arXiv:2601.08638v1 [math.RT] 13 Jan 2026

仿射 Kac-Moody 超代数的共轭定理

PELEG BAR-SEVER

ABSTRACT. 在本学位论文中，我们将最初针对可对称化 Kac-Moody 代数建立的 Cartan 子代数共轭定理，推广到更广泛的仿射 Kac-Moody 超代数背景下。在此过程中，我们获得了若干成果，深化了对仿射 Kac-Moody 超代数结构的理解。此外，我们还得到了关于可对称化仿射 Kac-Moody 超代数虚根空间中关系的研究结果，为理解其代数性质提供了新的视角。

1. INTRODUCTION

1983 年，Peterson 和 Kac 为可对称化 Kac-Moody 代数建立了一项基本结果：任意两个 Cartan 子代数都可由内自同构群共轭得到（见 [11]）。在此背景下，Cartan 子代数被定义为极大交换且 ad-可对角化的子代数。从某种意义上说，结合 [9]，中的命题5.9，这完成了 Kac-Moody 代数的分类工作：它表明，同构的 Kac-Moody 代数必然具有相同的 Cartan 矩阵，至多相差指标的置换以及可逆对角矩阵的左乘。

在本学位论文中，我们旨在将这一共轭定理推广到仿射 Kac-Moody 超代数的情形，这自然会带来新的挑战。我们的主要结果如下：

定理。 设 $\mathfrak{g}$ 为不可分解仿射 *Kac-Moody* 超代数， $\mathfrak{h}$为其 *Cartan* 子代数，并设 $\mathfrak{a}$ 为任意具有 *Cartan* 子代数 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$. 的 *Kac-Moody* 超代数。若$\iota$ ： $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}$ 是一个同构，且 $\mathfrak{h}' = \iota^{-1}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{g}$，则对于某个内自同构，有 $\mathfrak{h}' = \phi(\mathfrak{h})$ $\mathfrak{g}$.

这一结果尤为重要，因为它适用于所有仿射 Kac-Moody 超代数，包括两族不可对称化代数： $S(2|1; b)$ 和 $\mathfrak{q}_n^{(2)}$.

将共轭定理推广到仿射超代数情形，会引入额外的微妙问题。与经典型情形不同，在后者中，共轭性意味着同构的 Kac-Moody 代数的 Cartan 矩阵仅相差一个指标置换和左乘一个可逆对角矩阵；而超代数情形则需要更广阔的视角。具体而言，还必须考虑各向同性反射。第5章将详细阐述这一推广的具体公式。

本文的结构安排如下：

第2章 通过概述 Kac-Moody 李超代数（包括其定义和基本性质）奠定基础。我们介绍了一种略作修改的构造方法，这种方法更简洁，旨在使理解更加直观。此外，我们引入了主子代数这一概念，它在共轭定理的证明中发挥着核心作用。最后，我们描述极小 Kac-Moody 群的构造；该构造最初由 Kac 和 Peterson（[11]）提出，随后在各种教科书和论文中得到了广泛探讨（例如，[12]）。

第3章 聚焦于仿射 Kac-Moody 超代数的结构性质，涵盖其三角分解、根系和仿射化过程等关键概念。除其他相关结果外，我们还给出了一个统一的证明，避免逐个情形分析，证明 Serganova 最初提出的一个定理（见 [14]）：可对称化仿射 Kac-Moody 超代数的偶部可用主代数模来描述。

在**第4章** 中，我们探讨仿射型可对称化 Kac-Moody 超代数的虚根空间之间的关系，并计算其维数。对于 $\mathfrak{g} = A(2k,\ 2l)^{(4)}$，这一特定情形，我们揭示了 $\mathcal{K}$，具有一种显著不同的结构，其中 $\mathcal{K}$ 表示由虚根空间和 Cartan 子代数张成的子代数。我们证明如下定理：

定理。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个不可分解仿射可对称化 *Kac-Moody* 超代数。

(i) 子代数 $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K} \cap \mathfrak{g}_0$ 是一个无限维 *Heisenberg* 李代数。*(ii)* 若 $\mathfrak{g} \neq A(2k|2l)^{(4)}$，则 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$，因此由 (i) 可得：

$$[\mathfrak{g}_{s\delta}, \mathfrak{g}_{q\delta}] = \begin{cases} 0 & s+q \neq 0 \\ \mathbb{C}K & s+q = 0 \end{cases}$$

(iii) 若 $A(2k|2l)^{(4)}$，则 $\mathfrak{g}_{s\delta} \subset \mathcal{K} \cap \mathfrak{g}_1$ 当且仅当 $s = \pm 1$ 或 $s = \pm 3$，其中

$$\overline{s} = s \mod 4.$$

如果 $i + j = 0$，那么 $[\mathfrak{g}_{i\delta}, \mathfrak{g}_{j\delta}] = \mathbb{C}K$. 否则，我们有：

$$[\mathfrak{g}_{i\delta}, \mathfrak{g}_{j\delta}] = \begin{cases} 0 & i \neq 0,\ \overline{i} = 0 \\ 0 & \overline{i+j} = 0 \\ \mathfrak{g}_{(i+j)\delta} & \overline{i} = 2,\ \overline{j} = 1, 3 \\ \mathbb{C}x, \quad x \text{ 是} \mathfrak{g}_{(i+j)\delta} \text{中的一个非零元素} & \overline{i} = \overline{j} = 1, 3 \end{cases}$$

在本章中，我们将依赖若干我们所确立的结果，这些结果涉及 $B(k|l)$ 和 $D(k|l)$。这些结果已在附录中明确表述并予以证明。

最后，在**第5章**中，我们证明本学位论文的主定理，讨论可对称化情形和不可对称化情形。我们详细阐述这一共轭结果及其推论背后的动机。

1.1. 致谢。 首先，我谨向我的导师 Maria Gorelik 教授致以最诚挚的谢意。她耐心无边、待人亲切，并给予我卓越的指导；为了帮助我探索这一广博而深奥的学科，她投入了大量时间。她的指导不仅使我得以理解并深入钻研这一富有挑战性的课题，也让我能够为该领域持续进行的研究贡献力量。

我还要感谢我的人生伴侣、家人和朋友一直以来给予的爱与支持。知道自己始终可以依靠他们，在这段旅程中一直是我的巨大力量和鼓励来源。

最后，我感谢魏茨曼科学研究所和我的同僚，为学习和研究营造了一个卓越而愉快的环境。他们所创造的合作且富有启发性的氛围，远远超出了我的期望。本研究得到 Minerva 基金会的支持，资金来自德国联邦教育与研究部。

2. Kac-Moody Superalgebras

广义地说，Kac-Moody 超代数是 Kac-Moody 代数在“超”情形下的推广。定义这一概念有几种等价的方式。本文采用的方法是将嘉当数据定义为一个方阵 [14] 以及一组指标 A、和一个指标集合 τ. 。我们对这一嘉当数据施加某些公理，并引入反射公式；我们要求，将这些反射作用于矩阵 A 和集合 τ后得到的新矩阵和集合仍满足这些公理。在此背景下，我们引入该嘉当数据的一个实现，并据此构造 Kac-Moody 超代数，其过程类似于非超情形中第 1 章 [9], 所述的过程，但作了若干调整。特别地，当且仅当 e_i、 f_i 时，我们将生成元视为奇元 $i \in \tau$.。然而，乍看之下，我们所施加的公理似乎有些任意。

文献 [2] 提出了定义 Kac-Moody 超代数的另一种方法。这种方法与前一种方法相似，但适用范围更广。本章将从不同的角度进行阐述，为文献 [2] 中的定义提供一种更简短的替代方案。此外，这种方法或许能帮助我们更直观地理解前述定义中对矩阵 A 施加的公理。我们的方法与 H. Yamane 用于可对称化仿射 Kac-Moody 超代数的方法相似（参见 [18]）。

2.1. 准备工作。 嘉当数据 是一对 (A, τ)，其中 $A = (a_{ij})$ 是任意复数$\ell \times \ell$矩阵，且 $\tau \subset \{1, \dots, \ell\}$ 是一个子集。

嘉当数据的实现 是赋予该嘉当数据的三元组 $(\mathfrak{h}, \Sigma, \Sigma^\vee)$，其中 $\mathfrak{h}$ 是维数为 $2l-$秩A的偶向量空间， $\Sigma = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\ell}$ 是 $\mathfrak{h}^*$的线性无关子集， $\Sigma^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{i=1}^{\ell}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的线性无关子集，并且 $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$。

给定嘉当数据的实现后，我们构造所谓的半成品~李超代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}(A,\ \tau)$。这是一个由符号 $\widetilde{e}_i,\ f_i,\ i=1,\ \ldots\ldots,\ \ell$ 生成的李超代数；当且仅当 $i\in\tau$，时，这些符号为奇；此外还由 $\mathfrak{h}$，生成，并满足以下定义关系：

(i) $\mathfrak{h}$ is commutative.
(ii) $[h,\widetilde{e}_i]=\alpha_i(h)\,\widetilde{e}_i\ \ \forall h\in\mathfrak{h}$
(iii) $\left[h,\widetilde{f}_i\right]=-\alpha_i(h)\,\widetilde{f}_i\ \ \forall h\in\mathfrak{h}$
(iv) $\left[\widetilde{e}_i,\widetilde{f}_j\right]=\delta_{ij}\alpha_i^\vee$

于是我们定义反对称李超代数 $\mathfrak{g}(A,\tau):=\widetilde{\mathfrak{g}}(A,\tau)\ /\mathfrak{I}$，其中 $\mathfrak{I}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{g}}(A,\tau)$ 中与 $\mathfrak{h}$. 交集为零的极大理想。通常，在~记号中省略 τ，将 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 记作 $\mathfrak{g}(A)$。我们用 e_i 和 f_i 表示 $\widetilde{e}_i$、f_i 在$\mathfrak{g}(A,\tau)$ 中的像，并将 $\mathfrak{h}$ 与其在 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 中的像等同。元素 e_i、f_i 称为 Chevalley 生成元，而 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 的子代数 $\mathfrak{h}$ 称为 Cartan 子代数。

第一章中的每个定义和引理 [9], 对 $\mathfrak{g}(A,\ \tau)$ 均仍然成立（命题 1.7 (b) 除外；它对 $A\neq(0)$ 成立），定理 1.2 也包括在内，由此得到三角分解 $\mathfrak{g}(A,\ \tau)=\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$，其中 $\mathfrak{n}$（分别由 $\mathfrak{n}^-$）生成，而 $\{e_i\}_{i=1}^l$（分别由 $\{f_i\}_{i=1}^l$）生成，并给出相对于 根空间分解，其对应于 $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g}(A,\tau)=\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha=\{x\in\mathfrak{g}(A)\ |\ [h,x]=\alpha(h)\ x\ \forall h\in\mathfrak{h}\}$，且 $\Delta=\{\alpha\in\mathfrak{h}^*\,|\,\mathfrak{g}_\alpha\neq0,\alpha\neq0\}$. 集合 Δ 称为根系，Δ 的元素称为根，而 $\mathfrak{g}_\alpha$ 称为 α. 的根空间。可以看出，对于每个根 α，$\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}(A,\ \tau)_0$ 或 $\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}(A,\ \tau)_1$. 在前一种情况下，根 α 称为偶，在后一种情况下称为奇。

三角分解的存在意味着：

$$\Delta=\Delta^+(\Sigma)\coprod(-\Delta^+(\Sigma))\quad\text{where}\quad\Delta^+(\Sigma)=\Delta\cap\mathbb{N}\Sigma.\ [1] \tag{1}$$

$\Delta^+(\Sigma)$（分别为 $-(\Delta^+(\Sigma))$ 中的根称为正（分别为负）。

我们称 $(\mathfrak{g}(A,\tau)\ \mathfrak{h},\Sigma,\Sigma^\vee)$ 为与嘉当数据相关联的四元组。若存在李超代数同构 ϕ: $\mathfrak{g}(A,\tau)\ \xrightarrow{\sim}\ \mathfrak{g}(A_1,\tau)$，使得 $\phi(\mathfrak{h})\ =\mathfrak{h}_1,\ \phi(\Sigma^\vee)=\Sigma_1^\vee$，且 $\phi^*(\Sigma_1)\ =\Sigma$，则称四元组 $(\mathfrak{g}(A,\tau)\ \mathfrak{h},\Sigma,\Sigma^\vee)$ 和 $(\mathfrak{g}(A_1,\tau)\ \mathfrak{h}_1,\Sigma_1,\Sigma_1^\vee)$ 同构。

[1] $\mathbb{N}$ 表示严格正整数集合。

可以看出，若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$，则 $\mathfrak{g}(A)=\mathfrak{g}(A_1)\times\mathfrak{g}(A_2)$。我们称 $\mathfrak{g}(A)$ 不可分解的，如果经过任意指标置换（即对矩阵的行进行置换，并对列进行相同的置换）后， A 都不能写成上述形式。

$\mathfrak{g}(A,\ \tau)$ 称为拟单，如果对于任意理想 $i\subset\mathfrak{g}(A,\ \tau)$，要么 $i\subset\mathfrak{h}$，要么 $i+\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(A,\ \tau)$。等价地，如果 $\mathfrak{g}(A,\ \tau)$ 的每个理想要么包含于 $\mathfrak{g}(A,\ \tau)$ 的中心，要么包含 $[\mathfrak{g}(A,\ \tau)\ \mathfrak{g}(A,\ \tau)]$.，则称其为拟单

我们称 A 正则，如果对任意 $i,\ j\in\tau,\ a_{ij}=0$ 蕴含 $a_{ji}=0$. 根据 [14] 引理 2.4，若 A 是正则的，则 $\mathfrak{g}(A,\ \tau)$ 拟单当且仅当 A 不可分解且非零。

我们称 $\mathfrak{g}(A,\ \tau)$可对称化，如果存在一个可逆对角矩阵 D，和一个对称矩阵 B，使得 $A=DB.$。$\mathfrak{g}(A,\ \tau)$ 与 $\mathfrak{g}(DA,\ \tau)$ 之间存在一个同构，其定义为将 $\alpha_i^\vee$ 映射到 $d_{ii}\alpha_i^\vee$，其中 $\alpha_i^\vee\in\Sigma^\vee$ 且 $D=\mathrm{diag}(d_{11},\ \ldots\ldots,\ d_{ll})$。

对于每个李超代数 $\mathfrak{g}$，我们用 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ 表示其中心。于是有：

$$\mathfrak{g}^{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}=\mathfrak{c}(\mathfrak{g}), \tag{2}$$

其中

$$\mathfrak{g}^{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}=\{x\in\mathfrak{g}\mid[x,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]=0\}.$$

2.2. 反射与对偶基。若子集 $\Sigma_1\subset\Delta$ 线性无关且满足 $\Delta=\Delta^+(\Sigma_1)\coprod(-\Delta^+(\Sigma_1))$，则称其为根基。若存在四元组 $(\mathfrak{g}(A')\ \mathfrak{h}',\ \Sigma',\ \Sigma'^\vee)$ 以及李超代数同构 ϕ：$\mathfrak{g}(A)\longrightarrow\mathfrak{g}(A')$，使得 $\phi(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}'$ 且 $\phi^*(\Sigma')=\Sigma_1$.，则进一步称根基 Σ_1 为对偶基。

若存在一个根基 Σ'' 满足以下性质，则称基 $\Sigma'\subset\Delta$ 在根 $\alpha\in\Delta^+(\Sigma')$，处可反射的：

$$\Delta^+(\Sigma')\setminus(\mathbb{N}\alpha)=\Delta^+(\Sigma'')\setminus(-\mathbb{N}\alpha).$$

在这种情况下，我们记作 $\Sigma''=r_\alpha\Sigma'$，并称对应关系 $r_\alpha:\Sigma'\to\Sigma''$ 反射。若Σ'' 存在，则其唯一。术语 reflexion（而非 reflection）见于 [2]。

2.2.1. **断言。** 设 Σ' 是一个在根 α处可反射的根基，且 $\Sigma''=r_\alpha\Sigma'$. 则：

(i) $\alpha\in\Sigma'$、$-\alpha\in\Sigma''$ 和 $r_{-\alpha}\Sigma''=\Sigma'$.***(ii)*** 设 $\alpha\neq\beta\in\Sigma'$. 则 $\beta+s\alpha\in\Sigma''$，其中 $s=$最大 $\{n\mid(\beta+n\alpha)\in\Delta\}$.

证明。 根据反射的定义，有：

$$\Delta^+(\Sigma')\setminus(\mathbb{N}\alpha)=\Delta^+(\Sigma'')\setminus(-\mathbb{N}\alpha)$$

显然，$\alpha\notin\Delta^+(\Sigma')\setminus(\mathbb{N}\alpha)$，因此 $\alpha\notin\Delta^+(\Sigma'')\setminus(-\mathbb{N}\alpha)$。由于 $\alpha\notin-\mathbb{N}\alpha$，可知 $\alpha\notin\Delta^+(\Sigma'')$，这意味着 $-\alpha\in\Delta^+(\Sigma'')$。因此 $r_{-\alpha}\Sigma''=\Sigma'$。反设 $\alpha\notin\Sigma'$. 不成立。于是，我们可以写成 $\alpha=\Sigma_{i=1}^n k_i\beta_i$，其中 $\beta_i\in\Sigma'$，$k_i\in\mathbb{Z}_{>0}$.

由于 $\alpha \notin \Sigma'$，可知 $\beta_i \notin \mathbb{Z}\alpha$.。因此， $\beta_i \in \Delta^+(\Sigma') \setminus (\mathbb{N}\alpha) = \Delta^+(\Sigma'') \setminus (-\mathbb{N}\alpha)$。于是，$\beta_i \in \Delta^+(\Sigma'')$，所以 $\alpha \in \Delta^+(\Sigma'')$，这与假设矛盾。这就证明了 (i)。

我们从以下观察开始证明 (ii)：若 $\beta + j\alpha = \sum_{i=1}^{l} \nu_i$，其中$\nu_i \in \mathbb{N}\Sigma' \setminus \mathbb{N}\alpha$，则 $l = 1$.。注意，由于 $\beta \neq \alpha$，我们有 $\beta + s\alpha \notin \mathbb{Z}\alpha$，根据反射的定义，这意味着 $\beta + s\alpha \in \Delta^+(\Sigma'')$。因此，我们可以写成：

$$\beta + s\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i \mu_i, \ k_i \in \mathbb{Z}_{>0}, \ \mu_i \in \Sigma''.$$

如果所有 μ_i 都不与 α成比例，那么 $\mu_i \in \Delta^+(\Sigma')$，上述观察便给出$\beta + s\alpha \in \Sigma''$，这正是所需的结果。现在假设 μ_1 与 α成比例。于是，对于$i \neq 1$，有 $\mu_i \notin \mathbb{N}\alpha$；并且根据 (i)， $\mu_1 = -\alpha$。因此 $\beta + (s + k_1)\alpha = \sum_{i=1}^{2} k_i \mu_i$，其中 $\mu_i \in \Delta^+(\Sigma')$，而上述观察给出 $\beta + (s + k_1)\alpha = \mu_2$，也就是说 $\beta + (s + k_1)\alpha \in \Delta$，这与 s的定义矛盾。□

沿用上文断言中引入的记号，我们记作： $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$，以及 $r_\alpha(\beta) = \beta + s\alpha$. 如果根基 Σ' 在每个 $\alpha \in \Sigma'$.处都可反射，我们就称它是完全可反射的

2.3. 子代数 $\mathfrak{g}\langle\alpha_i\rangle$。令 $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 为任意一个逆变超代数，满足 $\Sigma = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\ell}$，并令 $\mathfrak{g}\langle\alpha_i\rangle$ 为由 $\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}$ 生成的子代数（这些都是一维空间）。注意：

$$\mathfrak{g}\langle\alpha_i\rangle \cong \begin{cases} \mathfrak{sl}_2 & \text{for } a_{ii} \neq 0, \ i \notin \tau \\ \mathfrak{osp}(1|2) & \text{for } a_{ii} \neq 0, \ i \in \tau \\ \text{Heisenberg Lie algebra} & \text{for } a_{ii} = 0, i \notin \tau \\ \mathfrak{sl}(1|1) & \text{for } a_{ii} = 0, i \in \tau \end{cases} \tag{3}$$

若 $\langle\alpha_i^\vee, \ \alpha_i\rangle = a_{ii} \neq 0$，我们用通常的公式定义 $s_{\alpha_i} \in GL(\mathfrak{h}) \ GL(\mathfrak{h}^*)$：

$$s_{\alpha_i}\mu = \mu - \frac{2\langle\alpha_i^\vee, \mu\rangle}{\langle\alpha_i^\vee, \alpha_i\rangle}\alpha_i, \quad s_{\alpha_i}h = h - \frac{2\langle h, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i^\vee, \alpha_i\rangle}\alpha_i^\vee, \quad \text{for } \mu \in \mathfrak{h}^*, \ h \in \mathfrak{h}. \tag{4}$$

2.4. Kac-Moody 超代数的定义。 令 Sk（“骨架”）为通过所有可能的反射链从 Σ 得到的所有根基的集合。若逆变超代数 $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 的所有根基均为逆变的且完全可反射的，并且对每个 $i \notin \tau$. 都有 $a_{ii} \neq 0$，则称它为***Kac-Moody*** 超代数

2.4.1. 嘉当数据的性质。考虑以下条件：

(a) Σ 在 α_i 处可反射，且 $r_{\alpha_i}\Sigma$是对偶基；(b) Σ在 α_i处可反射；(c) e_i， f_i 是伴随局部幂零的；(d) **矩阵条件**。– (A1) 若 $a_{ii} = 0$， $i \notin \tau$，则对所有 j.– (A2) $a_{ij} = 0 \Longrightarrow a_{ji} = 0$

– (A3) 若 $a_{ii} \neq 0$，则：

$$\begin{cases} \frac{2a_{ij}}{a_{ii}} \in \mathbb{Z}_{\leq 0} & i \notin \tau \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \in \mathbb{Z}_{\leq 0} & i \in \tau \end{cases}$$

断言。

(i) 有 *(a)* $\Longrightarrow$ *(b)* $\Longrightarrow$*(c)*。*(ii)* 若 $a_{ii} \neq 0$，则 *(a)* $\Longleftrightarrow$ *(b)* $\Longleftrightarrow$ *(c)* $\Longleftrightarrow$*(d)*。*(iii)* 若 $a_{ii} = 0$，则：*(a)* 若 $i \notin \tau$，则 *(c)* $\Longleftrightarrow a_{ij} = 0$ 对所有 j 都成立。*(b)* 若 $i \in \tau$，则 *(c)* 自动成立。*(c)* *(a)* $\Longleftrightarrow$ *(d)*。

证明。根据断言 2.2.1，若 Σ 在 α_i处可反射，则 $r_{\alpha_i}\Sigma = \{\alpha'_j\}$，其中 $\alpha'_i = -\alpha_i$ 且对于 $j \neq i$ 有 $\alpha'_j = \alpha_j + s_j\alpha_i$ 其中 $s_j =$最大值$\{n|\,(\alpha_j + n\alpha_i) \in \Delta\}$。由此得到 (i)。

假设 $a_{ii} \neq 0$. 等价关系（c） $\Longleftrightarrow$ （d），由（3以及 $\mathfrak{sl}_2$ 和 $\mathfrak{osp}$（1|2）的表示论可得。

因此，f 或 (*ii*)，只需证明 (*c*) $\Longrightarrow$ (*a*)。若 e_i， f_i 均为伴随局部幂零，则

$$\phi := \exp(\operatorname{ad} f_i)\exp(-\operatorname{ad} e_i)\exp(\operatorname{ad} f_i)$$

是 $\mathfrak{g}$（A）的自同构，且具有性质 $\phi|_{\mathfrak{h}} = s_{\alpha_i}$ （见 [9], 引理 3.8），由此得到四元组（$\mathfrak{g}$（A） $\mathfrak{h}$, $s_{\alpha_i}\Sigma$， $s_{\alpha_i}\Sigma^\vee$）。因此， Σ在 α_i处是可反射的，且 $r_{\alpha_i}\Sigma = s_{\alpha_i}\Sigma$是对偶基。这就证明了（ii）。

接下来，假设 $a_{ii} = 0$.

