K 在仿射空间 E上的一个仿射作用，其底层线性 K-作用在 $\mathfrak{k}^*$上为余伴随作用，则存在一个中心扩张

$$0 \to \mathbb{R} \to \widehat{\mathfrak{k}} \to \mathfrak{k} \to 0$$

$\widehat{\ }$使得 $E \cong \mathfrak{k}_1^*$（一级仿射超平面）。此外

$$\widehat{\mathfrak{k}} = \mathrm{Aff}(E, \mathbb{R}), \qquad [\widehat{X}, \widehat{Y}](\mu) = -\langle \mathrm{ad}^*_X\, \mu, Y \rangle,$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于 $X,\ Y \in$ Aff$(E,\ \mathbb{R})$ 和 $X \in$ Hom$(E,\ \mathbb{R}) = \mathfrak{k}$。

应用注 3.1 并取 $E = \mathcal{A}(Q)$，我们得到中心扩张

$$0 \to \mathbb{R} \to \widehat{\mathfrak{gau}}(Q) \to \mathfrak{gau}(Q) \to 0,$$

带有李括号

$$[\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2](A) \;=\; \int_{\mathbf{C}} \langle \partial_A \xi_1, \xi_2 \rangle,$$

以及 $\mathcal{A}(Q) \cong \widehat{\mathfrak{gau}}_1^*(Q)$。因此，$\mathcal{A}(Q)$ 具有自然的泊松结构 [3, 例 A12]。Gau(Q)-作用的动量映射是包含映射

$$\widehat{\mathfrak{gau}}_1^*(Q) \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{gau}}^*(Q).$$

3.4. **2-形式 $\varpi_{\mathcal{P}}$。** 在 $\mathcal{P}(Q)$ 上存在一个自然的 2-形式 $\varpi_{\mathcal{P}}$，具有以下性质。

T定理 3.1 （[3], 定理 5.3）。 *(1)* $d\varpi_{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}_q}^* \eta$，其中 $\eta = -\frac{1}{12}\langle \theta^L, [\theta^L, \theta^L] \rangle$ 是 G 上的 *Cartan*3-形式。*(2)* $\varpi_{\mathcal{P}}$ 是 G-不变的，并且它与 G-作用的生成向量场的内缩满足

$$\iota_{X_{\mathcal{P}}} \varpi_{\mathcal{P}} \;=\; -\tfrac{1}{2}\, \widetilde{\mathcal{P}_q}^* \langle \theta^L + \theta^R, X \rangle.$$

(3) $\varpi_{\mathcal{P}}$ 是 Gau(Q)-不变的，并且对于 $\xi \in \mathfrak{gau}\,(Q)$，

$$\iota_{\xi_{\mathcal{P}}} \varpi_{\mathcal{P}} \;=\; -\,\mathcal{P}_p^* \langle dA, \xi \rangle.$$

事实上，$\varpi_{\mathcal{P}}$ 是Aut+(Q)-不变的。

证明。 参见 [3, 定理 5.3]。关于 $Q = S^1 \times G$，参见 [2, §8.4]。 □

我们有如下拟辛群胚之间的 Morita 等价：

$$\begin{array}{ccccc} (\mathrm{Gau}_0(Q) \ltimes \mathcal{A}(Q),\, \omega_1) & & (\mathcal{P}(Q),\, \varpi_{\mathcal{P}}) & & (G \ltimes \widetilde{G},\, \omega_2) \\ \Big\downarrow & \overset{\mathcal{P}_p}{\swarrow} & & \overset{\widetilde{\mathcal{P}_q}}{\searrow} & \Big\downarrow \\ \mathcal{A}(Q) & & & & \widetilde{G} \end{array} \tag{3.1}$$

其中 Gau$_0(Q) \ltimes \mathcal{A}(Q) = (\mathcal{P}(Q) \times_{\widetilde{G}} \mathcal{P}(Q))/G$，且 ω_1 由 $pr_1^*\varpi_{\mathcal{P}} - pr_2^*\varpi_{\mathcal{P}}$ 诱导。该拟辛群胚 $(G \ltimes G,\ \omega_2) \rightrightarrows G$ 积分了 G 上的 Cartan-Dirac 结构。若 $\mathbf{C} = S^1$，则 $Q \cong S^1 \times G$ 和

$$\mathcal{P}(Q) = \{\beta \colon \mathbb{R} \to G \mid \beta(t+1) = h\,\beta(t) \text{ for some } h \in G\}.$$

