arXiv:2601.08658v1 [math.GR] 13 Jan 2026

Artin 群几何与组合群论导论

RACHAEL BOYD

摘要。本文简要介绍 Artin 群的几何与组合群论。具体而言，我们介绍 Artin 群的 $K(\pi,1)$ 猜想，并综述截至 2024年1月 的已知结果。这些笔记是为 MFO 迷你研讨会 2405a *Artin* 群与三角范畴相遇编写的配套笔记，同时配有 Edmund Heng 的笔记稳定性条件导论及其与 $K(\pi,1)$ *Artin* 群猜想的关系。

1. 引言

关于 Artin 群几何群论的优秀综述文章有很多。我们先为读者列出一份不求详尽的参考文献：

[Cha07] Charney，与 *Artin* 群相关的问题。[GP12a] Godelle 和 Paris，关于 *Artin-Tits* 群的基本问题。[Par14] Paris，$K(\pi,1)$ *Artin* 群猜想[McC17] McCammond*Artin* 群神秘的几何

在这些讲义中，我们将回顾现有文献中的一些重要定义、结果、方法和未决问题。除了猜想2.24之外，我们不声称数学内容有任何原创性。我们还加入了练习，并希望这些讲义能让非专业读者也能读懂。

设 Γ 是一个有限带标号单纯图，其顶点集为 S，边集为 E，边标号为 $m_{st} \geq 3$ 或 $m_{st} = \infty$，其中 $\{s,t\} \in E$。如果顶点 s和 t之间没有边，则令 $m_{st} = 2$。那么，Artin 群 A_Γ 由以下表示给出，其中的关系称为广义辫关系。

$$A_\Gamma = \langle S \mid \underbrace{sts\dots}_{\text{length } m_{st}} = \underbrace{tst\dots}_{\text{length } m_{st}} \ \forall\, s \neq t \in S \text{ such that } m_{st} \neq \infty \rangle.$$

请注意，当 $m_{st} = 2$ 时（在 Γ中，s 和 t 之间没有边），由此可得s 和 t 可交换。Coxeter 群 W_Γ 通过添加关系 $s^2 = e$ （对所有 $s \in S$）得到。

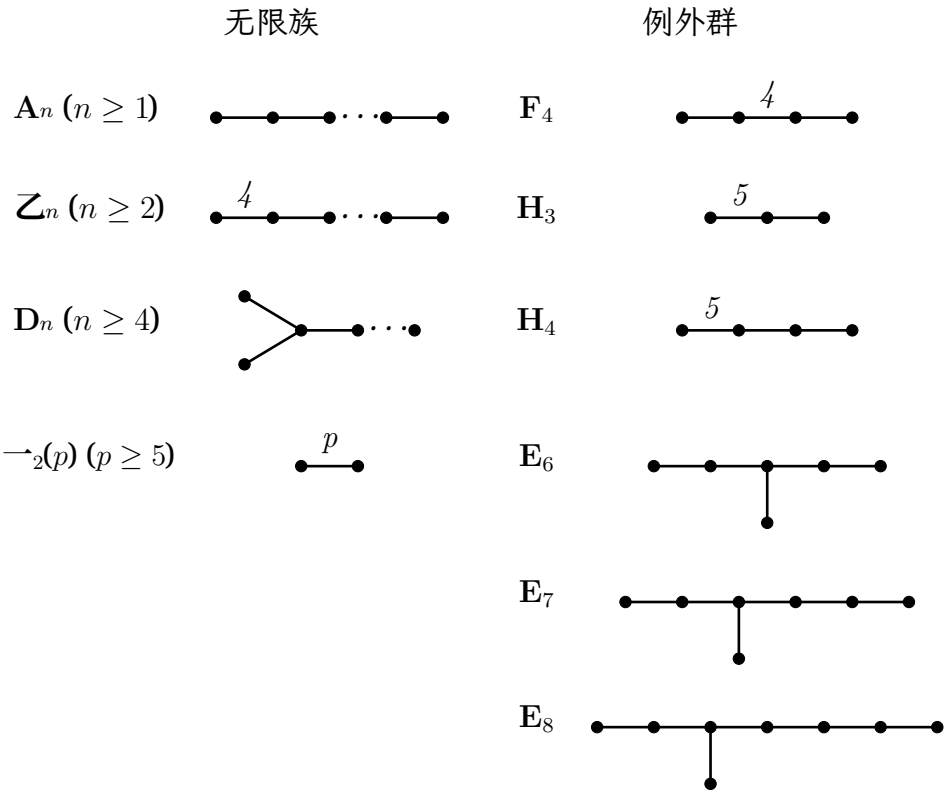
存在一个自然映射 $A_\Gamma \to W_\Gamma$，它由添加额外关系 $s^2 = e$ 得到，而该映射的核是纯阿廷群 PA_Γ。因此，这三个群构成如下短正合列：

$$PA_\Gamma \hookrightarrow A_\Gamma \to W_\Gamma.$$

投影映射 $W_\Gamma \to A_\Gamma$ 还有一个典范截面：将 Coxeter 群中的群元素表示为一个最短长度词，并将其视为 Artin 群中的一个词。注意，最短词之间仅相差关系 A_Γ，因此该截面不依赖于最短词的选取。我们指出，实际上可以为这个截面作出不同的选择，这对应于线性辫的概念，但这些笔记中只会用到典范截面。

有限 Coxeter 群由 Coxeter 于 1935 [Cox35], 提出，其研究动机是考察正多胞体的对称群。若 Artin 群 A_Γ 称为有限型，则相应的 Coxeter 群 W_Γ 是有限的。我们在此回顾 Coxeter 的分类，因为它将为练习提供许多群的例子。

定理1.1 (有限Coxeter群的分类，Coxeter [Cox35])。 *Coxeter* 群 W_Γ 当且仅当 Γ 是以下有限个连通图的不交并时，才是有限群。



Coxeter 群的一般定义由 Tits 于 1961 [Tit61]提出，旨在涵盖与超平面集合相关的无限反射群：任何 Coxeter 群都可以实现为有限维向量空间上的一个离散群，由关于某个内积的反射生成（当且仅当该内积为正定时，Coxeter 群才是有限的）。我们稍后会定义超平面补空间。Brieskorn 将 Artin 群引入为复化超平面配置的基本群，以探讨代数几何中的问题 [Bri71]。

Artin 群和 Coxeter 群因其丰富的代数与几何性质，以及与数学诸多领域的联系而得到了深入研究，这些领域包括表示论、低维拓扑学和单值化理论。在几何群论中，立方复形理论适用于研究右角阿廷群（RAAG）——仅具有对易（$m_{st} = 2$）辫关系和自由关系（$m_{st} = \infty$）的群——参见 [Wis12]的综述。本文聚焦于非右角情形，因为研究 RAAG 的方法与研究一般 Artin 群的方法有所不同。

1.1. **开放问题**。与 $K(\pi,1)$ 猜想（本文的主要议题）并列的是，尽管其中许多问题已被重新表述，但凭借当前的工具箱，关于 Artin 群的一些代数问题仍未能得到完整解答。对于一般的 Γ，基本猜想如下：

（i） A_Γ 是无挠的。（ii）如果 A_Γ 不能写成 Artin 群的乘积，那么当A_Γ 为有限型时， A_Γ 具有中心 $\mathbb{Z}$；否则具有平凡中心。（iii） A_Γ 具有可解的字问题（以及共轭问题）。

对于某些 Artin 群族（例如有限型 Artin 群），所有这些猜想都已知为真；但一般而言，尽管人们在这方面投入了大量工作并对此十分关注，这些问题仍未得到解答。相关概述可参见 [GP12a] （其中他们证明，只需证明这些猜想对于 Γ “无穷自由”成立）或 [McC17]。

这里我们注意到，对 K（π，1）猜想的肯定回答意味着 Artin 群是无挠的（我们将在后文看到， K（π，1）猜想成立将为 BA_Γ [Sal94]提供一个有限维模型），并且也回答了中心猜想[JS23]。

近年来，人们对 *Artin* 群的同构问题 进行了研究（例如，参见 [Vas23；MV24]），该问题探讨两个 Artin 群何时同构（Coxeter 群的相应问题仍未解决）。另一个有趣的开放问题是对 Artin 群的自同构进行分类；目前仅在极少数情形下完成了分类，例如右角阿廷群 [Dro87], 和二维 Artin 群（稍后定义） [Cri05]。Vaskou [Vas25] 对无穷型自由大类型 Artin 群的自同构进行了分类，而 Bregman、Charney 和 Vogtmann 为右角阿廷群构建了外空间 [BCV23]。