为证明（$P1$），设 $i \notin \tau$，条件（c）成立，并令 $1 \leq j \leq l$. 根据假设，存在一个最小的 $s \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{ad}^s f_i(f_j) = 0$. 利用归纳法，可以建立以下关系：

$$\operatorname{ad} e_i\left(\operatorname{ad}^s f_i\left(f_j\right)\right) = -s \cdot a_{ij} \cdot \operatorname{ad}^{s-1} f_i\left(f_j\right) \tag{5}$$

因此， $a_{ij} = 0$. 反之，假设对所有 $j.$， $a_{ij} = 0$。直接计算可得，对任意 j,

$$\operatorname{ad} e_j\left(\operatorname{ad}^2 f_i\left(f_j\right)\right) = \operatorname{ad} e_i\left(\operatorname{ad}^2 f_i\left(f_j\right)\right) = 0.$$

因此，对所有 $\alpha \in \Sigma.$， $\mathrm{ad} e_\alpha\left(\mathrm{ad}^2 f_i\left(f_j\right)\right) = 0$。于是，$\mathrm{ad}^2 f_i\left(f_j\right)$ 生成的理想与 Cartan 子代数的交为零，因此 $\mathrm{ad}^2 f_i(f_j) = 0.$。所以，$f_i$ 是伴随局部幂零的。运用同样的推理，我们推出 e_i 也是伴随局部幂零的。由此得到 ($P1$)。

($P2$) 是 (3) 的直接推论。

最后，我们旨在证明 $(P3)$。我们证明 (a) 对所有 j. 都蕴含 $a_{ij} = 0 \implies a_{ji} = 0$ 。反设存在 j 使得 $a_{ij} = 0$、 $a_{ji} \neq 0$ 且 (a) 成立。条件 $a_{ij} = 0$、 $a_{ji} \neq 0$ 蕴含 $[e_i, e_j] \neq 0$ （因为 $[f_j, [e_j, e_i]] = a_{ji}e_i \neq 0$），以及 $[e_i, [e_i, e_j]] = 0$（对于 $i \notin \tau$ 的情形我们已经证明了这一点，而对于 $i \in \tau$ 的情形，该结论显然同样成立）。因此， $\alpha_j + n\alpha_i \in \Delta$ 当且仅当 $n \in \{0, 1\}$。根据断言 2.2.1，如果存在 $r_{\alpha_i}\Sigma$，则 $\alpha'_i = -\alpha_i$ 且 $\alpha'_j = \alpha_i + \alpha_j$，所以 e'_i、 e'_j 分别与 f_i 和 $[e_i, e_j]$ 成比例。由于 $a_{ij} = 0$，由 (5) 得到 $[e'_i, e'_j] = 0.$。但是 $\alpha'_i + \alpha'_j \in \Delta$，这与 (a) 矛盾。因此，对于所有 j，(a) 蕴含 $a_{ij} = 0 \implies a_{ji} = 0$ ，从而证明了 $(A2)$。此外，在 $i \notin \tau$ 的情况下，由于 $(a) \implies (c)$，$(P1)$ 蕴含 $(A1)$。因此，$(a) \implies (d)$。最后，假设 (d) 成立（且 $a_{ii} = 0$）。我们已经证明，对于任意 j，这给出 $\alpha_j + 2\alpha_i \notin \Delta$。此外，我们知道 $\alpha_i + \alpha_j \in \Delta$ 当且仅当 $a_{ij} \neq 0$。令

$$\alpha'_j = \begin{cases} -\alpha_i & \text{if } i = j, \\ \alpha_j & \text{if } i \neq j,\ a_{ij} = 0 \\ \alpha_j + \alpha_i & \text{if } a_{ij} \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

注意， $\{\alpha'_j\}$ 是 Δ^+的线性无关子集。

我们通过以下公式引入 e'_j， f'_j

$$e'_j := \begin{cases} f_i & \text{if } i = j, \\ e_j & \text{if } i \neq j,\ a_{ij} = 0 \\ [e_i, e_j] & \text{if } a_{ij} \neq 0 \end{cases}, \qquad f'_j := \begin{cases} -e_i & \text{if } i = j, \\ f_j & \text{if } i \neq j,\ a_{ij} = 0 \\ \frac{-[f_i, f_j]}{a_{ij}} & \text{if } a_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

并取 $h'_j := [e'_j, f'_j]$。于是

$$h'_i = \begin{cases} -\alpha_i^\vee & i \in \tau \\ \alpha_i^\vee & i \notin \tau \end{cases}, \quad h'_j = \alpha_j^\vee \quad \text{if } a_{ij} = 0, \quad h'_j = \begin{cases} \alpha_j^\vee + \frac{a_{ji}}{a_{ij}}\alpha_i^\vee & i \in \tau \\ -\alpha_j^\vee + \frac{a_{ji}}{a_{ij}}\alpha_i^\vee & \text{else} \end{cases} \text{if } a_{ij} \neq 0, \tag{7}$$

因此 $\{h'_j\}_{i=1}^{\ell}$ 线性无关。关系 $[e'_s, f'_j] = \delta_{js}h'_s$ 可由以下事实推出：对于 $s \neq j$，$(\alpha'_s - \alpha'_j) \notin \Delta$。若 $a_{ij} \neq 0$，则 $[e'_i, e'_j] = [f_i, [e_i, e_j]] = a_{ij}e_j$，因此 $\mathfrak{h}$ 和e'_1，……，e'_ℓ，f'_1，……，f'_ℓ 生成 $\mathfrak{g}(A, \tau)$。我们令 $A' := (a'_{kj})$，其中 $a'_{kj} := \langle h'_k, \alpha'_j \rangle$ 并且

$$\tau' := \{j : \alpha'_j \in \Delta_{\bar{1}}\}.$$

容易看出 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A'$，因此 $(\mathfrak{h}, \{\alpha'_j\}_{j=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^n)$ 是嘉当数据 (A', τ') 的一个实现。考虑一个半成品李超代数 $\tilde{\mathfrak{g}}(A', \tau')$。由上文可知， $\mathfrak{g}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A', \tau')$ 的一个同态像（该同态在 $\mathfrak{h}$ 上等于恒等映射，且将 $\tilde{e}_j$, f_j 分别映到 e'_j, f'_j ）。此同态的核与 $\mathfrak{h}$的交为零，因此诱导出一个满同态 $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}(A', \tau')$，它在 $\mathfrak{h}$上等于恒等映射。因此，$\operatorname{Ker}\iota$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想，且与 $\mathfrak{h}$ 的交为零。于是 ι 是一个同构。因此， $\Sigma' := \{\alpha'_j\}_{j=1}^n$ 是 Δ的一个对偶基。由上文可知，$-\alpha_i \in \Sigma'$，且对于 $\alpha_j \neq \alpha_i$ ，我们有 $\alpha'_j = \alpha_j + s_j\alpha_i$ ，其中 $s_j = \max\{n | (\alpha_j + n\alpha_i) \in \Delta\}$。因此$\Sigma' = r_{\alpha_i}\Sigma$。这证明了蕴含关系 (d) $\implies$ (a)，并完成了证明。□

我们推导出了反射的显式公式：

— 若 $a_{ii} \neq 0$，公式为 $r_{\alpha_i}(\alpha_j) = s_{\alpha_i}(\alpha_j)$. 这种反射也称为反射。— 若 $a_{ii} = 0$，公式为 $r_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha'_j$，其中 α'_j 由式（6）定义。我们称这种反射为各向同性反射。

此外，由上述断言可以推导出以下结论：

(i) 若 $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 是一个不可分解余伴随超代数，且其骨架中的所有根基都完全可反射且余伴随，并且存在$i \notin \tau$使得 $a_{ii} = 0$，则 $A = (0)$ 且 $\tau = \emptyset$. 在这种情况下，$[\mathfrak{g}(A, \tau)\ \mathfrak{g}(A, \tau)]$ 是三维海森堡李代数。(ii) 一个逆变超代数 $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 是 Kac-Moody 超代数，当且仅当$\mathfrak{g}(A, \tau)$ 是不可分解 Kac-Moody 超代数的直积。(iii) 纯偶 Kac-Moody 超代数是 Kac-Moody 代数。(iv) $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 是 Kac–穆迪李超代数，当且仅当满足以下条件

$$
\begin{aligned}
&a'_{ii} \neq 0 \ \text{ if } \ i \notin \tau';\\
&a'_{ij} = 0 \implies a'_{ji} = 0;\\
&\tfrac{2a'_{ij}}{a'_{ii}} \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \ \text{ if } a'_{ii} \neq 0,\ i \notin \tau';\\
&\tfrac{a'_{ij}}{a'_{ii}} \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \ \text{ if } a'_{ii} \neq 0,\ i \in \tau';
\end{aligned}
\tag{8}
$$

对所有由一系列各向同性反射从原始数据 (A, τ) 得到的嘉当数据 (A', τ')，上述结论均成立。注意，非各向同性反射不会改变 Cartan 矩阵（因此，在非超情形中，$\mathfrak{g}(A)$ 是 Kac-Moody 代数，当且仅当上述公理对 Cartan 矩阵 A 成立）。

2.5. 实根。 如果存在某个 $\Sigma' \in$Sk，使得 $\alpha \in \Sigma'$，我们就称 $\alpha \in \Delta$ 为实根。实根集合记为 Δ^{re}. 。如果 α 是实根，则 $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ 和 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 均为一维。若实根 α 满足对于所有 $h \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$，都有 $\alpha(h) = 0$，则称其为各向同性；否则称为各向异性。若 Σ' 是对偶基，则 $\alpha'_i \in \Sigma'$ 为各向同性根，当且仅当 $a'_{ii} = 0$。我们分别用 Δ^{an} 和 Δ^{iso} 表示各向异性根集和各向同性根集。若 Kac-Moody 超代数 $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 对所有 i 都满足 $a_{ii} \neq 0$，则称其为各向异性（在这种情况下，所有实根都是各向异性的）。

如果根 α 是虚根，那么 α 和 $\frac{\alpha}{2}$ 都不是实根。用 Δ^{im} 表示虚根的集合。

我们将*Weyl* 群 W 定义为 $GL(\mathfrak{h}^*)$中由反射 s_α生成的子群，其中 $\alpha \in \Delta^{\text{an}}$。公式 (8)保证了 $W\Sigma \subset \Delta$。由上可知，如果 $a_{ii} \neq 0$ 对所有$i = 1, \ldots, \ell$都成立，那么 Sk $= \{w\Sigma\}_{w \in W}$。

若 $\alpha \in \Delta^{\text{an}}$ 是奇的，则 $2\alpha \in \Delta$；我们令 $(2\alpha)^\vee = \alpha^\vee/2$ 并通过通常的公式引入 $s_{2\alpha}$（参见 (4)）。于是 $s_{2\alpha} = s_\alpha$ 且 W 由所有反射 s_α生成，其中 α 是偶的，且 $\alpha \notin \Delta^{\text{im}}$.

2.6. **分类**。 对于 $u \in \mathbb{R}^n$，我们称 $u > 0$ （分别称 $u \geq 0$），若其 u 的所有坐标都严格为正（分别为非负）。对于 α， $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$ 当且仅当 $\alpha - \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$. 时，我们称 $\alpha \geq \beta$

满足条件（8）和 $a_{ii} \neq 0$ 对所有 i，的不可分解矩阵由 Vinberg 于 1971 年按以下方式分类（另见 [9], 第四章，或 [10]）：

（Fin）$\det A \neq 0$；存在 $u > 0$，使得 $Au > 0$； $Av \geq 0$ 蕴含 $v > 0$ 或 $v = 0$.

（仿射型）余秩$A = 1$；存在 $u > 0$，使得 $Au = 0$； $Av \geq 0$ 蕴含 $Av = 0$。

（不定型）存在 $u > 0$，使得 $Au < 0$； $Av \geq 0$， $v \geq 0$ 蕴含 $v = 0$.

设 $\mathfrak{g}$（A， τ）是一个具有不可分解矩阵A的各向异性 Kac-Moody 超代数。由于对于任意可对角化可逆矩阵 D， $\mathfrak{g}$（A， τ）与 $\mathfrak{g}$（DA， τ）同构，不失一般性，我们假设对所有 $i = 1$， ....., l， $a_{ii} = 2$。上述矩阵分类将各向异性 Kac-Moody 超代数分为三种不同类型：有限型（Fin）、仿射型（Aff）和不定型（Ind）；参见 [10], ，具体类型取决于 A。

给定 Kac-Moody 超代数 $\mathfrak{g}(A, \tau)$，我们将**正锥** 定义为：

$$Q_{\mathbb{R}}^{++} = \bigcap_{\Sigma' \in Sk} \mathbb{R}_{\geq 0}(\Sigma').$$

在各向异性情形下，由于 $Sk = \{w\Sigma\}_{w \in W}$，可得 $Q_{\mathbb{R}}^{++} = \bigcap_{w \in W} \mathbb{R}_{\geq 0}(w\Sigma)$。

我们将给出一个引理，说明在各向异性情形下，如何用正锥的术语重新表述这一分类。为此，我们首先需要以下预备引理。

2.6.1. **引理**。 设 $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 是一个各向异性 *Kac-Moody* 超代数，其单根集合为 $\Sigma = \{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$。假设 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 满足 $\frac{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle}{a_{ii}} \leq 0$ 对每个 $1 \leq i \leq l$都成立。那么，对于所有 $w \in W$，有$(w\lambda - \lambda) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$。此外，若 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$，则 $W\lambda \subset Q_{\mathbb{R}}^{++}$。

证明。 回顾一下， W是由 s_{α_i}生成的 Coxeter群，其中 $i = 1, \ldots l$。我们通过对 w 的长度进行归纳法证明不等式 $w\lambda \geq \lambda$ 。若长度为零，则有$w = \mathrm{Id}$ 和 $w\lambda = \lambda$，因此不等式成立。若长度为正，则对于某个 $i \in \{1, \ldots, l\}$，有 $w = w's_{\alpha_i}$，且 $w' \in W$的长度更小。由 [9], 中的引理 3.11 可得$w'\alpha_i \in \Delta^+ \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$，因此

$$w\lambda - w'\lambda = w'(s_{\alpha_i}\lambda - \lambda) = -\frac{2\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle}{a_{ii}} w'\alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma.$$

根据归纳假设，$(w'\lambda - \lambda) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$，因此 $(w\lambda - \lambda) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$。归纳过程至此完成。

此外，假设 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$。那么，由上文可知， $W\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$，因此 $\lambda \in \bigcap_{w \in W} \mathbb{R}_{\geq 0}(w\Sigma)$。由于 $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 是各向异性的，我们有 $Q_{\mathbb{R}}^{++} = \bigcap_{w \in W} \mathbb{R}_{\geq 0}(w\Sigma)$，因此 $\lambda \in Q_{\mathbb{R}}^{++}$。由于 $Q_{\mathbb{R}}^{++}$ is$W$ 稳定的，我们得到所需的 $W\lambda \subset Q_{\mathbb{R}}^{++}$。□

2.6.2. **引理**。 设 A 是一个 $l \times l$ ***Cartan*** 矩阵，且对所有 $i.$，都有 $a_{ii} \neq 0$：

(i) A 当且仅当 $Q_{\mathbb{R}}^{++} = \{0\}$.为（***Fin***）型；***(ii)*** A 当且仅当 $Q_{\mathbb{R}}^{++} = \mathbb{R}_{\geq 0}\delta$ 为（***Aff***）型，其中存在某个 $\delta \in \Delta$。***(iii)*** A 当且仅当 维数 $Q_{\mathbb{R}}^{++} > 1$.为（***Ind***）型

证明。 设 $\mathbb{R}^l \subset \mathfrak{h}^*$ 为以 $\Sigma = \{\alpha_i\}_{i=1}^l$为基的向量空间。则对于 $u \in \mathbb{R}^l$，我们有$u \geq 0$ 当且仅当 $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$。注意到 $A\mu$ 的第 i 个坐标等于 $\langle \mu,\ \alpha_i^\vee \rangle$，因此

$$\begin{aligned} Au = 0 &\iff Au = u \\ Au \geq 0 &\iff Au \in u + \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma. \end{aligned} \tag{9}$$

我们开始证明（iii）。假设 A为（Ind）型。则集合$\{u > 0 \mid Au < 0\}$ 非空。取 μ属于此集合。于是 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$ 且对于所有 $i = 1,\ .....,\ l$都有 $\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle < 0$（因为 $A\mu < 0$）。根据引理 2.6.1，$W\mu \subset \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$。如果 μ和 $s_{\alpha_i}\mu$线性相关，则 $s_{\alpha_i}\mu = -\mu$，因此 μ 或 $s_{\alpha_i}\mu$ 不属于锥 $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$ 。所以μ和 $s_{\alpha_i}\mu$线性无关，从而 $W\mu \subset \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$推出 dim $Q_{\mathbb{R}}^{++} > 1$。

接下来，假设 dim$\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++} > 1$. 那么，$\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$ 包含一个球。因此，$\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$ 包含 $\mu = u_1\alpha_1 + ... + u_l\alpha_l$，其中 $u_1,\ .....,\ u_l \in \mathbb{Z}_{>0}$。（这意味着 $\mu \in (\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++} \cap \mathbb{Z}_{>0}\Sigma)$。）轨道 $W\mu$ 包含于 $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$ 中。由 2.5，$W\Sigma \subset \mathbb{Z}\Sigma$，因此 $W\mu \subset (\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++} \cap \mathbb{Z}\Sigma)$。特别地，$W\mu \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}\Sigma$。因此，轨道 $W\mu$包含 ν，使得 $(w\nu - \nu) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}\Sigma \setminus \{0\}$。于是，对任意 $i = 1,\ .....,\ l$，我们有 $s_{\alpha_i}(\nu) - \nu = \langle \nu,\ \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i$，所以 $\langle \nu,\ \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$。因此，$A\nu \leq 0$。为导出矛盾，假设 A 是（Aff）型。由于 $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$ 包含一个球，我们可以选取 $\mu' \in (\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++} \cap \mathbb{Z}_{>0}\Sigma)$，使得 $\mu' \notin \mathbb{C}\mu$，并构造 $\nu' \in W\mu'$，使得 $A\nu' \leq 0$。由于 A 是（Aff）型，我们有 $A\nu = A\nu' = 0$，由 (9) 可推出$W\mu = W\nu = \nu$和 $W\nu' = W\mu' = \nu'$。由于余秩$A = 1$，可知 μ、μ'线性相关，矛盾。因此，A 是（Ind）型。这就得到 (iii)。

现在取 A 为（Aff）型。若 $\mu \geq 0$ 是满足 $A\mu = 0$的向量，则 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Sigma$ 并且由（9）可得 $W\mu = \mu$，因此 $\mu \in \bigcap_{w \in W} \mathbb{R}_{\geq 0}\ (w\Sigma)\ = Q_{\mathbb{R}}^{++}$。特别地，$Q_{\mathbb{R}}^{++} \neq 0$。由（iii）可知 dim $Q_{\mathbb{R}}^{++} = 1$。

现在假设 dim $Q_{\mathbb{R}}^{++} = 1$，即对于某个 $\delta \neq 0$，有 $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++} = \mathbb{R}_{\geq 0}\delta$ 。由于 $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$ 是W-不变的，因此得到 $W\delta \subset \mathbb{R}\delta$，这意味着 $\langle \delta,\ \alpha_i^\vee \rangle = 0$对于所有满足 $\delta \notin \mathbb{R}\alpha_i$的 i 均成立。若对于某个 i有 $\delta \in \mathbb{R}\alpha_i$，则 $s_{\alpha_i}\delta = -\delta$，这意味着锥 $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$ 包含 δ 和$-\delta$，这是不可能的。因此，对于所有 i，即 $A\delta = 0$，均有 $\langle \delta,\ \alpha_i^\vee \rangle = 0$。由于 $\delta \in \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^{++}$，我们得到 $\delta \geq 0$ 和 $A\delta = 0$，所以 A 是仿射型。证明至此完成。□

2.6.3. 按正锥分类。上述引理自然引出了按正锥对 Kac-Moody 超代数（包括非各向异性的情形）进行分类。

我们将不可分解 Kac-Moody 超代数分为三种类型：

（Fin） $Q_{\mathbb{R}}^{++} = \{0\}$.

仿射型 $Q_{\mathbb{R}}^{++} = \mathbb{R}_{\geq 0}\delta$.

不定型 $\dim Q_{\mathbb{R}}^{++} > 1$.

2.6.4. 按 *Gelfand-Kirillov* 维数分类。 考虑相对于所选生成元集 S. 构造的 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 的自然滤过 $\{\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \subset ...\}$。 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 的 Gelfand-Kirillov 维数（记作 $GK\dim$）定义如下:

$$\mathrm{GKdim}(\mathfrak{g}(A,\tau)) = \limsup_{i\to\infty} \frac{\log \dim \mathcal{F}^i}{\log i}.$$

此定义不依赖于生成元的选择。

不可分解的 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 也可以根据增长性进行分类（参见 [16], [5]和 [6]）：

（Fin）维数 $\mathfrak{g}(A,\tau) < \infty$.