在这种情况下，$\mathcal{A}(Q) = \Omega^1(S^1,\ \mathfrak{g})$，且 Gau$(Q) = C^\infty(S^1,\ G)$。

3.5. **Drinfeld-Sokolov 嵌入。**

记号 10。除非另有说明，假设 $G = \mathrm{PSL}(n,\ \mathbb{R})$。

$_{n-1}$考虑秩为 n 的丛 $E = J^{n-1}(|\Lambda|^{-\ {}^2}\mathbf{C})$。它定义了射影丛 $\mathbf{P} := \mathbb{P}(E) \to \mathbf{C}$，进而定义一个主 PSL$(n,\ \mathbb{R})$-丛 $Q \to \mathbf{C}$。在任意 $x \in \mathbf{C}$ 处的一个提升定义了 E_x 的一个 SL$(n,\ \mathbb{R})$-标架，它在符号意义下唯一，因此对应于 π^*Q_x 的一个元素。对于一条准周期曲线 γ，我们得到 π^*Q 的一个准周期截面，即 $\mathcal{P}(Q)$ 的一个元素。这定义了

$$\hat{\imath} \colon \mathcal{D}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(Q). \tag{3.2}$$

如果$\mathbf{C} = S^1$，我们有平凡化

$$E_x = J_x^{n-1}\big(|\Lambda|_{\mathbf{C}}^{-\frac{n-1}{2}}\big) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad j^{n-1}(u) \longmapsto \begin{pmatrix} u(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

and

$$\hat{\iota}(\gamma) \;=\; \tau \;=\; \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Diff+(C) 在密度上的作用定义了 E 的丛自同构以及 $Q \to$C的主丛自同构，从而给出一个群同态

$$\mathrm{Diff}_+(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_+(Q),$$

它将正合列分裂

$$1 \to \mathrm{Gau}(Q) \to \mathrm{Aut}_+(Q) \to \mathrm{Diff}_+(\mathbf{C}) \to 1.$$

因此，Aut+(Q) = Diff+(C) ⋉Gau(Q)。映射 $\hat{\iota}$ 是 G-等变的，并下降到

$$\iota\colon \mathcal{R}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{A}(Q). \tag{3.3}$$

备注3.2。借助常微分方程理论， L 定义了一个联络 ∇ 于 E 其水平截面为$j^{n-1}(u_1)\ldots,$ $j^{n-1}(u_n)$，因此在 Q上有一个联络。这给出的映射与式（3.3）相同。

若 $\mathbf{C} = S^1$，则 $\mathcal{R}_n(S^1)$ 的每个元素都是一个 n 阶线性常微分方程，其主符号为 1。若

$$L = \frac{d^n}{d\theta^n} + a_{n-2}(\theta)\frac{d^{n-2}}{d\theta^{n-2}} + \cdots + a_0(\theta),$$

那么在 ι 下，它对应于伴随矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.6. **2-形式** $\varpi_{\mathcal{D}}$。定义 $\varpi_{\mathcal{D}} := \hat{\iota}^*\varpi_{\mathcal{P}}$ 于 $\mathcal{D}_n$(C)。于是：

∼∗**定理 3.2.** *(1)* $d\varpi_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_q'\,\eta$.

(2) $\varpi_{\mathcal{D}}$ 是 G-不变的，并且对于 $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$,

$$\iota_{X_{\mathcal{D}}}\varpi_{\mathcal{D}} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(X\,\widetilde{\mathcal{D}_q'}^{\,*}(\theta^L + \theta^R)\right).$$

˜*(3)* $\varpi_{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{C})$-不变的，并且对于 $v \in \mathrm{Vect}(\mathbf{C})$,

$$\iota_{v_{\mathcal{D}}}\varpi_{\mathcal{D}} \;=\; -\,\mathcal{D}_p^*\left(\int_{\mathbf{C}} (dL)\,v\right).$$

证明。 (a) 考虑

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\;\hat{\iota}\;} & \mathcal{P}(Q) \\ & \searrow^{\widetilde{\mathcal{D}_q'}} & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathcal{P}_q}} \\ & & \widetilde{G} \end{array}$$

