arXiv:2601.08718v1 [math.LO] 13 Jan 2026

强射影见证

VERA FISCHER 和 JULIA MILLHOUSE

摘要。我们证明，Shelah 于 1984 年提出的原始生物强迫能够强保持紧 mad 族。特别地，为回答 Fischer 和 Friedman 以及 Friedman和Zdomskyy 提出的问题，我们证明如下情形是一致的：存在一个 Δ^1_3 实数的良序，以及大小为 $\aleph_1$，$\aleph_2$ 且分别为 Π^1_1，Π^1_2-可定义的紧 mad 族。这些射影定义的复杂度都达到了可能的最低限度。

1. 引言

下文将揭示一种组合性质，它属于一个相当著名的适当强迫概念 $\mathbb{Q}$，该概念由 Shelah 于 1984 年提出（参见定义 2.12，以及 [She84，定义 6.8]，原始定义见此）。借此，我们证明 $\mathfrak{b} < \mathfrak{s}$ 的一致性，从而确立 $\mathfrak{b}$ 与 $\mathfrak{s}$的独立性。概念 $\mathbb{Q}$ 是所谓生物强迫的第一个实例，如今生物强迫已涵盖一大类偏序集（见 [RS99]）。具体而言，我们证明 $\mathbb{Q}$ 满足[GHT20], 中提出的可迭代保持性质（定义 2.2），该性质保证在可数支撑迭代下紧 mad 族得以保持。

定理 (定理 2.22)。设 $\mathbb{Q}$ 是定义 2.12 中的强迫概念，且 $A \in V$ 是一个紧致极大几乎不交族。设 G 在 V 上是 $\mathbb{Q}$-泛型。那么（$\mathcal{A}$ 是一个紧致极大几乎不交族）$^{V[G]}$。

2020 数学主题分类。03E35, 03E17,03E55。关键词和短语。射影良序；紧 mad 族；有限对数测度。

偏序集 $\mathbb{Q}$ 以类似 Mathias 强迫的方式添加一个不被基模型实数分裂的泛型实数，不过与 Mathias 强迫不同，它几乎是 ω^ω-有界的，因此，在满足连续统假设的模型上对 $\mathbb{Q}$ 进行可数支撑迭代，会保留基模型实数的无界性，从而导出 $\aleph_1 = \mathfrak{b} < \mathfrak{s} = \aleph_2$ 的相容性（见 [She84，定理 3.1]）。鉴于 $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$，本文的结果为上述定理提供了另一种证明，并给出了自然的加强。Shelah 的生物偏序集 $\mathbb{Q}$ 这一新近发现的保持性质，在得到以下有趣结果的过程中发挥着关键作用；该结果处于描述集合论与实数集合论的交汇处。通过对 S-适当强迫概念进行可数支撑迭代，并利用此类迭代中对 $\mathfrak{a}$ 的良好可定义见证的保留，我们得到主要结果：

定理 (定理 5.1)。与 $\aleph_1 = \mathfrak{a} < \mathfrak{s} = \mathfrak{c} = \aleph_2$ 相容：存在一个 Δ^1_3 实数的良序、一个基数为 $\aleph_1$ 的余解析紧致 mad 族，以及一个基数为 $\aleph_2$ 的 Π^1_2 紧致 mad 族。

Mansfield、Mathias [Mat77]，以及 Mansfield-Solovay 的经典定理分别表明，这些射影定义具有最小的描述复杂度，因而是最优的。上述定理将通过一系列中间步骤来证明，首先从 [FF10]，构造 Fischer 和 Friedman 的 Δ^1_3 实数的良序，并证明如下结论：

定理 (定理 3.1)。与 $\aleph_1 = \mathfrak{a} < \mathfrak{s} = \mathfrak{c} = \aleph_2$ 相容：存在一个 Δ^1_3-可定义的实数良序，并且 $\mathfrak{a} = \aleph_1$ 可由一个 Π^1_1 紧致 mad 族见证。

近年来，学界对基数特征见证的射影可定义性日益关注；相关研究成果包括，例如，[BFB22]，[FFZ11]，[FS21]，[FFK13]，[BK13]，[FFST25]或 [FSS25]。我们通过研究属于集合 $\mathrm{spec}(\mathfrak{a}) = \{|\mathcal{A}| \mid \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$，$\mathcal{A}$ 的所有基数 κ 的见证的射影可定义性，拓展了这一研究方向；该集合中的基数是 mad$\}$。为此，我们考察了 Friedman和 Zdomskyy 的 S-适当可数支撑迭代 [FZ10]，该迭代被用于

证明 $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \aleph_2$ 与一个 Π^1_2-可定义的紧致极大几乎不交族的一致性；该族的基数必为 $\mathfrak{c} = \aleph_2$。特别地，通过回答 [FZ10，问题 18]，，我们得到：

定理 (定理 4.1**)**。可以证明 $\mathfrak{a} = \aleph_1 < \mathfrak{c} = \aleph_2$ 是一致的，并且存在一个大小为 $\aleph_1$、可由 Π^1_1 定义的紧致 mad 族，以及一个大小为 $\aleph_2$、可由 Π^1_2 定义的紧致 mad 族。

本文结构如下：在第 2 节中，我们介绍强迫概念 $\mathbb{Q}$、紧致极大几乎不交族的概念以及紧性的强保持，并证明定理 2.22。在第 3 节中，我们介绍 Fischer 和 Friedman 为添加一个 Δ^1_3 实数的良序而进行的可数支撑迭代，并证明定理 3.1。第 4 节研究上述提到的 Friedman-Zdomskyy 偏序集，并证明定理 4.1。在此基础上，第 5 节给出主要结果——定理 5.1。最后一节包含结语和开放问题。

2. 生物强迫

在集合ω^ω 上定义最终支配关系 $\leq^*$：当且仅当存在 $n \in \omega$，使得对所有 $m \geq n$， $f(m) \leq g(m)$ 时， $f \leq^* g$ 成立；在集合$[\omega]^\omega$ 上定义分裂关系：当且仅当 $b \cap a$ 和 $b \setminus a$ 都为无限集时， a 分裂 b。1984年，Shelah 通过证明以下命题具有相容性，回答了 Nyikos 的一个问题：关于 $\leq^*$ 无界的族 $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ 的最小基数，严格小于分裂族 $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ 的最小基数；也就是说，分裂族是满足以下性质的族 $\mathcal{S}$：对于任意无限的 $b \subseteq \omega$，都存在一个 $a \in \mathcal{S}$，使其分裂 b。我们分别用 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{s}$ 表示这两个基数。Balcar 和 Simon 已于 1980 年证明了 $\mathfrak{s} < \mathfrak{b}$ 的相容性 [BPS80，注 4.7]；该不等式在赫克勒模型中也成立（见 [She84，第 4] 节）。若对每个 a、$b \in \mathcal{A}$， $a \cap b$ 都是有限的，则称族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 几乎不交；若这样的族在所有几乎不交族中按包含关系极大，则称其为最大几乎不交（mad）族；等价地，对于每个$b \in [\omega]^\omega$，都存在 $a \in \mathcal{A}$，使得 $a \cap b$ 是无限的。我们始终

考虑无限 mad 族。基数 $\mathfrak{a}$ 表示 mad 族的最小基数；基数 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{d}$ 相互独立。

一种构造满足 $\mathfrak{s} = \aleph_2$ 的模型的方法，是对 Mathias 强迫 $\mathbb{M}$ 进行可数支撑迭代，这会添加一个泛型实数 $a \in [\omega]^\omega$，它不被基模型的任何子集分割。然而，Mathias 强迫不能用来证明 $\mathfrak{b} < \mathfrak{s}$ 的相容性，因为泛型实数 a 还具有这样的性质：其枚举函数 e_a: $\omega \to a$ 是基模型 V 上的支配实数，从而见证了 $\omega^\omega \cap V$ 在 $\mathbb{M}$- 泛扩张中不再是 $\leq^*$- 无界的。换言之，Mathias 实数增长得太快，无法保持 $\omega^\omega \cap V$ 的无界性。为解决这个问题，Shelah 最初提出的“生物强迫” $\mathbb{Q}$ （定义 2.12）通过在 Mathias 条件的第二个坐标上使用一个有限对数测度序列（参见定义 2.8），减缓泛型的增长，使人们能够仔细挑选用于延伸给定有限近似的整数，从而不支配 $\omega^\omega \cap V$。出于与 $\mathbb{M}$ 类似的原因，$\mathbb{Q}$-泛型实数不会被基模型中的任何族分割。Shelah 通过几乎 ω^ω-有界性这一概念，证明了在 CH 模型上对 $\mathbb{Q}$ 进行可数支撑迭代时 $\mathfrak{b} = \aleph_1$ 成立；更多讨论见 [。Shelah 还通过直接在基模型中构造一个极大几乎不交族，并证明该特定极大几乎不交族在 $\mathbb{Q}$ 及其迭代下具有不可摧毁性，证明了上述泛扩张中 $\mathfrak{a} = \aleph_1$ 也成立。1995 年，Alan Dow [构造了一个具有类似性质的 $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ 模型中的极大几乎不交族，并证明它在 Miller 强迫的可数支撑迭代下不可摧毁，从而确立了 Miller 模型中的 $\mathfrak{a} = \aleph_1$。值得注意的是，本文讨论的 Shelah 和 Dow 的不可摧毁极大几乎不交族实际上都是紧致的，分别如命题 2.6 和 2.7 所示。