仿射型 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 是无限维的，且具有有限的 Gelfand-Kirillov 维数

（Ind） $\mathfrak{g}(A,\ \tau)$ 的 Gelfand-Kirillov 维数是无限的。

所有（Fin）型超代数都是可对称化的，所有（Aff）型纯各向异性超代数也是可对称化的。令人惊讶的是，在（Ind）情形下，不可分解的非各向异性超代数中不存在可对称化的超代数。

2.6.5. 有限型。 如果一个有限维单李超代数的偶部为 $\mathfrak{g}(A,\ \tau)_0$，是约化的，则称其为经典型。如果它是经典型的，并且具有非退化的偶超对称不变双线性型，则称其为基本型。所有不可分解的有限维 Kac-Moody 超代数既是基本型的，也是经典型的，但有一个例外 - $\mathfrak{g}(n|n)$。 这些代数列于下表:

$$\mathfrak{gl}(n|n)\ n \geq 1, \mathfrak{sl}(m|n)\ m \neq n, \mathfrak{osp}(m|2n), F(4), G(3), D(2|1;\alpha)\ (\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\})$$

我们经常使用以下类型记号（见 [8]）：

$A(m|n) = \mathfrak{sl}(m+1|n+1)$ 表示 $m \neq n$， $B(m|n) = \mathfrak{osp}(2m+1|2n)$、 $C(n) = \mathfrak{osp}(2|2n-2)$、$D(m|n) = \mathfrak{osp}(2m|2n)$（其中 $m \geq 1$）。关于每个代数的确切定义，参见 [8]。

注意， $\mathfrak{sl}(n+1|n+1)$具有一维中心，记为 $\mathbb{C}I$. 我们定义$\mathfrak{psl}(n+1|n+1) := \mathfrak{sl}(n+1|n+1)/\mathbb{C}I$ 并记 $A(n|n) = \mathfrak{psl}(n+1|n+1)$。这是一个有限维单基本李超代数，但不是 Kac-Moody 超代数。

2.6.6. （*Aff*）型和（*Ind*）型。（Aff）型可对称化 Kac-Moody 超代数的完整分类由 Johan van de Leur 完成（见 [16] 或 [17]）。不可对称化仿射代数的分类由 Crystal Hoyt 完成（见 [14],或 [5], 和 [6]）。本主题将在本学位论文的第3章中进一步详细讨论。

不定型的完整分类由 Crystal Hoyt 完成，她证明了唯一的非各向异性不定型代数是 $Q^{\pm}(m,\ n,\ q)$（参见 [5] 和 [14]）。

2.7. **主李代数** $\mathfrak{g}_{pr}$。 给定一个 Kac-Moody 超代数 $\mathfrak{g}$，我们引入其所谓的主李代数 $\mathfrak{g}_{pr} \subset \mathfrak{g}_0$，它是在 $\mathfrak{g}_0$. 内对“最大几乎反对偶李超代数”的最佳近似

2.7.1. 若存在一个根基 α，使其 经一系列各向同性反射得到，且 Σ'，由 Σ经一系列各向同性反射得到，并且 $\alpha \in \Sigma'$. 则称根 Σ_{pr}. 为 [5]的主根。 Σ_{pr} 主根的集合记为 $\Sigma_{pr} = \{\alpha_i\}_{i\in J}$。由 B_{pr} 可知，矩阵 $\langle \alpha_i^\vee \alpha_j \rangle$.是有限型。我们引入

$$\pi := \{\alpha \in \Sigma_{pr} \,|\, \alpha \in \Delta_{\bar{0}}\} \cup \{2\alpha \,|\alpha \in \Sigma_{pr} \cap \Delta_{\bar{1}}\}.$$

注意到 $\pi \subset \Delta_0$. 令 $\pi = \{\alpha_i'\}_{i\in I}$，并用 B_π 表示矩阵 $\left\langle (\alpha_i')^\vee, \ \alpha_j' \right\rangle$. 注意，$B_\pi = A$ 若对所有 i.都有 $a_{ii} \neq 0$

我们将 $\mathfrak{g}_{pr}$ 定义为由 $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$生成的子代数，其中 $\alpha \in \pi$。

2.7.2. 存在一个满同态 ψ： $[\mathfrak{g}(B_\pi) \ \mathfrak{g}(B_\pi)] \to \mathfrak{g}_{pr}$，它将 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 的 Cartan 子代数与 $[\mathfrak{g}(B_\pi) \ \mathfrak{g}(B_\pi)]$ 的交映射到 $\mathfrak{h}$，并将权为 $\pm\alpha$ 的 Chevalley 生成元映射到 $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$. 中的元素。根据 [14], 引理 3.7（详情参见 [3] 3.5.1 和 3.5.4），如果 B_π 是可对称化的，那么 $\mathfrak{c} := \ker \psi$ 包含于 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 的中心中，因此 ψ在 $[\mathfrak{g}(B_\pi) \ \mathfrak{g}(B_\pi)]/\mathfrak{c}$ 与 $\mathfrak{g}_{pr}$之间诱导出一个同构。

2.7.3. **定义**。 如果 B_π 是可对称化的，则称 $\mathfrak{g}(A, \ \tau)$ 是<style id='8'>主可对称化的。

对于 [5], 一个不可分解的 Kac-Moody 超代数 $\mathfrak{g}(A, \ \tau)$，当且仅当 A 不是可对称化矩阵且对所有 i都有 $a_{ii} \neq 0$ 时，它不是主可对称化的。

2.7.4. **命题**。 设 $\mathfrak{g}(A, \tau)$ 是主可对称化的 *Kac-Moody* 超代数。

(i) 设 $B_1, \ldots, B_k$ 是矩阵 B_π 的不可分解块，且 $I_j := \psi\big([\mathfrak{g}(B_j) \ \mathfrak{g}(B_j)]\big)$ 对于 $j = 1, \ldots, k$ 成立。那么

$$\mathfrak{g}_{pr} = \sum_{i=1}^{k} I_i, \quad (I_i \cap I_j) \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr}) \quad \textit{for all} \ \ 1 \leq i \neq j \leq k$$

并且每个 I_i 都是 $\mathfrak{g}_{pr} + \mathfrak{h}$ 中的理想。

(ii) $\psi^{-1}(\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr})) \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{g}(B_\pi))$。

证明。 (i) 由以下事实可得:

$$\ker \psi \subset \mathfrak{c}\left(\mathfrak{g}\left(B_\pi\right)\right).$$

对于 (ii)，回忆一下， $\psi^{-1}(\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr}))$ 属于 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 的 Cartan 子代数与 $[\mathfrak{g}(B_\pi) \ \mathfrak{g}(B_\pi)]$的交集。此外， $\psi^{-1}(\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr}))$ 与 $[\mathfrak{g}(B_\pi) \ \mathfrak{g}(B_\pi)]$对易。现在，断言由 (2) 得证。 □

2.7.5. 回忆一下， Δ^{an} 是各向异性实根的集合。根据 [2], 4.3.12，Weyl 群W 是由反射 s_α 生成的 Coxeter 群，其中 $\alpha \in \Sigma_{pr}$. 此外，任意各向异性根都 W 与某个主根共轭。也就是说， $W\Sigma_{pr} = \Delta^{an}$. 由此得到以下推论。

2.7.6. **推论**。 对于任意偶各向异性根 α ，有 $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{pr}$ ；对于任意奇各向异性根 α.，有 $\mathfrak{g}_{2\alpha} \subset \mathfrak{g}_{pr}$

证明。令 $\alpha \in \Delta^{an}$. 。由上述论证可知，存在 $w \in W$ 和 $\beta \in \Sigma_{pr}$ ，使得$\alpha = w\beta$. 。我们对 w. 的长度作归纳法来证明该断言。若长度为 0，则$\alpha \in \Sigma_{pr}$， 因此由 $\mathfrak{g}_{pr}$. 的定义可得结论。假设 w 的长度为 n.。那么存在一个偶根 $\alpha_i \in \Sigma_{pr}$ 和 $w' \in W$ ，使得 $w = s_{\alpha_i} w'$，其中 w' 的长度更短。定义 $\beta' = w'\beta$. 。若 β 是偶的，则 α 也是偶的；由归纳假设可得

$$\mathfrak{g}_{\beta'} \subset \mathfrak{g}_{pr}.$$

由于 α_i 是偶主根，我们也有 $\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i} \subset \mathfrak{g}_{pr}$. 。由于 $\alpha = s_{\alpha_i}\beta'$， 我们可以使用 [9]引理 3.8 得到:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \exp f_i \left(\exp\left(-e_i\right)\right) \exp\left(f_i\right) \mathfrak{g}_{\beta'},$$

其中 f_i， $e_i \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}$。 因此， $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}_{pr}$ 正如所期望的那样。

若 β 是奇的，则 α 是奇的，并且根据归纳假设， $\mathfrak{g}_{2\beta'} \subset \mathfrak{g}_{pr}$. 。由于 $2\alpha = s_{\alpha_i}(2\beta')$, 再次由 [9] 引理 3.8，我们得到:

$$\mathfrak{g}_{2\alpha} = \exp f_i \left(\exp\left(-e_i\right)\right) \exp\left(f_i\right) \mathfrak{g}_{2\beta'},$$

其中 f_i， $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. 因此我们有 $\mathfrak{g}_{2\alpha} \subset \mathfrak{g}_{pr}$， 正如所期望的那样。 □

2.7.7. 由上述推论可得

$$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{pr} \quad \text{for all } \alpha \in \Delta_{\bar{0}} \backslash \Delta^{im}, \tag{10}$$

且 $\mathfrak{g}_{pr}$ 是由所有 $\alpha \in \Delta_0 \backslash \Delta^{im}$.对应的根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 生成的子代数

2.7.8. **命题**。

$$\begin{aligned} &(i) \quad (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) = \sum_{\alpha \in \pi} \mathbb{C}\alpha^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta^{an}} \mathbb{C}\alpha^\vee \\ &(ii) \quad (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) + \mathfrak{c}\left(\mathfrak{g}_{\bar{0}}\right) = \begin{cases} \mathfrak{h} & \textit{in type (Fin)} \\ \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] & \textit{in types (Aff), (Ind)} \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

证明。 根据 [14], 引理 3.6, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\beta}] = \delta_{\alpha\beta}\alpha^\vee$ 对于 α, $\beta \in \pi$. 这意味着公式 ($\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}$) $= \sum_{\alpha\in\pi} \mathbb{C}\alpha^\vee$. 根据 (10),

$$\sum_{\alpha\in\Delta^{an}} \mathbb{C}\alpha^\vee \subset (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}).$$

显然 $\sum_{\alpha\in\pi} \mathbb{C}\alpha^\vee \subset \sum_{\alpha\in\Delta^{an}} \mathbb{C}\alpha^\vee$, 完成 (i)。

对于 (ii), 注意当对所有 i, $a_{ii} \neq 0$ 时, 我们有 $\Sigma = \Sigma_{pr}$, 因此

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr} = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] .$$

考虑 A 可对称化的情形。设 $(-,\ -)$ 是 $\mathfrak{h}$. 上非退化不变双线性型的限制。那么 ($\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}$) $+ \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0)$ 是与.....正交的补空间

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{c}\left(\mathfrak{g}_{\bar{0}}\right) = \mathfrak{c}\left(\mathfrak{g}_{pr}\right),$$

且 $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是与 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ 正交的补空间, 情形为 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{psl}^{(1)}(n|n)$（定义见 3.2.3 ）, 而 $\mathbb{C}K \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ 则为其他情形（定义见第3章 K）。

在有限型情形下, $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 是有限维 Kac-Moody 代数, 因此 $\mathfrak{g}_{pr}$, 它是 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 的全纯像, 也同样是有限维 Kac-Moody 代数。因此, $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr}) = 0$, 从而 $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{h}$.

考虑可对称化（仿射）情形。若 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{psl}^{(1)}(n|n)$, 则 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ 是一维的, 由中心扩张 K. 张成。现在, 2δ 是一个偶虚根, 其中 $\mathfrak{g}_{\pm 2\delta} \subseteq \mathfrak{g}_{pr}$。因此, $[\mathfrak{g}_{2\delta}, \mathfrak{g}_{-2\delta}] = \mathbb{C}K \subseteq \mathfrak{g}_{pr}$.。由命题 2.7.4 可知, $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr}) \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$。于是, $\mathfrak{c}\left(\mathfrak{g}_{pr}\right) = \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$。若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}^{(1)}(n|n)$, 则 $\operatorname{dim}\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) = 2$, 且 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr})$ 是 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ 的真子空间。因此, $\mathfrak{c}\left(\mathfrak{g}_{pr}\right) = \mathbb{C}K$.。这意味着 $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) + \mathfrak{c}\left(\mathfrak{g}_0\right) = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 如所需。

其余情形是不可对称化 Kac-穆迪超代数, 其中 $a_{ii} = 0$ 对某个 i.。对于非（Aff）情形, Q（m, n, q）$^{\pm}$, 注意到 A 和 B_π 都是可逆的 3×3 矩阵。特别地, $\mathfrak{c}$（$\mathfrak{g}$（B_π）） $= 0$.。因此, $\mathfrak{g}_{pr} \simeq \mathfrak{g}$（$B_\pi$）且 $\operatorname{dim}\mathfrak{h} = 3 = \operatorname{dim}$（$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}$）。因此, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr} = \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

最后, 对于（Aff）非对称化卡茨-穆迪超代数, 即 $\mathfrak{q}_n^{(2)}$和 S（2|1; b）, 所需公式可由 3.7 和 3.8 中给出的描述推出。□

2.7.9. 根据 [5], 对于每个 Kac-Moody 超代数 B_π, 矩阵 $\mathfrak{g}$ =$\mathfrak{g}$（A, τ）, 若 $a_{ii} = 0$ 对于某个 i. 此外, B_{pr} 和 B_π 是广义卡坦矩阵。由于（Fin）型和（Aff）型的所有对角线元素非零的卡坦矩阵都是可对称化的, 因此矩阵 B_π 对于每个（Fin）型或（Aff）型 Kac-Moody 超代数都是可对称化的。

2.7.10. 根据第 [14] 节 9 中对 $\mathfrak{g}_{pr}$ 的逐一描述可知, 若 A 为（Ind）型, 则矩阵 B_π 不可分解。此外, 对于矩阵 B_π 的每个不可分解块 B_s, B_π 都是与 A 相同类型（即有限型、仿射型或（Ind）型）的 Cartan 矩阵, 且余秩B_s =余秩A.

2.7.11. 考虑 $\mathfrak{g}$ 可对称化的情形。此时， $\mathfrak{g}$ 具有一个偶且非退化的双线性型，并且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A, \tau)$，其中 A 是对称的。

令 $\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ 为由 $(-, -)$ 诱导的同构。根据 [9] 第2章中所描述的双线性型的构造，有 $\langle \alpha_i, h \rangle = (\alpha_i^\vee, h)$，其中任意 $h \in \mathfrak{h}$ 和$\alpha_i \in \Sigma$. 均成立。利用（6）和（7）中所述的公式，容易验证，对于任意实根，都有 $\iota(\alpha^\vee) = \alpha$。特别地， $B_\pi = ((\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in \pi}$.

令 $(-, -)_\pi$ 为定义在 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 上的非退化不变双线性型，其构造如 [9],第2节所述。由于该双线性型是不变的， $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 的中心与 $[\mathfrak{g}(B_\pi) \ \mathfrak{g}(B_\pi)]$.正交。因此， $\mathfrak{c}$ 属于 $(-, -)_\pi$ 在限制于 $[\mathfrak{g}(B_\pi) \ \mathfrak{g}(B_\pi)]$.时的核。由此， $(-, -)_\pi$ 在 $\mathfrak{g}_{pr}$ 上诱导出一个不变双线性型，我们将其记为 $(-, -)'$.

2.7.12. **引理**。 若 $\mathfrak{g}$ 可对称化，则将 $(-,-)$ 限制到 $\mathfrak{g}_{pr}$ 后，所得结果与 $(-,-)'$.一致

证明。 根据 ψ, 的定义，我们有 $\psi(\mathfrak{n}^\pm(B_\pi)) \subset \mathfrak{n}^\pm$, 且 ψ 将 $\mathfrak{g}(B)_\pi$ 的 Cartan 子代数映到 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}$. 因此

$$\left(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}, \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^\pm\right) = \left(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}, \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^\pm\right)' = 0. \tag{12}$$

and

$$\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+, \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+\right) = \left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+, \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+\right)' = 0,$$
$$\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-, \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-\right) = \left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-, \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-\right)' = 0.$$

还需验证:

(i) the restrictions of $(-,-)$ and of $(-,-)'$ to $\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+ \otimes \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-$ are equal;
(ii) the restrictions of $(-,-)$ and of $(-,-)'$ to $(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{h}) \otimes (\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{h})$ are equal.

对所有 $\alpha \in \pi$, 我们固定 $e_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$. 对于 (i), 回顾一下， $\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^\pm$ 由 $e_{\pm\alpha}$ 生成，其中 $\alpha \in \pi$. 我们将 $\mathcal{F}^1(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+)$定义为 e_α 的张成空间，其中 $\alpha \in \pi$ 且

$$\mathcal{F}^{i+1}\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+\right) := \mathcal{F}^i\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+\right) + \left[\mathcal{F}^1\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+\right), \mathcal{F}^i\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+\right)\right].$$

容易看出， $\{\mathcal{F}^i(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+)\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$是 $\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+$.的穷尽递增滤过。类似地，我们为 $\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-$. 定义滤过 $\{\mathcal{F}^i(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-)\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$。注意，所有项$\mathcal{F}^i(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^\pm)$都是 ad $\mathfrak{h}$-不变的，且

$$\left[\mathcal{F}^1\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+\right), \mathcal{F}^{j+1}\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-\right)\right] \subset \mathcal{F}^j\left(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-\right), \quad \text{for } j \geq 1, \tag{13}$$

因为 $[e_\alpha, f_\beta] \in \mathfrak{h}$.

我们来验证两个双线性形式在 $\mathcal{F}^i(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+) \otimes \mathcal{F}^j(\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-)$ 上的限制相等。我们有

$$0 \neq [e_\alpha, e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha})\alpha^\vee = (e_\alpha, e_{-\alpha})'\alpha^\vee$$

因此 $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = (e_\alpha, e_{-\alpha})'$. 对于 $\beta \neq \alpha, \alpha, \beta \in \pi,$，我们有 $(e_\alpha, e_{-\beta}) = (e_\alpha, e_{-\beta})' = 0$. 因此该断言对 $i = j = 1.$ 成立。对于 $x_\pm \in (\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^\pm),$，由于双线性形式是不变的，我们有：

$$([e_\alpha, x_+], x_-) = -(x_+, [e_\alpha, x_-]), ([e_\alpha, x_+], x_-)' = -(x_+, [e_\alpha, x_-])'.$$

结合（13），我们得出，关于二元组（i, j），其中 i, $j > 1$，的断言由关于二元组（$i-1$, $j-1$）的断言推出。类似地，对于 $j > 1$，关于（i, j）的断言由（12）推出。利用归纳法，这就建立了对所有（i, j）的断言，并证明了（i）。

对于（ii），注意：

$$\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{h} = \left[\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+, \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^-\right] \cap \mathfrak{h}.$$

任取 $h \in (\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{h})$ 和 $a_\pm \in (\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^\pm)$。有（$h$, $[a_+, a_-]$）=（$[h, a_+]$, a_-），类似地，对于（$-$, $-$）$'$. 由于 $[h, a_+] \in (\mathfrak{g}_{pr} \cap \mathfrak{n}^+)$，公式（$[h, a_+]$, a_-）=（$[h, a_+]$, a_-）$'$由（i）推出。这证明了（ii），并完成了证明。□

2.7.13. **推论**。若 $\mathfrak{g}$ 可对称化，则 $(-,-)$在 $\mathfrak{g}_{pr}$ 上的限制的核与 $\mathfrak{g}_{pr}$ 的中心重合，且包含于 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}$.

证明。这由引理 2.7.12以及以下事实得出：在 $[\mathfrak{g}(B_\pi), (B_\pi)],$上的不变双线性型的核等于 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}(B_\pi))$. □

2.8. 可积模。若对每个实根α 以及每个 $u \in \mathfrak{g}_\alpha,$ u 在 V 上的作用都是局部幂零的，则称 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$–模 V 可积 。若一个 $\mathfrak{g}$–模作为 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$–模可积，则称其为可积模。任意 Kac-Moody 超代数的伴随表示都是可积的（这由定义可知）。

以下引理是众所周知的。

2.8.1. **引理**。$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$–模 V 可积，当且仅当对每个 $\alpha \in \pi$ 和每个$u \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha},$ u 在 V上的作用都是局部幂零的。

证明。假设对每个 $\alpha \in \pi$ 和每个 $u \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$， u 在 V 上的作用都是局部幂零的。那么对每个 $\alpha \in \Sigma_{pr}$ 和每个 $u \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$，该作用都是局部幂零的。令 β 为一个实根，并令 $u \in \mathfrak{g}_\beta$ 为一个非零元素。若 β 是各向同性的，则由 (3)，$\mathfrak{g}\langle\beta\rangle \simeq \mathfrak{sl}(1|1)$。因此，$u^2 = 0.$若 $\beta \in \Delta^{an}$，则由 2.7.6， $\beta = w\gamma$，其中 w 属于 Weyl 群，且 $\gamma \in \Sigma_{pr}.$ 此外，Weyl 群 W 是由反射 s_α 生成的 Coxeter 群，其中 $\alpha \in \Sigma_{pr}.$ 我们将通过对 $w.$的长度进行归纳，证明 u 在 V 上作用为局部幂零。

如果长度为零，那么 $u \in \mathfrak{g}_\gamma$，因此 u 是局部幂零的。否则，对于某个$\alpha \in \Sigma_{pr}$，我们有 $w = s_\alpha w'$，其中 w' 的长度小于 $w.$ 的长度。于是，

$s_\alpha\beta = w'\gamma$，并且根据归纳法，对于任意 $u' \in \mathfrak{g}_{s_\alpha\beta}$， u' 在 V 上的作用都是局部幂零的。根据 [9], 引理 3.8,

$$u = (\exp \operatorname{ad} f)(\exp \operatorname{ad}(-e))(\exp \operatorname{ad} f)(u'),$$

对于某些 $u' \in \mathfrak{g}_{s_\alpha\beta}$, $e \in \mathfrak{g}_\alpha$ 和 $f \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

设 E, F, U, U' 是 e, f, u, u' 在 End(V) 中的像。由 [9], 中的 (3.8.1) 可知，对于 V 上任意满足 $(\operatorname{ad} a)^N b = 0$（其中某个 $N.$）的算子 b，有 $(\exp a)\, b (\exp -a) = \exp(\operatorname{ad} a)(b)$。因此我们得到

$$\begin{aligned} U &= (\exp \operatorname{ad} F)(\exp \operatorname{ad}(-E))(\exp \operatorname{ad} f)(U') \\ &= (\exp F)(\exp(-E))(\exp F)(U')(\exp -F)(\exp(-E))(\exp -F). \end{aligned}$$

任取 $v \in V.$，则

$$U^s(v) = (\exp F)(\exp(-E))(\exp F)(U')^s(\exp -F)(\exp(-E))(\exp -F)(v).$$

由于 $E, F'U'$ 是局部幂零的，因此当 s 充分大时， $U^s v = 0$，所以 U 按要求是局部幂零的。

□

2.8.2. 回顾一下，若 B_π 是可对称化的，则 $\mathfrak{g}_{pr} \simeq [\mathfrak{g}(B_\pi) \quad \mathfrak{g}(B_\pi)] / \mathfrak{c}$. 因此，由引理2.8.1，任意可积的 $\mathfrak{g}$-模都具有可积的 $[\mathfrak{g}(B_\pi) \quad \mathfrak{g}(B_\pi)]$ –模的结构（其被 $\mathfrak{c}$湮灭）。

2.9. **内自同构**。设 $\mathfrak{s}$ 是一个带有 Cartan 子代数 $\mathfrak{t}.$ 的 Kac-Moody 代数。若一个 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$– 模既可积，又使 Cartan 代数的作用为半单，则称其为半单可积的 。

在 [11], 中，作者构造了一个所谓的极小 Kac-Moody 群 $\mathcal{S}_{min}$，与之相关联的是 $\mathfrak{s}.$

群 $\mathcal{S}_{min}$ 按如下方式构造。首先，我们将 $\mathcal{S}^*$ 定义为加法群 $\mathfrak{s}_\alpha$ （ $\alpha \in \Delta^{re}$）的自由积。接下来，对于导出李代数 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ 的任意半单可积表示（V， γ），我们构造一个相应的 $\mathcal{S}^*$ 表示，记作 γ^*: $\mathcal{S}^* \longrightarrow \operatorname{Aut}(V)$，定义如下:

$$\gamma^*(i_\alpha(e)) = \exp \gamma(e),$$

其中 i_α : $\mathfrak{s}_\alpha \longrightarrow \mathcal{S}^*$ 是自然嵌入。现在，我们将子群 $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{S}^*$ 定义为所有 $\ker \gamma^*$ 的交（遍历 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ 的所有半单可积表示）。最后，我们定义 $\mathcal{S}_{min} := \mathcal{S}^*/\mathcal{R}^*$.

对于任意半单可积的导出李代数表示 (V， γ)，我们将其与群 $\mathcal{S}_{min}$，的一个表示 (V， Γ) 相关联，其中对每个 $e \in \mathfrak{s}_\alpha$,

$$\Gamma(q(i_\alpha(e))) = \exp \gamma(e),$$

其中 $q : \mathcal{S}^* \longrightarrow \mathcal{S}_{min}$ 是典范同态。

对于伴随表示，我们将相应的 $\mathcal{S}_{min}$ 表示记作 Ad。对于每个 $x \in \mathcal{S}_{min}$，元素 Ad(x) 都是 $\mathfrak{s}$. 的代数自同构。我们称这样的自同构为内自同构。

2.9.1. 可对称化 *Kac-Moody* 代数的共轭定理。以下定理证明见 [11] 以及 [12], 第 10 章。

定理。设 $\mathfrak{s}$ 是一个可对称化 *Kac-Moody* 代数，其 *Cartan* 子代数为 $\mathfrak{t}$.。若 $\mathfrak{t}'$ 是 $\mathfrak{s}$ 的 *ad*-可对角化交换子代数，则存在 $x \in \mathcal{S}_{min}$ 使得 $\mathrm{Ad}(x)(\mathfrak{t}') \subset \mathfrak{t}$.

