arXiv:2601.08669v1 [math.RA] 13 Jan 2026

具有最大幂零指数的幂零演化代数上的 Rota–Baxter 算子

IZZAT QARALLEH、FARRUKH MUKHAMEDOV 和 OTABEK KHAKIMOV

Abstract. 具有最大幂零指数的幂零演化代数存在一种自然基，使得其结构矩阵为严格上三角矩阵。本文对这类代数上的权零与权一 Rota–Baxter 算子进行了分类。我们证明，相对于某个自然基，每个 Rota–Baxter 算子都是上三角的。对于权零的情形，会出现一种强烈的刚性现象：算子除可能在最后一个基向量上存在扰动外，均为对角算子。对于权一的情形，结构则更为丰富，既包括三角族，也包括非三角族，其对角元由有理递推关系决定。我们的结果完整描述了具有最大幂零指数的幂零演化代数上的 Rota–Baxter 算子。

Mathematics Subject Classification: 17A60, 17A36, 17D92, 4 7B39.

Key words: 演化代数；分类；Rota–Baxter 算子；

1. Introduction

演化代数是一类交换（通常非结合）的代数，其特征在于存在一个自然基，使得不同基向量的乘积为零，且每个平方都是基元素的线性组合。相对于这样的基，其结构矩阵完全确定了该代数；这个矩阵也定义了一个有向加权图，其中顶点对应基元素。组合观点使演化代数能够运用图论、动力系统和遗传学中的方法 [3–5]。例如，在群体遗传学中，演化代数曾被用于模拟配子代数和合子代数中的类型传递（参见Costa关于配子代数和合子代数的导子及导子代数的早期研究 [1,11,12,32,33]）。后来，Tian [36], 撰写了一部关于演化代数及其应用的综合专著，而Tian和Vojtˇechovskˊy的综述 [35]则强调了演化代数在非孟德尔遗传学中的作用。这些代数处于代数结构与离散动力学的交界处；它们不构成一个簇，但其乘法表满足交换巴拿赫代数的公理。正如Camacho等人所指出的，演化代数与有向图和群、随机过程以及数理物理密切相关 [6,24,30]。代数与动力学观点之间的相互作用推动了对其结构性质和算子理论的深入研究。

Date: 收稿日期：xxxxxx；修订日期：yyyyyy；录用日期：zzzzzz。

* 通讯作者。

一个重要的结构问题涉及幂零性。有限维演化代数 E 是幂零的，当且仅当 $E^k = 0$ 对某个 k成立；这等价于相应图中不存在有向环，也等价于存在一个自然基，使得结构矩阵为严格上三角矩阵 [7]。幂零演化代数已成为多项分类研究的对象。二维演化代数已分别在复数域上 [9] 和实数域上 [35], 完成分类；Casado、Molina和Velasco则对三维演化代数作出了完整分类 [8]。在高维情形下，Elduque和Labra引入了由上湮灭级数导出的不变量，将五维及以下的幂零演化代数分类，并利用非退化对称双线性型和可交换的可对角化端同态构造了这类代数的若干族 [13]。Hegazi和Abdelwahab描述了任意域上的幂零演化代数，并研究了其幂零指数 [17],；Casas、Ladra、Omirov和Rozikov则分析了演化代数的幂零指数和二分性，并给出了其具有最大幂零指数的条件 [9, 10]。

在幂零演化代数中，具有最大幂零指数 的代数占有特殊地位。若一个 n 维演化代数满足 $\dim(E^2) = n - 1$，则称其具有最大幂零指数；等价地说，自然基元素的平方张成一条极大链。在适当的自然基下，这种代数的结构矩阵是严格上三角矩阵，其非零超对角线元素还可能附加由非超对角常数指标集所编码的高阶“扰动”。Casas等人证明，幂零演化代数当且仅当其关联图不含有向环，因此对自然基重新排序即可得到上三角结构矩阵 [7]。这些极端的幂零代数类似于丝状李代数，为算子理论研究提供了丰富的素材。具有最大幂零指数的演化代数的导子和自同构的描述已在 [26–28]中得到研究。

Rota–Baxter 算子给出了这样一种算子理论约束。对于域 $\mathbb{K}$ 上的代数 A 和权 $\theta \in \mathbb{K}$，线性映射 $R\colon A \to A$ 若满足下式，则称为权为 θ 的 Rota–Baxter算子

$$R(x)R(y) = R\big(R(x)y + x\,R(y) + \theta\,xy\big), \qquad x, y \in A. \tag{1.1}$$

Rota–Baxter 算子推广了分部积分：当 $\theta = 0$ 和 A 是实数轴上的连续函数代数时，积分算子 $P[f](x) = \int_0^x f(t)\,dt$满足 $P(f)P(g) = P(P(f)g + f\,P(g))$ [36]。更一般地，Li Guo 关于 Rota–Baxter代数的 [16] 论述强调，权为 λ 的 Rota–Baxter算子是满足 $P(x)P(y) = P(xP(y)) + P(P(x)y) + \lambda\,P(xy)$ 的线性映射 P，其中对所有 $x,\ y$ [37] 均成立。这类算子为从给定代数结构构造新的代数结构提供了一种机制，并出现在数学和物理学的许多领域，包括概率论、组合学以及量子场论中的重整化。关于演化代数，导子和自同构已在不同背景下得到研究 [2, 6, 11, 12, 14, 15, 18, 22, 25]，但演化代数上的Rota–Baxter理论仍基本未得到探索。我们注意到，近期已有研究探讨了低维遗传代数中的 Rota–Baxter 算子 [29, 31]。

尽管关于演化代数上的导子、自同构及相关线性算子的研究已相当广泛，但演化代数上的 Rota–Baxter 算子受到的关注相对较少，尤其是在高维情形和极端幂零情形下。现有结果主要局限于低维或特殊的遗传代数，尚缺乏一般性的分类理论。

本文旨在对最大幂零指数的幂零演化代数上的权零与权一 Rota–Baxter 算子进行完整分类。我们的首个主要结果表明，相对于某个自然基，此类代数上的任意 Rota–Baxter 算子都必须是上三角的。这使分类问题归结为分析矩阵元素之间的多项式关系，而这些关系与代数的结构常数密切相关。

本文着手对最大幂零指数的幂零演化代数上的 Rota–Baxter 算子进行分类。我们的研究揭示了权 $\theta = 0$ 与权 $\theta = 1$之间显著的二分现象。首先，我们证明，在一个 n 维的最大幂零指数演化代数上，权为 $\theta \in \{0, 1\}$ 的任意 Rota–Baxter 算子 $R = (r_{ij})$相对于某个自然基都是上三角的。这使分类问题归结为分析系数 r_{ij}所满足的耦合多项式恒等式。权为 $\theta = 0$ 时，结构具有很强的刚性：除最后一列中可能存在的元素外，对角线上方的所有非对角元素都必须为零，因此 R 本质上是对角算子加上一个单独的 e_n 分量。我们根据编码非超对角结构常数的指标集，明确描述了权零 Rota–Baxter 算子的空间 $\mathrm{RB}_0(E)$。当该集合为空时，这些算子是由一个参数确定的对角缩放，并带有若干自由的 e_n分量，其指标不超过某个阈值；当存在远程结构常数时，较前面的对角元会消失，可行形式也相应受到限制。