致谢。本文是为奥伯沃尔法赫小型研讨会 2405a 撰写的讲义：*Artin* 群与三角范畴相遇。配套讲义见 [Hen24]。相应的奥伯沃尔法赫报告见 [BHO24]。感谢参加 MFO 小型研讨会 2405a *Artin* 群与三角范畴相遇的所有参与者对这些讲义提出的意见。特别感谢 Andrea Bianchi、Edmund Heng、Viktoriya Ozornova 和 Ailsa Keating 对初稿提出的意见。还要感谢研讨会的共同组织者 Edmund Heng 和 Viktoriya Ozornova。特别感谢 Jon McCammond 和 Tony Licata 为此次小型研讨会筹备系列讲座。研讨会组织者谨向奥伯沃尔法赫数学研究所（MFO）致谢，感谢其提供组织这一主题小型研讨会的机会。MFO 与研讨会组织者还要感谢美国国家科学基金会通过资助项目 DMS-2230648“美国奥伯沃尔法赫青年学者”支持青年研究人员参加此次研讨会。

2. $K(\pi, 1)$ 猜想

本节陈述 $K(\pi, 1)$ 猜想，并介绍若干不同的表述形式。

2.1. 猜想的陈述。

2.1.1. 典范表示。 对于顶点集为 S 的 Γ，Coxeter 群 W_Γ有一个忠实表示 ρ: $W_\Gamma \to \mathrm{GL}(V)$，其中 V 是维数为 $|S|$ 的实向量空间。我们将描述这个表示。

设 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$，并设 $m_{ij} = m_{s_i s_j}$。设 $V \cong \mathbb{R}^n$ 的基为 $\{e_1, \ldots, e_n\}$。

定义 2.1. 在 V 上定义一个对称双线性形式 $\mathcal{B}$，如下：

$$\mathcal{B}(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ -\cos(\pi/m_{ij}) & \text{if } m_{ij} \text{ finite} \\ -1 & \text{if } m_{ij} \text{ infinite.} \end{cases}$$

据此，我们构造一个映射 ρ: $W_\Gamma \to \mathrm{GL}(V)$:

$$\rho(s_i) = \sigma_i \qquad \sigma_i \colon V \to V; \sigma_i(v) = v - 2\mathcal{B}(e_i, v)e_i.$$

练习 2.2. 计算二阶 Artin 群 $\mathbf{I}_2(p)$ 以及仿射 Artin~群 $\mathbf{A}_2$, 对应于 Γ 为一条所有边均标记为 3 的三角形时的 $\mathcal{B}$。

注记 2.3。 *</style}*映射 是线性的，阶为 *2*，并保持双线性形式 。此外，*()*，而 的不动点恰好由方程 *(，* $v) = 0$定义的超平面给出。

练习 2.4。 证明在二阶 Artin 群 $\mathbf{I}_2(p)$ 的情形下， $\sigma_i\sigma_j$ 的阶为 $m_{ij} = p$ 。

事实上，可以证明一般而言 $\sigma_i\sigma_j$ 的阶为 m_{ij}，而映射 ρ 可扩展为同态 $\rho\colon W_\Gamma \to \mathrm{GL}(V)$。

定理 2.5 ([Tit61，定理 2.4])。 表示 ρ 是忠实的。

因此，群 W_Γ 可以视为 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群。

注记 2.6。 这个对称双线性形式定义了一个矩阵 B ，其中 $B_{ij} = \mathcal{B}(e_i, e_j)$，有时称为*Coxeter* 矩阵 [McC17]。由于 $\mathcal{B}$ 是实对称矩阵，其所有特征值均为实数。因此，球型（有限）Coxeter 群是所有特征值均为正数的群（$\mathcal{B}$ 是正定的）；欧几里得 Coxeter 群则是所有特征值均为 ≥ 0 ($\mathcal{B}$ 是半正定的) 的群。当 Coxeter 矩阵至少有一个零特征值时，相应的对称双线性形式是奇异的。

定义 2.7 (非奇异 Tits 锥)。 忠实表示 $\rho\colon W_\Gamma \to \mathrm{GL}(V)$ 由反射生成，且 W_Γ 在一个非空开锥 $\mathcal{I} \subseteq V$上适当不连续地作用，该开锥称为关于 ρ的*Tits* 锥 。当 B 非奇异时，超平面 H_i 围成一个闭单纯锥 $\mathcal{C}$，并将 Tits 锥定义为其轨道

$$\mathcal{I} := \bigcup_{w\in W_\Gamma} w\mathcal{C}.$$

在奇异情形下，超平面 H_i 不再围成一个单纯锥。Tits 通过转向对偶表示 $\rho^*\colon W_\Gamma \to \mathrm{GL}(V^*)$ 解决了这个问题：对于 $w \in W_\Gamma$， $\phi \in V^*$，以及 $v \in V$，我们有

$$(\rho^*(w))(\phi)(v) = \phi(\rho(w^{-1})(v)).$$

另一种描述如下。令 $\phi_i \in V^*$ 表示标准对偶基，使得 $\phi_i(e_j) = \delta_{i,\,j}$，则有 $\rho^*(w) = (\rho(w)^{-1})^T \in \mathrm{GL}(V^*)$。这个表示是忠实表示，因为它是一个忠实表示的对偶表示（事实上，通过证明 ρ^* 是忠实表示，更容易证明 ρ 是忠实表示）。

在对偶表示 $\rho^*\colon W_\Gamma \to \mathrm{GL}(V^*)$中，生成元再次以反射的方式作用，每个反射都固定一个超平面

$$H_i^* := \{\phi \in V^* \mid \phi(e_i) = 0\}$$

而在这种对偶框架下，超平面总是围成一个单纯锥

$$\mathcal{C}^* := \{\phi \in V^* \mid \phi(e_i) \geq 0\}.$$

定义 2.8（Tits 锥；一般情形）。无论矩阵 B 是否奇异，超平面 H_i^* 都围成一个闭单纯锥 $\mathcal{C}^*$，而关于 ρ^* 的*Tits* 锥 定义为轨道

$$\mathcal{I} := \bigcup_{w \in W_\Gamma} w\mathcal{C}^*.$$

当 B 非奇异时，两个表示 ρ 和 ρ^* 等价，因此这个定义等价于非奇异 Tits 锥的定义。事实上，Charney 和 Davis 进一步证明，在考察超平面补空间（将在下文定义）的同伦型时，选择 W_Γ 作为线性反射群并不重要 [CD95b，第 2]节。

考虑 W_Γ 中所有反射构成的集合，它们由标准生成元的共轭元给出：

$$R = \{wsw^{-1} \mid w \in W, s \in S\}.$$

那么，每个反射 $r \in R$ 都满足： $\rho^*(r) \in \mathrm{GL}(V^*)$ 固定一个超平面 $H_r^* \subset \mathcal{I} \subseteq V^*$。

备注 2.9. 注意， W_Γ 中的反射集合与二阶元素集合并不相同。考虑 $\Gamma = \mathbf{A}_1 \amalg \mathbf{A}_1$，使得 $W_\Gamma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。该群是阿贝尔群，因此反射就是标准生成元本身。特别地，元素 $(1, 1)$（其阶也为 2）不是反射。

习题 2.10。证明，在先前定义的表示 ρ （或 ρ^*）下，元素 $\rho((1,1)) \in \mathrm{GL}(V)$ 是一次旋转 π （因此其阶为 2）。

根据 [GP12a], ，我们将复化超平面补空间定义为

$$\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{I} \times V^* \setminus \cup_{r \in R}(H_r^* \times H_r^*).$$

我们称其为复化超平面补空间，因为在非奇异情形下，当（非奇异）Tits 锥满足 $\mathcal{I} \cong V$ （这发生在 W_Γ 有限时），我们有

$$\mathcal{H}_\Gamma \simeq V \otimes \mathbb{C} \setminus \cup_{r \in R}(H_r \otimes \mathbb{C}).$$

注意，在 [Par14]中， $\mathcal{H}_\Gamma$定义为 $\mathcal{I} \times \mathcal{I} \setminus \cup_{r \in R}(H_r^* \times H_r^*)$，根据 [CD95b，引理 2.1，它与我们的定义同伦等价。1]。

这个超平面补空间是一个连通流形，其（实）维数为 $2|S|$ ， W_Γ 在其上自由且适当不连续地作用。Van der Lek 证明了以下结论。

定理 2.11 (Van derLek [Lek83]). 的基本群 $\mathcal{H}_\Gamma/W_\Gamma$ 同构于 A_Γ。

回顾一下，对于群 G，空间 X 是一个 $K(G, 1)$ 空间，当且仅当 X 是连通的 CW 复形， $\pi_1(X) \cong G$，并且对所有 $i \geq 2$， $\pi_i(X) = 0$ 。在这种情况下， X 也称为