2.9.2. *Kac-Moody* 超代数的内自同构。设 $\mathfrak{g}$是一个 Kac-Moody 超代数，且 B_π 可对称化。我们为 $\mathcal{S}_{min}$ 构造 $\mathfrak{g}(B_\pi)$。根据 2.8.2， $\mathcal{S}_{min}$在任意可积 $\mathfrak{g}$–模上都有自然作用。注意，此作用保持模上的$\mathbb{Z}_2$–分次。特别地， $\mathcal{S}_{min}$ 作用于伴随 $\mathfrak{g}$–模，我们将此作用记作 Ad。

2.9.3. **引理**。

(i) 对每个 $x \in \mathcal{S}_{\min}$，元素 $\mathrm{Ad}(x)$ 是李超代数$\mathfrak{g}$.的一个自同构。*(ii)* 如果 $(-,-)$ 是 $\mathfrak{g}$上的不变双线性型，那么 $\mathrm{Ad}(x)$ 保留$(-,-)$。

证明。首先注意，Ad(x) 是形如 exp ad u, 的线性变换的复合，其中 $u \in \mathfrak{g}_\alpha$, 且 $\alpha \in \pi$.。因此，不失一般性，我们可以假设 Ad (x) $=$exp ad u. 令 $x, y \in \mathfrak{g}$. 我们需要证明

$$[\exp \operatorname{ad} u\,(x)\,, \exp \operatorname{ad} u\,(y)] = \exp \operatorname{ad} u([x,y]).$$

经典论证（例如， [7]）在此适用。为完整起见，我们给出这一论证。我们对 n 进行归纳，证明:

$$\frac{(\operatorname{ad} u)^n}{n!}\,([x,y]) = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{1}{i!}\,(\operatorname{ad} u)^i\,(x)\,, \frac{1}{(n-i)!}\,(\operatorname{ad} u)^{n-i}\,(y)\right].$$

$n=0$ 为平凡表示的情形。接下来，我们有：

$$\begin{aligned}\frac{(\operatorname{ad} u)^n}{n!}([x,y]) &= \frac{1}{n!}\left[u,(\operatorname{ad} u)^{n-1}([x,y])\right]\\ &\overset{*}{=} \frac{1}{n!}\left[u,(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{i!}(\operatorname{ad} u)^i(x),\frac{1}{(n-1-i)!}(\operatorname{ad} u)^{n-1-i}(y)\right]\right]\\ &\overset{**}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left[\left[u,\frac{1}{i!}(\operatorname{ad} u)^i(x)\right],\frac{1}{(n-1-i)!}(\operatorname{ad} u)^{n-(i+1)}(y)\right]\right.\\ &\quad\left.+\left[\frac{1}{i!}(\operatorname{ad} u)^i(x),\left[u,\frac{1}{(n-1-i)!}(\operatorname{ad} u)^{n-1-i}(y)\right]\right]\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{i!}(\operatorname{ad} u)^i(x),\frac{1}{(n-i)!}(\operatorname{ad} u)^{n-i}(y)\right],\end{aligned}$$

其中 $*$ 由归纳假设得出，而 $**$ 由雅可比恒等式以及以下事实得出：$u\in\mathfrak{g}_0$. 现在，(i) 可通过与 [7], 第 2.3 章中完全相同的证明得出。

对于 (ii)，我们希望证明 $(x|y)=(\exp u(x)\,|\,\exp u(y))$。记 k 为满足 $(\operatorname{ad} u)^{k+1}(x)=(\operatorname{ad} u)^{k+1}(u)=0$. 的最小整数。由直接归纳法及双线性型的不变性，我们得到：

$$\left((\operatorname{ad} u)^i(x)\,|\,(\operatorname{ad} u)^j(y)\right)=(-1)^{i+j}\left((\operatorname{ad} u)^j(x)\,|\,(\operatorname{ad} u)^i(y)\right),$$

对每个 $i,\ j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. 特别地，

$$\left((\operatorname{ad} u)^i(x)|y\right)=(-1)^i\left(x|(\operatorname{ad} u)^i(y)\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}(\exp\operatorname{ad} u(x)\,|y) &= (x|y)+([u,x]\,|y)+\cdots+\left(\frac{\operatorname{ad}^k u(x)}{k!}|y\right)\\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left(x|\ \operatorname{ad}^i u(y)\right)=\sum_{i=0}^{k}\left(x|\ \operatorname{ad}^i(-u)(y)\right)=(x|\exp\operatorname{ad}(-u)(y))\end{aligned}$$

因此，对每个 $x,\ y\in\mathfrak{g}$. 都有 $(\exp\operatorname{ad} u(x)\ |y)=(x|\exp\operatorname{ad}(-u)(y))$。由此得到：

$$(\exp\operatorname{ad} u(x)\,|\exp\operatorname{ad} u(y))=(x|\exp\operatorname{ad}(-u)(\exp\operatorname{ad} u(y)))=(x|y),$$

如所愿。

□

利用上述引理，从现在起，对于任意的 $x\in\mathcal{S}_{min}$，我们将 $\operatorname{Ad}(x)$ 视为 $\mathfrak{g}$，上的自同构，而不仅仅是 $\mathfrak{g}(B_\pi)$，上的自同构，条件是 B_π 可对称化。

我们称 $\phi\in\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ 为内的，若存在某个 $x\in\mathcal{S}_{min}$. 使得 $\phi=\operatorname{Aut}(x)$

3. Affine Kac-Moody Lie superalgebras

与不定型相比，仿射 Kac–穆迪超代数可以通过一种非常具体的方式构造，使得代数内部的关系更容易理解。对于仿射可对称化情形，这可以通过一种称为 仿射化 的过程实现，稍后将在本章中详细说明。至于不可对称化情形，则只有一个族 $S(2|1;\ b)$，其中 $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$，以及一个系列 $\mathfrak{q}_n^{(2)}$，其中 $n \geq 3$. 这是由 Crystal Hoyt 发现的（参见 [5] 和 [6]）。

3.1. 仿射化过程。 对于仿射化过程，我们固定一个有限维 Kac-Moody 超代数 $\dot{\mathfrak{g}}$，以及一个 σ 有限阶自同构。此外，该自同构必须保持 $\dot{\mathfrak{g}}$上的非退化不变双线性型，这是因为 $\dot{\mathfrak{g}}$属于有限型而存在的。

对于给定的 $\dot{\mathfrak{g}}$，通过仿射化得到的仿射 Kac-Moody 超代数（模同构）与群 $\mathrm{Aut}^{(-,-)}(\dot{\mathfrak{g}})/\mathrm{Inn}$ 之间存在一一对应，其中 $\mathrm{Aut}^{(-,-)}(\dot{\mathfrak{g}})$ 表示保持 $\dot{\mathfrak{g}}$ 上的双线性型的自同构群，而 Inn 是内自同构子群。Vera Serganova 完成了 $\mathrm{Aut}(\dot{\mathfrak{g}})/\mathrm{Inn}$ 的分类（见 [15]）。这一结果直接给出了 $\dot{\mathfrak{g}}$. 所有可能仿射化的分类。这些代数是可对称化的，因为 $\dot{\mathfrak{g}}$ 上的双线性型可自然延拓至其仿射化，并且仍保持不变且非退化（详情将在本章后文给出）。Johan van de Leur 在其学位论文中证明，所有可对称化仿射 Kac-Moody 超代数都可通过仿射化得到（见 [16]）。由此可知，$\mathrm{Aut}^{(-,-)}(\dot{\mathfrak{g}})/\mathrm{Inn}$，中自同构的分类给出了可对称化仿射 Kac-Moody 超代数的完整分类。特别地，所有各向异性仿射 Kac-Moody 超代数都是可对称化的。

要求自同构保持双线性型至关重要。虽然每个自同构都保持 Killing 型（这一点从定义很容易看出），但在某些情况下 Killing 型可能是退化的，例如 $D(2|1;\alpha)$。在 [15], 中，Serganova 证明，除了恒等映射之外，$D(2|1;\alpha)$ 不存在保持该代数所具有的非退化不变双线性型的自同构。

我们将仿射化过程分为两种情况：

— **非扭曲仿射化**，其中自同构为恒等映射。— **扭曲仿射化**，其中使用非平凡自同构。

3.2. 非扭曲仿射化。 我们从一个单有限维 Kac-Moody 超代数 $\dot{\mathfrak{g}}$ 开始这一过程。接下来，定义满足关系 $[t^i x, t^j y] = t^{i+j}[x, y]$ 的非扭曲环代数 $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}}$。由 $\dot{\mathfrak{g}}$ 得到的非扭曲李超代数，记作 $\mathfrak{g}$（此记号也用于扭曲仿射化），也记作 $\dot{\mathfrak{g}}^{(1)}$（此记号专用于非扭曲仿射化），它由环代数的一个中心扩张以及一个导子 $d = t\frac{d}{dt}$ 构成。因此，我们有 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$，其

关系 $\left[d, t^k a\right] = k t^k a$ 和 $[t^i x, t^j y] = t^{i+j}[x, y] + i\delta_{i,\ -j}(x,\ y) \cdot K$，其中 K 是中心元，而 $(\cdot,\ \cdot)$ 是 $\dot{\mathfrak{g}}$ 上一个固定的非退化偶双线性形式（非退化双线性形式在相差一个标量的意义下唯一）。

特别地，对于 $i \in \{0, 1\}$，$\mathfrak{g}_{i\ -} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}}_{i\ -} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$

我们按如下方式将 $\dot{\mathfrak{g}}$ 上的双线性型扩展到其仿射化：

$$\left(t^i a, t^j b\right) = \delta_{i,-j}(a, b), \quad (K, K) = (d, d) = 0, \quad (K, d) = 1, \quad (at^m, K) = (at^m, d) = 0.$$

3.2.1. 根系与 *Cartan* 子代数。.....的 Cartan 子代数 $\mathfrak{g}$ 为

$$\mathfrak{h} := \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d,$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的 Cartan 子代数。固定 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的一组单根 Σ，并令 θ 为 $\dot{\mathfrak{g}}$ 中相对于 Σ 的最高根。对于每个 $\alpha \in \Delta$，我们通过设定 $\alpha(K) = \alpha(d) = 0$，将 α 扩展到 $\mathfrak{h}$。

我们定义泛函 $\delta \in \mathfrak{h}^*$ 如下：

$$\delta(\dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}K) = 0, \quad \delta(d) = 1.$$

因此，$\Sigma := \Sigma \cup \{\delta - \theta\}$ 构成了 $\mathfrak{g}$的一组单根。我们记 $\alpha_0 := \delta - \theta$.

正根集为：

$$\Delta_+ = \{m\delta + \alpha\}_{m\in\mathbb{Z}_{>0}, \alpha\in\dot{\Delta}} \cup \{m\delta\}_{m\in\mathbb{Z}_{>0}},$$

负根集为：

$$\Delta_- = \{m\delta + \alpha\}_{m\in\mathbb{Z}_{<0}, \alpha\in\dot{\Delta}} \cup \{m\delta\}_{m\in\mathbb{Z}_{<0}}.$$

偶根（分别地，奇根；各向同性根）具有如下形式：$m\delta + \alpha$，其中 α 要么为零，要么是 $\dot{\mathfrak{g}}$的偶根（分别地，奇根；各向同性根）。

T虚根具有如下形式：$m\delta$，其中 $m \neq 0$，因此 $\Delta^{im} \subset \Delta_0$。

3.2.2. 根空间与关系。根空间具有如下形式：$\mathfrak{g}_{\alpha+k\delta} = \mathbb{C}t^k e_\alpha$，以及$\mathfrak{g}_{k\delta} = \{t^k h \mid h \in \mathfrak{h}\}$，其中 $e_\alpha \in \dot{\mathfrak{g}}_\alpha$。

立即可得，对于 $k \neq -m$，有 $[\mathfrak{g}_{k\delta}, \mathfrak{g}_{m\delta}] = 0$。由于将 $(-, -)$ 限制到 $\mathfrak{h}$ 后是非退化的，因此有 $[\mathfrak{g}_{k\delta}, \mathfrak{g}_{-k\delta}] = \mathbb{C}K$.

3.2.3. 非扭曲的仿射型 *Kac-Moody* 代数 $\mathfrak{psl}(n|n)^{(1)}$。代数 $\mathfrak{gl}(n|n)$ 是唯一一个并非单的不可分解有限型 Kac-Moody 超代数。在考察非扭曲的仿射型代数时，会遇到一些问题：

$$\mathfrak{gl}(n|n)^{(1)} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k \otimes \mathfrak{gl}(n|n) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d,$$

通过与之前相同的过程得到。事实上，记 $Id_n := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 并考虑元素 tId_n. 对于 $\mathfrak{gl}(n|n)$ 的一组给定单根， 可以看出$tId_n \notin \widetilde{\mathfrak{n}}^+$， 因为 $Id_n \notin \mathfrak{sl}(n|n) = [\mathfrak{gl}(n|n)\ \mathfrak{gl}(n|n)]$. 此外，考虑元素tId. 我们断言，由该元素生成的理想与 Cartan 子代数的交为零。事实上，由于 Id 是 $\mathfrak{gl}(n|n)$中的中心元，因此对于每个 $k \neq -1$和 $a \in \mathfrak{gl}(n|n)$， 都有 $\left[t^k a, tId\right] = 0$. 对于 $k = -1$， 注意到必须有 $a \in \mathfrak{sl}(n|n)$，因此：

$$\left[t^{-1}a, tId\right] = \underbrace{str\,(aId)}_{=0} K = 0,$$

其中 str 为超迹。这意味着，对于 $k \neq 0$ ，元素 $t^k Id_n$ 和 $t^k Id$ 属于与 $\mathfrak{h}$. 交集为零的理想。因此，这些元素在 Kac-Moody 超代数中的像为零。仿射 Kac-Moody 超代数记作 $\mathfrak{psl}(n|n)^{(1)}$ ，它是 $\mathfrak{gl}(n|n)^{(1)}$ 的子商，作为 $\mathfrak{psl}(n|n)$-模，其形式为

$$\mathfrak{psl}(n|n)^{(1)} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathbb{C}t^k \otimes \mathfrak{psl}\,(n|n) \oplus \mathfrak{gl}\,(n|n) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d.$$

3.3. 扭曲仿射化。设 $\dot{\mathfrak{g}}$ 是单 Kac-Moody 超代数或 $\mathfrak{psl}(n|n)$ ，且 $\sigma : \dot{\mathfrak{g}} \to \dot{\mathfrak{g}}$ 是一个阶为 n 的自同构。记 $\xi := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ，则 σ 的特征值为

$$\{\xi^j \mid 0 \leq j \leq n-1\}.$$

用 $\dot{\mathfrak{g}}^j$ 表示对应于 ξ^j 的特征子空间。为简便起见，我们记作 $\dot{\mathfrak{g}}^0 = \dot{\mathfrak{g}}^\sigma$，. $\mathfrak{h}^\sigma := \mathfrak{h} \cap \dot{\mathfrak{g}}^\sigma$，以及 $s \equiv s$ 模 n.

这给出了 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的以下 $\mathbb{Z}_n$ 分次：

$$\dot{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \dot{\mathfrak{g}}^i.$$

根据 [16]， $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 是一个单 Kac-Moody 超代数，其 Cartan 子代数为 $\mathfrak{h}^\sigma$，而每个$\dot{\mathfrak{g}}^i$ 都是 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 上的模。此外， $\dot{\mathfrak{g}}^1$ 由其最高权向量生成。我们将阶为 的扭曲环代数定义为 n 如下

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}}^{\overline{k}},$$

其李括号为

$$[t^i x, t^j y] = t^{i+j}[x, y].$$

$\dot{\mathfrak{g}}$ 的扭李超代数记作 $\mathfrak{g}$ 或 $\dot{\mathfrak{g}}^{(n)}$，与非扭曲的情形类似，是通过环代数的中心扩张并附加一个导子 $d = t\frac{d}{dt}$ 得到的。由此可得：

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}}^{\overline{k}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d,$$

其满足以下关系：

$$[d, t^k a] = kt^k a, \quad [t^i x, t^j y] = t^{i+j}[x, y] + \delta_{i,-j}(x, y) \cdot K,$$

其中 K 是中心元，且 $(-,\ -)$ 是 $\dot{\mathfrak{g}}$上的非退化偶双线性形式。与非扭曲情形类似，该双线性形式可以延拓到其仿射化。

我们通过如下定义，自然地将自同构 σ 延拓到 $\mathfrak{g}$：

$$\widetilde{\sigma}\left(t^k x\right) = \xi^{-k} t^k \sigma\left(x\right), \widetilde{\sigma}\left(d\right) = d, \widetilde{\sigma}\left(K\right) = K.$$

于是， $\widetilde{\sigma}$ 的不动点集与扭曲代数$\mathfrak{g}.$ 的元素集一致。事实上， $t^k x$ 是一个不动点，当且仅当 $t^k x = t^k \xi^{-k} \sigma(x)$。这等价于$\sigma(x) = \xi^k x$，也就是说， $x \in \dot{\mathfrak{g}}^k.$

3.3.1. 根系与 *Cartan* 子代数。的 Cartan 子代数是

$$\mathfrak{h} := \dot{\mathfrak{h}}^\sigma \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d.$$

为 $\mathfrak{g}$构造一组单根时，我们从 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$的一组单根 Σ^σ 开始。令 θ 表示 $\dot{\mathfrak{g}}^1$ 作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$-模时唯一的最高权。我们通过$\delta\left(\dot{\mathfrak{h}}^\sigma \oplus \mathbb{C}K\right) = 0$定义 $\delta \in \mathfrak{h}^*$，并且 $\delta(d) = 1.$。于是， $\mathfrak{g}$ 的一组单根为 $\Sigma :=$ $\Sigma^\sigma \cup \{\delta - \theta\}$。对于所有 $\alpha \in \Sigma$， $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^\sigma \oplus \mathbb{C}K$，因此 $\delta(\alpha^\vee) = 0$；故 δ 属于 Cartan 矩阵 $\mathfrak{h}.$的核。

扭曲情形下根系的构造比非扭曲情形更复杂。从本质上说，根的形式为 $\alpha + m\delta$，其中 α 是作为 $\dot{\mathfrak{g}}^m$的 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$-模中的一个权，且 $m \in \mathbb{Z}$。在 [16] 和 [14] 中给出的根的描述表明，$\alpha + m\delta$ 是实根，当且仅当 α 不是 $\dot{\mathfrak{g}}^m$ 作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$-模时的零权空间。虚根的形式为 $m\delta$，其中 $m \in \mathbb{Z}.$ 根的奇偶性由 α-权向量的奇偶性决定（其中 α 也可以为 0）；这些向量属于$\dot{\mathfrak{g}}^m$ 作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$-模的情形。

根系的详细分类描述见 [16], 表5，具体计算可见 [17], 第6章。

与非扭曲情形相比，扭曲情形可能表现出显著不同的性质。例如，在代数 $A(2k, 2l)^{(4)}$ 中，并非所有虚根都是偶的。这种代数将在本学位论文第*4*章中作更详细的探讨。

3.3.2. 根空间。 实根空间的形式为 $\mathfrak{g}_{\alpha+k\delta} = \mathbb{C}t^k e_\alpha$，其中 e_α 是 $\dot{\mathfrak{g}}^k$ 中对应于权 α 的权向量，视为一个 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$-模（非零权空间是一维的）。虚根空间的形式为：

$$\mathfrak{g}_{k\delta} = \left\{ t^k v \,\middle|\, v \text{ is a zero-weight vector of } \dot{\mathfrak{g}}^{\overline{k}} \text{ as a } \dot{\mathfrak{g}}^\sigma\text{-module} \right\}.$$

换句话说，通过将 $t^m \otimes v \in \mathfrak{g}_{m\delta}$ 与 v 等同，可以将 $\mathfrak{g}_{m\delta}$ 看作 $\dot{\mathfrak{g}}^m$ 的零权空间。这种等同是向量空间的一个同构。

与非扭曲情形不同，当 $i+j \neq 0$ 时，虚根空间是否对易并不明确；事实上，它们并非总是对易的。在下一章中，我们将考察由 Cartan 子代数和虚根空间张成的代数的结构。

3.4. 所有可对称化仿射 Kac–Moody 超代数的分类。 Johan van de Leur 给出了可对称化扭曲和非扭曲仿射 Kac-Moody 超代数的完整分类。相差一个同构，非扭曲 Kac-Moody 超代数中并非纯偶的有：

$$A\left(k,l\right)^{(1)}, B\left(k,l\right)^{(1)}, D\left(k,l\right)^{(1)}, F\left(4\right)^{(1)}, G\left(3\right)^{(1)}, D(2|1;\alpha)^{(1)},$$

其中 $A(k,\ k)^{(1)} = \mathfrak{psl}^{(1)}(k+1|k+1)$，如上所定义。相差一个同构（作为 Kac-Moody 超代数同构，但不保 $\mathbb{Z}_n-$ 分次），扭曲 Kac-Moody 超代数中并非纯偶的有：

$$\begin{aligned} &A\left(2k,2l-1\right)^{(2)}, \quad A\left(2k-1,2l-1\right)^{(2)}, \text{ where } (k,l)\neq(1,1), \\ &A\left(2k,2l\right)^{(4)}, \quad D\left(k,l\right)^{(2)}. \end{aligned} \tag{14}$$

最初，van de Leur 将 $G(3)^{(2)}$ 纳入了分类；然而，$G(3)^2 \simeq G(3)^1$（见 [3], 第 8 节）。

注意，$C(l+1) = \mathfrak{osp}(2|2l) = D(1|l)$，因此实际上 $C\left(l+1\right)^{(2)}$ 也包含在此列表中。

产生上述扭结李超代数的自同构列表见 [16], 表 4（如前所述，该列表最初由 Serganova 在 [15]中给出）。这些自同构是相对于一组固定的单根，在 Chevalley 生成元上明确定义的，而此定义自然地扩展到整个李超代数。关于适用于任意选定单根集的自同构的一般公式，见 [17], 第6章。

2 阶自同构在 Chevalley 生成元上作用为带符号的置换，因此可以解释为 $\dot{\mathfrak{g}}$.Dynkin 图的带符号自同构

3.5. 主李代数 $\mathfrak{g}_{pr}$ 在仿射可对称化情形下。 假设 $\mathfrak{g}$ 是一个不可分解仿射可对称化 Kac-Moody 超代数。因此，存在有限维 Kac–Moody 代数 $\dot{\mathfrak{g}}$，使得 $\mathfrak{g}$ 是其仿射化（扭曲的或非扭曲的）。

3.5.1. 回顾 $\mathfrak{g}_{pr} \simeq \left[\mathfrak{g}\left(B_\pi\right)\ \ \mathfrak{g}\left(B_\pi\right)\right]/\mathfrak{c}$，其中 $\mathfrak{c}$ 是包含在 $\mathfrak{g}(B_\pi)$中心内的理想。根据 [14], 第 9 节，有以下结论：

(i) $\mathfrak{g}(B_\pi) = \mathfrak{g}(B_1) \times \mathfrak{g}(B_2) \times \cdots \times \mathfrak{g}(B_k)$，其中 $k \in \{1,2,3\}$. 此外，$k = 3$ 当且仅当 $\mathfrak{g} = D(2|1;\alpha)^{(1)}$、$\mathfrak{g} = D(2|1;\alpha)$ 或 $D(2|n)$ 时成立。(ii) 对每个 $i = 1, ..., k$，我们有 ψ 将 $\mathfrak{g}(B_i)$ 的中心 $\mathbb{C}K_i$ 映射到 $\mathbb{C}K.$。特别地，$\mathfrak{c}$ 与 $[\mathfrak{g}(B_i)\ \mathfrak{g}(B_i)]$, 的交为零，因此我们得到该代数到 $\mathfrak{g}_{pr}.$ 的一个嵌入。此嵌入可扩展为 $\mathfrak{g}(B_i)$ 到 $\mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathbb{C}d.$ 的嵌入。(iii) 若 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 的中心维数为 k，则中心理想 $\mathfrak{c}$ 的维数为$k-1.$

3.5.2. **引理**。将 $(-,-)$ 限制到 $\mathfrak{g}_{pr}$ 所得的核为 $\mathbb{C}K$，且限制到 $\mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathbb{C}d$ 是非退化的。

证明。如命题 2.7.8 的证明中已指出，$\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr}) = \mathbb{C}K.$因此，由推论2.7.13,

$$\ker(-,-)|_{\mathfrak{g}_{pr}} = \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr}) = \mathbb{C}K.$$

最后，由于ce $(K,\ d) = 1$，我们得到，将 $(-,\ -)$ 限制到 $\mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathbb{C}d$ 是非退化的 e. □

3.5.3. 例：$\mathfrak{sl}^{(1)}(m|n)$。在 [14], 中给出了各种例子，展示了不同情况下 $\mathfrak{g}_{pr}$ 和$\mathfrak{g}(B_\pi)$的形式。我们首先给出一个 $\mathfrak{g}(B_\pi)$可分解的例子。考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}^{(1)}(m|n)$。首先注意到 $\mathfrak{sl}(m|n)_0 = \mathfrak{sl}_m \times \mathfrak{sl}_n \times \mathbb{C}z$，其中$z = \begin{pmatrix} m \cdot I_n & 0 \\ 0 & n \cdot I_m \end{pmatrix}$. 令 K_1、K_2和 K_3为中心元，d_1、d_2和 d_3为代数 $\mathfrak{sl}_m^{(1)}$、$\mathfrak{sl}_n^{(1)}$和$(\mathbb{C}z)^{(1)}$的导子。我们有 $\mathfrak{g}(B_\pi) = \mathfrak{sl}_m^{(1)} \times \mathfrak{sl}_n^{(1)}$、$\mathfrak{c} = \mathbb{C}(K_1 - aK_2)$，其中某个 $a \in \mathbb{C}$，并且 $\mathfrak{g}_{pr} = \left(\left[\mathfrak{sl}_m^{(1)}, \mathfrak{sl}_m^{(1)}\right] \times \left[\mathfrak{sl}_n^{(1)}, \mathfrak{sl}_n^{(1)}\right]\right)/\mathfrak{c}$. 最后：

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k z \times \left[\mathfrak{sl}_m^{(1)}, \mathfrak{sl}_m^{(1)}\right] \times \left[\mathfrak{sl}_n^{(1)}, \mathfrak{sl}_n^{(1)}\right]\right) / \langle K_i - K_j \rangle_{1\le i<j\le 3} \rtimes \mathbb{C}d,$$

其中 $d = d_1 + d_2 + d_3.$ 我们可以将其视为导子的“合并”。通过使用这个 d，我们实际上考虑的是一个子代数；如果将这三个导子全部纳入代数，所得的代数会更大。

3.5.4. 例：$\mathfrak{osp}(2|2)^{(2)}$。在此例中，嘉当数据为 $\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ \tau = \{1,2\}\right)$.于是 $\{\alpha, \delta-\alpha\}$ 是相应的单根集合，它们都是奇根。我们看到，2α，$2(\delta-\alpha)$ 是偶根。此外，$\pi = \{2\alpha, 2\delta - 2\alpha\}$，这给出 $\mathfrak{g}(B_\pi) = \mathfrak{sl}_2^{(1)}$，$\mathfrak{g}_{pr} = \left[\mathfrak{sl}_2^{(1)}, \mathfrak{sl}_2^{(1)}\right]/\mathbb{C}(K_1 - K_2)$。因此，这是一个 $\mathfrak{g}(B)$ 不可分解的例子，并且$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2^{(1)} \oplus N$，$N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{(2i+1)\delta}$.