并使用 $d\varpi_{\mathcal{D}} = \hat{\iota}^*(d\varpi_{\mathcal{P}}) = \hat{\iota}^*\widetilde{\mathcal{P}_q}^*\eta = \widetilde{\mathcal{D}'_q}^*\eta$ 根据定理 3.1。其余部分由G-等变性和交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\hat{\iota}} & \mathcal{P}(Q) \\ {\scriptstyle \mathcal{D}_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{P}_p} \\ \mathcal{R}_n(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{A}(Q) \end{array}$$

连同定理 3.13。 □

3.7. **Drinfeld-Sokolov 约化。**

记号 11。我们将垂直丛记为 $V\mathbf{P} \subseteq T\mathbf{P}$。

固定 $\sigma \in \Gamma(\mathbf{P})$。设 $\mathcal{B} \subset \mathrm{Gau}(Q)$ 保持 σ，且 $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$ 在 $\sigma^* V\mathbf{P}$ 上作用平凡。于是

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G} = \mathrm{Gau}(Q).$$

在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 上选取一个度量。它在 $Q \times_G \mathfrak{g}$ 上诱导出一个丛度量，并在 $\mathfrak{gau}(Q) = \Omega^0(\mathbf{C}, Q \times_G \mathfrak{g})$ 上诱导出一个非退化的$C^\infty(\mathbf{C})$-值双线性形式，从而在 $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})/\mathrm{Lie}(\mathcal{B})$ 与 $\mathrm{Lie}(\mathcal{N})$ 之间给出一个非退化配对。利用局部平凡化，$\mathrm{Lie}(\mathcal{G})/\mathrm{Lie}(\mathcal{B}) \cong \Gamma(\sigma^* V\mathbf{P})$。在 $\mathbf{C}$ 上积分，

$$\Omega^1(\mathbf{C}, \sigma^* V\mathbf{P}) \cong \mathrm{Lie}(\mathcal{N})^*, \tag{3.4}$$

其中 * 表示光滑对偶。

取 $\mathbf{P} = \mathbb{P}(E)$ 和 $E = J^{n-1}\big(|\Lambda|^{-\frac{n-1}{2}}_{\mathbf{C}}\big)$，则 $\mathbf{P}$ 的截面对应于E的线子丛。由正合列

$$0 \to \mathrm{Sym}^{n-1}(T^*\mathbf{C}) \otimes |\Lambda|^{-\frac{n-1}{2}}_{\mathbf{C}} \to J^{n-1}\big(|\Lambda|^{-\frac{n-1}{2}}_{\mathbf{C}}\big) \to J^{n-2}\big(|\Lambda|^{-\frac{n-1}{2}}_{\mathbf{C}}\big) \to 0,$$

我们得到线丛

$$\ell = \mathrm{Sym}^{n-1}(T^*\mathbf{C}) \otimes |\Lambda|^{-\frac{n-1}{2}}_{\mathbf{C}} = |\Lambda|^{\frac{n-1}{2}}_{\mathbf{C}}.$$

因此

$$\sigma^* V\mathbf{P} = \ell^* \otimes (E/\ell) = |\Lambda|^{-\frac{n-1}{2}}_{\mathbf{C}} \otimes J^{n-2}\big(|\Lambda|^{-\frac{n-1}{2}}_{\mathbf{C}}\big).$$

将 $\mathcal{A}(Q)$ 与 $\mathbf{P}$ 上的射影联络相对应。存在一个 $\mathcal{N}$-等变映射

$$\Psi \colon \mathcal{A}(Q) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{N})^*,$$

它将 $A \in \mathcal{A}(Q)$ 映射到复合映射 $T\sigma \colon T\mathbf{C} \to T\mathbf{P}$，再接上由 A 定义的垂直投影。如果 $\mathbf{C} = S^1$，利用岩泽分解 $G = KAN$（其中 $B = AN$），有 $\mathcal{B} = C^\infty(S^1, B)$、$\mathcal{N} = C^\infty(S^1, N)$、$\mathcal{A}(Q) = \Omega^1(S^1, \mathfrak{g}) \cong C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$，并且 Ψ 投影到严格下三角部分。

定理 3.3 (Drinfeld-Sokolov). 存在 $\Lambda \in$ 李代数$(\mathcal{N})^*$，它在余伴随$\mathcal{N}$-作用下保持不变，使得该包含映射

$$\mathcal{R}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{A}(Q)$$

的取值落在 $\Psi^{-1}(\Lambda)$ 并且是该水平集上 $\mathcal{N}$-作用的全局截面。因此

$$\mathcal{R}_n(\mathbf{C}) \cong \Psi^{-1}(\Lambda)/\mathcal{N}$$

作为泊松流形。

证明。 对于 $\mathbf{C} = S^1$ 取

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\Psi^{-1}(\Lambda) = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