G 的分类空间，记作 BG。等价地，CW 复形是一个 $K(G,\ 1)$ 空间，当且仅当其万有覆盖是可缩的。

Artin 群最重要的猜想之一如下，称为$K(\pi,\ 1)$ 猜想。

猜想 2.12 (Arnol'd、Brieskorn、Pham、Thom)。 $\mathcal{H}_\Gamma/W_\Gamma$ 是 A_Γ的分类空间，或者说是 $K(A_\Gamma,1)$ 空间。

2.2.**猜想的其他表述**。这个猜想有许多种不同的表述，下面我们将逐一回顾。

由子集 A_T 生成的子群 $T \subseteq S$ 称为 A_Γ的特殊子群（或标准抛物子群）。根据 van der Lek [Lek83]的定理， A_T 与 Γ 中由 T张成的（全）子图所对应的 Artin 群同构。

2.2.1. ***Salvetti* 复形**。Charney 和 Davis [CD95a], 以及独立地，Salvetti[Sal94], 构造了一个有限维 CW 复形，称为 Salvetti 复形，记作Sal_Γ。他们证明它与 $\mathcal{H}_\Gamma$同伦等价，因此证明该复形是非球面的，也就证明了 $K(\pi,\ 1)$ 猜想。

构造 Salvetti 复形时，我们遵循 [Par14] 和 [Pao17]的做法。我们需要先介绍一些关于Coxeter群陪集的预备知识。

定义 2.13。 设 $T \subseteq S$ 并考虑特殊子群 $W_T \subset W_\Gamma$。我们称 $w \in W$ 为 T-最短的，如果它是陪集 wW_T中唯一的最短代表元。对于 Coxeter 群，这样的最短代表元总是存在，参见例如 [Dav08]。

用 $\mathcal{S}^f$ 表示集合 $\{T \subseteq S \,|\, W_T$是有限的$\}$。

定义 2.14 （Salvetti 复形）。 Salvetti 复形是由集合 $W \times \mathcal{S}^f$ 赋予以下偏序后得到的偏序集的几何实现：

$$(u, T) \leq (v, R) \text{ if } T \subseteq R, v^{-1}u \in W_R \text{ and } v^{-1}u \text{ is } T\text{-minimal.}$$

Charney 和 Davis，以及独立地，Salvetti 证明了以下结果。

定理 2.15 （[Sal94； CD95a]）。 $\mathrm{Sal}_\Gamma \simeq \mathcal{H}_\Gamma$。

Salvetti 复形Sal_Γ 伴随有 Coxeter 群 W_Γ的自然左乘作用，而等价关系 $\mathrm{Sal}_\Gamma \simeq \mathcal{H}_\Gamma$ 关于这一作用是等变的，因此 $\mathrm{Sal}_\Gamma /W_\Gamma \simeq \mathcal{H}_\Gamma/W_\Gamma$ ([Sal94； CD95a]) 。复形 $\mathrm{Sal}_\Gamma /W_\Gamma$ 具有一种胞腔分解，其中包含一个 0-胞腔、每个 $s \in S$对应一个 1-胞腔，以及每个 k对应一个胞腔$T \in \mathcal{S}^f$ ，使得 $|T| = k$。关于这一胞腔分解的详细说明及一些有用的图示，参见 [Par14] 和 [Pao17] 。

顺便一提，当 $T \subset S$ 时，存在一个自然嵌入 $\mathrm{Sal}_T \hookrightarrow \mathrm{Sal}_\Gamma$ ，而 Godelle 和 Paris 证明了以下有趣的结果：

定理 2.16 ([GP12b，定理 2.2])。 自然嵌入 $\mathrm{Sal}_T \hookrightarrow \mathrm{Sal}_\Gamma$ 存在一个收缩 $\mathrm{Sal}_\Gamma \to \mathrm{Sal}_T$。

我们还提供了一种等价的方法，通过 Artin 群作用构造 Salvetti 复形 $\mathrm{Sal}_\Gamma/W_\Gamma$ 的商空间。

回忆一下，存在一个典范截面 $W_\Gamma \to A_\Gamma$ （这并非群同态）。对于 W_T 的一个有限特殊子群 W_Γ，我们用 W_T 表示 W_T 在该截面下的像。注意，这只是 A_Γ 的一个子集，而非子群。

定义 2.17 ([Cha07]). 考虑偏序集的几何实现Sal'_Γ ，

$$\{a\widehat{W_T} \,|\, a \in A_\Gamma,\, W_T \text{ finite}\}.$$

于是，Artin 群 A_Γ 在 Sal'_Γ 上自由且单纯地作用。

引理 2.18。$\mathrm{Sal}'_\Gamma/A_\Gamma \simeq \mathrm{Sal}_\Gamma/W_\Gamma$.

请注意，在一些后来的论文中，例如 Salvetti 和 Paolini 对 $K(\pi,1)$猜想（针对仿射 Artin 群）的证明，Salvetti 复形被定义为商空间$\mathrm{Sal}_\Gamma/W_\Gamma$。在 Paris 的笔记 [Par14] 中，该商空间记作 Sal_Γ。

2.2.2. ***Deligne* 复形。** 在 Deligne、Charney 和 Davis 的工作基础上[CD95b] 定义了一个立方复形，其顶点由有限型特殊子群的陪集构成，其中这些子群属于 A_Γ<style id='14'>。Charney 和 Davis 将此复形称为修正 Deligne 复形，此后它逐渐被称为 Deligne 复形。

回顾一下，立方复形是通过沿子立方体粘合边长为 1 的欧几里得立方体而得到的空间（$[0,1]^n$ 对于某个 $n \geq 0$）（$[0,1]^k \subset [0,1]^n$ 对于某个 $n > k \geq 0$）。

定义 2.19 （Deligne 复形）。 设 A_Γ 是一个 Artin 群。***Deligne* 复形** $\mathcal{D}_\Gamma$ 是一个立方复形，其顶点集由所有满足 A_T 为有限型（$T \in \mathcal{S}^f$）的陪集 gA_T 构成。我们按照陪集包含关系对顶点作偏序排列。对于任意一对顶点 $gA_T \subset gA_{T'}$，区间 $[gA_T, gA_{T'}]$张成一个维数为 $|T' \smallsetminus T|$的立方体。

注意，Deligne 复形也可以构造为一个单纯复形，即偏序集 $\{aA_T \,|\, a \in A_\Gamma, T \in \mathcal{S}^f\}$ 的几何实现。立方复形结构比单纯复形结构更粗，从而可以使用立方度量，例如由 $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ 诱导的标准立方度量和 Moussong 度量。

练习 2.20。 画出对应于具有平凡代表元的陪集$\widetilde{\ }$的 Deligne 复形截面，其中 Artin 群的型分别为 $\mathbf{A}_2$, 和 $\mathbf{B}_3$。在每个复形中各举出一个具有无限价的顶点。

A_Γ 通过左乘作用于其陪集，从而诱导出 A_Γ 在 Deligne 复形 $\mathcal{D}_\Gamma$上的余紧等距变换作用。但请注意，该作用并不适当，因为顶点 gA_T 的稳定子是无限子群 gA_Tg^{-1}。

Charney 和 Davis 证明了以下结论：

定理 2.21 ([CD95b])。 *Deligne* 复形 $\mathcal{D}_\Gamma$ 与 *Salvetti* 复形 Sal_Γ的万有覆盖同伦等价。

我们注意到，为 Coxeter 群类似地定义的复形是*Davis* 复形，但在这种情况下，Coxeter 群的作用是适当的。

2.2.3. 扩展 *Deligne* 复形。 Godelle 和 Paris 引入了一种单纯复形，也可以赋予立方结构；在本文中，我们称之为扩展 *Deligne* 复形 [GP12b]。它通过将 Charney 和 Davis 的定义中的 $\mathcal{S}^f$ 的有限型子集族 S 替换为更一般的 $\mathcal{S}$ 子集族，对其进行了扩展。该子集族必须满足以下性质：

- 若 $T \in \mathcal{S}$且 $T' \subset T$，则 $T' \in \mathcal{S}$，
- A_T 对所有 $T \in \mathcal{S}$，都满足 $K(\pi,1)$ 猜想，
- $\mathcal{S}^f \subset \mathcal{S}$。