对于权 $\theta = 1$，情况更加微妙。我们将空间 $\mathrm{RB}_1(E)$ 分解为三角情形（其中 $r_{ij} = 0$ 对所有 $i < j < n$均成立）和非三角情形，后者会出现真正的上三角相互作用。在三角情形中， R的对角元构成有理映射 $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ 的一个轨道，而指标集则施加由某些组合距离的最大公约数决定的周期性约束。在实数域上， f 的动力学归结为显式标准形。在非三角情形中，对角必须为常数（全为零或全为 -1）；当指标集为空时，我们还推导出其余系数的显式递归公式。综上，我们完整分类了最大幂零指数的幂零演化代数上权为 0 和 1 的 Rota–Baxter 算子。权零情形中刚性的对角结构与权一情形中涌现的动力学现象形成鲜明对比，凸显了演化代数的代数、组合与动力学方面之间丰富的相互作用。

2. Evolution algebras

本节回顾演化代数的必要定义和辅助事实。

设 $\mathbf{E}$ 是域 $\mathbb{K}$上的向量空间。下文假设 $\mathbb{K}$ 具有特征零。配备乘法 $\cdot$ 的向量空间 $\mathbf{E}$ 称为关于自然基 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots\}$ 的演化代数，若其乘法规则满足

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{0},\ i \neq j,$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \sum_k a_{i,k}\mathbf{e}_k.$$

由上述定义可知，演化代数是交换的。我们用 $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ 表示有限维演化代数 $\mathbf{E}$ 的结构常数矩阵。显然，秩$A=\dim(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})$。因此，对于每个有限维演化代数，该矩阵的秩不依赖于自然基的选取。对于演化代数$\mathbf{E}$，引入如下序列

$$\mathbf{E}^k = \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \mathbf{E}^i\mathbf{E}^{k-i},$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的整数部分。

定义 2.1。 若存在某个 $m \in \mathbb{N}$，使得$\mathbf{E}^m = \mathbf{0}$，则称演化代数$\mathbf{E}$ 为幂零代数。满足$\mathbf{E}^m = \mathbf{0}$ 的最小 m 称为幂零指数。

定理 2.2。 *[10]* 一个 n 维演化代数$\mathbf{E}$ 是幂零的，当且仅当它存在一个自然基，使得该基下对应于$\mathbf{E}$ 的结构常数矩阵表示如下

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}_{1,2} & \tilde{a}_{1,3} & \vdots & \tilde{a}_{1,n} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{2,3} & \vdots & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \tilde{a}_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 2.3。 设$\mathbf{E}$ 是一个幂零演化代数，且$\dim(\mathbf{E}^2) = n-1$。则可以找到一个自然基 $\{\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n\}$，使得

$$\mathbf{e}_i^2 = \begin{cases} \mathbf{e}_{i+1} + \sum\limits_{j=i+2}^{n-1} a_{i,j}\mathbf{e}_j, & i \leq n-3; \\ \mathbf{e}_{n-1}, & i = n-2; \\ \mathbf{e}_n, & i = n-1; \\ \mathbf{0}, & i = n. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $a_{i,\ j} \in \mathbb{K}$。

证明。 设$\mathbf{E}$ 是一个具有最大幂零指数的幂零演化代数，即$dim(\mathbf{E}^2) = n-1$。根据定理 2.2，存在一个自然基 $\{\tilde{}\mathbf{e}_1,\ldots,\ \tilde{}\mathbf{e}_n\}$ 使得

that

$$\tilde{\mathbf{e}}_i^2 = \begin{cases} \sum\limits_{j=i+1}^{n} \tilde{a}_{i,j}\tilde{\mathbf{e}}_j, & i \le n-1; \\ \mathbf{0}, & i = n. \end{cases}$$

其中 $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ 且 $\prod_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_{i,i+1} \neq 0$。不失一般性，我们可以假设 $\tilde{a}_{i,i+1} = 1$ 对于任意 $i < n$。否则，我们可以不使用基 $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$，而考虑一个基

$$\tilde{\mathbf{e}}_1,\ \tilde{a}_{1,2}\tilde{\mathbf{e}}_2,\ \tilde{a}_{1,2}^2\tilde{a}_{2,3}\tilde{\mathbf{e}}_3,\ \dots,\ \prod_{k=1}^{n-1} \tilde{a}_{k,k+1}^{2^{n-k-1}}\tilde{\mathbf{e}}_n.$$

选取以下向量

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_1, & i = 1, \\ \tilde{\mathbf{e}}_i + b_i\tilde{\mathbf{e}}_n, & 1 < i < n, \\ \tilde{\mathbf{e}}_n, & i = n. \end{cases}$$

显然，对每个 $i \neq j$，都有 $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$。此外，若我们按以下递推方程选取系数 b_i

$$b_{i+1} = \tilde{a}_{i,n} - \tilde{a}_{i,n-1}b_{n-1} - \cdots - \tilde{a}_{i,i+2}b_{i+2}, \quad i < n,$$

此处 $b_{n-1} = a_{n-2,n}$，则对于 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$，可得 (2.1)。 □

注 2.4. 下文中，我们将研究具有最大幂零指数的幂零演化代数。因此，$\mathbf{E}$ 表示这类演化代数。根据引理 *2.3*，我们只考虑乘法表由 (2.1) 给出的演化代数。

我们确定一个在研究中起关键作用的集合。对于给定的矩阵 $A = (a_{i,j})_{i,j\ge 1}^{n}$，记为

$$\mathcal{I}_A = \{(i,j) : i+1 < j < n,\ a_{i,j} \neq 0\}. \tag{2.2}$$

3. Rota-Baxter operators

设 $\mathbf{E}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的代数（其中 $\mathbb{K}$ 是复数域或实数域），且 $\theta \in \mathbb{K}$。代数 $\mathbf{E}$ 上的线性算子 R 称为权为 θ 的 Rota-Baxter 算子，当它满足权为 θ 的 Rota–Baxter 关系时：

$$R(\mathbf{x})R(\mathbf{y}) = R\left(R(\mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{x}R(\mathbf{y}) + \theta\mathbf{x}\mathbf{y}\right). \tag{3.1}$$

不失一般性，可考虑权为 $\theta \in \{0, 1\}$ 的 Rota-Baxter 算子。用 $\mathcal{RB}_\theta(\mathbf{E})$ 表示 $\mathbf{E}$ 上所有权为 θ 的 Rota-Baxter 算子的集合。

设 $\mathbf{E}$ 是一个演化代数，其自然基为 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$。那么它的 Rota-Baxter 算子可表示如下

$$R(\mathbf{e}_i)R(\mathbf{e}_i) = R\left(2R(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i + \theta\mathbf{e}_i^2\right), \quad i \le n, \tag{3.2}$$

$$R(\mathbf{e}_i)R(\mathbf{e}_j) = R\left(R(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_iR(\mathbf{e}_j)\right), \quad i < j \le n. \tag{3.3}$$

下文中，我们使用矩阵表示 $R=(r_{i,j})_{i,j=1}^{n}$，其中

$$R(\mathbf{e}_i)=\sum_{k=1}^{n} r_{i,k}\mathbf{e}_k,\quad i\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

引理 3.1. 设$\mathbf{E}$ 是一个 n 维幂零指标达到最大值的演化代数，$R=(r_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ 是其权为 θ 的 *Rota-Baxter* 算子。那么 R 是上三角的。

证明. 由 $R(\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n=\mathbf{0}$ 可得 $R(\mathbf{e}_n)R(\mathbf{e}_n)=\mathbf{0}$，这等价于

$$r_{n,1}^2\mathbf{e}_1^2+r_{n,2}^2\mathbf{e}_2^2+\cdots+r_{n,n-1}^2\mathbf{e}_{n-1}^2=\mathbf{0}.$$