自1984年起，强迫保持理论得到了长足发展；例如，参见 [She17]or [Gol93]。类似地，各种基数特征见证的不可摧毁性 理论也得到了发展，尤其是极大几乎不交族的相关理论；参见 [BY05],

[Hru01], or [HGF03]。2020年，Guzman、Hrušák 和 Tellez 研究了紧 mad 族的保留，其中：

定义 2.1。若对任意可数集族 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$，都存在一个单独的 $a \in \mathcal{A}$，使得对于每个 $b \in \mathcal{B}$， $a \cap b$ 都是无限的，则几乎不交族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 称为紧致。

上文中， $\mathcal{I}(\mathcal{A})^+$ 表示由 $\mathcal{A}$ 和 ω 的有限子集生成的理想的成员集之补集， $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \{b \subseteq \omega \mid \exists F \in [\mathcal{A}]^{<\omega} (b \subseteq^* \bigcup F)\}$.

请注意，若一个几乎不交族是紧致的，那么它立即就是极大的。这一加强形式最初出现在 Malykhin 于 1989 年的工作中 [Mal89]，当时称为 ω-mad 族；而它与科恩不毁性的联系则由 Kurilić 在 2001 [Kur01] 中确立。紧 mad 族的存在可由 $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ 和某个带参数的 $\diamondsuit$-原理推出（参见[HGF03]）。然而，ZFC 是否能证明紧 mad 族存在，仍是一个悬而未决多年的问题。最近，人们提出了如下保持性质：

定义 2.2（[GHT20，定义 7.1]）。设 $\mathcal{A}$ 是一个紧致 mad 族。我们称适当强迫概念 $\mathbb{P}$ 强保持 $\mathcal{A}$ 的紧致性，若对每个 $p \in \mathbb{P}$ 以及每个可数初等$\mathcal{M} \prec H_\theta$，其中 θ 是足够大的正则基数，使得$\mathbb{P}$、$\mathcal{A}$、$p \in \mathcal{M}$，并且对每个 $B \in \mathcal{I}$（$\mathcal{A}$），若对所有 $Y \in \mathcal{I}$（$\mathcal{A}$）$^+ \cap \mathcal{M}$， $B \cap Y$都是无限的，则存在 $q \leq p$，使得 q是（$\mathcal{M}$， $\mathbb{P}$）-泛型的，且 $q \Vdash$ “ $\forall \dot{Z} \in$ （$\mathcal{I}$（$\mathcal{A}$）$^+ \cap M[\dot{G}]$） （$|\dot{Z} \cap B| = \omega$）”。这样的 q 称为（$\mathcal{M}$， $\mathbb{P}$， $\mathcal{A}$， B）-泛型条件。

容易看出，如果 $\mathbb{P}$ 是适当的并保持某个 $\mathcal{A}$的紧致性，那么在任意 $\mathbb{P}$-泛型扩张中， $\mathcal{A}$ 仍然是紧致的。关键在于：

引理 2.3 ([GHT20，第 6.5]条推论)。设 γ 为一个序数，并设 $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\beta : \alpha \leq \gamma, \beta < \gamma \rangle$ 为一个可数支撑迭代，使得对所有 $\alpha < \gamma$， $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “ $\mathbb{Q}_\alpha$ 强保持 $\mathcal{A}$ 的紧致性”。则 $\mathbb{P}$ 强保持 $\mathcal{A}$ 的紧致性。

上述证明遵循可数支撑迭代下真性保留的思路（参见 [Abr10]； [She82]）。

强保留紧致性的偏序集示例包括 Miller 强迫、Miller 分割强迫和萨克斯强迫。我们的定理 2.22 将 Shelah 的原始生物强迫也加入此列，从而为 [She84, 定理 3.1] 提供了另一种证明（参见定理 2.25）。

在证明适当强迫如定义 2.2 中所述地强保持紧致性时，一个已经反复采用的方法是诉诸一个外包论证。

定义 2.4。如果 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念，$p \in \mathbb{P}$ 且 $\dot{Z}$ 是一个 $\mathbb{P}$-名称，表示 ω的一个子集，则相对于 $\dot{Z}$ 以及 p 的外包 是集合W_p：
$= \{m \in \omega \mid \exists r \leq p\, (r \Vdash m \in \dot{Z})\}$.

事实 2.5 ([GHT20，引理 6.2])。对于一个几乎不交族 $\mathcal{A}$和 $\mathbb{P}$ 一个强迫概念，若 $\dot{Z}$ 是 $\mathbb{P}$的一个名称，表示 $\mathcal{I}(\mathcal{A})^+$中的一个元素，则对任意 $p \in \mathbb{P}$，$W_p \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$。

上述结论源于注意到，$\dot{Z}$ 将被 p 强迫为 W_p的一个子集。为了证明紧致性的强保持性，我们的主要策略是考虑外包的一个精化概念，并证明事实 2.5 对这些精化的类似结果，参见断言 2.23 和引理 4.8。

我们继续介绍前文提到的 Shelah 和 Dow 构造紧 mad 族的方法。以下内容可见于 [She84 定理 3.1] 的证明，或 [She17 定理 7.1（第六章）]。

命题 2.6。（连续统假设）存在一个紧 mad 族。

证明。固定一个序列的枚举 $\{\langle B^\alpha_n : n \in \omega\rangle \mid \alpha < \omega_1\}$，其中 $B^\alpha_n \in [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$，且对所有互不相同的 $m, n \in \omega$，都有$\langle B^\alpha_n$、 $n \in \omega\rangle$ 和 $B^\alpha_n \cap B^\alpha_m = \emptyset$。用归纳法对 $\alpha < \omega_1$ 递归地定义一个族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ 如下。首先，将 ω 划分为无限多个无限集 $\{A_n \mid n \in \omega\}$。对于 $\alpha \in [\omega, \omega_1)$，选择 $A_\alpha \subseteq \omega$，使得对每个 $\beta < \alpha$， A_α 都与 A_β 几乎不交；并且对于每个$\beta < \alpha$，若对所有 $k \in \omega$ 和 $\alpha_j < \alpha$，对 $j < k$，对所有 $m \in \omega$，集合$\{n \in \omega \mid \min(B^\beta_n) > m \wedge B^\beta_n \cap \bigcup_{j<k} A_{\alpha_j} = \emptyset\}$ 都是无限的，则：

(1) 存在无限多个 $n \in \omega$，使得 $B^\beta_n \subseteq A_\alpha$，并且

(2) 对所有 $k \in \omega$ 和 $\alpha_j \leq \alpha$，对于 $j < k$，集合 $\{n \in \omega \mid B_n^\beta \cap (\bigcup_{j<k} A_{\alpha_j}) = \emptyset\}$ 是无限的。

令 $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$。不难验证，$\mathcal{A}$ 是一个紧致极大几乎不交族。□

命题 2.7 ([Dow95，引理 2.3])。令 $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$。则存在一个紧致极大几乎不交族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha < \mathfrak{c}\}$，使得对于任意固定的枚举 $\{\langle B_n^\alpha : n \in \omega\rangle \mid \alpha < \mathfrak{c}\}$ of $[[\omega]^{<\omega}]^\omega$，对于任意 $\alpha < \mathfrak{c}$，如果存在 $\beta < \alpha$ 使得_

(∗)：对于所有 $I \in \mathcal{I}(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)$，$B_n^\beta \cap I = \emptyset$ 对于无限多个 $n \in \omega$ 成立，则存在无限多个 n 使得 $B_n^\beta \subseteq A_\alpha$。