满足这些条件的 S 子集族 $\mathcal{S}$ 称为完备且 $K(\pi,1)$。

定义 2.22 （扩展 Deligne 复形）。设 A_Γ 是一个 Artin 群，cS 是 S 的一个完备且 $K(\pi,1)$ 的子集族。 $\mathcal{D}_\Gamma(\mathcal{S})$ 扩展 *Deligne* 复形是陪集偏序集 $\{aA_T \mid a \in A_\Gamma, T \in \mathcal{S}\}$ 的几何实现，其顺序由包含关系给出。

Godelle 和 Paris 证明了以下定理。

定理 2.23 （[GP12b，定理 3。1]）。设 $\mathcal{S}$ 是一个完备且 $K(\pi,1)$ 的子集族。那么 $\mathcal{D}_\Gamma(\mathcal{S})$ 与 *Salvetti* 复形$_\Gamma\mathrm{Sal}$的万有覆盖同伦等价。

2.2.4. *Artin* 幺半群的分类空间。该*Artin* 幺半群 A_Γ^+ 是由正表示给出的幺半群

$$A_\Gamma^+ = \langle S \mid \underbrace{sts\dots}_{\text{length } m_{st}} = \underbrace{tst\dots}_{\text{length } m_{st}} \ \forall s \neq t \in S \rangle^+.$$

.....的群完备化 A_Γ^+ 是 A_Γ，而 Paris 证明了包含映射 $A_\Gamma^+ \hookrightarrow A_\Gamma$ 是单射 [Par02]。

2006年，Dobrinskaya 证明商空间 $\mathcal{H}_\Gamma/W_\Gamma$ 与 BA_Γ^+ 具有相同的同伦型；后者是 Artin 幺半群 [Dob06]的分类空间。

回顾一下，离散群 BG 的分类空间 G 可以通过标准（或称 bar）分解 [Bro94，第 I 节5], 构造，它只有一个顶点，并且对于 $p \geq 0$，p单形对应于元组 $[g_1|g_2|\cdots|g_p]$，其中 $g_i \in G$。第一个和最后一个面映射分别通过遗忘 g_1 和 g_p 来定义；中间的面映射则通过遗忘一个 bar，并将它分隔的群元素相乘来定义。

幺半群 BM 的分类空间 M 同样可以通过相同的 bar 构造来建立，使用幺半群元素 $m_i \in M$。以这种方式得到的空间总是连通的，并且其基本群是与该幺半群相关联的泛群 M。然而，这些空间通常具有非平凡的高阶同伦群。事实上， [McD79] 证明，任意连通空间都弱等价于BM 某个幺半群的 M。

Dobrinskaya 的结果后来由 Ozornova 重新证明 [Ozo17]以及 Paolini[Pao17], ，所使用的是离散 Morse 理论。

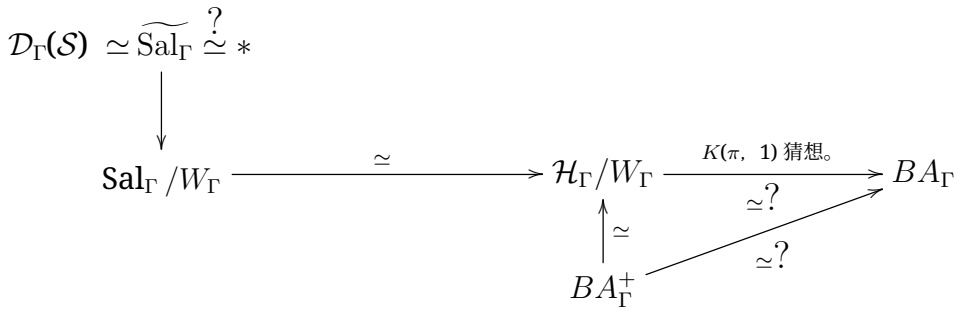
由此可知， $K(\pi,\ 1)$ 猜想对 A_Γ成立，当且仅当自然映射 $BA_\Gamma^+ \to BA_\Gamma$ 是同伦等价。通过由单射 $A_\Gamma^+ \hookrightarrow A_\Gamma$ 在元组上诱导出的单射，可以在条形构造的框架下具体解释这个映射。

将 Fiedorowicz 的工作 [Fie84] 置于 Artin 幺半群的背景下，或者换一种方式，考虑包含映射 $A_\Gamma^+ \hookrightarrow A_\Gamma$，则 $K(\pi,\ 1)$ 猜想等价于以下猜想。

猜想 2.24 (Boyd)。$\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}A_\Gamma^+}(\mathbb{Z}A_\Gamma,\ \mathbb{Z}) = 0$ 对所有 $* \geq 1$成立。

目前关于该猜想的研究工作均未明确表述或采用这一改述。

2.2.5. 概述。 我们在下图中以图示呈现一些已知的 $K(\pi,1)$ 猜想等价关系。这里，$\mathcal{S}$ 是标准生成集 S 的任意完备且 $K(\pi,1)$ 的子集族。特别地，当 $\mathcal{S} = \mathcal{S}^f$、$\mathcal{D}_\Gamma(\mathcal{S})$ 时，它就是 Deligne 复形 $\mathcal{D}_\Gamma$。若能证明图中任意一个问号所示的问题，便也能证明 $K(\pi,1)$ 猜想。



2.3. **猜想的进展**。下面概述已解决 $K(\pi,\ 1)$ 猜想的 Artin 群族。[1]

[1]本综述写于2024年1月——此后取得的进一步进展未纳入本综述。

2.3.1. 有限型 *Artin* 群。 回顾一下，如果相应的 Coxeter 群是有限群，那么 Artin 群就称为有限型，或球面型。Deligne 证明了有限型 Artin 群的 $K(\pi,1)$ 猜想 [Del72], ，他所使用的复形后来由 Charney 和 Davis 加以修改，并称为 Deligne 复形（定义2.19）。Deligne 的证明运用了 Artin 幺半群上的 Garside 结构（我们将在下一节介绍），以及“房室的并”论证；我们也将为此提供一个通用框架。在关于 $K(\pi,1)$ 猜想的笔记中，Paris 重新证明了 Deligne 的结果，证明 Salvetti 复形的万有覆盖是可缩的。这个证明很容易理解，我们推荐阅读；它同样采用了房室的并论证，并运用了有限型情形下幺半群的性质 [Par14]。

2.3.2. *FC* 型 *Artin* 群。 若一个 Artin 群 属于 *FC* 型，则任意不包含 $T \subseteq S$的子集 s, t 在满足 $m_{st} = \infty$ 时生成一个有限型 Artin 群，即 $T \in \mathcal{S}^f$。FC 型 Artin 群最初由 Charney 和 Davis 在 [CD95b]中定义。恰好当 Deligne 复形上的标准立方度量为 CAT(0) 时，它们才是 FC 型。“FC”代表旗复形，这一术语源自 Gromov 对立方复形提出的旗条件：如果所有顶点的链接都是旗复形，那么该立方复形就是 CAT(0)。根据定义，当且仅当 A_Γ是 FC 型时，Deligne 复形才满足这一条件。除了证明在这种情况下 $K(\pi,\ 1)$ 猜想成立之外，Deligne 复形还被用于证明 FC 型 Artin 群的字问题可解、无挠且具有有限的虚上同调维数，以及其他性质 [Alt98；CD95b；God07]。

2.3.3. 二维与局部可约 *Artin* 群。 如果一个 Artin 群满足以下条件，则称其为 二维的：所有有限型 $T \subseteq S$ 都满足 $|T| \leq 2$ (型 $\mathbf{A}_1$ 或 $\mathbf{I}_2(p)$)。这尤其意味着 Salvetti 复形和 Deligne 复形都是二维的。对于这些群，Charney 和 Davis 证明了 $K(\pi,1)$ 猜想 [CD95b], ；随后，Charney 将这一类群扩展至有限型特殊子群要么属于二维情形，要么是 4 股辫群（型 $\mathbf{A}_3$）的 Artin 群， [Cha04]。这一扩展后的群族称为局部可约 Artin 群。这两项结果都是通过证明 Deligne 复形上的 Moussong 度量满足非正曲率性质得出的（二维情形下为 CAT(0)，扩展情形下为 CAT(1)）。

2.3.4. 大型 *Artin* 群。 Artin 群 A_Γ 称为大型型，如果每个m_{st} 出现在表示中时都是 ≥ 3，即任意两个标准生成元都不交换。Hendriks 证明了大型型 Artin 群的 $K(\pi,1)$ 猜想 [Hen85]。注意，大型型 Artin 群是二维的，因此这一结果也可由前面的情形得到。