在每个 $\mathcal{N}$-轨道中，都有一个唯一的如下形式的元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

参见 [7, §6.5], [15,附录 A。8],以及 [6, §9.4]。 □

考虑 $\hat{}\ \Psi = \Psi \circ \mathcal{P}_p \colon \mathcal{P}(Q) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{N})^*$。根据定理 3.3，$\hat{\iota} \colon \mathcal{D}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{P}(Q)$ 是 $\mathcal{N}$-作用在 $\hat{}\Psi^{-1}(\Lambda)$ 上的全局截面。定理 3 的第 3.1 部分蕴含

$$\iota_{\xi_{\mathcal{P}(Q)}} \varpi_{\mathcal{P}} = -\langle d\hat{\Psi}, \xi \rangle. \tag{3.5}$$

因此 $\varpi_{\mathcal{P}}|_{\hat{}\Psi^{-1}(\Lambda)}$ 是 $\mathcal{N}$-基本的，并下降为 $\mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ 上的一个 2-形式，它等于 $\varpi_{\mathcal{D}}$，因为 $\hat{}\ \iota^* \varpi_{\mathcal{P}} = \varpi_{\mathcal{D}}$。

3.8. **Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构的 Morita 等价**。根据定义，存在一个 G-等变映射

$$f : Y_n(\mathbf{C}) \to \widetilde{G}$$

它将 Cartan-Dirac 结构拉回为 $Y_n(\mathbf{C})$上的 Dirac 结构。此外，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathcal{D}}_q} & \searrow^{\widetilde{\mathcal{D}}'_q} & \\ Y_n(\mathbf{C}) & \xrightarrow[f]{} & \widetilde{G} \end{array}$$

我们有一个李群胚同态，由下式给出

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n(\mathbf{C}) & \xrightarrow{(\hat{\iota},\hat{\iota})} & \mathcal{P}(Q) \times_{\widetilde{G}} \mathcal{P}(Q) \\ \Downarrow\Downarrow & & \Downarrow\Downarrow \\ \mathcal{D}_n(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\hat{\iota}} & \mathcal{P}(Q) \end{array} \tag{3.6}$$

图表（3.6）是 G-等变的（对角作用），因此下降到

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n(\mathbf{C})/G & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \mathcal{P}(Q) \times_{\widetilde{G}} \mathcal{P}(Q)/G \\ \Downarrow\Downarrow & & \Downarrow\Downarrow \\ \mathcal{R}_n(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{A}(Q) \end{array} .$$

李 2-群 $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightrightarrows \mathcal{N}$ 在 $(\mathcal{P}(Q) \times_{\widetilde{G}} \mathcal{P}(Q)/G,\ \omega_1) \rightrightarrows \mathcal{A}(Q)$ 上的 2-作用具有动量映射

$$\Phi\colon \mathcal{P}(Q) \times_{\widetilde{G}} \mathcal{P}(Q)/G \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathcal{N})^* \times \mathrm{Lie}(\mathcal{N})^*, \qquad \Phi = (\Psi, \Psi) \circ (s, t),$$

以及基底动量映射 $\Psi\colon \mathcal{A}(Q) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{N})^*$。截面 $\tilde{\iota}$ 与每个 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$-轨道在 $\Phi^{-1}(\Lambda, \Lambda)$ 中恰好相交一次。应用约化（例如命题 A.2）可得到一个辛群胚

$$\begin{array}{c} (\mathcal{D}_n(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n(\mathbf{C})/G,\ \omega_{\mathrm{red}}) \\ \Downarrow s \quad t \\ \mathcal{R}_n(\mathbf{C}) \end{array}$$

它在 $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 上积分 Adler-Gelfand-Dikii 泊松结构。

引理 3.1。 2-形式 $pr_1^*\varpi_{\mathcal{D}} - pr_2^*\varpi_{\mathcal{D}}$ 下降为闭乘性2-形式 $\tilde{\omega}_1$，定义在$\big(\mathcal{D}_n(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n(\mathbf{C})\big)/G \rightrightarrows \mathcal{R}_n(\mathbf{C})$ 上。