由向量 $\mathbf{e}_1^2,\mathbf{e}_{22},\ldots,\mathbf{e}_{n-1}^2$ 的线性无关性可知

$$r_{n,1}=r_{n,2}=\cdots=r_{n,n-1}=0.$$

设存在 $i>2$，使得对每个 $j<k\le i$ 都有 $r_{k,j}=0$。那么由 $R\left(2R(\mathbf{e}_{i-1})\mathbf{e}_{i-1}+\theta\mathbf{e}_{i-1}^2\right)=(2r_{i-1,i-1}+\theta)R(\mathbf{e}_{i-1}^2)$，乘积 $R(\mathbf{e}_{i-1})R(\mathbf{e}_{i-1})$ 可以写成向量 $\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_{i+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 的线性组合。另一方面，我们有

$$R(\mathbf{e}_{i-1})R(\mathbf{e}_{i-1})=\sum_{j=1}^{i-2} r_{i-1,j}^2 a_{j,j+1}\mathbf{e}_{j+1}+\sum_{j=i}^{n}\lambda_j\mathbf{e}_j.$$

由于$\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{i-1}$线性无关，并且根据$\prod_{j=1}^{n-1} a_{j,j+1}\neq 0$我们可推得

$$r_{i-1,1}=r_{i-1,2}=\cdots=r_{i-1,i-2}=0.$$

由此，我们证明了 Rota-Baxter 算子的上三角性。 □

命题 3.2。 设$\mathbf{E}$ 是一个具有最大幂零指数的 n维演化代数，且 $R=(r_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ 是其权为 θ 的 *Rota-Baxter* 算子。那么(3.2) 和(3.3) 可写为如下形式

$$\sum_{k=i}^{m-1} a_{k,m}r_{i,k}^2=(2r_{i,i}+\theta)\sum_{k=i}^{m-1} a_{i,k+1}r_{k+1,m},\quad i<m\le n. \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=j}^{m-1} r_{i,k}r_{j,k}a_{k,m}=r_{i,j}\sum_{k=j}^{m-1} a_{j,k+1}r_{k+1,m},\quad i<j<m\le n. \tag{3.5}$$

证明。 令 $i<n$。根据引理 3.1，我们得到 $R(\mathbf{e}_i)=\sum_{k=i}^{n} r_{i,k}\mathbf{e}_k$。然后，注意到 $\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m=\mathbf{0}$ 对任意 $l\neq m$ 均成立，可得

$$R(\mathbf{e}_i)R(\mathbf{e}_i)=\sum_{k=i}^{n-1} r_{i,k}^2\mathbf{e}_k^2, \tag{3.6}$$

$$R(2R(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i+\theta\mathbf{e}_i^2)=R\left(2r_{i,i}\mathbf{e}_i^2+\theta\mathbf{e}_i^2\right)=(2r_{i,i}+\theta)R(\mathbf{e}_i^2), \tag{3.7}$$

另一方面，由 (2.1) 可得

$$\mathbf{e}_l^2 = \sum_{j=l+1}^{n} a_{l,j}\mathbf{e}_j, \quad \forall l < n. \tag{3.8}$$

将 (3.8) 代入 (3.6) 和 (3.7)，得到

$$R(\mathbf{e}_i)R(\mathbf{e}_i) = \sum_{k=i}^{n-1} r_{i,k}^2 \sum_{m=k+1}^{n} a_{k,m}\mathbf{e}_m = \sum_{m=i+1}^{n}\sum_{k=i}^{m-1} a_{k,m}r_{i,k}^2\mathbf{e}_m \tag{3.9}$$

$$R(2R(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i + \theta\mathbf{e}_i^2) = (2r_{i,i}+\theta)R(\mathbf{e}_i^2)\sum_{m=i+1}^{n}\sum_{k=i}^{m-1} a_{i,k+1}r_{k+1,m}\mathbf{e}_m, \tag{3.10}$$

令 (3.9) 和 (3.10) 相等，可得

$$\sum_{m=i+1}^{n}\sum_{k=i}^{m-1} a_{k,m}r_{i,k}^2\mathbf{e}_m = (2r_{i,i}+\theta)\sum_{m=i+1}^{n}\sum_{k=i}^{m-1} a_{i,k+1}r_{k+1,m}\mathbf{e}_m, \quad i < n, \tag{3.11}$$

这等价于 (3.4)。现在我们可以证明 (3.5)。由于 $R(\mathbf{e}_n) = r_{n,n}\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_n = \mathbf{0}, i = 1, n-1$，可以验证 (3.3) 化简为 $\mathbf{0} = \mathbf{0}$（当 $j = n$ 时）。因此，只需考虑 $j < n$。令 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 和 $j \in \{i+1, \ldots, n-1\}$。于是

$$R(\mathbf{e}_i)R(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=j}^{n-1} r_{i,k}r_{j,k}\mathbf{e}_k^2, \tag{3.12}$$

$$R\left(R(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i R(\mathbf{e}_j)\right) = R(R(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j) = r_{i,j}R(\mathbf{e}_j^2). \tag{3.13}$$

将 (3.8) 代入 (3.12) 和 (3.13)，立即得到

$$R(\mathbf{e}_i)R(\mathbf{e}_j) = \sum_{m=j+1}^{n}\sum_{k=j}^{m-1} r_{i,k}r_{j,k}a_{k,m}\mathbf{e}_m, \tag{3.14}$$

$$R\left(R(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i R(\mathbf{e}_j)\right) = r_{i,j}\sum_{m=j+1}^{n}\sum_{k=j}^{m-1} a_{j,k+1}r_{k+1,m}\mathbf{e}_m. \tag{3.15}$$

令 (3.14) 和 (3.15) 相等，可得

$$\sum_{m=j+1}^{n}\sum_{k=j}^{m-1} r_{i,k}r_{j,k}a_{k,m}\mathbf{e}_m = r_{i,j}\sum_{m=j+1}^{n}\sum_{k=j}^{m-1} a_{j,k+1}r_{k+1,m}\mathbf{e}_m, \quad i < j < n. \tag{3.16}$$

显然，(3.16) 蕴含 (3.5)。 □

在接下来的几节中，我们将分别考察 $\theta = 0$ 和 $\theta = 1$ 的情形。

4. Description of $\mathcal{RB}_0(\mathbf{E})$

假设 $\theta = 0$。在这种情况下，等式 (3.4) 和 (3.5) 具有如下形式 s

$$\sum_{k=i}^{m-1} a_{k,m} r_{i,k}^2 = 2r_{i,i} \sum_{k=i}^{m-1} a_{i,k+1} r_{k+1,m}, \quad i < m \le n. \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=j}^{m-1} r_{i,k} r_{j,k} a_{k,m} = r_{i,j} \sum_{k=j}^{m-1} a_{j,k+1} r_{k+1,m}, \quad i < j < m \le n. \tag{4.2}$$

引理 4.1。设**E** 是一个 n 维的、具有最大幂零指数的演化代数，且 $R = (r_{i,\ j})_{i,\ j=1}^{n}$ 是其权为 $\theta = 0$ 的 *Rota-Baxter* 算子。则

$$r_{i,i}^2 = 2r_{i,i} r_{i+1,i+1}, \quad \forall i < n. \tag{4.3}$$

证明。设 $i < n$。则对于 $m = i+1$，等式（4.1）可写为

$$a_{i,i+1} r_{i,i}^2 = 2r_{i,i} a_{i,i+1} r_{i+1,i+1}.$$

于是由 $a_{i,\ i+1} = 1$ 可得（4.3）。 □

推论 4.2。设**E** 是一个 n 维的、具有最大幂零指数的演化代数，且 $R = (r_{i,\ j})_{i,\ j=1}^{n}$ 是其权为 $\theta = 0$ 的 *Rota-Baxter* 算子。则以下结论成立：