2.3.5. 欧几里得阿廷群。 Garside 最先研究了辫群的组合结构 [Gar69], ，并为字问题找到了一个优雅的解法。Brieskorn 和 Saito 将这一结果推广到有限型 Artin 群 [BS72] ，其组合学推论在有限型 Artin 群的研究中发挥了重要作用：例如，可以利用这一结构证明 $K(\pi,1)$ 猜想。Garside 结构的概念后来由 [DP99] 引入并作了详细探讨（另见 [DDGKM15]）——我们将在本讲义后文对其作出定义。

近来，有人为仿射 Artin 群定义了对偶 Garside 结构 [MS17]，Paolini 和 Salvetti [PS21] 利用该结构证明了 $K(\pi,1)$ 猜想对仿射 Artin 群这一类群成立。Paolini 提供了一组浅显易懂的笔记，介绍他们的证明[Pao25] ，其中也概述了一般情形下该猜想的对偶方法 $K(\pi,1)$ 。他们与 Delucchi 将这些方法加以扩展，证明了秩为 3 [DPS24]的所有 Artin 群都满足该猜想。

2.3.6. 近期进展。 Haettel 和 Huang 最近通过证明 $K(\pi_1)$ 猜想对一类 Artin 群成立，展示了 $A_\Gamma \times \mathbb{Z}$ 具有 Garside 结构，并利用这一结构推导出 A_Γ [HH25]的性质。这一类包括循环型 Artin 群，并以它们为基础构造而成循环型。他们将定义图为一个环、且任意特殊子群均为有限型的 Artin 群称为循环型 Artin 群。他们给出的满足 $K(\pi,1)$ 猜想的新例子中，有一些 A_Γ ，其中 W_Γ 作用于双曲空间 $\mathbb{H}_3$ 或 $\mathbb{H}_4$。

大约在同一时期，Huang 发布了一份预印本 [Hua24]证明了$K(\pi,\ 1)$ 猜想适用于 A_Γ 其中 Γ 是一棵满足某些性质的树，或者 Γ 包含一个循环子图并满足某些性质。例如，他证明了当 Γ 是一棵树，且有一组边 E 使得 $\Gamma\setminus E$ 的各个分支均为球型、仿射型或局部可约型（因此，特别地，该猜想已为人所知）时，该猜想成立。Huang 通过引入并研究相对 *Artin* 复形和折叠阿廷复形的同伦型来证明该猜想。我们简要讨论相对 Artin 复形。

定义 2.25。*Artin* 复形 Δ_Γ 是一个单纯复形，其顶点集为陪集 $\{aA_T \,|\, a \in A_\Gamma, T = S \setminus \{s\}$ 的集合，其中陪集对应于 $s \in S\}$。我们称一个顶点的型为$\hat{}s$，如果它是 $A_{S\setminus s}$的一个陪集。若一组顶点所对应的陪集具有非空公共交集，则这些顶点张成一个单形。

在假设 $S\setminus\{s\}$ 满足 $K(\pi,\ 1)$ 猜想适用于所有 $s \in S$ 的前提下，Artin 复形与扩展 Deligne 复形一致 $\mathcal{D}_\Gamma(\mathcal{S})$ （定义 2.22）中取 $\mathcal{S}$ 的所有真子集族 S。Huang 的证明策略始于这样一个事实：证明扩展 Deligne 复形可缩即可证明该猜想。他引入了相对 Artin 复形，我们在此为感兴趣的读者给出其定义。

定义 2.26 ([Hua24，定义 2.3])。对于 A_Γ Artin 群，令 $S' \subset S$。相对 ***Artin*** 复形 $\Delta_{S,\ S'}$ 是由 Δ_Γ 中型为 $\hat{}s$ 且满足 $s \in S'$的顶点所张成的诱导子复形。

Huang 证明了以下小猜想等价于 $K(\pi,\ 1)$ 小猜想[Hua24，推论 7。4]。如果一个 Artin 群 A_Γ 满足 几乎球面型，则 Γ 不含无穷标（即没有 $m_{st} = \infty$），A_Γ 不是有限型，但 A_T 对所有真子集都是有限型 $T \subset S$。

小猜想 2.27 ([Hua24，小猜想 2。4])。设 Γ 是一个顶点集为 S 的完全图，且 $T \subset S$ 满足 A_T 是几乎球面型。如果 Γ 以及由 T 张成的子图均为连通且不含无穷标，则 $\Delta_{S,\ S'} \simeq *$。

注意，在这两篇论文中，我们用来定义 A_Γ 的图 Γ 记作 Λ，而 Γ 用于表示另一种图约定。

2.3.7. 小猜想。小猜想 $K(\pi,\ 1)$ ***EW*** [小猜想17] 指出 $\pi_2(\mathcal{H}_\Gamma/W_\Gamma) = 0$。Elias 和 Williamson 最初声称该小猜想已在 [DM14，§6], 中得到证明，但他们后来撤回了这一说法，因此该小猜想仍未解决。

3. Artin 群研究中使用的一些技巧

本节概述用于证明上文讨论的若干结果的一些基础理论。

3.1. **Garside 理论**。回顾一下，Artin 群的组合结构最初由 Garside 针对辫群进行了研究 [Gar69] 随后 Brieskorn 和 Saito 将其推广到有限型 Artin 群 [BS72]。由于这些组合性质在有限型 Artin 群的研究中发挥了重要作用，Dehornoy 和 Paris 将具有这类结构的群定义为 ***Garside*** 群。由此发展出了 ***Garside*** 理论，该理论提出了这样一个问题：群（以及更一般地说，幺半群或范畴）的哪些特征能够使我们沿用（或类比）Garside 的证明？在文献中出现了若干不同但相关的概念之后，[DDGKM15] 中的概念逐渐成为一种标准。下面我们将定义这种结构，并列出它的一些推论。

定义 3.1 (Garside 幺半群 [DP99，定义 2。1])。一个 ***Garside*** 幺半群 是一个有序对 $(M,\ \Delta)$，其中 M 是一个幺半群，并且 $\Delta \in M$ 满足以下条件。

(i) M 是左消去且右消去的。(ii) 存在 $\ell\colon M \to \mathbb{N}$ 满足 $\ell(ab) \geq \ell(a) + \ell(b)$, 且 $\ell(a) = 0 \Rightarrow a = e$（这在 M 上诱导出一个偏序）。(iii) M 中任意两个元素都有左最小公倍数和右最小公倍数，以及左最大公因子和右最大公因子。

(iv) Δ 是 M 的一个 ***Garside*** 元，也就是说，Δ 的左因子集合等于其右因子集合，并且该集合是 M 的一个生成集。
(v) M 中 Δ 的所有因子构成的集合是有限的。

给定一个 Garside 幺半群，我们可以构造出唯一的 ***Garside*** 群，它是该幺半群的包络群（或群完备化）。事实上，这种群完备化可以通过左分式构造，并且该幺半群嵌入群完备化中，这是该幺半群的一个性质。

定义 3.2 (Garside 群 [DP99, 定义 2.3])。 G 是一个***Garside*** 群，当且仅当它是某个 Garside 幺半群 M的群完备化。在这种情况下，由 M 是 Garside 可知：

- $M \subseteq G$,
- 对于所有 $g \in G$，都存在 $a, b \in M$ 使得 $g = a^{-1}b$。

我们称 G 为 M的左分式群。

如果一个幺半群满足 Garside 幺半群的各项性质（最后一项除外），那么它就是一个拟 ***Garside*** 幺半群： Δ 允许有无限多个因子。在这种情况下，其分式群称为拟 ***Garside*** 群。

设 A_Γ^+ 是一个 Artin 幺半群，其生成集为 S，关系集 R_Γ 由定义图 Γ确定。考虑由字母表 S中的字母组成的词的集合 $\{S\}^*$。我们经常将这些词视为模去关系 R_Γ后的等价类。这个集合与 Artin 幺半群 A_Γ^+ 中的元素集合一一对应。若 w 表示 $\{S\}^*$中的一个词，令 $\overline{w}$ 表示它在 $\{S\}^*/R_\Gamma \cong A_\Gamma^+$ 中的像。我们可以在集合 $\{S\}^*$ 上赋予偏序 $\leqslant_R$：若存在 $z \in \{S\}^*$ 使得 $w = zv$，即 v 出现在 w的右侧，则称 $\{S\}^*$ 中的两个词 v 和 w 满足$v \leqslant_R w$。这个偏序可以传递到 Artin 幺半群上：若存在 $z \in \{S\}^*$ 使得 $w = zv$，则称 $\{S\}^*/R_\Gamma$ 中的两个元素$\overline{v}$ 和 $\overline{w}$满足 $\overline{v} \leqslant_R \overline{w}$。偏序 $\leqslant_L$ 的定义类似：若存在 $z \in \{S\}^*$ 使得 $w = vz$，即 v 出现在 w 的左侧，则 $\overline{v} \leqslant_L \overline{w}$。在同构 $\{S\}^*/R_\Gamma \cong A_\Gamma^+$ 下，我们可以写成：若存在 $c \in A_\Gamma^+$ 使得 $b = ca$，则 A_Γ^+ 中的a 和 b 满足 $a \leqslant_R b$。满足 $b \leqslant_R a$ 的$b \in A_\Gamma^+$ 称为 $a \in A_\Gamma^+$ 的右因子；左因子的集合也类似定义。