Proof. 由 $\varpi_{\mathcal{D}}$ 的 G-不变性可知，形式 $pr_1^*\varpi_{\mathcal{D}} - pr_2^*\varpi_{\mathcal{D}}$ 是 G-基本的。此外，

$$d(pr_1^*\varpi_{\mathcal{D}} - pr_2^*\varpi_{\mathcal{D}}) = pr_1^*\widetilde{\mathcal{D}_q}^*\eta - pr_2^*\widetilde{\mathcal{D}_q}^*\eta = 0,$$

因此它是闭的。乘性在上方成立，并且可以下降。 □

由于 $\tilde{\iota}^*\omega_1 = \tilde{\omega}_1$，我们有 $\omega_{\mathrm{red}} = \tilde{\omega}_1$。将 Morita 等价（3.1）约化后得到

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{D}_n(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n(\mathbf{C})/G,\ \tilde{\omega}_1) & & (\mathcal{D}_n(\mathbf{C}),\ \varpi_{\mathcal{D}}) & & (G \ltimes Y_n(\mathbf{C}),\ \tilde{\omega}_2) \\ \Downarrow\Downarrow & \overset{\mathcal{D}_p}{\swarrow} & & \overset{\widetilde{\mathcal{D}_q}}{\searrow} & \Downarrow\Downarrow \\ \mathcal{R}_n(\mathbf{C}) & & & & Y_n(\mathbf{C}) \end{array} \tag{3.7}$$

定理 3.4. 设 G 是以下群之一：$\mathrm{PSL}(n)$、$\mathrm{PSp}(n)$（n为偶数），或$\mathrm{PSO}(n)$（n为奇数）。那么，以下拟辛群胚之间存在 *Morita* 等价：

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C})/G,\ \tilde{\omega}_1) & & (\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C})\ \varpi_{\mathcal{D}}) & & (G \ltimes Y_n(\mathbf{C})\ \tilde{\omega}_2) \\ \Downarrow\Downarrow & \overset{\mathcal{D}_p}{\swarrow} & & \overset{\widetilde{\mathcal{D}_q}}{\searrow} & \Downarrow\Downarrow \\ \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}) & & & & Y_n(\mathbf{C}) \end{array} \tag{3.8}$$

证明。当 $G = \mathrm{PSL}(n)$ 时，结论由（3.7）得出。对于一般的 G，将所有对象限制到G-子流形 $\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \subset \mathcal{D}_n(\mathbf{C})$。□

引理 3.2。存在一个李群胚态射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathbf{C}}) \ltimes \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\phi} & (\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}))/G \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}) \end{array}$$

将 (F, L) 映射到 $(\gamma, F\cdot\gamma)$，其中 γ 是与 L 对应的准周期非退化曲线。

证明。考虑

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathbf{C}}) \ltimes \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \end{array} \tag{3.9}$$

˜，其中 $\phi(F,\gamma) = (\gamma, F\cdot\gamma)$。图表 (3.9) 是 G-等变的，并下降到

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathbf{C}}) \ltimes \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\phi} & (\mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}) \times_{Y_n(\mathbf{C})} \mathcal{D}_n^G(\mathbf{C}))/G \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathcal{R}_n^G(\mathbf{C}) \end{array} .$$

□

Appendix A. Reduction of symplectic Lie groupoids by pair Lie 2-group

本节讨论对李2-群的哈密顿作用下辛群胚的约化。通过这一过程，我们得到新的辛群胚。

A.1. 李2-群对李群胚的商。

定义 A.1 ([13], 第2节.2). 一个李 *2*-群 是李群胚范畴中的一个内群。等价地，它是一个李群胚 $H_1 \rightrightarrows H_0$，满足 H_1 和 H_0 都是李群，且 $H_1 \rightrightarrows H_0$ 的所有结构映射都是李群同态。

例 A.1. 设 H 是一个李群。

(1) 李群胚 $H \rightrightarrows H$ 的源映射、靶映射和单位映射均为恒等映射，因此是一个李2-群。

(2) 对群胚 $H \times H \rightrightarrows H$ 是一个李2-群。

定义 A.2 ([13], 第2节.2). 一个李*2*-代数 是李群胚范畴中的一个内李代数：一个李群胚 $\mathfrak{h}_1 \rightrightarrows \mathfrak{h}_0$，其中 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_0$ 是李代数，且所有结构映射都是李代数同态。