——

证明。我们通过归纳地定义 $\mathcal{A}$：首先令 $\{A_n \mid n \in \omega\}$ 为将 ω 划分为无限集的任意划分。假设 $\{A_\beta\}_{\beta<\alpha}$ 已经构造出来，并令 $\mathcal{I}_\alpha$ 表示理想 $\mathcal{I}(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)$。不妨设对于所有 $\beta < \alpha$，(∗)成立。接下来，对于每个有限部分函数 $s\colon \omega \to \alpha$，定义 F_s 为所有满足以下条件的 $x \in [\omega]^{<\omega}$ 的集合：$x \cap \bigcup_{i\in \mathrm{dom}(s)} A_{s(i)} = \emptyset$，并且 $\forall i \in \mathrm{dom}(s)$ $\exists m > \max \mathrm{dom}(s)$ $(B_m^{s(i)} \subseteq x)$。于是 $\mathcal{F} = \{F_s \mid s\colon \omega \to \alpha$，s 是一个具有 SFIP 且基数为 $|\alpha^{<\omega}| < \mathfrak{c} = \mathfrak{p}$ 的有限部分函数，因此存在一个无限$Y \subseteq [\omega]^{<\omega}$，使得对于每个 $F \in \mathcal{F}$都有 $Y \subseteq^* F$。令 $A_\alpha = \bigcup Y$。为证明 A_α 符合要求，令 $\beta < \alpha$，并令 $s\colon \omega \to \alpha$ 满足$s(0) = \beta$。则 $A_\beta \cap A_\alpha$ 包含于 $Y \setminus F_s$中，因此由于后者是有限的，前者也是有限的。

此外，集合 $\{n \in \omega \mid B_n^\beta \subseteq A_\alpha\}$ 是无限的。注意，由于$Y \cap F_s$是无限的，因此它特别是非空的；若 $y \in Y \cap F_s$，则存在 $m > \max \mathrm{dom}(s)$，满足 $B_m^{s(0)} = B_m^\beta \subseteq y \subseteq A_\alpha$。由于 $\max \mathrm{dom}(s)$ 可以取为任意 $n \in \omega$，而我们只要求 $s(0) = \beta$，因此上面的整数 m 可以任意大。容易验证，$\mathcal{A}$ 是一个紧致极大几乎不交族。□

接下来我们证明 $\mathbb{Q}$ 强保持紧致性。我们对偏序集的介绍遵循 Abraham 的 [Abr10]（另见 [Fis08]）。

定义 2.8. 对于 ω的子集 s， s 上的对数测度是一个函数 h: $[s]^{<\omega} \to \omega$，满足对所有 A, $B \in [s]^{<\omega}$和 $\ell \in \omega$，若 $h(A \cup B) \geq \ell + 1$，则 $h(A) \geq \ell$ 或 $h(B) \geq \ell$。有限对数测度是一个对 (s, h)，其中 $s \subseteq \omega$ 是有限的，且 h是 s上的对数测度。

引理 2.9 ([她84]; [Fis08，引理 2.1.3])。如果 h是 s 上的对数测度，且 $h(A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}) > \ell$，那么存在 $j < n$使得 $h(A_j) \geq \ell - j$。

有限对数测度 (s, h) 的层级 是其值 $h(s)$，记作 level(h)。如果 $A \subset s$ 使得 $h(A) > 0$，那么称 A 为 h-正的。

定义 2.10. 设 $P \subseteq [\omega]^{<\omega}$ 是一个向上封闭集合族。由 P在 $[\omega]^{<\omega}$ 上诱导的 对数测度 h 按 $s \in [\omega]^{<\omega}$ 的基数递归定义如下:

(1) 对所有 $e \in [\omega]^{<\omega}$, $h(e) \geq 0$; (2) $h(e) > 0$ 当且仅当 $e \in P$; (3) 对所有 $\ell \geq 1$, $h(e) \geq \ell + 1$ 当且仅当 $|e| > 1$，并且对所有满足 $e = e_0 \cup e_1$ 的 $e_0, e_1 \subseteq e$， $h(e_0) \geq \ell$ 或 $h(e_1) \geq \ell$。

那么， $h(e) = \ell$ 当且仅当 $\ell \in \omega$ 是满足 $h(e) \geq$的极大对象 ℓ.

若 h 如上所述，且 e 满足 $h(e) \geq \ell$，则对于所有集合 $a \supseteq e$，都有 $h(a) \geq \ell$ 。下文中，我们总是假设诱导的对数测度是无原子的，也就是说，不存在 h-正的单点集。这个假设对于下一条引理的证明是必要的；该引理给出了诱导的对数测度取任意高值的一个充分条件，从而能够构造具有所需性质的纯扩张。通过柯尼希引理的论证可以证明以下结论。

引理 2.11 ([Abr10, 引理 4.7], [Fis08, 引理 2.1.9]). 设$P \subseteq [\omega]^{<\omega}$ 是一个由非空集合组成的向上封闭集合族，且 h 是诱导的对数测度。假设:

（†）对于每个 $n \in \omega$ 和每个划分 $\omega = A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$，都存在 $i < n$，使得 $[A_i]^{<\omega}$ 包含某个 $x \in P$。

那么，对于每个 n，$k \in \omega$，以及将 ω 划分为集合 $A_0 \sqcup \ldots \sqcup A_{n-1}$ 的有限划分，都存在 $i < n$ 和 $x \subseteq A_i$，使得 $h(x) \geq k$。

现在我们来定义所关注的主要强迫。

定义 2.12 ([She84，定义 2.8], [Fis08，定义 1.3.5])。令 $\mathbb{Q}$ 为由满足下述条件的对 $p = (u, T)$ 构成的偏序：$u \subseteq \omega$ 是有限的，且 T 是一个序列 $T = \langle t_i : i \in \omega \rangle$，其中对所有 $i \in \omega$，t_i 都是一个对 $t_i = (s_i, h_i)$，其中 h_i 是定义在 s_i 上的有限对数测度，并且满足：

(1) $\max(u) < \min(s_0)$; (2) 对所有 $i \in \omega$，$\max(s_i) < \min(s_{i+1})$; (3) $\langle h(s_i) : i \in \omega \rangle$ 无界且严格递增。

对于上述的 T，令 $\mathrm{int}(t_i) = s_i$，且 $\mathrm{int}(T) = \bigcup_{i \in \omega} \mathrm{int}(t_i)$。当 $e \subseteq \mathrm{int}(t_i)$ 满足 $h_i(e) > 0$ 时，我们称 e 为 t_i- 正。对于条件 (u_0, T_0)，$(u_1, T_1) \in \mathbb{Q}$，其中 $T_j = \langle t_i^j : i \in \omega \rangle$，对 $j < 2$，定义 $t_i^j = (s_i^j, h_i^j)$，并规定 $(u_1, T_1) \leq (u_0, T_0)$ 当且仅当：

(5) u_1 延伸 u_0 且 $u_1 \setminus u_0 \subseteq \mathrm{int}(T_0)$；(6) $\mathrm{int}(T_1) \subseteq \mathrm{int}(T_0)$，并且存在一个序列 $\langle B_i : i \in \omega \rangle$，其元素是 ω 的有限子集，使得 $\max(B_i) < \min(B_{i+1})$，且对每个 $i \in \omega$，$s_i^1 \subseteq \bigcup_{j \in B_i} s_j^0$; (7) 对所有 $i \in \omega$ 和 $e \subseteq s_i^1$，若 $h_i^1(e) > 0$，则存在 $j \in B_i$ 使得 $h_j^0(e \cap s_j^0) > 0$。

在 $u_1 = u_0$的情形下，称 (u_1, T_1) 为 (u_0, T_0) 的 纯扩张 。

若 $(\emptyset, T)$ 是 $\mathbb{Q}$中的一个条件，我们将 $(\emptyset, T)$ 与 T等同，并简记为 $T \in \mathbb{Q}$。对于 $T = \langle t_i : i \in \omega \rangle \in \mathbb{Q}$ 和 $k \in \omega$，令

$$i_T(k) = \min\{i \in \omega \mid k < \min(\mathrm{int}(t_i))\}$$

并令 $T \setminus k = \langle t_i : i \geq i_T(k) \rangle$。那么 $T \setminus k \in \mathbb{Q}$ 且 $T \setminus k \leq T$。类似地，如果 $u \subseteq \omega$ 是有限的，则 $T \setminus \max(u) \in \mathbb{Q}$。稍微滥用一下记号，我们将 $(u, T \setminus u)$ 理解为条件 $(u, T \setminus \max(u))$，其中 $\max(u) \geq \min(\mathrm{int}(t_0))$。$\mathbb{Q}$ 满足 A 公理（见 [Abr10，定义 2.3]），因此是适当的，这可以由下述内容证明。