练习 3.3。 确定在偏序 $\leqslant_R$ 或 $\leqslant_L$ 下， A_Γ^+ 的最小公倍数和最大公因子的确切定义。

Brieskorn 和 Saito 证明了有限型 Artin 幺半群具有 Garside 结构，下面我们将介绍这一结构。回想一下，有限 Coxeter 群 W_Γ 有唯一的最长元素，令 Δ 表示该元素在典范截面 $W_\Gamma \to A_\Gamma$ 下于 A_Γ 中的像。它属于 A_Γ^+，因为 W_Γ 在典范截面下的整个像都属于其中。于是，(A_Γ^+， Δ) 是一个 Garside 幺半群，因为：

(i) [BS72，命题 2.3] A_Γ^+ 是左消去且右消去的；也就是说，若 $ac = bc$ 或 $ca = cb$ 属于 A_Γ^+，则可以消去等式两边的 c 项，从而得出 $a = b$。(ii) 长度函数 $\ell\colon A_\Gamma^+ \to \mathbb{N}$ 将元素 $a \in A_\Gamma^+$ 映射为表示 a 的词（由标准生成元组成）的长度。该函数定义良好，因为 A_Γ^+ 中的所有关系等号两边长度相同。该函数满足 $\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b)$，且取值为 0 的唯一幺半群元素是单位元 $e \in A_\Gamma^+$。(iii) [BS72，命题 4.2 以及定理 5.5 和 5.6] 在有限型 Artin 群中，任意元素集合都有最小公倍数和最大公因子。(iv) Δ 是一个 Garside 元，其左因子集合与右因子集合相等。该集合恰好是典范截面 $W_\Gamma \to A_\Gamma^+$ 的像，因此总是包含标准生成集 S，从而生成 A_Γ^+。特别地，这意味着对每个 $s \in S$，都存在 a、$b \in A_\Gamma^+$，使得 $\Delta = sa = bs$。(v) 由于 W_Γ 是有限的，Δ 的因子集合因此也是有限的。

与第 (iii) 项相反，在一般 Artin 群中，最大公因子总是存在，而最小公倍数仅在存在公倍数时才存在 [BS72，命题 4。1]。

因此，在有限型 Artin 群 A_Γ 中，所有群元素 g 都可以写成 $g = ab^{-1}$，其中 a，$b \in A_\Gamma^+$。此外，对于每个 g，都存在一个整数 k 和元素 $a \in A_\Gamma^+$，使得 $g = \Delta^k a$。

此外，一个有趣的事实是，给定一个有限型 Artin 幺半群 A_Γ^+，其生成集为 S，Garside 元为 Δ，则存在一个置换 $\sigma\colon S \to S$，使得对所有 $s \in S$，$\Delta s = \sigma(s)\Delta$。

习题 3.4。对于与型$\mathbf{I}_2(p)$和 $\mathbf{A}_3$, 的有限型 Artin 群相关联的幺半群，确定 Garside 元 Δ 和置换 $\sigma\colon S \to S$。

给定一个生成集为 S 的 Artin 幺半群 A_Γ^+，若其 Garside 元存在，则记为 Δ_S。对于 $T \subseteq S$，我们将子幺半群 A_T^+ 的 Garside 元记为 Δ_T。下面的引理给出了 Artin 幺半群的一种有用标准形。

引理 3.5。如果 $a \in A_\Gamma^+$ 的右因子中长度为 *1* 的元素构成集合 $T \subseteq S$，那么 A_T^+ 是一个有限型 *Artin* 幺半群，其 *Garside* 元为 Δ_T，并且存在 $b \in A_\Gamma^+$ 使得 $a = b\Delta_T$。

我们可以先利用这一事实写出 $a = b\Delta_{T_0}$，然后写出 $b = c\Delta_{T_1}$，其中 $T_1 \subset S$ 是 b 的长度为 1 的右因子集合，以此类推，直到得到唯一的标准形：

$$a = \Delta_{T_k} \dots \Delta_{T_1} \Delta_{T_0}.$$

这里，a 已使用与有限型 Artin 幺半群相对应的 Garside 元素字母表写成标准形，但 A_Γ^+ 本身不一定是有限

型 Artin 幺半群。这种标准形一直是许多关于 Artin 幺半群的证明的关键，但若没有（准）Garside 结构，从幺半群过渡到群仍然非常困难。

Dehornoy 发表了一系列论文 [Deh17a；Deh17b；DW17；DHR18]，概述了将 Garside 理论的核心推广到一般 Artin 群的计划。正如我们所见，对于有限型 Artin 群（它们是 Garside 群），每个元素都可以写成 $g = a^{-1}b$ 其中 a 且 b 属于关联幺半群。这对一般 Artin 群并不成立；Dehornoy 及其合作者研究了 A_Γ 上的重写系统，这些系统源于将每个元素写成一个多分式 $g = a_1^{-1}b_1 \dots a_n^{-1}b_n$。Dehornoy 使用多分式重新表述了 A_Γ 的字问题，并提出了若干猜想。其中最基本的猜想如下：设元素 $g \in A_\Gamma$ 可以写成 $g = a^{-1}b$ 且不存在约去，那么 a 和 b 是否唯一？对$\mathrm{Stab}(D_\Gamma)$ 的研究（见配套笔记 [Hen24]）已显示出解决这一基本猜想的希望。因此，可以设想，这些技术与 Dehornoy 的计划相结合，或许能进一步阐明 Artin 群的字问题。

3.2. **对偶 Garside 结构**。

定义 3.6. 有限生成集为 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ 的 Artin 群 A_Γ 的一个*Coxeter* 元，是由形如 $\sigma(s_1)\sigma(s_2) \dots \sigma(s_n)$ 的词表示的元素，其中 σ 是 S 的 n 个元素的一个置换。例如，$s_1 \cdots s_n$ 是 A_Γ 的一个 Coxeter 元。

给定一个 Artin 群 A_Γ 和 Coxeter 元 δ，可以定义一个对偶 *Artin* 群(例如 [Pao25])。当 A_Γ 为有限型时，这个群既与 Artin 群同构，也是 Garside 群，其 Garside 元由 Coxeter 元 δ给出。因此，有限型 Artin 群具有两种（不同的）Garside 结构，分别对应于标准表示和对偶表示 [Bes03]。

一般而言，猜想对偶 Artin 群与 Artin 群同构。该猜想已证明对秩 3 Artin 群 [DPS24]和仿射 Artin 群 [Dig06；Dig12；McC15；MS17]成立。

McCammond 和 Sulway 提出的仿射 Artin 群对偶 Garside 结构 [MS17] 被 Paolini 和 Salvetti [PS21] 用于证明了 $K(\pi,1)$ 猜想对仿射 Artin 群这一类成立。

3.3. **可壳性与房室的并**。在 [Dav08], Davis 使用房室并论证，证明 Davis 复形 Σ_W 与某个 Coxeter 群相关联的 Davis 复形是可缩的。他通过证明 Davis 复形是基本构造的一个例子来实现这一点。作为第二个例子，Hepworth 关于 Coxeter 群同调稳定性的高连通性结果 [Hep16] 也使用了这种论证。在 [Par14], Paris 使用房室并论证证明，

某些 Artin 幺半群的 Salvetti 复形类似物的万有覆盖是可缩的，从而证明了有限型 Artin 群的 $K(\pi,\ 1)$ 猜想。粗略地说，这种论证将复形分解为高维胞腔的并，并考察在将这些胞腔粘合起来、逐步构建复形时，连通性如何变化。