(a) 若 $r_{i,\ i} = 0$ 对于某个 $i \in \{2, \dots, n\}$，则 $r_{j,\ j} = 0$ 对于任意 $j < i$。(b) 若 $r_{i,\ i} \neq 0$ 对于某个 $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$，则 $r_{j,\ j} = 2^{i-j} r_{i,\ i}$ 对于任意 $j > i$。

证明很直接，因为它可由等式 (4.3) 直接推出。

引理 4.3. 设 **E** 是一个 n 维、幂零指数最大的演化代数，且 $R = (r_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ 是其权为 $\theta = 0$ 的 *Rota-Baxter* 算子。则对于任意 $i < j < n$，有 $r_{i,j} = 0$ 。

证明。根据引理 3.1，Rota-Baxter 算子 R 具有上三角形式，即

$$R(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=i}^{n} r_{i,j} \mathbf{e}_j, \quad \forall i \le n.$$

首先，我们证明对于任意 $i < n-1$，都有 $r_{i,\ i+1} = 0$ 。接着，通过证明 $\mathcal{I}_R = \emptyset$ 得出结论，从而完成证明。任取 $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$。将 (4.2) 中的 $j = i+1$ 和 $m = i+2$ 重写后，我们得到

$$r_{i,i+1} r_{i+1,i+1} a_{i+1,i+2} = r_{i,i+1} a_{i+1,i+2} r_{i+2,i+2},$$

这共同意味着$a_{i+1,\ i+2} \neq 0$

$$r_{i,i+1} r_{i+1,i+1} = r_{i,i+1} r_{i+2,i+2}. \tag{4.4}$$

由 (4.4)，$r_{i,\ i+1} = 0$ 若 $r_{i+1,\ i+1} \neq r_{i+2,\ i+2}$。现在我们证明，$r_{i+1,\ i+1} = r_{i+2,\ i+2}$ 蕴含$r_{i,\ i+1} = 0$。假设 $r_{i+1,\ i+1} = r_{i+2,\ i+2}$。由引理 4.1 可得

$$r_{i+1,i+1}^2 = 2r_{i+1,i+1} r_{i+2,i+2}.$$

因此，$r_{i+2,\ i+2}=0$。由推论 4.2 可得，对于每个 $k\le i+2$，$r_{k,\ k}=0$。然后将 (4.1) 改写为 $m=i+2$，得到

$$a_{i+1,i+2}r_{i,i+1}=0.$$

由于 $a_{i+1,\ i+2}=1$ 我们推得 $r_{i,\ i+1}=0$。因此我们证明了

$$R=\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & r_{1,3} & r_{1,4} & \dots & r_{1,n-2} & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & 0 & r_{2,4} & \dots & r_{2,n-2} & r_{2,n-1} & r_{2,n} \\ 0 & 0 & r_{3,3} & 0 & \dots & r_{3,n-2} & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-2,n-2} & 0 & r_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix}.$$

现在我们检验 $\mathcal{I}_R=\emptyset$。反设，即 $\mathcal{I}_R\neq\emptyset$。于是可以定义

$$i_0:=\max\{i:\exists j>i+1 \text{ such that } (i,j)\in\mathcal{I}_R\}.$$

显然,

$$R(\mathbf{e}_k)=r_{k,k}\mathbf{e}_k+r_{k,n}\mathbf{e}_n,\qquad \forall k\in\{i_0+1,\dots,n-1\}.$$

取一个（$i_0,\ j_0$）$\in\mathcal{I}_R$。将（4.2）改写为关于 i_0、j_0 和 $m=j_0+1$ 的形式

$$r_{i_0,j_0}r_{j_0,j_0}a_{j_0,j_0+1}=r_{i_0,j_0}a_{j_0,j_0+1}r_{j_0+1,j_0+1}.$$

注意到 $a_{j_0,\ j_0+1}=1$，由上一个等式可得

$$r_{i_0,j_0}r_{j_0,j_0}=r_{i_0,j_0}r_{j_0+1,j_0+1}. \tag{4.5}$$

由 $r_{i_0,j_0}\neq 0$，等式 (4.5) 得出

$$r_{j_0,j_0}=r_{j_0+1,j_0+1}.$$

另一方面，由引理 4.1 可得 $r_{j_0,j_0}^2=2r_{j_0,j_0}r_{j_0+1,j_0+1}$。因此，我们推得$r_{j_0+1,j_0+1}=0$。根据推论 4.2，可得 $r_{i_0,i_0}=0$。然后将 (4.1) 改写为 i_0

$$\begin{cases} a_{i_0,i_0+1}r_{i_0,i_0}^2=0, \\ a_{i_0,i_0+1}r_{i_0,i_0}^2+a_{i_0+1,i_0+2}r_{i_0,i_0+1}^2=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i_0,i_0+1}r_{i_0,i_0}^2+a_{i_0+1,i_0+2}r_{i_0,i_0+1}^2+\dots+a_{n-1,n}r_{i_0,n-1}^2=0. \end{cases} \tag{4.6}$$

由 $a_{i,\ i+1}=1$对每个 $i<n$，由（4.6）可得$r_{i_0,\ j}=0$ 对任意 $j>i_0$。特别地，$r_{i_0,\ j_0}=0$。这与（i_0，j_0）$\in\mathcal{I}_R$矛盾。因此，我们推断出 $\mathcal{I}_R=\emptyset$。□

注 4.4. 设**E** 是一个结构矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_{2,4} & \dots & a_{2,n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在自然基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 下， R 是 $\mathbf{E}$ 上的线性算子。若 R 是权为 $\theta=0$ 的 *Rota-Baxter* 算子，则根据引理 *4.3*， R 可写为如下形式

$$R(\mathbf{e}_i)=\begin{cases} r_{i,i}\mathbf{e}_i+r_{i,n}\mathbf{e}_n, & i<n,\\ r_{n,n}\mathbf{e}_n, & i=n. \end{cases} \tag{4.7}$$

容易验证， $\mathbf{E}$ 上由(4.7) 定义的每个线性映射都满足条件(4.2)。这意味着，线性映射(4.7)是 $\mathbf{E}$ 上的 *Rota-Baxter* 算子，当且仅当

$$\begin{cases} r_{i,i}^2=2r_{i,i}r_{i+1,i+1}, & \text{if } i<n,\\ r_{i,i}^2=2r_{i,i}r_{j,j}, & \text{if } (i,j)\in\mathcal{I}_A,\\ r_{i,i}\left(r_{i+1,n}+\sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}_A}a_{i,j}r_{j,n}\right)=0, & \text{if } i<n-2,\\ r_{n-2,n-2}r_{n-1,n}=0. \end{cases} \tag{4.8}$$

定理 4.5. 设**E** 是一个结构矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_{2,4} & \dots & a_{2,n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在自然基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 下， R 是**E**上的线性算子。那么， $R\in\mathcal{RB}_0(\mathbf{E})$ 当且仅当它具有以下形式之一：

(i) 若 $\mathcal{I}_A=\emptyset$，则(R_1)。存在 $\alpha\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$、$\beta_1\in\mathbb{K}$ 使得

$$R(\mathbf{e}_i)=\begin{cases} 2^{n-1}\alpha\mathbf{e}_1+\beta_1\mathbf{e}_n, & i=1,\\ 2^{n-i}\alpha\mathbf{e}_i, & i>1. \end{cases}$$

(R_k)。$(1<k<n)$ 存在 $\alpha\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$、$\beta_1$、$\beta_2$、.. .、$\beta_k\in\mathbb{K}$，使得

$$R(\mathbf{e}_i)=\begin{cases} \beta_i\mathbf{e}_n, & i<k,\\ 2^{n-k}\alpha\mathbf{e}_k+\beta_k\mathbf{e}_n, & i=k,\\ 2^{n-i}\alpha\mathbf{e}_i, & i>k. \end{cases}$$