定义 2.13。 对于 $n \in \omega$ 和 (u_0, T_0),$(u_1, T_1) \in \mathbb{Q}$，令 $\leq_0$ 为 $\mathbb{Q}$上的通常偏序。令 $T_j = \langle t_i^j : i \in \omega \rangle$，其中 $j < 2$。定义

(1) $(u_1, T_1) \leq_1 (u_0, T_0)$ 当且仅当 $(u_1, T_1) \leq_0 (u_0, T_0)$ 且 $u_1 = u_0$;

(2) 对于 $n \geq 1$，若 $(u_1, T_1) \leq_{n+1} (u_0, T_0)$，当且仅当 $(u_1, T_1) \leq_1 (u_0, T_0)$ 且 $t_i^1 = t_i^0$ 对所有 $i < n$ 都成立。

特别地，$(u_1, T_1) \leq_1 (u_0, T_0)$ 当且仅当 (u_1, T_1) 是 (u_0, T_0) 的纯扩张。

定义 2.14。 给定一个序列 $\langle p_i : i \in \omega \rangle \subseteq \mathbb{Q}$, $p_i = (u, T_i)$,$T_i = \langle t_j^i : j \in \omega \rangle$，使得 $p_{i+1} \leq_{i+1} p_i$ 对所有 $i \in \omega$ 都成立，将 $\langle p_i : i \in \omega \rangle$ 的融合 定义为条件 $q := (u, \langle t_j : j \in \omega \rangle)$，使得 $t_j := t_j^{j+1}$ 对所有 $j \in \omega$ 都成立。

如果 q 是 $\langle p_i : i \in \omega \rangle$ 的融合，那么对所有 $i \in \omega$， $q \leq_{i+1} p_i$。以下概念对于证明 $\mathbb{Q}$ 是适当的以及我们的保持性结果都至关重要。

定义 2.15。 对于 $(u, T) \in \mathbb{Q}$，其中 $T = \langle t_i : i \in \omega \rangle$，且 D 是 $\mathbb{Q}$ 的一个开稠密子集，我们称 (u, T) 是针对 D 和 $k \in \omega$ 的预处理，如果对于每个满足 v 是 u 的末端扩张的 $v \subseteq k$，若 $(v, \langle t_j : j \geq k \rangle)$ 在 D 中有一个纯扩张，那么 $(v, \langle t_j : j \geq k \rangle)$ 已经 $\in D$。

注意，如果 $(u, T) \in \mathbb{Q}$ 是针对 D 和 k 预处理的，那么 (u, T) 的任何扩张也都是针对 D 和 k 预处理的。

引理 2.16 ([Fis08, 引理 1.3.9])。 对于每个开稠密子集$D \subseteq \mathbb{Q}$、每个 $k \in \omega$ 以及每个 $p \in \mathbb{Q}$，都存在 $q \in \mathbb{Q}$，使得$q \leq_{k+1} p$，并且 q 是针对 D 和 k 预处理的。

作为 $\mathbb{Q}$ 存在融合的推论:

引理 2.17。 对于每个开稠密 $D \subseteq \mathbb{Q}$ 以及每个 $p \in \mathbb{Q}$，都存在一个纯扩张 $q \leq p$，使得 q 是针对 D 预处理的，并且适用于每个 $k \in \omega$。

令 C 为一个 $\mathbb{Q}$-名称，表示 ω的子集，并令 $j \in \omega$。令 $C(j)$表示 C的第 j个元素的名称。若存在 $\ell \in \omega$ 使得 $p \Vdash C(j) = \ell$，则称条件 p 决定 $C(j)$。对于这样的

. C 和 $j \in \omega$，令 $E_{C(j)} = \{p \in \mathbb{Q} \mid p$ 决定 $C(j)\}$. 当 $p \in \mathbb{Q}$强迫 C 为无限集时，集合 $E_{C(j)}$ 在 $\mathbb{Q}$中低于 p 开稠密。

引理 2.18. 设 $T \in \mathbb{Q}$，设 C 为 $\mathbb{Q}$-名称，表示 ω 的一个无限子集，并设 $n, j \in \omega$。设 $v \subseteq n$。那么存在 $R = \langle r_i : i \in \omega \rangle \in \mathbb{Q}$，使得 $R \leq T$，并且对于所有 $i \in \omega$ 以及 r_i-正的 $s \subseteq \mathrm{int}(r_i)$，都存在 $w \subseteq s$，使得 $(v \cup w, R \setminus \max(s))$ 决定 $C(j)$。

证明。设 $T = \langle t_i : i \in \omega \rangle$，且 $t_i = (s_i, h_i)$。由引理 2.17 可设 T 已针对 $E_{C(j)}$ 预处理，且对每个 $k \in \omega$都成立。令$\mathcal{P}_v(C(j))$表示满足以下条件的那些 $x \in [\mathrm{int}(T)]^{<\omega}$：

(1) 对某个 $k \in \omega$，$x \cap \mathrm{int}(t_k)$ 是 t_k-正的；(2) 存在 $w \subseteq x$，使得 $(v \cup w, \langle t_i : i > \max(x) \rangle)$ 决定 $C(j)$。

注意，$\mathcal{P}_v(C(j))$ 是向上封闭的。令 $h\colon [\omega]^{<\omega} \to \omega$ 为由 $\mathcal{P}_v(C(j))$诱导的对数测度。我们将通过证明引理 2.11 的（†）来说明，h可以取任意大的值。

固定 $M \in \omega$和一个有限划分 $\omega = A_0 \cup \ldots A_{M-1}$。首先，找出 $T' \leq T$，使得对于某个 $N < M$，$\mathrm{int}(T') \subseteq A_N$；根据柯尼希引理的论证（例如参见 [Fis08]），这样的扩展存在。由于（v，$T' \setminus v$）$\in \mathbb{Q}$，存在 $w \subseteq \mathrm{int}(T' \setminus v)$和 R，使得（$v \cup w$，R）是 $\mathbb{Q}$中的一个条件，且扩展（v，$T' \setminus v$）；而（$v \cup w$，R）决定了 $C(j)$的值。由于 $w \subseteq \mathrm{int}(T' \setminus v)$是有限的，根据扩展关系的定义，存在 m_0、m_1，使得 $w \subseteq \bigcup_{m \in [m_0, m_1]} \mathrm{int}(t'_m)$。令$x := \bigcup_{m \in [m_0, m_1]} \mathrm{int}(t'_m)$，并注意 $x \in [A_N]^{<\omega}$。由于 $T' \setminus v \in \mathbb{Q}$，我们可以假设至少存在一个 $m \in [m_0, m_1]$，使得$\mathrm{int}(t'_m)$是t'_m-正的。于是 $T' \setminus v \leq T \setminus v$，因此存在 $k \in \omega$，使得$h_k(\mathrm{int}(t'_m) \cap \mathrm{int}(t_k)) = h_k(x \cap \mathrm{int}(t_k)) > 0$。因此，$x \subseteq \mathrm{int}(T') \subseteq A_N$ 满足 $\mathcal{P}_v(C(j))$定义中的（1）。

我们也可以证明 (2) 成立。我们有 $w \subseteq x$ 满足 $(v \cup w,\ R) \in E_{C(j)}$，但 T 已针对 $E_{C(j)}$ 和 max w 进行了预处理，而 $(v \cup w,\ T \setminus w)$ 可纯扩张到 $E_{C(j)}$ 中，因此 $(v \cup w,\ T \setminus w)$ 已经 $\in E_{C(j)}$。综上，我们找到 $x \in \mathcal{P}_v(C(j)) \cap [A_N]^{<\omega}$，从而验证了 (†)。

现在我们可以定义 $R = \langle r_n : n \in \omega \rangle$，其中 $r_n = (x_n, g_n)$，归纳定义如下。显然， $\mathcal{P}_v(C(j))$ 非空，正如我们刚才所证明的，因此取 $x_0 \in \mathcal{P}_v(C(j))$，并令 $g_0 := h \restriction \mathcal{P}(x_0)$。假设对所有满足 $\max(x_i) < \min(x_{i+1})$ 且 $g_i(x_i) < g_{i+1}(x_{i+1})$ 的 $i \leq n$ ，均已定义 $r_i = (x_i, g_i)$；由于 h 可取任意大的值，因此存在 $x_{n+1} \in \mathcal{P}_v(C(j))$，使得 $h(x_{n+1}) > h(x_n)$。我们可以假设 $\max(x_n) < \min(x_{n+1})$，否则 h 有界。定义 $g_{n+1} := h \restriction \mathcal{P}(x_{n+1})$。至此， R 的定义完成。