我们概述这样一种情形下的论证：有一个维数为 n 的单纯复形C，我们希望证明它是可缩的，或是（$n-1$）-连通的。该论证适用于这样的情形： C 是由指标集 I 上的一族 n 维单形（可能无限多个）构成的并集：

$$C = \bigcup_{i \in I} \sigma_i^n$$

并且可以用一种典范方式为每个单形关联一个自然数，也就是说，存在一个映射 l: $I \to \mathbb{N}$，使得只有一个单形 ——$\sigma_{i_0}^n$ —— 的指标值为 0。这在 σ_i^n 上诱导出一个偏序，该偏序继承自 $\mathbb{N}$ 上的 $\leq$。例如，若 C 是群陪集偏序集的几何实现，则指标集可以是该群或一组陪集代表元，而一个定义良好的长度函数可以作为映射，取值于 $\mathbb{N}$。或者， C 可以是群作用下某个 n 维单形的轨道，此时群同样充当指标集。我们按如下方式用自然数对 C 作滤过：

定义 3.7。 对于 k 中的 $\mathbb{N}$，我们定义 $C(k)$ 如下：

$$C(k) = \bigcup_{\substack{i \in I, \\ l(i) \leq k}} \sigma_i^n.$$

我们注意到 $C(0) = \sigma_{i_0}^n$， $C(k) \subseteq C(k+1)$，且复形 C 由 $\lim_{k\to\infty} C(k)$ 给出。腔室并论证依赖于证明以下两个断言：

断言（A）：若 $l(i) = k+1$，则 $\sigma_i^n \cap C(k)$ 是 σ_i^n 的一个非空最高维面的并。

断言（B）：若 $l(i) = l(j) = k+1$ 且 $i \neq j \in I$，则 $\sigma_i^n \cap \sigma_j^n \subseteq C(k)$。

必须针对所考虑的具体情形验证这些断言。假设这些断言成立， 下面我们将说明如何证明 C 要么是可缩的，要么是 $(n-1)$-连通的。

我们通过逐步增加 $C(k)$ 中的 k，归纳地构造 C，并观察同伦型如何变化。我们从 $C(0) = \sigma_{i_0}^n$ 开始，它是可缩的。在每一步中，我们通过添加以下单形集合，从 $C(k)$ 扩展到 $C(k+1)$:

$$\bigcup_{\substack{i \in I, \\ l(i) = k+1}} \sigma_i^n.$$

于是，断言（A）意味着 $C(k) \cup \sigma_i^n$ 是 σ_i^n 的非空面并。因而，从 $C(k)$ 过渡到 $C(k) \cup \sigma_i^n$ 时，对同伦型的影响有以下两种可能：

- 添加该单形不会改变它（若 σ_i^n 的所有面并非都在交集中），或者
- 同伦会发生变化，而这种变化可描述为可能添加一个 n 球面（若所有面都在交集中，即 $\sigma_i^n \cap C(k) = \partial \sigma_i^n$）。

断言（B）现在意味着，同时将上述单形并集整体添加到$C(k)$，只会以各个单形所造成的方式改变同伦型，因为任意两个单形的交集都包含在 $C(k)$ 内。因此，在每个阶段 $C(k) \to C(k+1)$，同伦型至多因添加n维球面而改变；由取极限可知，C 要么可缩，要么是 $(n-1)$-连通的。

函数 $l\colon I \to \mathbb{N}$ 在 C的最高维单形上给出一个偏序。根据断言（B），将该偏序扩张为全序的任意线性扩张仍满足断言（A）。在这种情况下，这种排序称为 壳化（见 [Bjö92]），我们已知它是高度连通的，这为前面的讨论提供了另一种证明。

这个证明概要很容易调整。例如，我们可以从某个 m 的 m 连通复形 $C(0)$ 开始。我们也可以选择更复杂的基本构造块，而不是单个单形。例如，它可以是群或幺半群在立方复形或单纯复形上的作用的基本域。

参考文献

[Alt98] Joseph A. Altobelli。《FC型 Artin 群的字问题》。《纯粹与应用代数杂志》129.1（1998），第 1–22 页。issn：00224049。doi：10.1016/S0022-4049(97)00047-9。[BCV23] Corey Bregman、Ruth Charney 和 Karen Vogtmann。《右角阿廷群的外空间》。《杜克数学杂志》172.6（2023），第 1033–1108 页。issn：0012- 7094,1547-7398。doi：10.1215/00127094-2023-0007。[Bes03] David Bessis。《对偶辫群幺半群》。《高等师范学校科学年鉴》（第 4 辑）36.5（2003），第 647–683 页。issn：0012-9593。doi：10 . 1016 / j. ansens.2003.01.001。[BHO24] Rachael Boyd、Edmund Heng 和 Viktoriya Ozornova。专题研讨会：Artin 群与三角范畴相遇。报道人：Gabriel Corrigan。2024年。doi：10.14760/OWR-2024-4。

[Bjö92] Anders Björner。《拟阵与几何格的同调与可壳性》。载于：《拟阵应用》。第 40 卷。《数学百科全书·应用》。剑桥大学出版社，剑桥，1992 年，第 226–283 页。doi：10.1017/CBO9780511662041.008。[Bri71] E. Brieskorn。《有限复反射群的正则轨道空间的基本群》。《数学发明》12（1971），第 57 页。doi：10.1007/BF01389827。[Bro94] Kenneth S. Brown。《群上同调》。第 87 卷。《数学研究生教材》。1982 年原版的修订重印本。施普林格出版社，纽约，1994 年，第 x+306 页。isbn：0-387-90688-6。[BS72] E. Brieskorn 和 K. Saito。《Artin 群与 Coxeter 群》。《数学发明》17（1972），第 245–271 页。issn：0020-9910。doi：10.1007/BF01406235。[CD95a] R. Charney 和 M. W. Davis。《Artin 群的有限 $K(\pi, 1)$ 空间》。载于：《拓扑学展望》（普林斯顿，新泽西州，1994）。第 138 卷。《数学年刊研究丛书》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1995 年，第 110–124 页。[CD95b] R. Charney 和 M. W. Davis。《与无限反射群相关的超平面补空间的 $K(\pi, 1)$ 问题》。《美国数学会杂志》8.3（1995），第 597–627 页。issn：0894-0347。doi：10.2307/2152924。[Cha04] Ruth Charney。《四股辫群的 Deligne 复形》。《美国数学会汇刊》356.10（2004），第 3881–3897 页。issn：0002-9947。doi：10 . 1090 / S0002 - 9947 - 03 - 03425-1。[Cha07] Ruth Charney。《与 Artin 群相关的问题》。《美国数学研究所》（2007）。http://people.brandeis.edu/~charney/ papers/_probs.pdf。[Cox35] H. S. M. Coxeter。《形式为 $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$ 的有限群的完全枚举》。《伦敦数学会会刊》s1-10.1（1935年），第 21–25 页。doi：10.1112/jlms/s1-10.37.21。[Cri05] John Crisp。《二维 Artin 群的自同构与抽象可公度子群》。《几何与拓扑》9（2005），第 1381–1441 页。issn：1465-3060,1364-0380。doi：10.2140/gt.2005.9.1381。[Dav08] M. W. Davis。《Coxeter 群的几何与拓扑学》。第 32 卷。《伦敦数学会专著丛书》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2008 年，第 xvi+584 页。isbn：978-0-691-13138-2；0-691-13138-4。[DDGKM15] Patrick Dehornoy、François Digne、Eddy Godelle、Daan Krammer 和 Jean Michel。《Garside 理论基础》。第 22 卷。《EMS 数学论丛》。扉页上的作者姓名为：Daan Kramer。欧洲

欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2015年，第 xviii+691 页。isbn：978-3-03719-139-2。doi：10.4171/139。[Deh17a] Patrick Dehornoy。“多分式约化 I：3-Ore 情形与 FC 型 Artin-Tits 群 ”。组合代数杂志 1.2 （ 2017 年），第 185–228 页。issn：2415-6302。doi：10.4171/JCA/1-2-3。[Deh17b] Patrick Dehornoy。“多分式约化 II：关于 Artin-Tits 群的猜想”。组合代数杂志 1.3（2017年），第 229–287 页。issn：2415- 6302。doi：10.4171/JCA/1-3-1。[Del72] Pierre Deligne。“广义辫群的楼”。《数学发明》17（1972年），第 273–302 页。issn：0020-9910,1432-1297。doi：10.1007/BF01406236。[DHR18] Patrick Dehornoy、Derek F. Holt 和 Sarah Rees。“多分式约化 IV：填充与充分大型型 Artin-Tits 幺半群”。J. Pure Appl. Algebra 222.12（2018年），第 4082–4098 页。issn：0022-4049。doi：10.1016/j.jpaa.2018.02.021。[Dig06] F. Digne。“仿射型辫群的对偶表示$_{\sim}A$”。《赫尔维数学评论》81.1（2006年），第 23–47 页。issn：0010-2571。doi：10.4171/CMH/41。$_{\sim}$[Dig12] F. Digne。“C_n型 Artin-Tits 群的 Garside 表示”。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）62.2（2012年），第 641–666 页。issn：0373- 0956。doi：10.5802/aif.2690。[DM14] F. Digne 和 J. Michel。“抛物型 Deligne-Lusztig 簇”。《数学进展》257（2014年），第 136–218 页。issn：0001-8708。doi：10 . 1016/ j . aim.2014.02.023。[Dob06] N. Dobrinskaya。“带标签粒子的构形空间与有限 Eilenberg-MacLane 复形”。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》252.1（2006年1月），第 30–46 页。issn：1531-8605。doi：10.1134/S0081543806010056。[DP99] Patrick Dehornoy 和 Luis Paris。“高斯群与 Garside 群