–

3.6. 可对称化情形下 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的结构。 给定一个有限维 Kac-穆迪超代数 $\dot{\mathfrak{g}}$ 及其仿射化（扭曲或非扭曲的） $\mathfrak{g}$，我们的目标是清晰而详细地描述 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的结构。更准确地说，我们希望找到一个 $\mathfrak{g}_{pr}-$ 模 $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，使得 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}=\mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathfrak{j}$.

3.6.1. 记作:

$$\mathfrak{g}_{\alpha,pr} := \mathfrak{g}_{\alpha} \cap \mathfrak{g}_{pr} \text{ and } \Delta_{pr} := \{\alpha \in \Delta \,|\, \mathfrak{g}_{\alpha,pr} \neq 0\}.$$

注意，我们并非总是有 $\Delta_{pr}=\Delta_0$ （见 3.5.4）。令 $h \in \mathfrak{h}$ 为一个一般元素，即 $Re(\alpha(h)) \neq 0$ 对每个 $\alpha \in \Delta$. 一般元素通过设定以下内容，在 $\mathfrak{g}$上定义一个三角分解: $\Delta^{\pm}=\{\alpha \in \Delta \,|\, \pm Re(\alpha(h))>0\}$. 这在李代数 $\mathfrak{g}_{pr}+\mathfrak{h}$.上诱导出一个三角分解。对于 $\nu \in \mathfrak{h}^*$，我们用 $L_{\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}}(\nu)$ 表示其在 $\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathfrak{h}$. 上对应的最高权单模

下述定理为我们提供了 $\mathfrak{g}_{pr}$的“不变描述”，也就是说，这种描述不依赖于将 $\mathfrak{g}$ 表示为 Kac-Moody 超代数的具体方式。

3.6.2. **定理**。

(i) 作为$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathfrak{h})$-模，我们有

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}}=(\mathfrak{g}_{pr}+\mathfrak{h}) \oplus \left(\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} L_{\mathfrak{g}_{pr}}(s\delta)^{\oplus m_s}\right)$$

其中 $m_0=0$。

(ii) 有

$$[[\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{0}}],[\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{0}}]]=\mathfrak{g}_{pr}.$$

证明。 根据引理 3.5.2，我们可以写成:

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}}=(\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathfrak{h}) \oplus N,$$

其中 $N:=\{u \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \mid (\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathfrak{h}, \ u)=0\}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathfrak{h}$-子模 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$。由 (10)，我们有 $\Omega(N) \subset \Delta^{im} \cap \Delta_0$. 因此, $N=\oplus_{s \in \mathbb{Z}} N_{s\delta}$，其中 $N_{s\delta}$ 是 $s\delta$ 权空间。此外，对每个 $\alpha \in \pi$，我们有:

$$[\mathfrak{g}_{\alpha,\mathrm{pr}}, N_{s\delta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+s\delta} \cap N=\{0\}.$$

因此， $[\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}, N_{s\delta}]=0$，且 $N_{s\delta}$是 N的$(\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathfrak{h})$-子模。于是， $N_{s\delta}=L_{\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}}(s\delta)^{\oplus m_s}$，其中 m_s := 维 $N_{s\delta}$。由于 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathfrak{h}$，显然 $m_0=0$。这证明了(i)。

应用定理4.2 以及(i)，我们得到 $[N,N]=\mathbb{C}K$. 此外，由(i)可推出 $[\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}, N]=0$，根据 $\mathfrak{g}_{pr}$ 的定义，我们有 $[\mathfrak{g}_{pr},\mathfrak{g}_{pr}]=\mathfrak{g}_{pr}$. 因此

$$[\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{0}}]=[(\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathfrak{h}) \oplus N,(\mathfrak{g}_{pr}+\mathfrak{h}) \oplus N]=\mathfrak{g}_{pr}+\mathbb{C}K+[\mathfrak{h},N]=\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}} \oplus N.$$

因此，我们得出:

$$[[\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{0}}],[\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{0}}]]=[\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}} \oplus N,\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}} \oplus N]=\mathfrak{g}_{pr}+[N,N]=\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}+\mathbb{C}K=\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}$$

如所需。

□

3.6.3. 以下引理也将对我们有所帮助。

引理。有：

$$\dim \mathfrak{h} - \dim (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) = \dim \mathfrak{c} (\mathfrak{g}_{\bar{0}}),$$

其中 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ 是 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的中心。

证明。$\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数由 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\sigma} \oplus \mathbb{C}d \oplus \mathbb{C}K$ 给出，其中 σ 是仿射化过程中使用的自同构。若 $\mathfrak{g}$ 是非扭曲的，我们可以将 σ 视为恒等映射，在这种情况下 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\sigma}$. 令 $\mathfrak{h}'' \subset \mathfrak{h}^{\sigma} \oplus \mathbb{C}K$ 为一个子代数，使得$\mathfrak{h}^{\sigma} \oplus \mathbb{C}K = \mathfrak{h}'' \oplus \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$。根据命题 2.7.8，我们知道 $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$，且 $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) \cap \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = \mathbb{C}K$. 因此，

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr} = \mathfrak{h}'' \oplus \mathbb{C}K.$$

因此，我们得出：

$$\dim \mathfrak{h} - \dim (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) = \dim \mathfrak{c} (\mathfrak{g}_{\bar{0}}).$$

□

注。根据可对称化仿射 Kac-Moody 超代数的分类（见 [16]），可以看出 $\dim \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ 几乎在所有情形下均为 1 或 2，具体取决于所讨论的代数。唯一的例外是 $\mathfrak{psl}(n|n)^{(1)}$，其中 $\dim \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = 3$.

3.7. queer 扭曲李超代数 $\mathfrak{q}_n^{(2)}$。

3.7.1. 实现。queer 扭曲李超代数也通过仿射化过程构造，但在此情形下，仿射化应用于 queer 李超代数 $\mathfrak{q}(n)$，后者并非 Kac-Moody 超代数。该过程中使用的自同构在 [15]中描述，定义如下：它在偶部上作用为 id，在奇部上作用为 $-id$（详情见 [4]）。请注意，将这种自同构应用于有限维 Kac-Moody 超代数或 $\mathfrak{psl}(n|n)$时，它是一个内自同构。

我们给出如下 $\mathfrak{q}_n^{(2)}$，实现，如 [4]中所述：

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}\left[t^{\pm 2}\right] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d, \; \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}\left[t^{\pm 2}\right].$$

关系如下：

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n} + \delta_{m,-n} (1 - (-1)^m) \operatorname{tr}(xy) K.$$

这些关系的一个直接推论是，K 不属于 $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$，而是位于 $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ 之内。

此外，正如 [14],所指出的，偶部可分解为 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$，其中 $\mathfrak{g}_{pr} \simeq \left[\mathfrak{sl}_n^{(1)}, \mathfrak{sl}_n^{(1)}\right] / \mathbb{C}K.$

3.7.2. **断言。** 有 $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \mathfrak{g}_{pr}$. –

证明。 此结果可通过直接计算得出，使用以下实现：

$$[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}] = \left[\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}\left[t^{\pm 2}\right] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d, \quad \mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}\left[t^{\pm 2}\right] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d\right] = [\mathfrak{sl}_n^{(1)}, \mathfrak{sl}_n^{(1)}]/\mathbb{C}K = \mathfrak{g}_{pr}.$$

□

3.7.3. 注意，引理 3.6.3 在扭曲 queer 情形下并不成立。事实上， $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0) = \mathbb{C}K$，且 d， – $K \notin \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}$，因此 $\dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr} = 2.$

3.8. **仿射 Kac-Moody 超代数** $S(2|1; b)$。

3.8.1. 根据定义， $S(2|1; b) = \mathfrak{g}(A_b, \tau_b)$，其中

$$A_b = \begin{pmatrix} 0 & b & 1-b \\ -b & 0 & 1+b \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_b = \{1, 2\}.$$

代数 $S(2|1; b)$ 是 Kac-Moody 超代数，当且仅当 $b \notin \mathbb{Z}$. 矩阵 A_b的余秩为 1，因此该代数具有一维中心。此外，Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的维数为 4。

该超代数的一种实现见 [14]。Kac-Moody 超代数$S(2|1; b)$ 无法通过李超代数的仿射化构造。

3.8.2. 的结构。根据 [14]，， $\mathfrak{g}$ 的偶部可分解为：

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathbb{C}d + \mathcal{V}ir, \quad \mathfrak{g}_{pr} \cap \mathcal{V}_{ir} = \mathbb{C}K,$$

其中 $\mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathbb{C}d$ 同构于 $\mathfrak{sl}_2^{(1)}$， $\mathcal{V}_{ir} = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_s \oplus \mathbb{C}K$ 同构于 Virasoro 代数，其关系如下：

$$[L_s, L_t] = (s-t)\, L_{s+t} + \frac{K}{12}\left(s^3 - s\right)\delta_{s+t,0}.$$

这里， $L_0 - d$ 属于 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0)$的中心，并且 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0) = \mathbb{C}K + \mathbb{C}(L_0 - d)$。

3.8.3. **引理**。 有 $[\mathfrak{g}_{pr}, \mathcal{V}_{ir}] \subset \mathfrak{g}_{pr}$

证明。设$x \in \mathfrak{g}_{\alpha,\ pr}$，其中 $\alpha \in \Delta^{re}$ 为偶。由 [14], 对每个 $i \in \mathbb{Z}$ ，可得 $L_i \in \mathfrak{g}_{-i\delta}$。因此，我们可以断言 $[x, L_i] \in \mathfrak{g}_{\alpha - i\delta}$. 注意， $S(2|1;\ b$中的所有虚根都是偶的，因此 $\alpha - i\delta$是一个偶实根。由（10），可得 $[x, L_i] \in \mathfrak{g}_{pr}$。此外，$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}$ 与 $\mathcal{V}_{ir}$. 对易。因此结论成立。□

因此，我们可以写成:

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = ((\mathfrak{g}_{pr} \rtimes \mathcal{V}_{ir}) \rtimes \mathbb{C}d)/\mathbb{C}\,(K_1 - K_2)\,.$$

3.8.4. 不再成立的是 $[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]\,, [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]] = \mathfrak{g}_{\overline{pr}}$. 事实上，有： $\mathcal{V}_{ir} \subset [[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]\,, [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]]$.此外，引理 3.6.3 成立。事实上，$\dim \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0) = 2$，且 $\dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr} = 2$.

4. Structure of $\mathcal{K}$

4.1. **李超代数** $\mathcal{K}$。 设 $\dot{\mathfrak{g}}$ 为单 Kac-Moody 超代数（或 $\mathfrak{psl}(n|n)$），$\mathfrak{g}$ 为通过扭曲仿射化得到的代数。定义 $\mathfrak{g}$的如下子代数:

$$\mathcal{K} := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{m\delta},$$

其中 $\mathfrak{g}_{0\cdot\delta} = \mathfrak{h}$. 注意到，在 $\mathfrak{g}$是仿射型、非可对称化 Kac-Moody 超代数的情况下，$\mathcal{K}$ 也有良好定义。不过，我们将重点讨论可对称化情形。

本节的主要目标是理解 $\mathcal{K}$ 内部的关系，并计算构成 $\mathcal{K}$. 的虚根空间的维数。我们已经讨论过非扭曲情形下的这些关系。对于大多数扭曲 Kac-Moody 超代数，$\mathcal{K}$ 的表现相同。唯一的例外是 $\mathfrak{g} = A(2k,\ 2l)^{(4)}$， 其 $\mathcal{K}$ 的结构出人意料地不同。

由 [16]， $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 同构于 $B(k|l)$ 或 $D(k|l)$。除非另有说明，从现在起，每当我们考虑 $B(k|l)$ 或 $D(k|l)$上的模时，我们都将使用 6.1中描述的固定单根集。因此，当把 $\dot{\mathfrak{g}}^i$ 视为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 模时，我们将采用与 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$.相应的固定单根集

本节将证明以下定理:

4.2. **定理**。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个不可分解仿射型可对称化 *Kac-Moody* 超代数。

（*i*）子代数 $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K} \cap \mathfrak{g}_0$ 是一个无限维 *Heisenberg*李代数。

(*ii*) 如果 $\mathfrak{g} \neq A(2k|2l)^{(4)}$，那么 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$，因此根据 (*i*)：

$$[\mathfrak{g}_{s\delta}, \mathfrak{g}_{q\delta}] = \begin{cases} 0 & s+q \neq 0 \\ \mathbb{C}K & s+q = 0 \end{cases}$$

(iii) 若 $A(2k|2l)^{(4)}$，则 $\mathfrak{g}_{s\delta} \subset \mathcal{K} \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 当且仅当 $s = \pm 1$ 或 $s = \pm 3$，其中

$$\overline{s} = s \mod 4.$$

若 $i+j=0$，则 $[\mathfrak{g}_{i\delta}, \mathfrak{g}_{j\delta}] = \mathbb{C}K$. 否则，我们有：

$$[\mathfrak{g}_{i\delta}, \mathfrak{g}_{j\delta}] = \begin{cases} 0 & i \neq 0, \overline{i} = \overline{0} \\ 0 & \overline{i+j} = \overline{0} \\ \mathfrak{g}_{(i+j)\delta} & \overline{i} = \overline{2}, \overline{j} = \overline{1,3} \\ \mathbb{C}x, \quad x \text{ is a nonzero element in } \mathfrak{g}_{(i+j)\delta} & \overline{i} = \overline{j} = \overline{1,3} \end{cases}$$

4.3. 的中心化子 $\mathfrak{h}^\sigma$。我们首先介绍 $\dot{\mathfrak{g}}$ 中 $\mathfrak{h}^\sigma$ 的中心化子的一些性质，其定义为：

$$\mathfrak{z} := \{x \in \dot{\mathfrak{g}} \mid [h, x] = 0 \text{ for all } h \in \dot{\mathfrak{h}}^\sigma\}.$$

容易看出：

$$\mathfrak{z} = \dot{\mathfrak{h}} + \sum_{\alpha \in \dot{\Delta}: \langle \alpha, \dot{\mathfrak{h}}^\sigma \rangle = 0} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{15}$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是 $\dot{\mathfrak{g}}$. 的 Cartan 子代数。此外，由于 $\mathfrak{z}$ 是 $\sigma-$ 不变的，我们将其分解为

$$\mathfrak{z} = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathfrak{z}^i,$$

其中 $\mathfrak{z}^i = \mathfrak{z} \cap \dot{\mathfrak{g}}^i$，且 m 是 σ.的阶

4.3.1. 引理。设 $m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. 则 $\mathfrak{g}_{m\delta} = \mathbb{C}t^m \otimes (\mathfrak{z} \cap \dot{\mathfrak{g}}^m)$ 。

证明。设 $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} t^k x_k + c_1 K + c_2 d$，其中 $x_k \in \dot{\mathfrak{g}}^k$。直接根据定义可得：
$x \in \mathfrak{g}_{m\delta} \longleftrightarrow [h, x] = m\delta(h)\, x$ 对每个 $h \in \mathfrak{h} \longleftrightarrow [h, x] = 0$，对每个 $h \in \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$，且 $[d, x] = mx \longleftrightarrow [x_k, h] = 0$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}$、$h \in \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$、$c_1 = c_2 = 0$ 以及 $x_k = 0$，对于 $k \neq m \longleftrightarrow x \in \mathbb{C}t^m \otimes (\mathfrak{z} \cap \dot{\mathfrak{g}}^m)$. □

4.3.2. 以下是 [9]中的引理 8.1 的一个类似结果。

引理。假设 σ 的阶为 $2r$.

(i) 对所有 i，我们有 $[\mathfrak{z}^{2r-i}, \mathfrak{z}^i] = 0$.
(ii) 如果 $\dot{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{z}^0 \oplus \mathfrak{z}^r$，那么 $\dot{\mathfrak{h}} = \mathfrak{z}^0 \oplus \mathfrak{z}^r$.

证明。双线性型（$-$，$-$）在限制到 $\mathfrak{h}$ 以及每个空间 $\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 时均为非退化，其中 $\alpha\in\Delta$. 因此，根据（15），其在 $\mathfrak{z}$ 上的限制仍然非退化。

由于 $\dot{\mathfrak{h}}^\sigma$ 是 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 的 Cartan 子代数，我们得到 $\mathfrak{z}^0=\dot{\mathfrak{h}}^\sigma$.

对于任意 $x\in\mathfrak{z}^i$ 和 $y\in\mathfrak{z}^j$，其中 $i+j\neq 0$，（$-$，$-$）的 $\sigma-$不变性意味着：

$$(x,y)=(\sigma(x),\sigma(y))=\left(\xi^i x,\xi^j y\right)=\xi^{i+j}(x,y).$$

因此（$\mathfrak{z}^i$，$\mathfrak{z}^j$）$=0$，所以（$-$，$-$）在 $\mathfrak{z}^0$ 上的限制是非退化的。于是有

$$\left(\left[\mathfrak{z}^{2r-i},\mathfrak{z}^i\right],\mathfrak{z}^0\right)=\left(\mathfrak{z}^{2r-i},\left[\mathfrak{z}^i,\mathfrak{z}^0\right]\right)=0.$$

由于 $[\mathfrak{z}^{2r-i},\mathfrak{z}^i]\subset\mathfrak{z}^0$，这意味着 $[\mathfrak{z}^{2r-i},\mathfrak{z}^i]=0$，并证明了（$i$）。

对于（ii），由于 $[\mathfrak{z}^r,\mathfrak{z}^r]=0$，我们得到 $[\mathfrak{z}^0\oplus\mathfrak{z}^r,\mathfrak{z}^0\oplus\mathfrak{z}^r]=0.$。由于 $\dot{\mathfrak{h}}\subset\mathfrak{z}^0\oplus\mathfrak{z}^r$，可得 $\left[\dot{\mathfrak{h}},\mathfrak{z}^0\oplus\mathfrak{z}^r\right]=0.$。由于 $\dot{\mathfrak{g}}^{\dot{\mathfrak{h}}}=\dot{\mathfrak{h}}$，这便得到所需的 $\mathfrak{z}^0\oplus\mathfrak{z}^r\subset\dot{\mathfrak{h}}$。□

4.3.3. 引理。 有

$$\{u\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}\mid[u,\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_{pr}]=0\}=\mathcal{K}_{\bar{0}}.$$

证明。由于 $\mathfrak{h}^\sigma$ 是 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$的 Cartan 子代数，我们有

$$(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_{pr})\subset(\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])\subset\left(\dot{\mathfrak{h}}^\sigma\oplus\mathbb{C}K\right).$$

因此，$\mathcal{K}_{\bar{0}}\subset\{u\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}\mid[u,\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_{pr}]=0\}$. 反设存在 $u\notin\mathcal{K}_0$ 和 $[u,\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_{pr}]=0$. 不失一般性，可设 $u\in\mathfrak{g}_\gamma$对于$\gamma\in\Delta_0\backslash\mathbb{Z}\delta$. 因此 γ 不是虚根，故由（10），$\mathfrak{g}_\gamma\subset\mathfrak{g}_{pr}$. 于是 $\gamma^\vee\in(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_{pr})$，于是

$$[\gamma^\vee,u]=\gamma(\gamma^\vee)u\neq 0,$$

矛盾。□

4.4. **由二阶自同构得到的扭曲仿射李超代数**2。除 $A^{(4)}(2k,\ 2l)$ 外，每个可对称化扭曲仿射李超代数都由一个二阶自同构导出，见（14）。本小节中，$\dot{\mathfrak{g}}$ 表示分类中的一个单李超代数，而 $\mathfrak{g}$ 是与一个二阶自同构相关联的扭李超代数。

我们先给出一个引理，说明这些情形下 $\mathcal{K}$ 中的关系。

4.4.1. 引理。 有：

(i) $\mathfrak{z}=\dot{\mathfrak{h}}^\sigma\oplus(\dot{\mathfrak{h}}\cap\dot{\mathfrak{g}}^1)$.