于是 $R \in \mathbb{Q}$，并且容易验证 R 扩张了 T。为证明R 符合要求，若 $s \subseteq x_i$ 是 r_i-正的，根据$\mathcal{P}_v(C(j))$定义中的 (2)，存在 $w \subseteq s$，使得 $(v \cup w, \langle t_i : i > \max(s) \rangle)$ 决定了$C(j)$；然而 $(v \cup w, \langle r_i : i > \max(s) \rangle) \leq (v \cup w, \langle t_i : i > \max(s) \rangle)$，因此作出相同的决定。□

注记 2.19。若可构造宇宙 $\mathbb{Q}$ 中的一个条件 R 具有上述引理结论中所述的性质，那么任何进一步的扩张都会保留这一性质。

为得到下一个引理，考虑每个 $v \in \mathcal{P}(n)$，并反复应用引理 2.18 和注记 2.19（例如参见 [Fis08]）。

引理 2.20. 对于任意 $T \in \mathbb{Q}$, $n, j \in \omega$ 以及一个 C 无限子集的 ω的 $\mathbb{Q}$-名称，存在 $R = \langle r_i : i \in \omega \rangle \in \mathbb{Q}$ 使得$R \leq T$，并且对于所有 $v \subseteq n$，对于所有 $i \in \omega$ 以及所有 r_i-正的 $s \subseteq \text{int}(r_i)$，存在 $w \subseteq s$ 使得 $(v \cup w, R \setminus s)$ 决定 $C(j)$。

推论 2.21. 对于任意 $(u, T) \in \mathbb{Q}$、任意 $n, j \in \omega$，以及任意一个 ω的无限子集的 Ca$\mathbb{Q}$-名称，存在 $(u, R) \leq_{n+1} (u, T)$，使得对于所有 $v \subseteq n$，对于所有 $i \geq n$ 以及对于每个 r_i-正的 $s \subseteq \text{int}(r_i)$，存在 $w \subseteq s$ 使得 $(v \cup w, R \setminus s)$ 决定 $C(j)$ 的值。

本节的核心结果如下。

定理 2.22。设 $\mathcal{A}$ 是一个紧致极大几乎不交族。对于每个 $p \in \mathbb{Q}$和 $M \prec H_\theta$ 可数初等子模型，其中 θ 足够大，且包含 $\mathbb{Q}$、p、$\mathcal{A}$，以及每个 $B \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$，只要对所有 $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+ \cap M$都有 $|B \cap Y| = \aleph_0$，并且 $\dot{Z}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-名称，表示一个元素属于

$\mathcal{I}(\mathcal{A})^+$ 在 M中，就存在一个纯扩张 $q \leq p$ ，使得 q 是(M、$\mathbb{Q}$、$\mathcal{A}$、B)-泛型。

证明。固定如上所述的 θ, M 和 B，并令 (u, T_0) 为$\mathbb{Q} \cap M$中的一个条件。令 $\{D_n \mid n \in \omega\}$ 枚举M中 $\mathbb{Q}$ 的所有开稠密子集，并令 $\{Z_n \mid n \in \omega\}$ 枚举M 中 ω 的所有 $\mathbb{Q}$-名称，这些名称表示 $\mathcal{I}(\mathcal{A})^+$ 中的子集，且被迫属于其中，并使每个名称都出现无限多次。我们归纳地定义一个序列 $\langle q_n : n \in \omega\rangle$，它由 $\mathbb{Q} \cap M$中的条件组成，其中 $q_0 = (u, T_0)$， $q_n = (u, T_n)$ 满足$T_n = \langle t_i^n : i \in \omega\rangle$，并且满足以下条件：

(1) 对所有 $n \in \omega$, $q_{n+1} \leq_{n+1} q_n$；(2) q_{n+1} 是针对 D_n 预处理的，并且对每个 $k \in \omega$都成立；(3) 对所有 $v \subseteq n$，对所有t_i^{n+1}中的 $i \geq n$ 和 $s \subseteq$ ，若其为t_i^{n+1}-正的，且若 v 是 u的末端扩张，则存在某个$w \subseteq s$，使得 $(v \cup w, \langle t_j^{n+1} : j > \max(s)\rangle) \Vdash (\dot{Z}_n \cap B) \setminus n \neq \emptyset$。

假设 q_n 已构造。为定义 q_{n+1} ，考虑条件 $(u, \langle t_i^n : i \geq n\rangle) \leq q_n$。根据引理 2.17，存在一个纯扩张 $(u, \langle t_i' : i \geq n\rangle) \leq (u, \langle t_i^n : i \geq n\rangle)$，它对于 D_n 及每个 $k \in \omega$ 都已预处理。令 $q_n^0 = (u, \langle t^n{}_{,i}{}^0 : i \in \omega\rangle)$，其中对于 $i < n$， $t^n{}_{,i}{}^0 = t_i^n$，以及对于 $i \geq n$， $t^n{}_{,i}{}^0 = t_i'$。于是 $q_n^0 \leq_{n+1} q_n$ ，且 q_n^0 满足（2）。接下来考虑集合

$$
\begin{aligned}
W_{n+1} = \{m \in \omega \mid & \exists r = (u, \langle t_i' : i \in \omega\rangle) \leq_{n+1} q_n^0 \text{ satisfying:} \\
& \forall v \subseteq n\ \forall i \geq n\ \forall s \subseteq \operatorname{int}(t_i')\ [s \text{ is } t_i'\text{-positive} \Rightarrow \\
& \exists w \subseteq s (v \cup w, \langle t_i' : i > \max(s)\rangle) \Vdash m \in \dot{Z}_n]\}
\end{aligned}
$$

断言 2.23。 $W_{n+1} \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+ \cap M$。

证明。我们有 $W_{n+1} \in M$，因为它可由强迫关系以及 $\mathbb{Q}$、 q_n^0 和 $\dot{Z}_n$ 定义，而这些都被假定为 M 的元素。为说明 $W_{n+1} \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$，令 F 为 $\mathcal{A}$ 的一个有限子集。我们将证明 $W_{n+1} \setminus \bigcup F$ 是无限的。由于 $\Vdash_{\mathbb{Q}} \dot{Z}_n \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$，特别地， q_n^0 强迫 $\dot{Z}_n \setminus \bigcup F$ 是无限的。令 $\dot{C}$ 为一个 $\mathbb{Q}$- 名称，用于集合 $Z_n \setminus \bigcup F$。

由推论 2.21，对于所有 $k \in \omega$ ，存在 $q^j \leq_{n+1} q_n^0$，其中 $q^j = (u, R_j)$ 且 $R_j = \langle r_i^j : i \in \omega\rangle$ ，使得对于所有 $v \subseteq n$，对于

所有 $i \geq n$ 和 r_i^j-正的 $s \subseteq \mathrm{int}(r_i^j)$，存在 $w \subseteq s$，使得$(v \cup w, R_j \setminus s)$ 决定 $C(j)$ 和 $j > k$。因此存在 $m_j \in \omega$，使得

$$(v \cup w, R_j \setminus s) \Vdash C(j) = \check{m}_j.$$

注意，若 $m_j = C(j)$，则$m_j \geq j > k$。因此，对所有 $k \in \omega$，都存在 $m_j > k$ 使得 $m_j \in W_{n+1}$，如上所述由 q^j 见证；并且 $m \notin \bigcup F$，因为$q^j \Vdash \check{m}_j \notin \bigcup F$。所以 $W_{n+1} \setminus \bigcup F$是无限的；由于 $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$是任意的，这就证明了该断言。
□

根据关于集合 B 的假设，存在 $m_{n+1} \in W_{n+1} \cap B$ 使得 $m > n$。令 $r = (u, \langle t_i' : i \in \omega\rangle) \leq_{n+1} q_n^0$ 由 $m_{n+1} \in W_{n+1}$给出，并定义 $q_{n+1} = (u, \langle t_i^{n+1} : i \in \omega\rangle)$，使得 $t_i^{n+1} = t_i'$ 对所有 $i \in \omega$ 都成立。由于 $r \leq_{n+1} q_n^0 \leq_{n+1} q_n$，我们有 $q_{n+1} \leq_{n+1} q_n$。至此，归纳构造完成。