，

Artin 群的两种推广”。《伦敦数学会会刊》（第*3*辑）79.3 (1999), 第569–604页。 ISSN：0024-6115,1460-244X。 DOI：10.1112/S0024611599012071。[DPS24] Emanuele Delucchi、Giovanni Paolini 和 Mario Salvetti。“秩三 Coxeter 群与 Artin 群上的对偶结构”。《几何与拓扑》28.9 (2024), 第4295–4336页。 ISSN：1465-3060,1364-0380。 DOI：10.2140/gt.2024.28.4295。[Dro87] Carl Droms。“图群的同构”。《美国数学会会刊》100.3 (1987), 第407–408页。 ISSN：0002-9939,1088-6826。 DOI：10.2307/2046419。

[DW17] Patrick Dehornoy 和 Friedrich Wehrung。“多分式约化 III：区间幺半群的情形”。组合代数杂志 1.4 (2017), 第341–370页。ISSN：2415-6302。DOI：10.4171/JCA/1-4-1。[EW17] B. Elias 和 G. Williamson。“Coxeter 群及其辫群的图示演算”。《量子拓扑》8.3 (2017), 第413–457页。ISSN：1663-487X。DOI：10.4171/QT/94。[Fie84] Z. Fiedorowicz。“拓扑幺半群与范畴的分类空间”。《美国数学杂志》106.2 (1984), 第301–350页。ISSN：0002-9327。DOI：10.2307/2374307。[Gar69] F. A. Garside。“辫群及其他群”。《数学季刊》20.1（1969年1月），第235–254页。ISSN：0033-5606。DOI：10.1093/qmath/20.1.235。[God07] Eddy Godelle。“具有 CAT(0) Deligne复形的 Artin-Tits 群 ”。《纯粹与应用代数杂志》 208.1 (2007), 第 39–52 页。ISSN：00224049。DOI：10.1016/j.jpaa.2005.11.012。[GP12a] E. Godelle 和 L. Paris。“关于 Artin-Tits 群的基本问题”。载于：《构形空间》。第14卷。CRM丛书。Ed. Norm.，比萨，2012，第299–311页。DOI：10.1007/978-88-7642-431-1_13.[GP12b] Eddy Godelle 和 Luis Paris。“$K(\pi,1)$ 与无限型 Artin-Tits 群的字问题，以及对虚辫群的应用”。《数学杂志》272.3-4 (2012), 第1339–1364页。ISSN：0025-5874,1432-1823。DOI：10.1007/s00209-012-0989-9。[Hen24] Edmund Heng。“稳定性条件导论及其与 Artin 群 $K(\pi,1)$ 猜想的关系”。arXiv 预印本 2404.11562 (2024)。[Hen85] Harrie Hendriks。“大类型超平面补空间”。《数学发明》79.2 (1985), 第375–381页。ISSN：0020-9910。DOI：10 . 1007 / BF01388979。[Hep16] Richard Hepworth。“Coxeter 群族的同调稳定性

”.

《代数与几何拓扑》16.5 (2016), pp. 2779–2811. issn: 1472-2747. doi: 10.2140/agt.2016.16.2779.[HH25] Thomas Haettel 和 Jingyin Huang. “新的 Garside 结构及其在 Artin 群中的应用”。《杜克数学杂志》174.9 (2025), pp. 1665– 1722. issn: 0012-7094,1547-7398. doi: 10 . 1215 / 00127094 - 2024-0062.[Hua24] Jingyin Huang. “带标记四环与 Artin 群的 $K(\pi, 1)$ 猜想”。《数学发明》238.3 (2024), pp. 905–994. issn: 0020- 9910,1432-1297. doi: 10.1007/s00222-024-01294-w.[JS23] Kasia Jankiewicz 和 Kevin Schreve. “ $K(\pi, 1)$ 猜想蕴含 Artin 群的中心猜想 ”。《代数杂志》 615 (2023), pp. 455–

463. issn: 0021-8693,1090-266X. doi: 10.1016/j.jalgebra.2022. 10.024.[Lek83] Harm van der Lek. “复超平面补空间的同伦型”。博士论文，奈梅亨 (1983).[McC15] Jon McCammond. “对偶欧几里得 Artin 群与格性质的失效”。《代数杂志》437 (2015), pp. 308–343. issn: 0021-8693. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.021.[McC17] J. McCammond. “Artin 群的神秘几何”。Winter Braids 讲义 4.Winter Braids VII (卡昂, 2017) (2017), Exp. No. 1, 30. doi: 10.5802/wbln.17.[McD79] D. McDuff. “离散幺半群的分类空间”。《拓扑学》18.4 (1979), pp. 313–320. issn: 0040-9383. doi: 10.1016/0040-9383(79)90022-3.[MS17] Jon McCammond 和 Robert Sulway. “欧几里得型 Artin 群”。《数学发明》210.1 (2017), pp. 231–282. issn: 0020-9910. doi: 10.1007/s00222-017-0728-2.[MV24] Alexandre Martin 和 Nicolas Vaskou. “大类型 Artin 群的刻画”。《伦敦数学学会通报》56.11 (2024), pp. 3346–3357. issn: 0024-6093,1469-2120. doi: 10.1112/blms.13136.[Ozo17] Viktoriya Ozornova. “离散 Morse 理论与 $K(\pi, 1)$ 猜想的重新表述”。《代数通讯》45.4 (2017), pp. 1760–1784. issn: 0092-7872,1532-4125. doi: 10.1080/00927872.2016.1226852.[Pao17] Giovanni Paolini. “Artin 幺半群的分类空间”。《代数通讯》45.11 (2017), pp. 4740–4757. issn: 0092-7872. doi: 10.1080/ 00927872.2017.1281931.[Pao25] Giovanni Paolini. “ $K(\pi, 1)$ 猜想的对偶方法”。载于：献给 Ruth Charney 的群论几何方法论文集。第 34 卷。法国数学学会 Sémin. Congr.，Paris，2025，pp. 177– 201. isbn: 978-2-85629-998-2.[Par02] Luis Paris. “Artin 幺半群嵌入其群中”。《瑞士数学评论》77.3 (2002), pp. 609–637. issn: 00102571. doi: 10. 1007/s00014-002-8353-z.[Par14] L. Paris. “Artin 群的 $K(\pi, 1)$ 猜想”。《图卢兹数学科学学院年刊》(6) 23.2 (2014), pp. 361–415. issn: 0240-2963. doi: 10.5802/ afst.1411.[PS21] Giovanni Paolini 和 Mario Salvetti. “仿射 Artin 群的 $K(\pi, 1)$ 猜想的证明”。《数学发明》224.2 (2021), pp. 487–572. issn: 0020-9910. doi: 10.1007/s00222-020-01016-y.

[Sal94] Mario Salvetti。《Artin 群的同伦类型》。《数学研究快报》1（1994 年 1 月），第 565–577 页。doi：10 . 4310/ MRL . 1994.v1.n5.a5。[Tit61] J. Tits。《Coxeter 群与几何》。1961 年。[Vas23] Nicolas Vaskou。《大类型 Artin 群的同构问题》。arXiv 预印本 2201.08329（2023 年）。[Vas25] Nicolas Vaskou。《无穷型自由大类型 Artin 群的自同构》。《几何奉献》219.1（2025 年），第 16 号论文，共 20 页。issn：0046- 5755,1572-9168。doi：10.1007/s10711-024-00951-x。[Wis12] D. T. Wise。从财富到 RAAG：3-流形、直角 Artin 群与立方几何。第 117 卷。CBMS 数学区域会议系列。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会，2012 年，第 xiv+141 页。isbn：978-0-8218- 8800-1。doi：10.1090/cbms/117。

格拉斯哥大学数学与统计学院，格拉斯哥 G12 8QQ，英国电子邮件地址：rachael.boyd@glasgow.ac.uk网址：https://www.maths.gla.ac.uk/~rboyd/