(ii) $[\mathfrak{g}_{s\delta},\mathfrak{g}_{q\delta}]=\begin{cases}0 & s+q\neq 0\\ \mathbb{C}K & s+q=0\end{cases}$

证明。 若 σ 的阶为 $2r$ 且 $r=1$，显然 $\dot{\mathfrak{h}} \subset \dot{\mathfrak{z}}^0 \oplus \dot{\mathfrak{z}}^1$，于是（$i$）由引理 4.3.2给出。

对于 (ii)，注意：

$$\mathfrak{g}_{k\delta} = \left\{ t^k \otimes x \,|\, x \in \dot{\mathfrak{h}} \cap \dot{\mathfrak{g}}^1 \right\}$$

对于 $k=1$。现在根据扭曲仿射超代数的定义以及 $\dot{\mathfrak{h}}$ 的交换性。情形 $s+q=0$ 由 [9], 定理 2.2 得出。 □

4.4.2. 引理。

(i) 在情形 $\dot{\mathfrak{g}} = A(m|2l-1)$ 下，作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 模，我们有：$S^2(L(\epsilon_1)) = \dot{\mathfrak{g}}^1 \oplus$ 平凡表示，并且 $\dot{\mathfrak{g}}^1 = L(2\epsilon_1)$。*(ii)* 在情形 $\dot{\mathfrak{g}} = D(k|l)$ 下，我们有：$\dot{\mathfrak{g}}^1 = L(\epsilon_1)$ 作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$-模。

证明。 我们通过分别考察每种情形来证明这一点：

(i) 假设 $\dot{\mathfrak{g}} = A(2k|2l-1)$。根据 [16], $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma \simeq B(k|l)$。查阅 [16], 中的根表可知，作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$-模，$\dot{\mathfrak{g}}^1$ 的权集如下：

$$\Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^1} = \left\{ \underbrace{0; \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j; \pm\epsilon_i; \pm\delta_g \pm \delta_h; \pm 2\epsilon_i}_{\text{even}}; \underbrace{\pm\delta_g, \pm\epsilon_i \pm \delta_g}_{\text{odd}} \right\}, 1 \le i,j \le k,\ g,1 \le h \le l.$$

除 0 以外，每个权空间都是一维的。由引理 4.4.1，可得 维数 $\mathfrak{g}_\delta$ = 维数 $\mathfrak{h}$ − 维数 $\mathfrak{h}^\sigma = k+l$. 因此，利用命题 6.6 和推论6.7，即可得到结论。

现在，假设 $\dot{\mathfrak{g}} = A(2k-1|2l-1)$。根据 [16],，我们知道 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma \simeq D(k|l)$，因此维数为 $\dot{\mathfrak{h}}^\sigma = k+l$。由根表可知，$\dot{\mathfrak{g}}^1$的权集为：

$$\Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^1} = \left\{ \underbrace{0; \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j; \pm\delta_g \pm \delta_h; \pm 2\epsilon_i}_{\text{even}}, \underbrace{\pm\epsilon_i \pm \delta_j}_{\text{odd}} \right\}, 1 \le i,j \le k,\ g,1 \le h \le l.$$

由引理 4.4.1，我们有 $\dim \mathfrak{g}_\delta = \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h}^\sigma = k+l-1$. 因此，应用命题 6.6 和推论 6.7，结论得证。

(ii) 假设 $\dot{\mathfrak{g}} = D(1|l) = C(l+1)$。由 [16], $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma \simeq B(0|l)$，因此 $\dim \mathfrak{h}^\sigma = l$。从根表可见，$\dot{\mathfrak{g}}^1$ 的权集为 $\Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^1} = \left\{ \underbrace{0}_{\text{偶}}, \underbrace{\pm\delta_g}_{\text{奇}} \right\}$，

$1 \le g \le l$。由引理 4.4.1，我们得到 $\dim \mathfrak{g}_\delta = \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h}^\sigma = 1$。因此，利用引理 6.2，结论得证。

现在假设 $\dot{\mathfrak{g}} = D(k+1|l)$。根据 [16], 我们有 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma \simeq B(k|l)$，这

意味着 $\dim \dot{\mathfrak{h}}^\sigma = k+l$。从根表中可以看出， $\dot{\mathfrak{g}}^1$的权集为:

$$\Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^1} = \left\{ \underbrace{0, \pm\epsilon_i}_{\text{even}}, \underbrace{\pm\delta_g}_{\text{odd}} \right\}, \ 1 \leq g \leq l, 1 \leq i \leq k$$

根据引理 4.4.1，我们有 $\mathfrak{g}_\delta = $维数$\mathfrak{h} -$维数 $\mathfrak{h}^\sigma = 1$. 因此，利用引理 6.2，结论得证。

□

4.5. 扭曲仿射李超代数 $A^{(4)}(2k, \ 2l)$。 在本小节中，假设$\dot{\mathfrak{g}} = A(2k, \ 2l)$，即若 $k = l$，则为 $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{psl}(2k+1, \ 2l+1)$，否则为 $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2k+1, \ 2l+1)$。为简便起见，我们常使用如下记号： $\dot{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{p})\ \mathfrak{sl}(2k+1, \ 2l+1)$。 在 $\dot{\mathfrak{g}}$ 上赋予一个 4 阶自同构后，我们得到 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的 $\mathbb{Z}_4-$分次结构，以及相应的扭曲仿射李超代数 $A(2k|2l)^{(4)}$. 为便于理解并方便后续讨论，我们定义子空间 $\dot{\mathfrak{g}}^\# := \dot{\mathfrak{g}}^\sigma \oplus \mathbb{C}t \otimes \dot{\mathfrak{g}}^1 \oplus \mathbb{C}t^2 \otimes \dot{\mathfrak{g}}^2 \oplus \mathbb{C}t^3 \otimes \dot{\mathfrak{g}}$，它可以视为将 $\dot{\mathfrak{g}}$ 作为向量空间嵌入 $\mathfrak{g}$.

4.5.1. 引理。

(i) $\dot{\mathfrak{h}} = \dot{\mathfrak{h}}^\sigma \oplus \mathfrak{z}^2$.

$$\textit{Additionally, } \dim \dot{\mathfrak{h}}^\sigma = k+l \textit{ and } \dim \mathfrak{g}_{2\delta} = \begin{cases} k+l+1 & k \neq l \\ 2k & k = l \end{cases}$$

(ii) $\mathfrak{g}_\delta, \mathfrak{g}_{3\delta} \subset \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, *and* $\mathfrak{z}_{\bar{1}} = \mathfrak{z}^1 \oplus \mathfrak{z}^3$. *Moreover,*

$$\dim \mathfrak{g}_\delta = \dim \mathfrak{g}_{3\delta} = 1.$$

证明。 首先，由 [16]， $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 作为李超代数与 $B(k|l)$同构。由于 $\mathfrak{h}^\sigma$ 是的嘉当子代数， $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 我们得出 $\dim \mathfrak{h}^\sigma = k+l$。

接下来，注意若 $\dot{\mathfrak{h}} \not\subset \mathfrak{z}^0 \oplus \mathfrak{z}^2$，则由于 $\mathfrak{z}$ 包含 $\dot{\mathfrak{h}}$，存在某个 $a \in \mathfrak{z}^i \cap \dot{\mathfrak{h}}$，其中 i 为 1 或 3。因此， Δ_0^{im} 相应地包含 δ 或 3δ 。这与 $\mathfrak{g}$的根表， （见 [16]）矛盾。

因此，引理 4.3.2 给出 $\dot{\mathfrak{h}} = \mathfrak{z}^0 \oplus \mathfrak{z}^2$.

因此，

$$\dim \mathfrak{z} \cap \dot{\mathfrak{g}}^2 = \dim \dot{\mathfrak{h}} - \dim \mathfrak{z} \cap \dot{\mathfrak{g}}^0 = \begin{cases} k+l+1 & k \neq l \\ 2k & k = l \end{cases}$$

最后，引理 4.3.1 推出 $\dim \mathfrak{g}_{2\delta} = \dim \mathfrak{z} \cap \dot{\mathfrak{g}}^2$.

对于 (ii)，根据 $\mathfrak{g}$ 在 [16], 中给出的根表，我们看到有 $4k+4l+8kl$个实奇根位于 $\dot{\mathfrak{g}}^\#$ 且 $\dim \dot{\mathfrak{g}}_1^\# = \dim(\mathfrak{p})\mathfrak{sl}(2k+1, -2l+1)_1 = 8kl+4k+4l+2$.通过考察两者之差，我们得出 $\dim \dot{\mathfrak{g}}_1^\# \cap \mathcal{K} = 2$. 根据根表，我们

看到 $\dot{\mathfrak{g}}^1$ 和 $\dot{\mathfrak{g}}^3$ 有奇虚根。因此，$\dim \mathfrak{g}_\delta = \mathfrak{g}_{3\delta} = 1$， $\mathfrak{g}_\delta$， $\mathfrak{g}_{3\delta} \subset \mathfrak{g}_1$，然后由引理 4.3.1， $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}^1 \oplus \mathfrak{z}^3$. □

4.5.2. **推论**。

$$\dim \mathfrak{g}_{m\delta} = \begin{cases} k+l & \overline{m} = 0,\ m \neq 0 \\ 1 & \overline{m} = 1, \overline{m} = 3 \\ k+l+1 & \overline{m} = 2,\ k \neq l \\ 2k & \overline{m} = 2, k = l \end{cases}$$

证明。 由于 $\mathfrak{g}_{m\delta}$ 作为向量空间同构于 $\mathfrak{g}_{q\delta}$，若 $m = q$,一则可立即由引理 4.5.1得出。 □

4.5.3. **引理**。 设 $L(\epsilon_1)$ 是一个单 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 模，其最高权为 ϵ_1。那么 :

(i) $\dot{\mathfrak{g}}^1$ 和 $\dot{\mathfrak{g}}^3$ 作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 模同构于 $\Pi(L(\epsilon_1))$。*(ii)* 若 $k \neq l$，则 $\dot{\mathfrak{g}}^2$ 作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 模同构于 $S^2(L(\epsilon_1))$。若 $k = l$，则 $\dot{\mathfrak{g}}^2 = L(2\epsilon_1)$ 和 $S^2(L(\epsilon_1)) = \dot{\mathfrak{g}}^2 \oplus$ 作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 模为平凡表示。

.

证明。 记 $\Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^i}$ 为 $\dot{\mathfrak{g}}^i$ 作为 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 模的权集。根据 [16], 中给出的根表，我们看到:

$$\Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^2} = \left\{ \underbrace{0; \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j; \pm\epsilon_i; \pm\delta_g \pm \delta_h; \pm 2\epsilon_i}_{\text{even}}; \underbrace{\pm\delta_g, \pm\epsilon_i \pm \delta_g}_{\text{odd}} \right\}$$

and

$$\Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^1} = \Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^3} = \left\{ \underbrace{\pm\delta_g}_{\text{even}}; \underbrace{0; \pm\epsilon_i}_{\text{odd}} \right\}$$

其中 $1 \leq i, j \leq k, i \neq j, 1 \leq g, h \leq l, g \neq h.$ 根据引理 4.5.1，我们知道，对于 $s \in \{1, 3\}$，$\Omega_{\dot{\mathfrak{g}}^s}$ 中每个权空间的维数都是 1。利用引理 6.2，我们得到 $\mathrm{ch} L_B(\epsilon_1) = \mathrm{ch} L(\dot{\mathfrak{g}}^s)$。然而，这些模中权的奇偶性互换了。由于 $\dot{\mathfrak{g}}^\sigma$ 同构于 $B(k|l)$，这便得到 (i)。现在， $\dot{\mathfrak{g}}^2$中除 0 以外的每个权空间的维数都是 1 ； 根据引理 4.5.1，零权空间作为向量空间同构于 $\mathfrak{g}_{2\delta}$, 在 $k \neq l$ 的情况下维数为 $k+l+1$ ，而在 $k = l$ 的情况下维数为 $2k$ 。因此，利用命题 6.6，我们有：$\mathrm{ch}(\dot{\mathfrak{g}}^2) = \begin{cases} \mathrm{ch}(S^2(L_B(\epsilon_1))) & k \neq l \\ \mathrm{ch}(L_B(2\epsilon_1)) & k = l \end{cases}$. 由推论 6.7，得到

(ii). □

4.5.4. 引理。 </style>代数 $\mathcal{K}$ 具有以下关系：

(i) 若 $i+j=0$，则 $[\mathfrak{g}_{i\delta},\mathfrak{g}_{j\delta}]=\mathbb{C}K$。*(ii)* 若 $i+j\neq 0$，则：

$$[\mathfrak{g}_{i\delta},\mathfrak{g}_{j\delta}]=\begin{cases}0 & \bar{i}\neq 0,\ \bar{i}=0\\ 0 & \overline{i+j}=0\\ \mathfrak{g}_{(i+j)\delta} & \bar{i}=2,\ \bar{j}=1,3\\ \mathbb{C}x,\quad x\ is\ a\ nonzero\ element\ in\ \mathfrak{g}_{(i+j)\delta} & \bar{i}=\bar{j}=1,3\end{cases}\tag{16}$$

证明。 (1)由 [9], 定理 2.2 得出（Kac 的著作中的证明细节在超情形下基本相同）。

对于 (2)，我们假设 $i+j\neq 0$ 并将证明分为以下几个部分：

a) 由于 $\mathfrak{g}_{i\delta}=t^i\otimes\dot{\mathfrak{h}}^\sigma$ 对于 $i=0,\ i\neq 0$第一个公式直接由引理 4.3.1得出。b) 第二个公式由引理 4.3.2得出。 c) 令 $at^j\in\mathfrak{g}_{j\delta}$，其中 j 是 1 或 3。 由引理 4.5.1， a 是奇。因此，我们有$a\notin\dot{\mathfrak{h}}$，因此 $\left[a,\dot{\mathfrak{h}}\right]\neq 0$. 由引理 4.5.1，我们知道

$$\dot{\mathfrak{h}}=\mathfrak{z}^0\oplus\mathfrak{z}^2.$$

由于 $\left[a,\dot{\mathfrak{h}}^\sigma\right]=0$，存在 $h\in\mathfrak{z}^2$，使得 $[a,h]\neq 0$. 根据引理4.3.1，有 $ht^i\in\mathfrak{g}_{i\delta}$，其中 $i=2$. 这给出了第三个公式。

d) 设 $\Sigma=\{\alpha_i\}_{i=0}^n$，其中 α_1，....， α_n是 $B(k|l)$ 中如6.1所述的固定单根集，并且 $\alpha_0=\delta-\theta$，其中 θ 是 $\dot{\mathfrak{g}}^1$ 作为 $B(k|l)$ 模的最高权。设e_{α_0}， e_{α_1}，...， e_{α_n}是 $A(2k|2l)$ 的 Chevally 生成元。[(4)].

根据引理4.5.3， $\theta=\epsilon_1$，以及 $2\delta-2\theta$ 是 $t^2\otimes\dot{\mathfrak{g}}^2$ 作为 $B(k|l)$ 模中的一个权。因此， $[e_0,e_0]\neq 0$. 即 $[\dot{\mathfrak{g}}^1_{-\theta},\dot{\mathfrak{g}}^1_{-\theta}]\neq 0$，其中 $\dot{\mathfrak{g}}^1_{-\theta}$是 $-\theta$中的权空间 $\dot{\mathfrak{g}}^1$，作为 $B(k|l)$ 模。

令 a_0 为 $\dot{\mathfrak{g}}^1\simeq\Pi(V_{st})$ 中的一个非零零权元素。 由于 $\dot{\mathfrak{g}}^1\simeq V_{st}$， 我们有

$$\dot{\mathfrak{g}}^1_{-\theta}=\dot{\mathfrak{g}}^0_{-\theta}a_0\ \text{ and }\ \left(\operatorname{ad}\dot{\mathfrak{g}}^0_{-\theta}\right)^2a_0=0,$$

其中 $\dot{\mathfrak{g}}^0_{-\theta}$ 是 $B(k|l)$ 内 实根 $-\theta$ 的根空间。这给出

$$\left(\operatorname{ad}\dot{\mathfrak{g}}^0_{-\theta}\right)^2[a_0,a_0]=\left[\dot{\mathfrak{g}}^0_{-\theta}a_0,\dot{\mathfrak{g}}^0_{-\theta}a_0\right]=\left[\dot{\mathfrak{g}}^1_{-\theta},\dot{\mathfrak{g}}^1_{-\theta}\right]\neq 0.$$

因此 $[a_0,a_0]\neq 0$， 正如所要求的。

对于 $\dot{\mathfrak{g}}^{-1}=\dot{\mathfrak{g}}^3$.， 同样的论证也成立。这证明了最后一个公式。 □

4.6. 引理4.4.1，和命题4.5.4 证明定理 4.2。

5. Conjugacy theorem for Affine Kac-Moody Lie superalgebras

5.1. 动机。 假设 (A,τ) 和 (A_1,τ_1) 是两组 Cartan 数据，它们分别生成 Kac-Moody 超代数 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 和 $\mathfrak{g}(A_1,\tau_1)$，且这两个超代数彼此同构。由此自然会想到一个问题：这两组 Cartan 数据是否相等？若不相等，它们之间有何关系？

显然，它们不必相等。对嘉当数据（A，τ）可以进行两种基本运算，以得到新的嘉当数据（A_1，τ_1），并由此得到同构的反变李代数：

(i) 指标集的置换 τ.相应的矩阵只需对 A 的行进行置换，并对列进行相同的置换。**(ii)用可逆对角矩阵从左侧乘 Cartan 矩阵**D 。指标集保持不变。同构（并非唯一）可以通过对余根进行缩放来定义，并由此缩放 Chevalley 生成元，如下所示：

$$e_i \longrightarrow e_i, f_i \longrightarrow \epsilon_i f_i,$$

其中，ϵ_i 是矩阵 D. 对角线上的第 i 个元素

此外，各向同性反射是对嘉当数据进行的另一种运算，它可以产生新的嘉当数据，并得到同构的 Kac-Moody 超代数。我们想知道是否还有其他这样的运算？请注意，非各向同性反射不会改变嘉当数据。

要回答这个问题，我们需要依据一条定理：该定理在非超情形下由 VictorKac 于 1980年证明，在超情形下由 Vera Serganova 于 2001年证明。定理内容如下： 任意根基 Σ' 都是余伴的，并且 $\Sigma' \in Sk$ 或 $-\Sigma' \in Sk$. (参见 [9]中的命题5.9，以及 [14]中的定理8.3。)

考虑到这条定理，我们得到以下推论：

推论。 设 $\mathfrak{g}(A,\tau)$ 是一个 ***Kac-Moody*** 超代数，并设 ϕ: $\mathfrak{g}(A,\tau) \longrightarrow \mathfrak{g}(A_1,\tau_1)$ 是一个同构，使得 $\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$. 那么，$(A_1,\tau_1)$ 可由某个嘉当数据 (A',τ') 得到，该嘉当数据对应于根基 $\Sigma' \in Sk$，方法是应用上述操作（置换和乘法）中的零个、一个或两个。

证明。 根据假设，$\phi^{-1}(\Sigma_1^\vee) \subset \mathfrak{h}$ 且 $\phi^*(\Sigma_1) \subset \mathfrak{h}^*$. 三元组 $(\mathfrak{h}, \phi^*(\Sigma_1) \phi^{-1}(\Sigma_1^\vee))$ 构成嘉当数据 (A_1, τ_1)。 特别地， $\phi^*(\Sigma_1)$ 是一个根基。因此，根据上述定理， $\phi^*(\Sigma_1) \in Sk$, 或者 $-\phi^*(\Sigma_1) \in Sk$. 在后一种情况下，存在一个可逆对角矩阵 D 使得 $DA_1 = A$. 因此，我们可以假设$\phi^*(\Sigma_1) \in Sk$. 证明完毕。 □

对于各向异性情形，在假设 $\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$，的条件下，推论指出，$(A, \tau)$ 仅通过对 (A_1, τ_1) 应用上述两种操作即可得到。

因此，我们看到，这个问题归结为 Cartan 子代数的共轭问题。本章将陈述并证明学位论文的主定理，该定理涉及仿射 Kac-Moody 超代数的 Cartan 子代数共轭定理。我们首先正式陈述主定理。

5.2. **定理**。 设 $\mathfrak{g}$是一个不可分解仿射 *Kac-Moody* 超代数， $\mathfrak{h}$ 是其 *Cartan* 子代数，且设 $\mathfrak{a}$ 是任意一个具有 *Cartan* 子代数$\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$. 的 *Kac-Moody* 超代数。若 $\iota: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}$ 是一个同构，且 $\mathfrak{h}' = \iota^{-1}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{g}$，则存在 $\mathfrak{g}$.的某个内自同构，使得 $\mathfrak{h}' = \phi(\mathfrak{h})$

5.2.1. 注。 在上述定理的假设下， $\mathfrak{a}$是一个仿射型不可分解 Kac-Moody 超代数的像。由于 $\mathfrak{g}$是不可分解的，因此它是拟单的。由于拟单性是一个不依赖于 $\mathfrak{g}$ 作为 Kac-Moody 超代数的表示方式的性质，因此可知 $\mathfrak{a}$是拟单的。因此， $\mathfrak{a}$ 也是不可分解的（见 [14] 引理 2.4）。此外， $\mathfrak{a}$也是仿射 Kac-Moody 超代数。事实上，李超代数是不可分解仿射 Kac-Moody 超代数，当且仅当它是无限维而 Gelfand-Kirillov 维数有限。这同样是一个不依赖于 $\mathfrak{g}$ 作为 Kac-Moody 超代数的表示方式的性质。

5.3. **引理**。 $\mathfrak{g}$ 可对称化，当且仅当 $\mathfrak{a}$ 可对称化。

证明。 假设 $\mathfrak{g}$ 可对称化。因此， $\mathfrak{g}$ 存在一个非退化不变双线性型（$-,-$）。我们在 $\mathfrak{a}$上定义非退化不变双线性型 $\langle -,-\rangle$：$\langle x,y\rangle = (\iota^{-1}(x)\ \ \iota^{-1}(y))$。因此， $A = (\langle \alpha^\vee, \beta^\vee\rangle)_{\alpha,\beta\in\Sigma'}$是 $\mathfrak{a}$的可对称化 Cartan 矩阵，其中 Σ' 是一组单根。由此， $\mathfrak{a}$ 可对称化。□

5.3.1. **推论**。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}(n)^{(2)}$ 当且仅当 $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}(n')^{(2)}$，且 $\mathfrak{g} = S(2|1;b)$ 当且仅当 $\mathfrak{a} = S(2|1;b')$。

证明。 根据分类，唯一的不可分解非可对称化仿射 Kac-Moody 超代数是 $\mathfrak{q}(n)^{(2)}$ 和 $S(2|1;b)$。这些超代数并不同构，因为根据 [14],，对于 $\mathfrak{q}(n)^{(2)}$，$[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ 与 $\mathfrak{g}$ 的中心的交为零；而对于 $S(2|1;b)$. □，该交非零

5.3.2. **推论**。 假设$\mathfrak{g}_0$ 是一个可对称化 *Kac-Moody* 代数。那么定理*5.2* 成立。

证明。 由于 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 是可对称化 Kac-Moody 代数，因此根据定理2.9.1，存在$x \in \mathcal{S}_{min}$， 使得：

$$\mathrm{Ad}\,(x)\,(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{h},$$

其中 $\mathcal{S}_{min}$ 是与 $\mathfrak{g}_0$. 相关联的极小 Kac-Moody 群。由于 $\mathfrak{h}'$ 是极大交换子代数，因此 Ad (x) $(\mathfrak{h}')$ $= \mathfrak{h}$. □

5.3.3. 注。 我们看到，如果 $\mathfrak{g}_0$ 是 Kac-Moody 代数，那么定理5.2 便自然地可由非超且可对称化情形推出。例如，这发生在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2n)^{(1)}$. 然而，在大多数情况下， $\mathfrak{g}_0$ 远非 Kac-Moody。

例如，考虑以下情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2|2)^{(2)}$ (回顾 3.5.4)。在此情形下， $N \oplus \mathbb{C}K$ 是一个无限维海森堡子代数，属于 $\mathfrak{g}_0$.

在以下情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m|n)^{(1)}$ (回顾 3.5.3）中，情况变得更加棘手。这里， $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k z \oplus \mathbb{C}K$ 是一个无限维海森堡子代数，属于 $\mathfrak{g}_0$. 此外， $\mathfrak{sl}_m^{(1)} \times \mathfrak{sl}_n^{(1)}$ 不能嵌入 $\mathfrak{g}_0$. 此外，导子的“合并”导致我们必须满足一个条件，而在此条件下，不可能为该代数构造一组单根。

为克服这一障碍，我们将使用定理3.6.2，该定理对 $\mathfrak{g}_0$ 给出了简洁的描述，并对 $\mathfrak{g}_{pr}$给出了“不变”的描述，此外还结合了前几节中确立的其他结果。

5.4. **可对称化情形的共轭定理**。 在本小节中，我们将证明定理 5.2 对仿射型可对称化 $\mathfrak{g}$.