(R_n)。 存在 β_1、 β_2、.. .、 $\beta_n \in \mathbb{K}$，使得

$$R(\mathbf{e}_i) = \beta_i \mathbf{e}_n, \quad \forall i \leq n.$$

(ii) 若 $\mathcal{I}_A \neq \emptyset$ 且 $i_0 = \max\{i : \exists j > i+1$ 使得 $(i,j) \in \mathcal{I}_A\}$，则 $(R_k).(i_0 < k < n)$ 存在 $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ 和 $\beta_1, .. . , \beta_{i_0+1} \in \mathbb{K}$ 使得

$$R(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \beta_i \mathbf{e}_n, & i \leq k, \\ 2^{n-k}\alpha \mathbf{e}_k + \beta_k \mathbf{e}_n, & i = k, \\ 2^{n-i}\alpha \mathbf{e}_i, & i > k. \end{cases}$$

(R_n). 存在 $\beta_1, .. . , \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$R(\mathbf{e}_i) = \beta_i \mathbf{e}_n, \quad \forall i \leq n.$$

证明。 根据注 4.4，每个 $R \in \mathcal{RB}_0(\mathbf{E})$ 都具有如下形式

$$R(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} r_{i,i}\mathbf{e}_i + r_{i,n}\mathbf{e}_n, & i < n, \\ r_{n,n}\mathbf{e}_n, & i = n. \end{cases}$$

此外，定义的线性映射 R 是 $\mathbf{E}$ 上的 Rota-Baxter 算子，当且仅当它满足 (4.8)。

（i）假设 $\mathcal{I}_A = \emptyset$，则可得（4.8）可写为如下形式

$$\begin{cases} r_{i,i}^2 = 2r_{i,i}r_{i+1,i+1}, & i < n, \\ r_{i,i}r_{i+1,n} = 0, & i < n-1. \end{cases} \tag{4.9}$$

假设 $r_{1,\ 1} \neq 0$。由（4.9）可得 $r_{i,\ i} = 2^{1-i}r_{1,\ 1}$、 $i = 2,\ n$ 以及 $r_{j,\ n} = 0$、$j = \overline{2,\ n-1}$。此时，Rota-Baxter 算子具有形式（R_1）。假设 $r_{k,\ k} \neq 0$且 $r_{k-1,\ k-1} = 0$，其中某个 $k \in \{2, \ldots, n-1\}$。根据推论 4.2，对于每个$i < k$ ，有 $r_{i,\ i} = 0$；对于任意 $j \geq k$，有 $r_{j,\ j} \neq 0$ 。此时，Rota-Baxter 算子具有形式（R_k）。最后，考虑 $r_{n-1,\ n-1} = 0$ 的情形。根据推论 4.2，我们得到

$$r_{1,1} = \cdots = r_{n-1,n-1} = 0.$$

可以验证，对于任意的 $r_{i,n}$, $i = 1, n$，(4.9) 都成立。因此，Rota-Baxter 算子的形式为 (R_n)。

(ii) 设 $\mathcal{I}_A \neq \emptyset$。我们需要验证 (4.8)。注意到 $\mathcal{I}_A \neq \emptyset$ ，可以定义

$$i_0 := \max\{i : \exists j > i+1 \text{ such that } (i,j) \in \mathcal{I}_A\}.$$

显然， $i_0 < n-2$。我们证明，对于任意 $i \leq i_0$，都有 $r_{i,i} = 0$ 。任取一个 $j_0 > i_0 + 1$ ，使得 $(i_0, j_0) \in \mathcal{I}_A$。于是，由 (4.8) 的第二个等式可得

$$r_{i_0,i_0}^2 = 2r_{i_0,i_0}r_{j_0,j_0}. \tag{4.10}$$

假设 $r_{i_0,i_0} \neq 0$。那么 (4.10) 推出 $r_{i_0,i_0} = 2r_{j_0,j_0}$。

另一方面，(4.8) 的第一个等式推出 $r_{i_0,\ i_0} = 2^{j_0-i_0}r_{j_0,\ j_0}$。因此，$2^{j_0-i_0} = 2$，这与 $j_0 > i_0 + 1$ 矛盾。这意味着 $r_{i_0,\ i_0} = 0$ 成立。

因此，推论 4.2 得出，对于每个 $i \le i_0$，$r_{i,\ i} = 0$。因此，

$$\begin{cases} r_{i,i} = 0, & i \le i_0, \\ r_{i,i}^2 = 2r_{i,i}r_{i+1,i+1}, & i_0 < i < n, \\ r_{i,i}r_{i+1,n} = 0, & i_0 < i < n-1. \end{cases} \tag{4.11}$$

设 $r_{k,\ k} \neq 0$ 且 $r_{k-1,\ k-1} = 0$，其中 $k \in \{i_0+1, \dots, n-1\}$。则存在 $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ 和 $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$，使得

$$\begin{cases} r_{i,i} = 0, & i < k, \\ r_{i,i}^2 = 2^{n-i}\alpha, & i \ge k, \\ r_{i,n} = \beta_i, & i \le k, \\ r_{i,n} = 0, & k+1 < i < n. \end{cases}$$

在所考虑的情形下，Rota-Baxter 算子具有形式 (R_k)。

设 $r_{n-1,\ n-1} = 0$。则存在 $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$，使得

$$\begin{cases} r_{i,i} = 0, & i < n, \\ r_{i,n} = \beta_i, & i \le n. \end{cases}$$

which 蕴含 Rota-Baxter 算子具有形式 (R_n)。证毕。□

Re注 4.6。注意，若 $n \le 3$，则 $\mathcal{I}_A = \emptyset$。因此，由定理 *4.5* 可得

$$\mathcal{RB}_0(\mathbf{E}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0 \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\}$$

当 $n = 2$ 时，且

$$\begin{aligned} \mathcal{RB}_0(\mathbf{E}) \ = \ & \left\{ \begin{pmatrix} 4\alpha & 0 & \beta \\ 0 & 2\alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} : \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0 \right\} \\ & \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 2\alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} : \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \ \alpha \neq 0 \right\} \\ & \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} : \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\} \end{aligned}$$

分别当 $n = 3$ 时。

5. On description of $\mathcal{RB}_1(\mathbf{E})$

令 $\theta = 1$。在此情形下，等式 (3.4) 和 (3.5) 化简为

$$\sum_{k=i}^{m-1} a_{k,m} r_{i,k}^2 = (2r_{i,i} + 1) \sum_{k=i}^{m-1} a_{i,k+1} r_{k+1,m}, \quad i < m \le n. \tag{5.1}$$

$$\sum_{k=j}^{m-1} r_{i,k} r_{j,k} a_{k,m} = r_{i,j} \sum_{k=j}^{m-1} a_{j,k+1} r_{k+1,m}, \quad i < j < m \le n. \tag{5.2}$$

由引理 3.1 可知，每个 $R \in \mathcal{RB}_1(\mathbf{E})$ 都是上三角的，即

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2,n} \\ 0 & 0 & r_{3,3} & \dots & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

记

$$\mathcal{RB}_1^{\triangle}(\mathbf{E}) = \{R \in \mathcal{RB}_1(\mathbf{E}) : r_{i,j} = 0, \text{ for any } i < j < n\},$$

$$\mathcal{RB}_1^{\blacktriangle}(\mathbf{E}) = \mathcal{RB}_1(\mathbf{E}) \setminus \mathcal{RB}_1^{\triangle}(\mathbf{E}).$$