注记 A.1。若 $H_1 \rightrightarrows H_0$ 是李 2-群，则通过微分可得到李2-代数 $\mathrm{Lie}(H_1) \rightrightarrows \mathrm{Lie}(H_0)$。

定义 A.3（[13], 第3节）。一个 李 2-群的左 2-作用 $H_1 \rightrightarrows H_0$ 在李群胚上$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ 是一个李群胚同态

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^0) : (H_1 \times \mathcal{G} \rightrightarrows H_0 \times M) \longrightarrow (\mathcal{G} \rightrightarrows M),$$

来自乘积群胚，其中 $\mathcal{A}^1$ 和 $\mathcal{A}^0$ 是通常的左李群作用。如果 $\mathcal{A}^1$ 和 $\mathcal{A}^0$ 均为自由作用（分别为适当作用），则称此 2-作用为自由（分别为适当）。

记号12。对于李 2-群 $H_1 \rightrightarrows H_0$，用 s_H, t_H, u_H分别表示源、靶和单位。对于李群胚 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$，记作 $s_\mathcal{G}, t_\mathcal{G}, u_\mathcal{G}$。

注 A.2（[13], 第3节）。给定 $H_1 \rightrightarrows H_0$ 在 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$上的左 2-作用，我们有 e:
(1) $s_\mathcal{G}(h_1 \cdot g) = s_H(h_1) \cdot s_\mathcal{G}(g)$.(2) $t_\mathcal{G}$
$(h_1 \cdot g) = t_H(h_1) \cdot t_\mathcal{G}(g)$.(3) $u_\mathcal{G}(h_0 \cdot m)$
$= u_H(h_0) \cdot u_\mathcal{G}(m)$.
对所有 $h_1 \in H_1$, $h_0 \in H_0$, $g \in \mathcal{G}$, $m \in M$。

命题 A.1. 若李 2-群 $H_1 \rightrightarrows H_0$ 通过左 2-作用在李群胚$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ 上自由且适当地作用，则商 $\mathcal{G}/H_1 \rightrightarrows M/H_0$ 是李群胚。

证明。自由性和适当性意味着 $\mathcal{G}/H_1$ 和 M/H_0 是光滑流形。定义

$$s([g]) = [s_\mathcal{G}(g)], \qquad t([g]) = [t_\mathcal{G}(g)].$$

由备注 A.2可知，这些定义良好。性质 (3) 蕴含 $u_\mathcal{G} : M \to \mathcal{G}$ 下降为单位映射 u: $M/H_0 \to \mathcal{G}/H_1$。定义乘法和逆映射如下

$$[g_1] \cdot [g_2] = [g_1 g_2] \quad \text{whenever } s([g_1]) = t([g_2]), \qquad [g]^{-1} = [g^{-1}].$$

这些映射定义良好且光滑，诱导出的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}/H_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \longrightarrow & M/H_0 \end{array}$$

定义了李群胚的一个同态。 □

例 A.2 ([5])。设李群 G 作用在流形 M上，且 $H \subseteq G$ 是一个子群。考虑作用群胚 $G \ltimes M \rightrightarrows M$ 以及李 2-群 $H \times H \rightrightarrows H$在 $G \ltimes M \rightrightarrows M$ 上的 2-作用，其定义为

$$(h_1, h_2) \cdot (g, m) = (h_1 g h_2^{-1}, h_2 \cdot m).$$

那么 $(G \ltimes M)/(H \times H) \rightrightarrows M/H$ 是一个李群胚。

A.2. **辛群胚的约化**。

定义 A.4. 设 $(\mathcal{G}, \omega) \rightrightarrows (M, \pi)$ 是一个辛群胚。李 2-群 $H \times H \rightrightarrows H$在 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$上的左 2-作用称为哈密顿 的，若 $H \times H$作用于 $(\mathcal{G}, \omega)$，其动量映射为 $\mu_\mathcal{G}$，且 H通过泊松微分同胚作用于 (M, π)，其动量映射为 μ_M，并且诱导映射

$$(\mu_\mathcal{G}, \mu_M) : \mathcal{G} \rightrightarrows M \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)^* \times \mathrm{Lie}(H)^* \rightrightarrows \mathrm{Lie}(H)^* \tag{A.1}$$