5.4.1. **引理**。 设 r 为自同构 $\sigma: \dot{\mathfrak{g}} \longrightarrow \dot{\mathfrak{g}}$ 的阶，该自同构应用于 $\dot{\mathfrak{g}}$. 的仿射化中。若 $h \in \dot{\mathfrak{h}}$ 是一个 σ-特征向量，且 $\sigma^j(h) = h$，则 $\dot{\mathfrak{g}}$ 包含一个σ-特征向量 u，使得 $(\operatorname{ad} h)^j(u) = cu$，其中 $c \neq 0$为某个值。

证明。 对每个 $s \in \mathbb{Z}_r$，令 $p_s: \dot{\mathfrak{g}} \to \dot{\mathfrak{g}}^s$ 为沿分解 $\dot{\mathfrak{g}} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}_r} \dot{\mathfrak{g}}^i$的投影。取 $h \in \dot{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{g}^s$。于是 $p_{i+s} \circ \operatorname{ad} h = \operatorname{ad} h \circ p_i$，因此 $p_i \circ (\operatorname{ad} h)^j = (\operatorname{ad} h)^j \circ p_i$。由于$h \in \mathfrak{h}$，存在 $g \in \dot{\mathfrak{g}}$，使得 $[h, g] = cg$对某个 $c \neq 0$成立，因此 $(\operatorname{ad} h)^j(g) = c^j g$，且对所有 i，$(\operatorname{ad} h)^j(p_i(g)) = c^j p_i(g)$。□

5.4.2. **引理**。 假设存在满足条件的 g、 $g' \in \mathcal{S}_{min}$

$$(\operatorname{Ad} g)\left(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr}\right) \subset \mathfrak{h}, \quad (\operatorname{Ad} g')\left(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}\right) \subset \mathfrak{h}'.$$

则，$(\operatorname{Ad} g)(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}$.

证明。 置 $\mathfrak{h}'' := (\operatorname{Ad} g)(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{pr}})$。根据定理 3.6.2， $\mathfrak{g}_{pr}$ 关于李代数 $\mathfrak{g}$ 的任意自同构均保持不变。 $\mathfrak{g}$. 特别地，$(\operatorname{Ad} g)(\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}) = \mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}$，从而

$$\mathfrak{h}'' \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}.$$

特别地，$\dim(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr}) \leq \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr})$。 同样，$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) \leq \dim(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr})$，因此 $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) = \dim(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr})$。 根据引理 3.6.3，得到 $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}'$.

由于

$$(\operatorname{Ad} g)\left(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr}\right) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr},$$

我们有

$$(\operatorname{Ad} g)(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathfrak{t},$$

其中 $\mathfrak{t}$ 的作用是伴随半单，且 $[t, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}] = 0.$。由引理 4.3.3，我们知道 $\mathfrak{t} \subset \mathcal{K}_0$。反设存在 $a \in \mathfrak{t} \backslash \mathfrak{h}.$。因此，$a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$，其中 $a_i \in \mathfrak{g}_{i\delta} \cap \mathfrak{g}_0$，并且存在 $i \neq 0$，使得 $a_i \neq 0.$。令 $S \subset \mathbb{Z}$ 为所有满足 $a_i \neq 0.$ 的整数 $s \in S$ 的集合。记 $s_0 =$ 的最大值为 $S.$。取满足 $a_{s_0} = ht^{s_0}.$ 的 $h \in \mathfrak{h}$。令 σ 为阶为 r 的自同构，该自同构是在对 $\dot{\mathfrak{g}}$ 进行仿射化时所用的（对于非扭曲仿射化，我们有 $r = 1$）。注意，h 是一个 σ–特征向量，并且存在 j，使得 $\sigma^j(h) = h.$。因此，由引理 5.4.1，存在一个 σ–特征向量 $u \in \dot{\mathfrak{g}}$，使得 $(\operatorname{ad} h)^j(u) = cu$，其中 $c \neq 0.$。记满足 $u \in \dot{\mathfrak{g}}^m.$ 的整数为 m。对于每个 i，我们定义投影映射 $p_{i \cdot j \cdot s_0 + m}$，将其投影到子空间 $\mathbb{C}t^{i \cdot j \cdot s_0 + m} \otimes \dot{\mathfrak{g}}^{i \cdot j \cdot s_0 + m}$，沿着分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}t^k \otimes \dot{\mathfrak{g}}^k \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ 进行。于是，对每个 i，我们有

$$p_{i \cdot j \cdot s_0 + m} \left((\operatorname{ad} a)^{i \cdot j} (t^m u) \right) = c^i t^{i \cdot j \cdot s_0 + m} u \neq 0.$$

因此，a 并非伴随局部有限作用，故不是伴随半单的，这就导致了矛盾。因此 $(\operatorname{Ad} g)(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{h}$，且由于 $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}'$，我们得到 $(\operatorname{Ad} g)(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}$.

□

我们将需要以下技术引理：

5.4.3. **引理**。设 $\mathfrak{t}$ 是一个李超代数，$\mathfrak{t}_1$、$\mathfrak{t}_2$ 是子代数。若 $\mathfrak{t}_1$ 伴随对角化作用，则 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{t}_2$ 在 $\mathfrak{t}_2$ 上伴随对角化作用。

证明。设 $t \in \mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{t}_2.$。由于 $t \in \mathfrak{t}_1$，t 在 $\mathfrak{t}.$ 上伴随对角化作用。此外，由于 $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{t}_2$ 是 $\mathfrak{t}_2$ 的理想，我们知道 $\mathfrak{t}_2$ 是伴随 t 不变的，因此 t 在 $\mathfrak{t}_2$. □ 上伴随对角化作用

5.4.4. B_π 不可分解的情形。我们旨在证明引理 5.4.2 的条件成立。为此，我们首先考虑 B_π 不可分解的情形。在这种情况下，根据 3.5.1 (ii)，$\mathfrak{g}(B_\pi)$ 可视为 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数，且 $\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}} = [\mathfrak{g}(B_\pi)\ \mathfrak{g}(B_\pi)]$。根据引理 5.4.3，子代数 $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}(B_\pi)$ 在 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 上伴随对角化作用。因此，$\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}$ 在 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 上伴随对角化作用。利用定理 2.9.1，存在 $g \in \mathcal{S}_{min}$ 使得：

$$(\operatorname{Ad} g)(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}) \subset \mathfrak{h},$$

其中 $\mathcal{S}_{min}$ 是与 $\mathfrak{g}(B_\pi)$ 相对应的极小 Kac-Moody 群。

5.4.5. 可分解的情形 B_π。现在考虑 B_π 可分解的情形。根据3.5.1 (i)，$\mathfrak{g}(B_\pi) = \mathfrak{g}(B_1) \oplus \mathfrak{g}(B_2) \oplus \cdots \mathfrak{g}(B_k)$，其中 $k \in \{2, 3\}$。我们处理情形 $k = 2$，另一种情形类似。利用3.5.1 (ii)，我们将 $\mathfrak{g}(B_i)$ 视为 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数，并设

$$\mathfrak{t}_i := [\mathfrak{g}(B_i), \mathfrak{g}(B_i)].$$

于是，

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{pr}} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{t}_2 = \mathbb{C}K, \quad [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2] = 0.$$

因此，每个元素 $x \in \mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}$ 都可以写成（非唯一的）形式 $x = x_1 + x_2$，其中$x_i \in \mathfrak{t}_i$。对于这两种分解 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$，我们有 $x_1 - y_1$， $x_2 - y_2 \in \mathbb{C}K$.

注意， $\mathfrak{g}_{pr}/\mathbb{C}K = \mathfrak{t}_1/\mathbb{C}K \oplus \mathfrak{t}_2/\mathbb{C}K$ 并令 p_1： $\mathfrak{g}_{pr}/\mathbb{C}K \longrightarrow \mathfrak{t}_1/\mathbb{C}K$ 是到 $\mathfrak{t}_1/\mathbb{C}K$ 上的投影，其核为 $\mathfrak{t}_2/\mathbb{C}K.$。我们定义 $\mathfrak{h}'_1 \subset \mathfrak{t}_1$ 为 $p_1(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}/\mathbb{C}K)$ 在商映射下的原像。 $\mathfrak{h}'_2 \subseteq \mathfrak{t}_2$ 的定义类似。

5.4.6. **引理**。 $\mathfrak{h}'_1$ （分别地， $\mathfrak{h}'_2$）是 $\mathfrak{t}_1$（分别地， $\mathfrak{t}_2$）的交换且可由 ad 对角化的子代数。

证明。 我们只对 $\mathfrak{h}'_1$ 证明，，因为对于 $\mathfrak{h}'_2$，证明完全相同。取 $h' \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}$，并固定一个分解 $h' = h'_1 + h'_2$，其中 h'_1， h'_2 分别属于 $\mathfrak{h}'_1$， $\mathfrak{h}'_2$。由于 $\mathfrak{t}_1$ 与 $\mathfrak{t}_2$ 交换，故可得 $\mathrm{ad}h'_1|_{\mathfrak{t}_1} = \mathrm{ad}h'|_{\mathfrak{t}_1}$。由于 $\mathfrak{t}_1$ 是 $\mathfrak{g}_{pr}$ 中的理想，它是关于 $\mathrm{ad}h'$ 的不变子空间。由此可得，$\mathrm{ad}h'_1$ 在 $\mathfrak{t}_1$ 上可对角化。此外，元素 $\{h'_1, h' \in \mathfrak{h}'\}$ 两两交换。事实上，取 $h'' \in \mathfrak{h}'$ 并固定一个分解 $h'' = h''_1 + h''_2$。于是

$$0 = [h', h''] = [h'_1 + h'_2, h''_1 + h''_2] = [h'_1, h''_1] + [h'_2, h''_2],$$

所以 $[h'_1, h''_1]$， $[h'_2, h''_2] \in (\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{t}_2) = \mathbb{C}K.$ 因此 $(\mathrm{ad}\ h'_1)^2(h''_1) = 0$。由于 $(\mathrm{ad}\ h'_1)$ 在 $\mathfrak{t}_1$ 上的限制是一个对角算子，且 $(\mathrm{ad}\, h'_1)^2(h''_1) = 0$ 这一事实意味着 $(\mathrm{ad}\ h'_1)(h''_1) = 0$，如所需。因此 $\mathfrak{h}'_1$ 是 $\mathfrak{t}_1$的一个交换且可由 ad 对角化的子代数。□

5.4.7. 根据 3.5.1 (ii)， $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t}_1) \oplus \mathbb{C}d$ 是 $\mathfrak{g}(B_1)$ 的 *Cartan* 子代数。根据引理 5.4.6和定理 2.9.1，存在 $g_1 \in (\mathcal{S}_1)_{\min}$ 使得:

$$(\mathrm{Ad}\, g_1)(\mathfrak{h}'_1) \subset (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t}_1) \oplus \mathbb{C}d,$$

其中 $(\mathcal{S}_1)_{\min}$ 是与 $\mathfrak{g}(B_1)$ 相关联的极小 Kac-Moody 群。类似地，存在 $g_2 \in (\mathcal{S}_2)_{\min}$ 使得:

$$(\mathrm{Ad}\, g_2)(\mathfrak{h}'_2) \subset (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t}_2) \oplus \mathbb{C}d.$$

由于 $\mathfrak{t}_1$ 与 $\mathfrak{t}_2$ 彼此交换，Ad g_i 在 $\mathfrak{t}_s$ 上作用为恒等映射，其中 $i = 1$， $s = 2$ 或 $i = 2$， $s = 1$. 因此，Ad $g_1 \circ$ Ad $g_2 =$ Ad $g_1 g_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个内自同构，使得:

$$\mathrm{Ad}\, g_1 g_2(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{pr}}) \subset \mathfrak{h}.$$

5.4.8. 因此，我们可以看到，无论 $\mathfrak{g}(B_\pi)$是否可分解，都存在 $g \in \mathcal{S}_{min}$使得:

$$\mathrm{Ad}g\,(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr}) \subset \mathfrak{h}.$$

根据命题5.3和备注5.2.1， $\mathfrak{a}$ 也是不可分解仿射型且可对称化的，因此我们可以使用相同的论证来证明存在 $g' \in \mathcal{A}_{min}$ 使得:

$$\mathrm{Ad}g'\,(\iota\,(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{a}_{pr}) \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}},$$

其中 $\mathcal{A}_{min}$ 是与 $\mathfrak{a}(B_\pi)$ 相关联的 Kac-Moody 极小群。 这意味着存在 $g' \in \mathcal{S}_{min}$ ，使得:

$$\mathrm{Ad}g'\,(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) \subset \mathfrak{h}'.$$

利用引理 5.4.2，这就证明了定理 5.2 在可对称化情形下成立。

5.5. $\mathfrak{q}_n^{(2)}$**的共轭定理。**

5.5.1. 引理 5.4.2 的证明可推广到扭曲的 queer 情形，其中断言3.7.2取代定理 3.6.2，并依赖于引理 4.3.3 在此情形下仍然成立这一事实。

此外，尽管引理3.6.3在此情形下不成立，推论 5.3.1蕴含：

$$\dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr} = \dim \mathfrak{h}' - \dim \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr} = 2,$$

这足以支持我们的论证。

5.5.2. 回顾满同态

$$\psi : [\mathfrak{g}(B_\pi), \mathfrak{g}(B_\pi)] \longrightarrow \mathfrak{g}_{pr},$$

由 [14], 在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_n^{(2)}$我们有 $\mathfrak{g}(B_\pi) \simeq \mathfrak{sl}_n^{(1)}$ 且 $\mathfrak{g}_{pr} \simeq \left[\mathfrak{sl}_n^{(1)}, \mathfrak{sl}_n^{(1)}\right] / \mathbb{C}K$. 特别地，$\psi$ 是核为 $\mathbb{C}K$. 假设

$$(*) \qquad \psi^{-1}(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr}) \text{ is ad-diagnoziable and commutative.}$$

那么，根据定理 2.9.1，存在 $g \in \mathcal{S}_{min}$，其中 $\mathcal{S}_{min}$ 是与 $\mathfrak{sl}_n^{(1)}$ 相关联的极小 *Kac-Moody* 群，使得：

$$\operatorname{Ad} g\left(\psi^{-1}(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr})\right) \subset \psi^{-1}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}).$$

由于 $\operatorname{Ad} g(\mathbb{C}K) = \mathbb{C}K$，$\operatorname{Ad} g$ 可自然地诱导出 $\mathfrak{sl}_n^{(1)}/\mathbb{C}K$的一个自同构，从而得到：

$$\operatorname{Ad} g(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr}) \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}.$$

根据推论 5.3.1，我们还可以找到 $g' \in \mathcal{S}_{min}$ 使得 $\operatorname{Ad} g'(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}) \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{pr}$. 结合引理 5.5.1，我们得出定理 5.2 在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}^{(2)}(\mathfrak{n})$ 的情形下成立。

因此，剩下的就是证明性质（*）。

5.5.3. 引理。 性质（*）成立。

证明。 设 $a \in \psi^{-1}(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr})$。 那么 $\psi(a)$ 是伴随可对角化的，因而伴随局部有限。此外，$\ker \psi$ 是有限维的，因此 a 是伴随 $-$局部有限的。根据 [12] 定理 10.2.12，我们有如下分解

$$a = a_s + a_n,$$

其中 a_s 是伴随可对角化的， a_n 是伴随局部幂零的，并且 $[a_s, a_n] = 0$. 此外，对于任意子空间 $M \subset \mathfrak{sl}_n^{(1)}$ ，我们有

$$\begin{aligned} [a, M] = M \quad &\Longrightarrow \quad [a_s, M] = M, \\ [a, M] = 0 \quad &\Longrightarrow \quad [a_s, M] = [a_n, M] = 0 \end{aligned}.$$

由于 $\psi(a)$ 是伴随可对角化的，我们可以写成

$$\mathfrak{g}_{pr} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}v_i,$$

其中 v_i 是 $\operatorname{ad}\psi(a)$ 的特征向量。

由于 $[a, \psi^{-1}(\mathbb{C}v_i)] \subset \psi^{-1}(\mathbb{C}v_i)$，因此可得 $[a_s, \mathbb{C}v_i] \subset \psi^{-1}(\mathbb{C}v_i)$。于是，$[\psi(a_s)\ \mathbb{C}v_i] \subset \mathbb{C}v_i$，并且

$$[\psi(a_n), \mathbb{C}v_i] \subset \mathbb{C}v_i.$$

因此，$\psi(a_n)$ 在 $\mathfrak{g}_{pr}.$ 上是伴随可对角化的。另一方面，由于 a_n 在 $\mathfrak{sl}_n^{(1)}$ 上是伴随局部幂零的，所以 $\psi(a_n)$ 在 $\mathfrak{g}_{pr}.$ 上是伴随局部幂零的。因此，$\operatorname{ad}\psi(a_n)$ 是伴随可对角化且伴随幂零的，故 $\operatorname{ad}\ \psi(a_n) = 0$，即 $\psi(a_n) \in \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr})$。然而，$\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_{pr}) = 0$，因此 $\psi(a_n) = 0.$。由此可得 $a_n \in \mathbb{C}K$，进而 $\operatorname{ad} a_n = 0.$。因此，$\operatorname{ad} a$ 是伴随可对角化的。

接下来，令 a，$b \in \psi^{-1}(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{pr})$。由于 $\mathfrak{h}'$ 是交换的，我们有 $[a, b] \in \ker\ \psi = \mathbb{C}K.$ 因此，$(\operatorname{ad} a)^2(b) = 0.$ 由于 a 是伴随可对角化的，可得 $(\operatorname{ad} a)(b) = 0.$ 证明完毕。

□

5.6. 关于 $S(2|1; b)$的共轭定理。现在我们假设 $\mathfrak{g} = S(2|1;\ b)$.

5.6.1. **引理**。设 $x \in \mathfrak{g}_0$ 是一个作用为伴随局部有限的元素。那么

$$x \in \mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathbb{C}d \oplus \mathbb{C}L_0.$$

证明。由引理 3.8.3，$\mathfrak{g}_{pr}$ 是 $\mathfrak{g}_0.$ 的一个理想。因此，$-x := x \mp \mathfrak{g}_{pr}$ 在 $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_{pr} \simeq \mathcal{W} \oplus \mathbb{C}d$上作用为伴随局部有限，– 其中 $\mathcal{W} := \mathcal{V}_{ir}/\mathbb{C}K$ 同构于维特代数。记$\bar{x} = d' + \sum_{s\in S} c_s L_s$，$c_s \neq 0$，$d' \in \mathbb{C}d.$注意到 S是一个有限集。如果 $S = \emptyset$，则 $x \in \mathfrak{g}_{pr} \oplus \mathbb{C}d$正如所需。否则，记 $s_0 =$ 最大值 S。反设 $s_0 > 0.$

设 $p_i:\ \mathcal{W} \oplus \mathbb{C}d \to \mathbb{C}L_i$ 是核为 $\mathbb{C}d \oplus \bigoplus_{j\in\mathbb{Z},\ j\neq i} \mathbb{C}L_j.$ 的投影映射。我们旨在通过归纳法证明，对每个 $q \in \mathbb{N}$，以下结论成立：

$$\max\left\{i \in \mathbb{N} \,|\, p_{(i+1)s_0+1}\left((\operatorname{ad}\bar{x})^q\left(L_{s_0+1}\right)\right) \neq 0\right\} = q$$

对于基例 $q = 1$:

$$[\bar{x}, L_{s_0+1}] = [d', L_{s_0+1}] + \left[\sum_{s\in S} c_s L_s, L_{s_0+1}\right] = -\left(s_0+1\right) L_{s_0+1} + \sum_{s\in S} c_s\left[L_s, L_{s_0+1}\right]$$

$$= -\left(s_0+1\right) L_{s_0+1} + \sum_{s\in S\setminus s_0} c_s\left[L_s, L_{s_0+1}\right] - c_{s_0} L_{2s_0+1}.$$

因此，

$$p_{2s_0+1}\left(\operatorname{ad}\bar{x}\left(L_{s_0+1}\right)\right) = -c_{s_0} L_{2s_0+1} \neq 0.$$

此外，显然，对于任意 $t>1$:

$$p_{(t+1)s_0+1}\left(\operatorname{ad}\bar{x}\left(L_{s_0+1}\right)\right)=0.$$

现在考虑一般的 q:

$$\left(\operatorname{ad}\bar{x}\right)^q\left(L_{s_0+1}\right)=\left[d',\left[\left(\operatorname{ad}\bar{x}\right)^{q-1},L_{s_0+1}\right]\right]+\left[\sum_{s\in S}c_sL_s,\left[\left(\operatorname{ad}\bar{x}\right)^{q-1},L_{s_0+1}\right]\right]$$

因此，由归纳假设可得结论。于是， $\bar{x}$并非伴随局部有限地作用，因此 x 也并非伴随局部有限地作用，这与我们的假设矛盾。因此 $s_0=\max S\leq 0.$。类似地，可以证明 $\min S\geq 0.$。因此， $S=\{0\}.$。于是，$\sum_{s\in S}c_sL_s$ 与 L_0 成比例，因此 $x\in\mathfrak{g}_{pr}\oplus\mathbb{C}d\oplus\mathbb{C}L_0$。□

5.6.2. 现在我们可以证明定理 5.2 在以下情形下 $S(2|1;b)$。

证明。 回忆一下，根据 [14]， $\mathfrak{g}_{pr}\oplus\mathbb{C}d\simeq\mathfrak{sl}_2^{(1)}$. 由于伴随可对角化元素特别是伴随局部有限元素，由引理 5.6.1 可知 $\mathfrak{h}'\subset\mathfrak{sl}_2^{(1)}\oplus\mathbb{C}L_0$.回忆一下， L_0-d 属于 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0)$。因此，由 $\mathfrak{h}'$ 的极大性可知，我们必须有 $L_0-d\in\mathfrak{h}'$.因此:

$$\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{sl}_2^{(1)}\oplus\mathbb{C}\left(L_0-d\right).$$

此外,

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{sl}_2^{(1)}\oplus\mathbb{C}\left(L_0-d\right),$$

其中 $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{sl}_2^{(1)}$ 是 $\mathfrak{sl}_2^{(1)}$. 的 Cartan 子代数。注意， $\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{g}_{pr}$ 也是 $\mathfrak{sl}_2^{(1)}$ 中的 ad-可对角化交换子代数。事实上，对于每个 $h\in\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{sl}_2^{(1)}$ ，子空间 $\mathfrak{sl}_2^{(1)}$ 在 $\operatorname{ad}h-$ 下不变，因此 $\operatorname{ad}\ h$ 在 $\mathfrak{sl}_2^{(1)}$ 上可对角化。根据定理 2.9.1，存在 $g\in\mathcal{S}_{min}$ ，使得 $\operatorname{Ad}g\left(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{sl}_2^{(1)}\right)\subset\mathfrak{h}\cap\mathfrak{sl}_2^{(1)}.$。将此内自同构记为 $\phi.$。由于 $L_0-d\in\mathfrak{c}\left(\mathfrak{g}_0\right)$，我们有 $\phi\left(L_0-d\right)\in\mathbb{C}\left(L_0-d\right)$。因此， $\phi\left(\mathfrak{h}'\right)\subseteq\mathfrak{h}.$。注意,- $\mathfrak{h}'\subset\phi^{-1}\left(\mathfrak{h}\right)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 ad-可对角化交换子代数，因为 ϕ 是 $\mathfrak{g}.$ 的自同构。由 $\mathfrak{h}'$ 的极大性可知 $\mathfrak{h}'=\phi^{-1}\left(\mathfrak{h}\right)$，因此 $\phi(\mathfrak{h}')=\mathfrak{h}$，如所愿。□

5.7. **推论**。 $\mathfrak{q}_n^{(2)}$当且仅当 $n=n'.$ 时与 $\mathfrak{q}_{n'}^{(2)}$ 同构

类似地， $S(2|1;\ b)$ 当且仅当 $b\in\mathbb{Z}\pm b'$ 时与 $S(2、1;\ b')$ 同构

证明。 根据 [2] 引理 10.4.1，嘉当数据 (A_b',τ_b') 可通过 5.1 中所述的三种操作从 (A_b,τ_b) 得到，当且仅当 $b\in\mathbb{Z}\pm b'.$ 因此，该推论现在可直接由定理 5.2 和推论 5.1 得出。□

6. Appendix

我们指出并证明关于 $B(k|l)$ 和 $D(k|l)$ 的表示的若干事实。虽然大多数证明都是针对 $\mathfrak{g} = B(k|l)$ 给出的，但只需稍作调整即可将其用于 $\mathfrak{g} = D(k|l)$。