我们将描述集合 $\mathcal{RB}_1^{\triangle}(\mathbf{E})$ 和 $\mathcal{RB}_1^{\blacktriangle}(\mathbf{E})$。

5.1. **情形** $\mathcal{RB}_1^{\triangle}(\mathbf{E})$。 注意，在这种情况下，由 (5.3) 定义的算子 R 满足 (5.2)。(5.1) 中的条件等价于以下

$$\begin{cases} r_{i,i}^2 = (2r_{i,i}+1)r_{i+1,i+1}, & \text{if } i < n, \\ r_{i,i}^2 = (2r_{i,i}+1)r_{j,j}, & \text{if } (i,j) \in \mathcal{I}_A, \\ (2r_{i,i}+1)\left(r_{i+1,n} + \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}_A} a_{i,j}r_{j,n}\right) = 0, & \text{if } i < n-2, \\ (2r_{n-2,n-2}+1)r_{n-1,n} = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

定义如下函数

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+1}, \qquad x \in \mathbb{K}. \tag{5.5}$$

我们用 $Per_m(f)$ 表示 f 的所有 m 周期点的集合，即

$$Per_m(f) = \{x \in \mathbb{K} : f^m(x) = x\},$$

其中 $f^m = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m}$

定理 5.2。 设 $\mathbf{E}$ 是一个结构矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{2,4} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在自然基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 中，且 R 是$\mathbf{E}$上的线性算子。则 $R \in \mathcal{RB}_1^{\triangle}(\mathbf{E})$ 当且仅当它具有下列形式之一：

(i) 若 $\mathcal{I}_A = \emptyset$ ，则

$$R(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_n, & i = 1, \\ f^{i-1}(\alpha)\mathbf{e}_i, & i > 1 \end{cases} \qquad for\ some\ \alpha \in \mathbb{K} \setminus \bigcup_{k=0}^{n-2} f^{-k}(-\frac{1}{2}),\ \beta \in \mathbb{K},$$

此处 f 定义为 (5.5)。

(ii) 若 $\mathcal{I}_A \neq \emptyset$ 且 $i_0 := \{i : \exists j$ 使得 $(i,j) \in \mathcal{I}_A\}$，则

$$R(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} f^{-i_0}(\alpha)\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_n, & i = 1, \\ f^{i-i_0-1}(\alpha)\mathbf{e}_i, & i > 1 \end{cases} \qquad for\ some\ \alpha \in Per_m(f),\ \beta \in \mathbb{K}, \tag{5.6}$$

$$here\ I_1 := \{j - i - 1 : (i,j) \in \mathcal{I}_A\},$$

$$I_2 = \{|k - j| : k \neq j, \exists i\ such\ that\ (i,j),(i,k) \in \mathcal{I}_A\},$$

$$and\ m = GCD(I_1 \cup I_2).$$

证明。 (i) 设 $\mathcal{I}_A = \emptyset$。则 (5.4) 可写为如下形式

$$\begin{cases} r_{i,i}^2 = (2r_{i,i} + 1)r_{i+1,i+1}, & \text{if } i < n, \\ (2r_{i,i} + 1)r_{i+1,n} = 0, & \text{if } i < n-1. \end{cases} \tag{5.7}$$

那么，由 (5.7) 的第一个等式可知，要么 $\prod_{i=1}^{n} r_{i,\ i} \neq 0$ 要么

$$r_{1,1} = r_{2,2} = \cdots = r_{n,n} = 0.$$

若 $r_{1,\ 1} = r_{2,\ 2} = \cdots = r_{n,\ n} = 0$，则由 (5.7) 的第二个等式可得$r_{i,\ n} = 0$ 对所有 $i > 1$均成立。因此，Rota-Baxter 算子具有如下形式

$$R(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \beta\mathbf{e}_n, & i = 1, \\ \mathbf{0}, & i > 1, \end{cases} \qquad \text{for some } \beta \in \mathbb{K}. \tag{5.8}$$

假设 $\prod_{i=1}^{n} r_{i,\ i} \neq 0$。显然，对所有 $i < n$，都有 $r_{i,\ i} \neq -\frac{1}{2}$。于是，由 (5.7) 得到，对每个 $i \in \{2, \ldots, n-1\}$，都有 $r_{i,\ n} = 0$。因此，Rota-Baxter 算子可写为

$$R(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_n, & i = 1, \\ \alpha_i\mathbf{e}_i, & i > 1 \end{cases} \qquad \text{for some } \alpha_1, \beta \in \mathbb{K}, \tag{5.9}$$

这里 $\alpha_i = \frac{\alpha_{i-1}^2}{2\alpha_{i-1}+1}$, $i = 2, \ldots, n$，满足 $\alpha_i \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$。由 (5.8) 和 (5.9) 可知，Rota-Baxter 算子具有形式 (5.6)。

(ii) 令 $\mathcal{I}_A \neq \emptyset$。由 (5.4) 的前两个等式可推得 $r_{i,\ i} \neq -\frac{1}{2}$。再由 (5.4) 的最后一个等式得到 $r_{n-1,\ n} = 0$。将其代入 (5.4) 中针对 $i = n-3$ 的第三个等式，得到 $r_{n-2,\ n} = 0$。假设对某个 $2 < i_0 < n-1$，有 $r_{i_0+1,\ n} = r_{i_0+2,\ 2} = \cdots = r_{n-1,\ n} = 0$。于是将这些代入 (5.4) 中针对 $i = i_0 - 1$ 的第三个等式，并注意到 $r_{i_0-1,\ i_0-1} \neq -\frac{1}{2}$，可得 $r_{i_0,\ n} = 0$。因此，

$$R(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_n, & \text{if } i = 1, \\ \alpha_i\mathbf{e}_i, & \text{if } i > 1, \end{cases} \tag{5.10}$$

其中 $\alpha_1, \beta \in \mathbb{K}$ 和

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = (2\alpha_i + 1)\alpha_{i+1}, & \text{if } i < n, \\ \alpha_i^2 = (2\alpha_i + 1)\alpha_j, & \text{if } (i,j) \in \mathcal{I}_A. \end{cases} \tag{5.11}$$

容易看出， $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ 或 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = -1$ 满足 (5.11)。假设存在 $i_0 < n-2$，使得 $(i_0, i_0+2) \in \mathcal{I}_A$。那么由 (5.11) 可得 $\alpha_{i_0+1} = \alpha_{i_0+2}$。因此，将 (5.11) 改写为关于 $i = i_0+1$ 的形式后，可得

$$\alpha_{i_0+1}^2 = (2\alpha_{i_0+1} + 1)\alpha_{i_0+1},$$

这仅在 $\alpha_{i_0+1} = 0$ 或 $\alpha_{i_0+1} = -1$时成立。因此，由 (5.11) 的第一个等式，我们得到 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ 或 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = -1$。由此，我们证明了：若 $1 \in I_1$，则 $\alpha_1 \in \{-1, 0\} := \{j - i - 1 : (i, j) \in \mathcal{I}_A\}$。令 $\alpha_1 = \alpha$ 并令 $\alpha_i = f^{i-1}(\alpha), i = 2, n$。假设 $(p, p+k+1) \in \mathcal{I}_A$。由 $\alpha_p \neq -\frac{1}{2}$，从 (5.11) 可得 $\alpha_{p+1} = \alpha_{p+k+1}$。另一方面，我们有 $\alpha_{p+k} = f^k(\alpha_p)$。这意味着 α_{p+1} 是函数 f 的 k 周期点。此外，有 $\alpha_i = f^{i-p-1}(\alpha_{p+1}), i = p+1, n$。令 $(p', p'+k'+1), (p'', p''+k''+1) \in \mathcal{I}_A$。为方便起见，假设 $p' \leq p''$。于是

$$\alpha_i = f^{i-p'-1}(\alpha_{p+1}), \quad i = \overline{p'+1, n},$$

其中 $\alpha_{p'+1} \in Per_{k'}(f)$。这意味着

$$\{\alpha_{p''+1}, \ldots, \alpha_n\} \subset \left\{\alpha_{p'+1}, f(\alpha_{p'+1}), \ldots, f^{k'-1}(\alpha_{p'+1})\right\}.$$