是李群胚的一个态射，即它与源、靶、单位元、乘法和求逆相容。

命题 *A.2.* 设李 2-群 $H \times H \rightrightarrows H$ 在辛群胚 $(\mathcal{G}, \omega) \rightrightarrows (M, \pi)$上有哈密顿作用。设 $x \in Lie(H)^*$ 是动量映射μ_M的一个正则值，并且 $(x, x) \in Lie(H)^* \times Lie(H)^*$ 是动量映射 $\mu_{\mathcal{G}}$的一个正则值。假设 x 的稳定子和 (x, x) 的稳定子分别为 H 和 $H \times H$。若 $H \times H$ 在$\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(x, x)$上的作用以及 H 在 $\mu_M^{-1}(x)$ 上的作用均自由且适当，则商

$$(\mathcal{G}//(H \times H), \omega_{\mathrm{red}}) \rightrightarrows (M//H, \pi_{\mathrm{red}})$$

是一个辛群胚。

证明。 由于 $(x, x) \rightrightarrows x$ 是一个（单位）李群胚，且 (A.1) 是一个群胚态射，因此水平集 $\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(x, x) \rightrightarrows \mu_M^{-1}(x)$ 构成一个李子群胚。由命题 A.1，商 $\mathcal{G}//(H \times H) \rightrightarrows M//H$ 是一个李群胚。根据 Marsden–Weinstein 约化， ω_{red} 是 $\mathcal{G}//(H \times H)$ 上的一个辛形式；其乘性继承自 ω。

存在一个典范的李代数胚同构

$$\rho_\omega : A(\mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} T^*M,$$

其特征为 $\langle \rho_\omega[\xi], v\rangle = \omega(\xi, v)$，其中 $[\xi] \in \nu(\mathcal{G}, M) = A(\mathcal{G})$ 且 $v \in TM$。类似地定义$\rho_{\omega_{\mathrm{red}}}$。为了证明底泊松结构等于 π_{red}，只需证明

$$\rho_{\omega_{\mathrm{red}}} : A(\mathcal{G}//(H \times H)) \xrightarrow{\cong} T^*(M//H) \cong T^*M//H$$

是一个李代数胚同构。这可由交换图得出

$$\begin{array}{ccccc} A(\mathcal{G}) & \longleftarrow & A(\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(x,x)) & \longrightarrow & A(\mathcal{G}//(H\times H)) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_\omega} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\omega_{\mathrm{red}}}} \\ T^*M & \longleftarrow & \mu_{T^*M}^{-1}(x) & \longrightarrow & T^*(M//H) \end{array}$$

其中 μ_{T^*M}是 T^*M上提升后的 H作用的动量映射。特别地， $A(\mathcal{G}//(H \times H))$ 是 $A(\mathcal{G})$ 的约化，结论由此得证。□

例 A.3. 设 (M, ω) 是一个带有李群 G 的哈密顿作用和动量映射 $\mu_M : M \to \mathfrak{g}^*$ 的辛流形，使得 G 在 $\mu_M^{-1}(0)$ 上自由且适当作用。考虑带有辛形式 $(\omega, -\omega)$ 的 $\mathcal{G} = M \times M \rightrightarrows M$。$G \times G$ 在 $M \times M$上的作用是哈密顿作用，其动量映射为 $\mu_{\mathcal{G}} = (\mu_M, \mu_M)$。李 2-群 $G \times G \rightrightarrows G$ 在 $\mathcal{G}$上作哈密顿作用，约化得到辛群胚

$$(M_{\mathrm{red}} \times M_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}}, -\omega_{\mathrm{red}}) \rightrightarrows (M_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}}),$$

其中 $M_{\mathrm{red}} = \mu_M^{-1}(0)/G$。

例 A.4（旋转作用下的对群胚约化）。 设 $M = \mathbb{R}^2$ 具有 $\omega = dx \wedge dy$，且 $G = S^1$通过旋转作用，其动量映射为 $\mu_M(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$。设 $\mathcal{G} = M \times M \rightrightarrows M$为带有乘法形式 $\Omega = pr_1^*\omega - pr_2^*\omega$的对群胚，且 $G \times G \rightrightarrows G$ 通过 $(h_1, h_2) \cdot (m_1, m_2) = (h_1 \cdot m_1, h_2 \cdot m_2)$作用。于是该 2-作用是哈密顿的，且 $\mu_{\mathcal{G}} = (\mu_M, \mu_M)$。对于 $x = r^2/2 > 0$，在 $\mu_M^{-1}(x) \cong S^1$上满足自由性/适当性，且约化辛群胚是单点的单位群胚：

$$(\mathcal{G}//(G \times G), \Omega_{\mathrm{red}}) \rightrightarrows (M//G, \pi_{\mathrm{red}}) \cong (\{*\}, 0) \rightrightarrows \{*\}.$$