6.1. 记号。

(i) 我们固定 $B(k|l)$ 的以下单根集：

$$\Sigma_B := \{\epsilon_1 - \delta_1, \delta_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_3 - \epsilon_4, \ldots, \epsilon_{k-1} - \epsilon_k, \epsilon_k - \delta_2, \delta_2 - \delta_3, \ldots, \delta_{l-1} - \delta_l, \delta_l\}.$$

类似地，我们固定 $D(k|l)$ 的以下单根集：

$$\Sigma_D := \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{k-1} - \epsilon_k, \epsilon_k - \delta_1, \delta_1 - \delta_2, \ldots, \delta_{l-1} - \delta_l, \delta_{l-1} + \delta_l\}.$$

我们用 $L_B(\alpha)$ 表示最高权为 α的简单 $B(k|l)$-模。类似地，我们用记号 $L_D(\alpha)$ 表示最高权为 α的简单 $D(k|l)$-模。

(iii) 记 V_{st}^B 为 $B(k|l)$ 的标准模，记 Ad_B 为伴随表示。同样地，我们用记号 V_{st}^D 和 Ad_D 表示 $D(k|l)$ 的相应表示。我们用 triv 表示平凡表示。对于一个模 U，记 U_0 为该模的零权空间。

(iv) 我们还为 B_k 和 C_l 固定一组单根：

$$\Sigma_{B_k} := \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, ..., \epsilon_{k-1} - \epsilon_k, \epsilon_k\}, \Sigma_{C_l} := \{\delta_1 - \delta_2, \delta_2 - \delta_3, ..., \delta_{l-1} - \delta_l, 2\delta_l\}.$$

6.2. 引理。

$$(i)\ ch(L_B(\epsilon_1)) = ch(V_{st}^B) = \textstyle\sum_{\alpha\in\Omega_B} e^\alpha\ ,\ where\ \Omega_B = \left\{\underbrace{\pm\delta_g}_{odd}, \underbrace{0, \pm\epsilon_i}_{even}\right\}.$$

$$(ii)\ ch(L_D(\epsilon_1)) = ch(V_{st}^D) = \textstyle\sum_{\alpha\in\Omega_D} e^\alpha\ ,\ where\ \Omega_D = \left\{\underbrace{\pm\delta_g}_{odd}, \underbrace{\pm\epsilon_i}_{even}\right\}.$$

证明。考虑将 $B(k|l)$ 自然嵌入到 $\mathfrak{gl}(2k+1,\ 2l)$ 中。在此嵌入下，$B(k|l)$ 的 Cartan 子代数记为 $\mathfrak{h}_B$，其由以下基张成

$$\Sigma_B := \{e_i - e_{i+k}\}_{i=2}^{k+1} \cup \{e_{i+2k+1} - e_{i+2k+l}\}_{i=1}^{l},$$

其中 $(e_s)_{ij} = \delta_{ij,\ ss}$。

设 V_{st} 是 $\mathfrak{gl}(2k+1,\ 2l)$ 的标准表示，因此 V_{st} 的特征为

$$\mathrm{ch}(V_{st}) = \sum_{i=1}^{2k+1} e^{\epsilon_i} + \sum_{i=1}^{2l} e^{\delta_i}.$$

我们通过将 V_{st} 的权限制到 $\mathfrak{h}_B$ 上来计算 V_{st}^B。将限制后的权记为 $\epsilon_i' := \epsilon_i|_{\mathfrak{h}_B}$、$\delta_i' := \delta_i|_{\mathfrak{h}_B}$，并令 $\{\epsilon_i^B\}_{i=1}^k \cup \{\delta_i^B\}_{i=1}^l$ 为 Σ_B 的对偶基。则有以下关系：$\epsilon_1' = 0$，$\epsilon_i' = \epsilon_{i-1}^B$（对于 $2 \leq i \leq k$），$\epsilon_{i+k}' = -\epsilon_{i-1}^B$（对于 $2 \leq i \leq k$），$\delta_i' = \delta_i^B$（对于 $1 \leq i \leq l$），$\delta_{i+l}' = -\delta_i^B$（对于 $1 \leq i \leq l$）。

由于 ϵ_1^B是最高权且 V_{st}^B不可约，这就证明了 (1)。类似的方法可用于证明 (2)。□

6.3. **引理**。设 N 是一个有限维自对偶模，恰有三个互不同构的简单子商：L_1、L_2、L_3，且各自的重数均为 *1*。此外，这些简单子商均自对偶。则 N 完全可约。

证明。首先注意，每个模至少有一个不可约子模，因为有限维模的底总非零。不妨设 L_1 是 N的子模。由于 L_1 和 N 自对偶，可知 L_1 也是 N的商模，因此存在满同态 φ_1：$N \longrightarrow L_1$。现在，$\ker \varphi_1$有不可约子商 L_2 和 L_3。如前所述，其中一个必定是 $\ker \varphi_1$的子模；设它是 L_2。由于 $\ker \varphi_1$ 是 N的子模，可知 $L_1 \oplus L_2$ 是 N的子模。同样，由于 $L_1 \oplus L_2$ 自对偶，存在满同态φ_2：$N \longrightarrow L_1 \oplus L_2$。因此，$\ker \varphi_2$ 只有 L_3 这一个简单子商，故 $\ker \varphi_2 = L_3$。由于 φ_2 是满射，可知 $N/L_3 \simeq L_1 \oplus L_2$，因此 $N = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$。□

6.4. 对于下一个命题，我们需要知道在 B_k 作用下的 $2\epsilon_1$-最高权模的特征，记作 $L_{B_k}(2\epsilon_1)$；以及在 C_l 作用下的 $\delta_1 + \delta_2$-最高权模的特征，记作 $L_{C_l}(\delta_1 + \delta_2)$。

根据 [13], 表5，作为 B_k-模，我们有 $S^p(R(\epsilon_1)) = \sum_{i=0}^{\infty} R((p-2i)\epsilon_1)$，其中 $R(\alpha)$ 是权为 α 的最高权模。对于 $p = 2$，可得 $S^2(R(\epsilon_1)) = R(2\epsilon_1) + R(0)$。由于 $R(\epsilon_1)$ 是标准 B_k-模，我们知道它的特征，因此也知道 $\mathrm{ch}(S^2(R(\epsilon_1)))$。所以，我们有：

$$\mathrm{ch}(L_{B_k}(2\epsilon_1)) = \sum_{\alpha \in \Omega_{B_k}} e^{\alpha} + k \cdot e^0, \quad \Omega_{B_k} = \{\pm 2\epsilon_i, \pm\epsilon_i, \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{1 \leq i \neq j \leq k}.$$

对于 C_l，再次由 [13], 表5可知，作为 C_l-模，我们有 $\Lambda^p R = \sum_{i \geq 0} R(\pi_{p-2i})$，其中$\pi_{p-2i}$ 是 $p-2i$ 基本权。因此，$\Lambda^2 R(\delta_1) = R(\delta_1 + \delta_2) \oplus R(0)$。由于$R(\delta_1)$是标准模，我们知道它的特征，因此也知道 $\mathrm{ch}(\Lambda^2 R(\delta_1))$。所以，我们有：

$$\mathrm{ch}(L_{C_l}(\delta_1 + \delta_2)) = \sum_{\alpha \in \Omega_{C_l}} e^{\alpha} + (l-1)e^0, \quad \Omega_{C_l} = \{\pm\delta_i \pm \delta_j\}_{1 \leq i \neq j \leq l}.$$

6.5. 引理。设 V 是一个 $B(k|l)$（分别为 $D(k|l)$）模。设 $L_B(2\epsilon_1)$（分别为 $L_D(2\epsilon_1)$）是权为 $2\epsilon_1.$ 的最高权 $B(k|l)$（分别为 $D(k|l)$）模。假设 V 仅以平凡表示和 $L_B(2\epsilon_1)$（分别为 $L_D(2\epsilon_1)$）作为其简单子商，且重数为 *1*。那么$V=$平凡表示 $\oplus L_B(2\epsilon_1)$（分别为 $V=$平凡表示 $\oplus L_D(2\epsilon_1)$）。

证明。 我们针对 $B(k|l)$ 情形证明此引理； $D(k|l)$ 情形的证明类似。

只需证明 $L_B(2\epsilon_1)$ 和平凡表示 $=L_B(0)$ 属于范畴 $\mathcal{O}.$ 中不同的分块。等价地，我们将证明 $\chi_0\neq\chi_{2\epsilon_1}$， 其中 χ_α 是与权 $\alpha.$ 相关联的中心特征

首先，假设 $k>l.$

仅为本证明之目的，我们选取以下单根集：

$$\left\{\underbrace{\epsilon_1-\delta_1,\delta_1-\epsilon_2,\epsilon_2-\delta_2,\delta_2-\epsilon_3,\epsilon_3-\delta_3,...,\delta_l-\epsilon_{l+1}}_{2+2(l-1)=2l\,\text{elements}},\underbrace{\epsilon_{l+1}-\epsilon_{l+2},...,\epsilon_{k-1}-\epsilon_k}_{k-1-l-1+1=k-l-1\,\text{elements}},\epsilon_k\right\}.$$

通过直接计算可得：

$$\rho=x_1(\epsilon_1-\delta_1)+...+x_{2l}(\delta_l-\epsilon_{l+1})+y_1(\epsilon_{l+1}-\epsilon_{l+2})+...+y_{k-l-1}(\epsilon_{k-1}-\epsilon_k)+y_{k-l}\cdot\epsilon_k,$$

where:

$$\begin{cases}x_1=x_3=...=x_{2l-1}=k-l-\frac{1}{2}\\ x_2=x_4=...=x_{2l}=0\\ y_i=\left(k-l-\frac{1}{2}i\right)-\frac{1}{2}(i-1)\,i\qquad 1\leq i\leq k-l\end{cases}.$$

现在我们计算多重集 $E_{2\epsilon_1}:=\{|(2\epsilon_1+\rho,\ \epsilon_i)|\}_{i=1}^k$ 和 $D_{2\epsilon_1}:=\{|(2\epsilon_1+\rho,\ \delta_i)|\}_{i=1}^l$，并求出集合 $E_{2\epsilon_1}=E_{2\epsilon_1}\backslash(E_{2\epsilon_1}\cap\overline{D_{2\epsilon_1}})$ 和 $D_{2\epsilon_1}=D_{2\epsilon_1}\backslash(D_{2\epsilon_1}\cap\overline{E_{2\epsilon_1}})$。 可以看出：

$\overline{E_{2\epsilon_1}}=\left\{2+\left(k-l-\frac{1}{2}\right),(y_2-y_1),(y_3-y_2).....,(y_{k-l}-y_{k-l-1})\right\}$， $D_\lambda=\emptyset.$ 注意，对每个 $1\leq i\leq k-l-1$，都有 $y_{i+1}-y_i=k-l-\frac{1}{2}-i.$ 类似地：

$$\overline{E_0}=\left\{\left(k-l-\frac{1}{2}\right),(y_2-y_1),(y_3-y_2),...,(y_{k-l}-y_{k-l-1})\right\},\ \overline{D_0}=\emptyset.$$

因此 $\overline{E_0}\neq\overline{E_{2\epsilon_1}}$，可得$\chi_0\neq\chi_{2\epsilon_1}$ （参见 [1]）。

其次，假设 $k\leq l.$ 我们取以下单根集：

$$\left\{\underbrace{\epsilon_1-\delta_1,\delta_1-\epsilon_2,\epsilon_2-\delta_2,\delta_2-\epsilon_3,\epsilon_3-\delta_3,...,\delta_{k-1}-\epsilon_k,\epsilon_k-\delta_k}_{1+2(k-1)=2k-1\,\text{elements}},\underbrace{\delta_k-\delta_{k+1},...,\delta_{l-1}-\delta_l}_{l-1-k+1=l-k\,\text{elements}},\delta_l\right\}.$$

于是：

$$\rho=x_1(\epsilon_1-\delta_1)+x_3(\epsilon_2-\delta_2)+...+x_{2k-1}(\epsilon_k-\delta_k)+y_1(\delta_k-\delta_{k+1})+...+y_{l-k}(\delta_{l-1}-\delta_l)+y_{l-k+1}\delta_l,$$

其中:

$$\begin{cases} y_i = \left(l-k+\frac{1}{2}\right)i - \left(l-k+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(i-1)\,i \quad 1 \le i \le l-k+1 \\ 0 = x_2 = ... = x_{2k-2} \\ x_1 = x_3 = ... = x_{2k-1} = -l+k-\frac{1}{2} \end{cases}$$

通过直接计算，我们得到:

$$\overline{D}_{2\epsilon_1} = \begin{cases} \left\{\left|-l+k-\frac{1}{2}\right|, \left|l-k+\frac{1}{2}-1\right|, \left|l-k+\frac{1}{2}-3\right|, ..., \left|l-k+\frac{1}{2}-l+k\right|\right\} & l-k \ge 2 \\ \left\{\left|-l+k-\frac{1}{2}\right|, \left|l-k+\frac{1}{2}-1\right|, ..., \left|l-k+\frac{1}{2}-l+k\right|\right\} & else \end{cases}$$

And

$$\overline{D}_0 = \left\{\left|l-k+\frac{1}{2}-1\right|, ..., \left|l-k+\frac{1}{2}-l+k\right|\right\}.$$

因此 $D_0 \neq \overline{D}_{2\epsilon_1}$ 并且再次可得 $\chi_0 \neq \chi_{2\epsilon_1}$，如所愿。 □

6.6. **命题**。

(i) $chS^2(L_B(\epsilon_1)) = (k+l+1)e^0 + \sum_{\alpha\in\Omega'_B} e^\alpha$ *and* $S^2(L_B(\epsilon_1)) = L_B(2\epsilon_1) \oplus triv$, *where:*

$$\Omega'_B = \left\{ \underbrace{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j; \pm\epsilon_i; \pm\delta_g \pm \delta_h; \pm 2\epsilon_i}_{even}; \underbrace{\pm\delta_g; \pm\epsilon_i \pm \delta_g}_{odd} \right\}.$$

(ii) $chS^2(L_D(\epsilon_1)) = (k+l)e^0 + \sum_{\alpha\in\Omega'_D} e^\alpha$ *and* $S^2(L_D(\epsilon_1)) = L_D(2\epsilon_1) \oplus triv$, *where:*

$$\Omega'_D = \left\{ \underbrace{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j; \pm\delta_g \pm \delta_h; \pm 2\epsilon_1}_{even}; \underbrace{\pm\epsilon_i \pm \delta_j}_{odd} \right\}.$$

证明。利用引理 6.2，可以直接计算出 $S^2(L_B(\epsilon_1))$ 的特征。由此立即可得最高权为 $2\epsilon_1$。因此，$[S^2(L_B(\epsilon_1)) : L_B(2\epsilon_1)] = 1$。

接下来，我们来证明 $\dim \mathrm{Hom}_{B(k|l)}$ (平凡表示 $S^2\left(V_{st}^B\right)) = 1$。由于 V_{st}^B 与其对偶具有相同的特征且都是不可约模，因此它们同构。因此:

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_{B(k,l)}\left(\mathrm{triv}, V_{st}^B \otimes V_{st}^B\right) &= \dim \mathrm{Hom}_{B(k,l)}\left(\mathrm{triv}, V_{st}^B \otimes \left(V_{st}^B\right)^*\right) \\ &= \dim \mathrm{Hom}_{B(k,l)}\left(V_{st}^B, V_{st}^B\right) = 1. \end{aligned}$$

因此，$V_{st}^B \otimes V_{st}^B$含有一个平凡子模。注意到 $V_{st}^B \otimes V_{st}^B = S^2\left(V_{st}^B\right) \oplus \Lambda^2\left(V_{st}^B\right)$.通过直接计算，我们发现 $\mathrm{ch}\Lambda^2\left(V_{st}^B\right) = \mathrm{ch}(ad_B)$，且$\Lambda^2\left(V_{st}^B\right)$ 的零权空间维数为 $k+l$。因此，$\Lambda^2(V_{st})$不可能含有平凡子模。由此可得 $\dim Hom_{B(k|l)}\left(\mathrm{triv}\ S^2\left(V_{st}^B\right)\right) = 1$。特别地，这意味着 $S^2(L_B(\epsilon_1))$中存在唯一的平凡表示子模。

回顾一下， $\mathfrak{g} := B(k|l) = \mathfrak{osp}(2k+1,\ 2l)$ 且 $\mathfrak{osp}(2k+1,-2l)_0 = \mathfrak{o}_{2k+1} \times \mathfrak{sp}_{2l}$. 令 V_{B_k} 为由 $L_B(2\epsilon_1)$中的最高权向量 $v_{2\epsilon_1}$ 在子代数 $\mathfrak{o}_{2k+1} \times \{0\} \simeq B_k$. 的作用下生成的模，由此得到 $[V_{B_k}:\ L_{B_k}(2\epsilon_1)] = 1$，其中 $L_{B_k}(2\epsilon_1)$ 是最高权为 $2\epsilon_1$. 的不可约 B_k 模。通过施加各向同性反射$r_{\epsilon_1-\delta_1}$，我们得到 $B(k|l)$的一组新的单根：

$$\Sigma'_B := r_{\epsilon_1-\delta_1}\Sigma_B = \{\delta_1-\epsilon_1, \delta_2-\epsilon_2, \epsilon_1-\epsilon_2, .., \epsilon_{k-1}-\epsilon_k, \epsilon_k-\delta_3, \delta_3-\delta_4, ..., \delta_{l-1}-\delta_l, \delta_l\}$$

因此，$L_{\Sigma_B}(2\epsilon_1) = L_{\Sigma'_B}(\delta_1+\delta_2)$。令 V_{C_l} 为在 $L_{\Sigma'_B}(\delta_1+\delta_2)$中，由子代数 $\{0\} \times \mathfrak{sp}_{2l} \simeq C_l$.的作用下的最高权向量生成的模。于是，关于单根集合 Σ'_B，我们有 $[V_{C_l}:\ L_{C_l}(\delta_1+\delta_2)] = 1$，其中$L_{C_l}(\delta_1+\delta_2)$ 是一个最高权为 $\delta_1+\delta_2$. 的不可约 C_l 模

现在，根据 6.4，我们注意到：

$$\Omega_{B_k} \cup \Omega_{C_l} = \{\pm 2\epsilon_i, \pm\epsilon_i, \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{1\le i\ne j\le k} \cup \{\pm\delta_i \pm \delta_j\}_{i\ne j} \subset \Omega\left(L_B(2\epsilon_1)\right).$$

Al所有这些权的维数均为 1，此外，$\dim\left(L_B(2\epsilon_1)\right)_0 \ge k+l-$ 1.

注意，$\left[S^2\left(V_{st}^B\right)/\text{平凡表示}:\ L_B(2\epsilon_1)\right] = 1$ 且 $\dim(S^2\left(V_{st}^B\right)/\text{平凡表示})_0 = k+l$. 因此，$\dim L_B(2\epsilon_1)_0 \le k+l$.

由 $f_{\epsilon_1-\delta_1} \in \mathfrak{g}_{-(\epsilon_1-\delta_1)}$. 显然可知 $v_{\epsilon_1+\delta_1} := f_{\epsilon_1-\delta_1}v_{2\epsilon_1} \ne 0$. 。由于 $\mathfrak{n}_0^+ v_{\epsilon_1+\delta_1} = 0$，因此$\left[L_B(2\epsilon_1)\ \ L_{\mathfrak{g}_0}(\epsilon_1+\delta_1)\right] = 1$，其中 $L_{\mathfrak{g}_0}(\epsilon_1+\delta_1)$ 是由 $v_{\epsilon_1\pm\delta_1}$，在 $\mathfrak{g}_0 = B_k \oplus C_l$. 的作用下生成的子模。现在，由于 $L_{\mathfrak{g}_0}(\epsilon_1+\delta_1) = L_{B_k}(\epsilon_1) \otimes L_{C_l}(\delta_1)$，可知 $\{\pm\delta_g, \pm\epsilon_i \pm \delta_g\} \subset \Omega\left(L_B(2\epsilon_1)\right)$。因此，我们得出结论：

$$\Omega\left(L_B(2\epsilon_1)\right) = \Omega'_B,$$

其中 $\dim S^2\left(L_B(\epsilon_1)\right)_\alpha = \dim\left(L_B(2\epsilon_1)\right)_\alpha = 1$，对每个 $\alpha \in \Omega'_B$. 都成立。由于 $S^2(L_B(\epsilon_1)$ 中存在唯一的平凡子模，因此 $\dim L_B(2\epsilon_1)_0 = k+l$. 。所以，平凡表示和 $L_B(2\epsilon_1)$ 必定是 $S^2\left(L_B(\epsilon_1)\right)$ 的仅有简单子商。因此，$V_{st}^B \otimes V_{st}^B$ 有三个两两不同构的简单子商，每个重数均为 1，且都是自对偶的：$L_B(2\epsilon_1)$，平凡表示 $\Lambda^2\left(V_{st}^B\right)$. 。由引理 6.3 可知 $V_{st}^B \otimes V_{st}^B = L_B(2\epsilon_1) \oplus \Lambda^2\left(V_{st}^B\right) \oplus$ 平凡表示。因此，$S^2(L_B(\epsilon_1)) = L_B(2\epsilon_1) \oplus$ 平凡表示。这就得到了 (1)。(2) 可以用非常类似的方法证明。 □

6.7. **推论**。设 V 是一个 $B(k|l)$ 模（分别为 $D(k|l)$模），满足 $chV = chS^2(L_B(\epsilon_1))$（分别满足 $chS^2(L_D(\epsilon_1))$）。那么，$V =$ 平凡表示 $\oplus L_B(2\epsilon_1)$（分别为 $L_D(2\epsilon_1)$）。

证明。这直接由命题 6.6 和引理 6.5得出。 □

References

[1] M.Gorelik，*DS* 函子视角下的深度与核，arXiv: 2010.05721。[2]M. Gorelik，V. Hinich，V. Serganova，根群胚及相关李超代数，arXiv: 2209:06253。[3] M. Gorelik，Sh. C. Kerbis*Kac-Moody* 超代数的根系，arXiv:2311.17803

[4] M. Gorelik 和 V. Serganova，关于仿射超代数 $\mathfrak{q}^{(2)}(n)$ 的表示，《代数杂志》324（2010），第 12 期，3308—3354。[5] C. Hoyt，正则 Kac-Moody 超代数与可积最高权模，《代数杂志》324（2010），第 12 期，3308—3354。[6] C. Hoyt 和 V. Serganova，有限增长的一般 Kac-Moody 超代数的分类，《代数通讯》35（2007），第 3 期，851-874。[7]J. E. Humprheys，《李代数与表示论导论》，第三版，施普林格，2012。[8] V. G. Kac，李超代数，《数学进展》26，第 1 期（1977），8–96。[9] V. G. Kac，无限维李代数，第三版，剑桥大学出版社，1990。[10] V. G. Kac，无限维代数、Dedekind 的 η-函数、经典 M ¨obius 函数及非常奇异公式，《数学进展》30（1978），85–136。[11] V.G. Kac 和 D.H. Peterson，无限旗簇与共轭定理，《美国国家科学院院刊》- PNAS 80（1983），1778–1782。[12] S. Kumar，Kac-Moody 群、其旗簇与表示论，《数学进展丛书》204，Birkh¨auser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2002。[13] A. L. Onishchik 和 E. B. Vinberg，李群与代数群，第一版，Nauka，莫斯科，1998。[14] V. Serganova，Kac-Moody 超代数与可积性，载于《无限维李理论的发展与趋势》，169–218，《数学进展丛书》288，Birkh¨auser Boston, Inc.，2011。[15] V. Serganova，单李超代数的自同构，《苏联数学汇刊》24（1985），539-551。[16] J. van de Leur，有限增长的反变李超代数的分类，《代数通讯》17（1989），1815–1841。[17]J. van de Leur，有限增长的反变李超代数，乌得勒支，荷兰，Elinkwijk B.V，1986。[18] H. Yamane，广义根系与仿射李超代数 $G(3)^{(1)}$，《圣保罗数学科学杂志》10（2016），第 1 期，9–19。