另一方面，我们有

$$\{\alpha_{p''+1}, \ldots, \alpha_n\} \subset \left\{\alpha_{p''+1}, f(\alpha_{p''+1}), \ldots, f^{k''-1}(\alpha_{p''+1})\right\}.$$

因此，我们推断出 $\alpha_{p'+1}$ 是 k 的一个周期点，其中 $k = GCD(k', k'')$。我们定义

$$I_2 = \{|k - j| : k \neq j, \exists i \text{ such that } (i, j), (i, k) \in \mathcal{I}_A\}.$$

注意， I_2 可能为空。假设 $I_2 \neq \emptyset$，即存在 $(p, q), (p, r) \in \mathcal{I}_A$，使得 $q < r$。于是，由 (5.11) 可得 $\alpha_{p+1} = \alpha_q = \alpha_r$。这意味着 α_{p+1} 是 m 的一个周期点，其中 $m = GCD(q-p, r-p)$。由于 $\mathcal{I}_A \neq \emptyset$，我们可以定义这些数

$$i_0 := \{i : \exists j \text{ such that } (i, j) \in \mathcal{I}_A\}, \quad m := GCD(I_1 \cup I_2).$$

于是我们得出，(5.10) 是 Rota-Baxter 算子，当且仅当对于任意 $i \leq n$， α_{i_0+1} 是 p 的一个周期点，且 $\alpha_i = f^{i-i_0-1}(\alpha_{i_0+1})$。证明完毕。□

设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。在这种情况下，函数 (5.5) 是正则的，即对于任意 $x \neq -\frac{1}{2}$，都有

$$\lim_{m\to\infty} f^m(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } i < -\frac{1}{2}, \\ 0, & \text{if } i > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

因此，对于实数情形，定理 5.2 可表述如下

定理 5.3。 设 $\mathbf{E}$ 是一个结构矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_{2,4} & \dots & a_{2,n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在自然基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 下，以下陈述成立：

(i) 如果 $\mathcal{I}_A=\emptyset$，则

$$\mathcal{RB}_1^{\triangle}(\mathbf{E})=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0\dots & 0 & \beta\\ 0 & f(\alpha) & 0\dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0\dots & f^{n-2}(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 0\dots & 0 & f^{n-1}(\alpha) \end{pmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq-\frac{1}{2}\right\}.$$

(ii) 如果 $\mathcal{I}_A\neq\emptyset$，则

$$\mathcal{RB}_1^{\triangle}(\mathbf{E})=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0\dots & 0 & \beta\\ 0 & \alpha & 0\dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0\dots & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha=\pm1,\beta\in\mathbb{R}\right\}.$$

5.4. 情形 $\mathcal{RB}_1^{\blacktriangle}(\mathbf{E})$. 条件 (5.1) 和 (5.2) 等价于以下内容 g

$$\begin{cases} r_{i,i}^2=(2r_{i,i}+1)r_{i+1,i+1}, & \text{if } i<n,\\ r_{i,n-1}^2=(2r_{i,i}+1)\left(r_{i+1,n}+\sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}_A}a_{i,j}r_{j,n}\right), & \text{if } i<n-1,\\ r_{i,m-1}^2+\sum\limits_{\substack{k\geq i:\\(k,m)\in\mathcal{I}_A}}a_{k,m}r_{i,k}^2=(2r_{i,i}+1)\left(r_{i+1,m}+\sum\limits_{(i,k)\in\mathcal{I}_A}a_{i,k}r_{k,m}\right), & \text{if } i+1<m<n,\\ r_{i,m-1}r_{j,m-1}+\sum\limits_{\substack{k>j:\\(k,m)\in\mathcal{I}_A}}a_{k,m}r_{i,k}r_{j,k}=r_{i,j}\left(r_{j+1,m}+\sum\limits_{(j,k)\in\mathcal{I}_A}a_{j,k}r_{k,m}\right), & \text{if } i<j<m<n,\\ r_{i,n-1}r_{j,n-1}=r_{i,j}\left(r_{j+1,n}+\sum\limits_{(j,k)\in\mathcal{I}_A}a_{j,k}r_{k,n}\right), & \text{if } i<j<n-2,\\ r_{i,n-2}r_{n-2,n-2}=r_{i,n-2}r_{n-1,n-1}, & \text{if } i<n-2,\\ r_{i,n-1}r_{n-2,n-1}=r_{i,n-2}r_{n-1,n}, & \text{if } i<n-2,\\ r_{i,n-1}r_{n-1,n-1}=r_{i,n-1}r_{n,n}, & \text{if } i<n-1. \end{cases} \tag{5.12}$$

我们将 $m=j+1$ 对应的 (5.12) 中第四个等式改写如下。由于 $a_{k,\ j+1}=0$ 对每个$k>j$，并且 $r_{k,\ j+1}=0$ 对任意 $k>j+1$，我们得到

$$r_{i,j}r_{j,j}=r_{i,j}r_{j+1,j+1},\quad i<j<n-1.$$

最后一个等式与（5.12）中的第八个等式共同推出

$$r_{i,j}r_{j,j}=r_{i,j}r_{j+1,j+1},\quad i<j<n. \tag{5.13}$$

根据假设（即 $R\in\mathcal{RB}_1^{\blacktriangle}(\mathbf{E})$），可以找到一对（$i_0,\ j_0$），使得 $1\leq i_0<j_0<n$且 $r_{i_0,\ j_0}\neq 0$。于是，由（5.13）可得 $r_{j_0,\ j_0}=r_{j_0+1,\ j_0+1}$。因此，根据（5.12）中的第一个等式，我们得到 $r_{1,\ 1}=\cdots=r_{n,\ n}=-1$或 $r_{1,\ 1}=\cdots=r_{n,\ n}=0$。

情形 $\mathcal{I}_A=\emptyset$。设 $r_{1,\ i}=\beta_i$, $i>1$。那么，由（5.12）中的第二个和第三个等式可得

$$r_{i,j}=\begin{cases}\beta_{j-i+1}^{2^{i-1}}, & \text{if } r_{1,1}=0,\\ -\beta_{j-i+1}^{2^{i-1}}, & \text{if } r_{1,1}=-1,\end{cases}\qquad 1<i<j.$$

（5.12）中的第四、第五和第七个等式可以写成如下形式

$$\begin{cases}\beta_{m-i}^{2^{i-1}}\beta_{m-j}^{2^{j-1}}=\beta_{j-i+1}^{2^{i-1}}\beta_{m-j}^{2^j}, & \text{if } i<j<m-1<n-1,\\ \beta_{n-i}^{2^{i-1}}\beta_{n-j}^{2^{j-1}}=\beta_{j-i+1}^{2^{i-1}}\beta_{n-j}^{2^j}, & \text{if } i<j<n-2,\\ \beta_{n-i}^{2^{i-1}}\beta_2^{2^{n-3}}=\beta_{n-i-1}^{2^{i-1}}\beta_2^{2^{n-2}}, & \text{if } i<n-2.\end{cases} \tag{5.14}$$