令 $q = (u, T)$ 为 q_n 的融合（见定义 2.14），于是 $T = \langle t_i : i \in \omega\rangle$，且对所有 $i \in \omega$ 都有 $t_i = t_i^{i+1}$。我们通过证明对所有 $n \in \omega$, 集合 $D_n \cap M$ 在 q 以下稠密，来说明 q 是 $(M, \mathbb{Q})$-泛型。为此，任取 q 的一个扩张 $r = (v, R)$；由于 D_n 是稠密的，存在 $w \subseteq \mathrm{int}(R)$ 使得 $(v \cup w, R \setminus \max(w)) \in D_n$。接着，由于 $(v \cup w, R \setminus \max(w)) \leq (u, T_{n+1} \setminus \max(w)) \leq q_{n+1}$，并且 q_{n+1} 已针对 D_n 和 $\max(w)$ 预处理，因此已有 $r' = (v \cup w, T_{n+1} \setminus \max(w)) \in D_n$。于是 $r' \in M$ 与 r, r' 相容，其见证是条件 $(v \cup w, R \setminus \max(w))$。

接下来，我们证明 $q \Vdash |Z_n \cap B| = \omega$ 对每个 $n \in \omega$都成立。固定 n，任取 $(v, R) \leq q$；只需证明，对每个 $k \in \omega$，都存在 (v, R) 的一个扩张，使其强迫 $(Z_n \cap B) \setminus k \neq \emptyset$。找到 $i \in \omega$，使得 $i > k$、$v \subseteq i$、$Z_n = Z_i$，并且 $s = \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(t_i)$ 是 t_i-正的。由 s 是 $t_i = t_i^{i+1}$-正的且 $r \leq q \leq q_{i+1}$，根据第 (3) 项可知，存在 $w \subseteq s$ 使得

$$(v \cup w, \langle t_j^{i+1} : j > \max(s)\rangle) \Vdash m_{i+1} \in \dot{Z}_i,$$

其中 $m_{i+1} \in B$且 $m_{i+1} \geq i > k$。于是 $(v \cup w, R \setminus s)$ 同时是 (v, R) 和条件 $(v \cup w, \langle t_j^{i+1} : j > \max(s)\rangle)$ 的扩张，因此根据后者，迫使 $m_{i+1} \in (B \cap Z_n) \setminus k$。由此完成了证明：$q$是一个 $(M, \mathbb{Q}, \mathcal{A}, B)$-泛型条件。
□

下面给出一个直接的稠密性论证。

引理 2.24。设 G 在 V上是 $\mathbb{Q}$-泛型的，设 $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ 是 V的一个元素，且 $a = \{s \subseteq \omega \mid \exists T(s,\ T) \in G\}$。那么对于所有$b \in \mathcal{S}$，($b$ 不分裂 a)$^{V[G]}$。

定理 2.25 (|She84, 定理 3。1|). *(连续统假设)* 令 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\beta :\ \alpha \leq \omega_2, \beta < \omega_2\rangle$ 为一个可数支撑迭代，使得对所有 $\alpha < \omega_2$, $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 都是定义 *2.12* 中偏序 $\mathbb{Q}$ 的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称。令G 在 V上泛型。则 $V[G] \models \aleph_1 = \mathfrak{a} < \mathfrak{s} = \aleph_2$。

证明。由于 $V \models$连续统假设，我们可以选取一个紧致极大几乎不交族 $\mathcal{A} \in V$。令 G在 V上$\mathbb{P}_{\omega_2}$-泛型。对所有 $\alpha < \omega_2$，由定理 2.22，$\mathbb{P}_\alpha$ 强迫$\dot{}$：$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 是一个适当强迫，并且强保持 $\mathcal{A}$的紧致性。因此，利用引理 2.3，$\mathbb{P}_{\omega_2}$ 是适当的，并保持 $\mathcal{A}$的紧致性，因而也保持其极大性。因此，$\mathcal{A}$ 见证 $(\mathfrak{a} = \aleph_1)^{V[G]}$。令 $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ 为一个基数为 $< \aleph_2$的族。由于 $\mathbb{P}_{\omega_2}$ 满足 $\aleph_2$-cc（见|Abr10, 定理 2.10|），存在 $\alpha < \omega_2$ 使得 $\mathcal{S} \in V[G_\alpha]\dot{}$，其中 $G_\alpha = G \cap \mathbb{P}_\alpha$ 在 V上 $\mathbb{P}_\alpha$-泛型。根据 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 的定义和引理 2.24，在 $V[G_{\alpha+1}]$中，$\mathcal{S}$ 不是分裂族，因此这一点在 $V[G]$中也成立。因此 $(\mathfrak{s} = \aleph_2)^{V[G]}$。□

3. 萨克斯编码与紧致性

回顾，在 $V = L$ 下存在一个 Δ^1_2 实数的良序|Göd39|；解析集的勒贝格可测性表明，这一复杂度是最优的。反过来，曼斯菲尔德定理指出，若存在一个 Σ^1_2 实数的良序，则所有实数都是可构造的。Harrington |Har77，定理 B| 通过对可数链条件迫使进行有限支撑迭代，证明了 $\mathbf{\Delta}^1_3$ 良序与 ¬连续统假设和马丁公理（MA）相容；Friedman 和 Caicedo 则证明了有界适当迫使公理（BFPA）和 $\omega_1 = \omega_1^L$蕴含存在一个 Σ^1_3 实数的良序 |CF11|。然而，在后两种构造中，迫使公理使所有基数特征都相等于 $\mathfrak{c}$。Fischer 和 Friedman 首先研究了连续统基数特征具有非平凡结构的模型中实数的射影良序问题，

2010 [FF10]。他们利用 S-适当强迫概念的可数支撑迭代，证明了一个 Δ^1_3 实数的良序与 $\mathfrak{c} = \aleph_2$ 及以下每个不等式都相容： $\mathfrak{d} < \mathfrak{c}$、$\mathfrak{b} < \mathfrak{a} = \mathfrak{s}$、$\mathfrak{b} < \mathfrak{g}$。他们通过定义一种新的强迫概念——萨克斯编码——实现了这一点：该强迫概念利用萨克斯实数对良序进行编码，并提供了一种通过 ω^ω-有界迭代来强迫得到 Δ^1_3 实数良序的方法。

大小为 $\mathfrak{c}$ 的可定义极大几乎不交族，可以从 $\mathbb{R}$ 的可定义良序中得到，这使得对此类族的射影复杂度的研究成为焦点。Mathias [Mat77] 首先做到了这一点：他在 1969年 证明，不存在解析极大几乎不交族。后续研究揭示了极大几乎不交族与决定性假设之间更深的张力；例如，参见 [NN18]¦[BHST22], [Tö18], 及其中的参考文献。另一方面，在 L 中存在 Σ^1_2 极大几乎不交族，因为沿着可构造实数的 Σ^1_2-良序 $\leq_L$ 进行递归构造，便可得到这样的族。Miller [Mil89, 定理 8.23], 大幅改进了这一结果，在 $V = L$ 下得到了一个余解析极大几乎不交族。

一个有趣的问题是，能否得到一个保持基数的泛型扩张，其中实数有一个 Δ^1_3 良序且满足 $\neg$ 连续统假设，同时还能控制基数特征的取值以及这些特征之见证的可定义性。2022年，Bergfalk、Fischer 和 Switzer 证明，实数的 Δ^1_3 良序与 $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} < \mathfrak{i}$、$\mathfrak{a} = \mathfrak{i} < \mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{a} < \mathfrak{u} = \mathfrak{i}$ 相容；此外，取值为 $\aleph_1$ 的基数特征，其见证可以是余解析的。特别是，他们证明萨克斯编码能强保持定义良好的紧 mad 族的紧致性（[BFB22, 引理 4.3]）。利用这一结果和定理 2.22，我们得到：

定理 3.1。一致地，$\mathfrak{a} = \aleph_1 < \mathfrak{s} = \aleph_2$ 并且存在一个 Δ^1_3 可定义的实数的良序，以及一个大小为 $\aleph_1$的 Π^1_1 紧致极大几乎不交族。