例 A.5（作用群胚与共轭作用）。 设李群 G 通过共轭作用于自身，并考虑 $\mathcal{G} = G \ltimes G \rightrightarrows G$。李 2-群 $G \times G \rightrightarrows G$ 通过 $(h_1, h_2) \cdot (g, x) = (h_1 g h_2^{-1},\ h_2 x h_2^{-1})$作用。在作用自由/适当的开集上，对于正则共轭类 $\mathcal{C} \subset G$，将 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{C}$ 处约化，可得到一个有限维辛群胚，它积分了 $G//G$中 $[\mathcal{C}]$邻域上的诱导泊松结构。这提供了对群胚约化的群值（Cartan–Dirac）对应形式。

References

[1] Mark Adler. 关于形式伪微分算子的迹泛函及 Korteweg–de Vries 型方程的辛结构。数学新进展，50(3)：219–248，1978。[2] Anton Alekseev 和 Eckhard Meinrenken. 李群上路径纤维化的 Atiyah代数丛。数学物理通讯，90(1)：23–58，2009。[3] Anton Alekseev 和 Eckhard Meinrenken. 关于余伴随 Virasoro作用。几何与物理杂志，195：105029，2024。[4] Alexander Beilinson 和 Vladimir Drinfeld. Opers。*arXiv* 预印本 *math/0501398*，2005。[5] Christian Blohmann、Stefano Ronchi 和 Alan Weinstein. 泊松流形上的哈密顿李代数丛。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.03503*，2023。[6] Leonid A. Dickey. 孤子方程与哈密顿系统，第 26 卷。World Scientific，2003。[7] Vladimir G. Drinfel'd 和 Vladimir V. Sokolov. 李代数与 KdV 型方程。苏联数学杂志，30：1975–2036，1985。[8] Rui Loja Fernandes、Juan-Pablo Ortega 和 Tudor S. Ratiu. 泊松几何中的动量映射。美国数学杂志，131(5)：1261–1310，2009。[9] Edward Frenkel 和 David Ben-Zvi. 顶点代数与代数曲线。美国数学会，2002。[10] Izrail Moiseevich Gel'fand 和 Leonid A. Dickey. 一族与可积非线性微分方程相关的哈密顿结构。苏联科学院应用数学研究所预印本，(136)，1978。[11] Izrail Moiseevich Gel'fand 和 Leonid A.Dikii. 斯图姆–刘维尔方程预解算子的渐近行为及 KdV方程代数。俄罗斯数学调查，30(5)：77–121，1975。[12] William Mark Goldman. 不连续群与欧拉类。加利福尼亚大学伯克利分校，1980。[13] Juan Sebasti´an Herrera-Carmona 和 Fabricio Valencia. 黎曼群胚上的等距李二群作用。几何分析杂志，33(10)：323，2023。[14]Boris A. Khesin 和 Boris Z. Shapiro. Zamolodchikov代数的非退化曲线与轨道分类。数学物理通讯，145：357–362，1992。[15] Boris A. Khesin 和 Robert Wendt. 无限维群的几何，第 51 卷。Springer，2009。[16]Valentin Ovsienko 和 Serge Tabachnikov. 射影微分几何新旧论：从施瓦茨导数到微分同胚群的上同调，第 165 卷。剑桥大学出版社，2004。[17] Valentin Yu. Ovsienko 和 Boris A. Khesin. Gel'fand–Dikii括号的辛叶与非退化曲线的同伦类。函数分析及其应用，24(1)：33–40，1990。[18] Graeme Segal. 某些无限维群的酉表示。数学物理通讯，80(3)：301–342，1981。[19] Ping Xu. 动量映射与 Morita 等价。微分几何杂志，67(2)：289–333，2004。

Department of Mathematics, University of Toronto, 40 St. George Street, Toronto,ON, Canada M5S 2E4电子邮件地址: Ahmadreza.Khazaeipoul@mail.utoronto.ca