如果 $\beta_2\neq 0$

$$|\beta_m|=\beta_2^{2^{m-1}-1},\quad 2<m<n.$$

如果 $\beta_2=\cdots=\beta_k=0\neq\beta_{k+1}$, $2\leq k<n-1$

$$|\beta_m|=\begin{cases}0, & m\neq 1(\mathrm{mod}\,k),\\ \beta_{k+1}^{\frac{2^{m-1}-1}{2^k-1}}, & m\equiv 1(\mathrm{mod}\,k),\end{cases}\qquad k+1<m<n.$$

情况 $\mathcal{I}_A\neq\emptyset$. 在这种情况下，我们有

$$r_{i,i+1}=\begin{cases}r_{1,2}^{2^{i-1}}, & \text{if } r_{1,1}=0,\\ -r_{1,2}^{2^{i-1}}, & \text{if } r_{1,1}=-1.\end{cases}\qquad 1<i<n.$$

Acknowledgments

作者感谢 UAEU UPAR资助 No. G00004962 提供的支持。

Declaration

作者声明，他们不存在利益冲突。

Availability of data and material

不适用。

References

[1] Arenasa, M., Labra, A.,Paniello, I., Lotka—Volterra 余代数. *Linear Multilinear Algebra* **70** 2021 4483 4497 ( ), – .

[2] Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Peralta A.M., 关于 C^*- 代数和 von Neumann 代数上的局部导子与 2-局部导子的综述，载于《泛函分析与代数专题》，AMS《当代数学》，672，2016，73-126。[3] Cadavid, P.; Rodino Montoya, M.L.; Rodriguez, P.M. 演化代数、随机游走与图之间的联系。 *J. Alg. Appl.* **19**(2020), 2050023. [4] Cadavid, P.; Rodino Montoya, M.L.; Rodriguez, P.M. 与图相关的演化代数导子空间的刻画定理。 *Linear Multilinear Algebra* **68**(2020), 1340–1354.[5] Ceballos, M.; Nunez, J.; Tenorio, ´A.F. 有限维演化代数与（伪）有向图。*Math. Meth. Appl. Sci.* **45**(2022), 2424-2442. [6] Camacho L.M., G´omez J.R., Omirov B.A., Turdibaev R.M., 某些演化代数的导子, *Linear Miltilinear Alg.*, 61(3), 2012, 309–322. [7] Camacho L.M., G´omez J.R., Omirov B.A., Turdibaev R.M., 演化代数的一些性质，*Bull. Korean Math. Soc.*, 50(5), 2013, 1481–1494. [8] Casado C.Y., Molina M.S., Velasco M.V., 三维演化代数的分类，*Linear Algebra Appl.*, 524(1), 2017, 68-108. [9] Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Rozikov U.A., 关于演化代数的幂零指数与二分性, *Linear Algebra Appl.*, 439 1 2013, 90 105 ( ), - Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Rozikov U.A., 关于演化代数, [10] *Algebra Colloquium* 21 2 2014, 331 342 ( ), —- . [11] Costa R., 关于具有多等位基因的多倍体配子代数的导子代数, *Bol.* , , , —- *Soc. Brasil. Mat.* 13 1982 69 81 . [12] Costa R., 关于具有多等位基因的多倍体合子代数的导子代数, *Bol.* , , , —- *Soc. Brasil. Mat.* 14 1983 63 80 . [13] Elduque A., Labra A., 关于幂零演化代数， *Linear Algebra Appl.*, 505, 2016, 11–31. [14] Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F., Pirnapasov A., Qaralleh I., 关于遗传Volterra代数及其导子, *Commun. Algebra* **46**(2018), 1353–1366. [15] Gonshor H., 遗传代数中的导子， *Comm. Algebra*, 16(8), 1988, 1525-1542. [16] Guo, L., *Introduction to Rota-Baxter Algebras*, International Press, 2011. [17] Hegazi A.S., Abdelwahab H., 任意域上的幂零演化代数， *Linear Algebra Appl*, 486 2015 345 360 ( ), - . [18] Holgate P., 遗传代数中导子的解释， *Linear Algebra Appl.*, 85, 1987, 75 79—- .[19] Jacobson N., 李代数的自同构与导子， *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6, 1955, 281 283– .[20] Jamilov, U.; Ladra, M. 演化代数与蠕虫传播模型的动力系统。*Linear Multilinear Algebra* **70**(2022), 4097–4116. [21] Kadison R.V., 局部导子， *J. Algebra*, 130, 1990, 494-509. [22] Labra A., Ladra M., Rozikov U.A., 群体遗传学中的一种演化代数。*Appl.* 457 2014 348 362 , *Linear Algebra* , – . [23] Larson D. R., Sourour A.R., 关于 *B X Proc. Sympos.* ( ), , , *Pure Math.* 51 1990 187 194 , – . [24] Mukhamedov F., Qaralleh I., 演化代数的熵处理， *Entropy* **24**(2022), 第 5 期，文章编号 595。[25] Mukhamedov, F., Qaralleh, I., 关于遗传代数的导子。 *J. Phys. Conf. Ser.* **553**(2014), 012004.

[26] Mukhamedov F., Khakimov O., Qaralleh I.,《最大幂零指数幂零演化代数的指数 $Der(E)$》, *Linear Mulitilear Alg.* **72**(2024)，第 14 期，2379-2390。[27] Mukhamedov F., Khakimov O., Qaralleh I.,《幂零演化代数的分类及其导子的扩张》, *Commun. Algebra.* **48**(2020)，第 10 期，4155-4169。[28] Mukhamedov F., Khakimov O., Omirov B., Qaralleh I.,《最大幂零指数幂零演化代数的导子与自同构》, *J. Algebra Appl.* **18**(2019)，第 12 期，1950233。[29] Qaisar T., Mukhamedov, F., Hasan M., Amin M.S.,《与 SIR模型相关的遗传代数》, *AppliedMath* **5**(2025)，111。[30] Qaralleh I., Mukhamedov F.,《沃尔泰拉演化代数及其图》, *Linear & Multilinear Algebra* **69** 2021 12, 2228 2244 , ( )，第 - 期。[31] Qaralleh I., Mukhamedov, F.,《M2(C) 上量子 Lotka-Volterra 代数的局部导子与 Rota-Baxter 算子》, *Gulf J. Math* **17**(2024)，239-260。[32] Reed, M.《遗传继承的代数结构》。 *Bull. Am. Math. Soc.* **34**(1997), 107–130。[33] Rozikov, U.A. *Population Dynamics: Algebraic and Probabilistic Approach*, World Scientific 出版社：新加坡，2020。[34] Tian, J.P., Zou, Y. M.,《有限生成的幂零但非幂零演化代数》。 *J. Algebra Appl.* ( )， 。 **13** 2014 1350070
[35] Tian J.P. Vojtechovsky P.,《非孟德尔遗传学中演化代数的数学概念》, *Quasigroups Related Systems*, **14**(2006)，111-122。[36] Tian J.P.,《演化代数及其应用》, *Lecture Notes in Mathematics*，1921, Springer-Verlag，柏林，2008。[37] Zhevlakov K.A., Slin'ko A.M., Shestakov I.P., Shirshov A.I. *Rings that are nearly associative*，Academic Press，1982。

Izzat Qaralleh, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tafila Technical Uni-versity, Tafila, Jordan*Email address*: izzat math@yahoo.com

Farrukh Mukhamedov Department of Mathematical Sciences College of Science The , , , , „ , United Arab Emirates University P.O. Box 15551 Al Ain Abu Dhabi UAE ,*Email address*: far75m@gmail.com farrukh.m@uaeu.ac.ae

Obabek Khakimov, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy ofSciences, Tashkent, Uzbekistan*Email address*: khakimovo86@gmail.com