上述答案 [FF10、问题 7.(1)&(2)]。证明上述结果的策略是对 $V = L$ 上的 S-适当强迫进行可数支撑迭代，并且这些强迫强保持

余解析紧 mad 族的紧致性 $\mathcal{A} \in V$。在此过程中，我们通过定义初始段 $<_\alpha$来构造良序 $<_G = \bigcup_{\alpha<\omega_2} <_\alpha$ ，其中 $<_\alpha$ 利用 $\leq_L$ 个 $\mathbb{P}_\alpha$-实数名称的典范良序对 $L^{\mathbb{P}_\alpha}$ 的实数进行良序排列。在适当的编排下，在阶段 α ，我们加入一个萨克斯泛型实数，对一对实数 x、$y \in V^{\mathbb{P}_\alpha}$ 进行编码，使得 $x <_\alpha y$。第 α个泛型实数编码迭代的这些初始阶段的方式，赋予该良序以 Δ^1_3可定义性。更准确地说，在阶段 α，萨克斯泛型实数 r_α 将编码一个序列$\vec{C}_\alpha = \langle C_{\alpha+m} : \ m \in \Delta(x*y)\rangle$ 个 ω_1中的泛型闭无界集，以及一个集合 $Y \subset \omega_1$，其中 $\Delta(x*y) \subseteq \omega$ 是对(x,y)这一对的递归编码，从而在 $\langle S_{\alpha+m}$ 这一预先固定的 $m \in \omega\rangle \in L$序列中编码一个平稳/非平稳模式；该序列由 ω_1^L的平稳余平稳子集组成。注意，如果 r_α 编码了(x,y)这一对，那么$L[r_\alpha] \models \Delta(x*y) \subseteq \{m \in \omega \mid S_{\alpha+m}$ 是非平稳的$\}$。如果我们能够保证，对于任何 $m \notin \Delta(x*y)$， $S_{\alpha+m}$ 在最终扩张中都不会失去其平稳性，那么平稳性—非平稳性模式就能如下编码良序 $<_G$：

$$x <_G y \Leftrightarrow \exists \alpha < \omega_2 \ L[r_\alpha] \models \Delta(x*y) = \{m \in \omega \mid S_{\alpha+m} \text{ is nonstationary}\}$$

为了使后者成为 $<_G$的（轻面）射影定义，在 C_α 之后加入集合 $\vec{}Y$，以便将每个 $S_{\alpha+m}$ 的泛型非平稳性局部化到一大类可数传递 ZF$^-$ 模型中（见下文定义 3.7）；这用到了有时被称为“戴维技巧”的方法。粗略地说，这使我们能够将最初的存在量化限制在 $\omega_2^{\mathcal{M}}$，其中 $\mathcal{M}$ 属于上述可数传递模型类，而 $\mathcal{M}$ 包含实数 r_α。接下来，我们将介绍构造中一些关键的强迫概念。

3.1. 俱乐部集射击。 Baumgartner、Harrington 和 Kleinberg 在 [BHK76] 中引入了一种基数保持迫 notion：给定一个驻定余驻定 $S \subseteq \omega_1$，它会添加一个闭无界$C \subseteq \omega_1$ ，使得 $C \cap S = \emptyset$。这种强迫通常称为俱乐部集射击。

定义 3.2。 设 $S \subseteq \omega_1$ 是一个驻定余驻定集。定义 $Q(S)$ 为由 $\omega_1 \setminus S$ 的闭有界子集组成、按末端扩张排序的偏序。

引理 3.3。 以下结论成立：

(1) $Q(S)$ 是 ω-分配的，因此不会添加新的实数。(2) 令 G 为 $Q(S)$-泛型。则 $C_G = \bigcup\{d \in Q(S) \mid d \in G\}$是 $\omega_1^{V[G]}$ 中的一个闭无界集，见证了（$\check{S}$是非平稳的）$^{V[G]}$。

证明。 参见 [Jec03，第 25] 章，或 [Cum10，第 6]节。 □

根据上面的(2)， $Q(S)$ 不是适当强迫概念，但它仍然保留了真强迫的许多理想性质。

定义 3.4。 设 $S \subseteq \omega_1$ 为一个驻定集。若对于所有可数初等子模型 $M \prec H_\theta$，当 θ 足够大且满足 $M \cap \omega_1 \in S$时，对于每个$p \in \mathbb{P} \cap M$都存在 $q \leq p$，使其为（M， $\mathbb{P}$）-泛型，则强迫概念$\mathbb{P}$ 是 S-适当 的。

以下命题的证明见 [Gol98，定理 3.7]

引理 3.5。

(1) 若 $S \subseteq \omega_1$ 是平稳的，且 $\mathbb{P}$ 是 S-适当的，则 $\mathbb{P}$ 会保留 ω_1，也会保留 S的任意平稳子集的平稳性。(2) $Q(S)$ 是 $(\omega_1 \setminus S)$-适当的。

引理 3.6。

(1) 设 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\beta : \alpha \leq \delta, \beta < \delta\rangle$ 是一个可数支撑迭代，满足对所有 $\alpha < \delta$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$，“$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 是一个 S-真偏序集”。则$\mathbb{P}_\delta$ 是 S-适当的。此外，若 $\mathcal{A}$ 在基模型中是一个紧致极大几乎不交族，且对所有 $\alpha < \omega_2$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$，“$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 强保留 $\mathcal{A}$ 的紧致性”，则 $\mathbb{P}_\delta$ 也强保留 $\mathcal{A}$ 的紧致性。(2) 假设连续统假设成立，并设 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\beta : \alpha \leq \delta, \beta < \delta\rangle$ 是一个长度为 $\delta \leq \omega_2$ 的、由 S-真偏序集组成的可数支撑迭代，并且对所有 $\alpha < \delta$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$，“$|\dot{\mathbb{Q}}_\alpha| = \omega_1$”。则 $\mathbb{P}_\delta$ 是 $\aleph_2$-链条件的。若还满足$\delta < \omega_2$，则连续统假设在 $V^{\mathbb{P}_\delta}$ 中成立。

证明。 对相应的真性论证稍作修改即可。

□

3.2. **局部化**。 称为局部化的强迫概念源自 René David 关于绝对 Π^1_2 单点集的研究 [Dav82] 。下文用 ZF$^-$ 表示不含幂集公理的 ZF。

定义 3.7。 若传递模型 $\mathcal{M}$满足 ZF$^-$ ，且$\omega_2^{\mathcal{M}}$存在并且 $\omega_2^{\mathcal{M}} = \omega_2^{L^{\mathcal{M}}}$ ，则称其为适宜的 。

在本节余下部分中，我们假设 V 是通过保持共尾性的强迫扩张从 L 得到的泛扩张。

定义 3.8。 对于 $X \subseteq \omega_1$ 以及一个带参数 ω_1 和 X 的 Σ_1-句子 $\varphi(\omega_1, X)$，若 φ在所有满足 $\omega_1, X \in \mathcal{M}$的适当模型 $\mathcal{M}$中成立，则将所有函数 r: $|r| \to 2$ 的集合记为 $\mathcal{L}(\varphi)$；其中 $|r|$ =dom(r)是一个可数极限序数，并且满足：

(1) 若 $\gamma < |r|$ ，则 $\gamma \in X$ 当且仅当 $r(2\gamma) = 1$；(2) 若 $\gamma \leq |r|$ ，且 $\mathcal{M}$ 是一个可数合适模型，满足$\gamma = \omega_1^{\mathcal{M}}$和 $r \restriction \gamma \in \mathcal{M}$，则 $\mathcal{M} \models \varphi(\gamma, X \cap \gamma)$。

扩展关系是末端扩张。

每个 $r \in \mathcal{L}(\varphi)$ 都是某个子集 $Y \subseteq \omega_1$ 的特征函数的一个近似，使得 Even(Y) $= \{\gamma \mid 2\gamma \in Y\} = X$。 r 的“奇数部分”，即 r 在形如 $2\gamma+1$ 的序数上取的值，用于下文的 (1)。

引理 3.9. 以下结论成立。

(1) ([FF10，引理 1]) 对每个 $r \in \mathcal{L}(\varphi)$ 和可数极限序数 $\gamma > |r|$，存在 $r' \leq r$ 使得 $|r'| = \gamma$。(2) ([FF10，引理 2]) 若 G 是 $\mathcal{L}(\varphi)$-泛型，且 $\mathcal{M}$ 是一个可数的适当模型，使得 $\bigcup G \restriction \omega_1^{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$，那么 $\mathcal{M} \models \varphi(\omega_1^{\mathcal{M}}, X \cap \omega_1^{\mathcal{M}})$。(3) ([FF10，引理 3，引理 4]) $\mathcal{L}(\varphi)$ 是适当的，并且不会添加新的实数。

3.2.1. 萨克斯编码。 萨克斯编码，或称利用完美树进行编码，最早由 Fischer 和 Friedman [FF10]定义。回顾一下，若对于所有 $s \in T$ ，都存在 s的一个扩展 t ，使得 $t \in T$和 $t^\frown(i) \in T$对每个 $i < 2$均成立，则树 $T \subseteq 2^{<\omega}$ 是完美的 。萨克斯 强迫 是由完美树 $T \subseteq 2^{<\omega}$组成的偏序，而一个条件

S 扩展条件 T，当且仅当 S 是 T的子树。萨克斯 强迫通常被视为一种破坏性极小的强迫 ¬连续统假设的方式；下文定义的萨克斯编码迫 forcing，则可被视为在连续统较大的情况下强迫一个 Δ^1_3 良序的一种破坏性极小的方式。在本节中，我们始终假设 $V = L[Y]$，其中 $Y \subseteq \omega_1$ 是关于 L 的某个基数保持迫 notion的泛型。

定义 3.10。固定 $n^* \in \omega$。对 $i < \omega_1$ 使用归纳法，定义一个序列 $\mu = \langle \mu_i : i \in \omega_1 \rangle$ 使得 μ_i 是一个序数，并且 $(|\mu_i| = \aleph_0)^L$，对每个 $i < \omega_1$都成立。令 $\mu_0 = \emptyset$，并假设已定义 $\langle \mu_j : j < i \rangle$，令 μ_i 为满足以下条件的最小序数 $\mu > \sup^{j<i} \mu_j$：

(1) $L_\mu[Y \cap i] \prec_{\Sigma^1_{n^*}} L_{\omega_1}[Y \cap i]$; (2) $L_\mu[Y \cap i] \models \mathsf{ZF}^-$; (3) $L_\mu[Y \cap i] \models$ “ω 是最大基数”。

令 $\mathcal{B}_i := L_{\mu_i}[Y \cap i]$。对于 $r \in 2^\omega$，我们称 r 编码 Y 低于 i，如果对所有 $j < i$, $j \in Y \Leftrightarrow L_{\mu_j}[Y \cap j]\underbrace{[r]}_{=\mathcal{B}_j[r]} \models \mathsf{ZF}^-$ 都成立。对于一棵树 $T \subseteq 2^{<\omega}$，令 $|T|$ 表示满足 $T \in \mathcal{B}_i$ 的最小 $i < \omega_1$。

定义 3.11。([FF10，定义 2])萨克斯编码 是偏序 $C(Y)$，由满足以下条件的完美树 $T \subseteq 2^{<\omega}$ 组成：每当 r 是一条穿过 T 的分支时，r 在 $|T|$ 以下编码 Y。对于 T_0，$T_1 \in C(Y)$，当且仅当 T_1 是 T_0 的子树时，令 $T_1 \leq T_0$。

注记 3.12。上面隐藏的参数 n^* 对于涉及可定义组合对象的保持性结果是必要的，例如下方事实 3.14 的条目（5）。具体而言，n^* 被选为表达所有相关组合性质的公式复杂度的一个上界，而我们希望将这些性质向下反映到模型 $\mathcal{B}_i$ 中。在当前保持一个 Π^1_1 紧致极大几乎不交族的情形下，$n^* = 5$ 就足够了。另见 [BFB22，注记 1]。

注记 3.13。令 G 在 $L[Y]$上为 $C(Y)$-泛型。由于 $C(Y)$ 的定义是绝对的，因此在 $L[Y][G]$ 中仍然成立：如果 T是 $C(Y)$中的任意条件，并且 r 是在 $L[Y][G]$中的一条穿过 T的分支，

$$Y \cap |T| = \{j < |T| \mid \mathcal{B}_j[r] \models \mathsf{ZF}^-\}$$

特别地，只要 $r \in \bigcap G$，上述结论对所有 $j < \sup\{|T| \mid T \in G\}$都成立。

事实 3.14。以下结论成立。

(1) ([FF10，引理 4]) 对任意 $j \in \omega_1$ 以及任意满足$|T| \leq j$的 $T \in C(Y)$，存在 $T' \leq T$使得 $|T'| = j$。(2) ([FF10，引理 7]) $C(Y)$是适当的。(3) ([FF10，引理 6]) 设 G 是 V 上的 $C(Y)$-泛型，且设$r := \bigcap G$。那么在 $V[G]$中，r 编码集合 Y，也就是说，对所有 $j < \omega_1$，$j \in Y \Leftrightarrow \mathcal{B}_j[r] \models \mathrm{ZF}^-$.(4) ([FF10，引理 8]) $C(Y)$是 ω^ω-bounding。(5) ([BFB22，引理 4.3]) $C(Y)$的可数支撑迭代保持 Π^1_1 个紧 mad 族的紧致性；可以证明，这些族由可构造实数组成。

3.3. **一个 Δ^1_3 较长的良序**。利用前面几节提供的工具，我们继续证明定理 3.1。回顾一下，$\diamondsuit$ 是指存在一个序列 $\vec{A} = \langle A_\alpha : \xi < \omega_1\rangle$，其中 $A_\xi \subseteq \xi$ 对每个 $\xi < \omega_1$ 都成立，并且对于任意 $X \subseteq \omega_1$，集合$\{\xi < \omega_1 \mid X \cap \xi = A_\xi\}$ 是平稳的。$\vec{A}$ 称为 $\diamondsuit$-序列，并且可以在 L 中构造这样的序列，使其在 L_{ω_1}上是Σ_1-可定义的；例如参见 [Dev17，定理 3.3]。

命题 3.15 ([FF10，引理 14])。假设 $\diamondsuit$ 成立。那么存在一个序列 $\vec{S} = \langle S_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$，它在 L_{ω_2} 上是 Σ_1-可定义的，由集合 $S_\alpha \subseteq \omega_1$ 组成；这些集合在 L中既平稳又余平稳，并且按如下意义几乎不交：对于所有不同的 α，$\beta < \omega_2$，$|S_\alpha \cap S_\beta| < \omega_1$。此外，存在一个平稳的 $S_{-1} \subseteq \omega_1$，使得对于所有 $S \in \vec{S}$，$S_{-1} \cap S = \emptyset$。而且，如果 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是满足 $\omega_1^{\mathcal{M}} = \omega_1^{\mathcal{N}}$的适宜的 ZFC，那么 $\vec{S}^{\mathcal{M}}$ 和 $\vec{S}^{\mathcal{N}}$ 在 $\omega_2^{\mathcal{M}} \cap \omega_2^{\mathcal{N}}$上重合。如果 $\mathcal{M}$ 是满足 $\omega_1^{\mathcal{M}} = \omega_1$的适宜的 ZFC，那么 $\vec{S}^{\mathcal{M}} = \vec{S} \restriction \omega_2^{\mathcal{M}}$。

我们假设 $V = L$，因此固定如上所述的 S 和 S_{-1}。

引理 3.16 ([FF10，引理 14])。存在 $F\colon \omega_2 \to L_{\omega_2}$，使得对所有 $a \in L_{\omega_2}$，$F^{-1}(a)$ 在 ω_2 中无界，且 F 可在 L_{ω_2} 上用 Σ_1 定义。此外，若 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是适当模型，且

满足 $\omega_1^{\mathcal{M}} = \omega_1^{\mathcal{N}}$，则 $F^{\mathcal{M}}$ 与 $F^{\mathcal{N}}$ 在 $\omega_2^{\mathcal{M}} \cap \omega_2^{\mathcal{N}}$ 上一致。若 $\mathcal{M}$ 是适宜的，且 $\omega_1^{\mathcal{M}} = \omega_1$，则 $F^{\mathcal{M}} = F \restriction \omega_2^{\mathcal{M}}$。

固定如上所述的 F。根据事实 3.14 的第 (5) 项，当紧 mad 族满足额外的可定义性假设时，它们在 $C(Y)$ 的可数支撑迭代下不可毁坏；如下所述，可以在 L 中构造这样的 mad 族。

引理 3.17 ([BFB22，引理 4.2])。如果 $V = L$，那么存在一个 Π^1_1紧致极大几乎不交族 $\mathcal{A}$，使得 ZFC 证明 $\mathcal{A}$ 是 L 的子集。

对 $\alpha < \omega_2$作递归，定义一个可数支撑迭代$\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\beta : \alpha \leq \omega_2, \beta < \omega_2 \rangle$，其中 $\mathbb{P}_0$取为平凡偏序集。假设 $\mathbb{P}_\alpha$ 已定义，并令 G_α 为 $\mathbb{P}_\alpha$在 L上的泛型。$<_\alpha$ 在 $L[G_\alpha]$ 上的良序可利用全集 L 的全局良序 $<_L$ 以及实数的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称集合自然定义。我们可以假设任意实数名称 $\dot{x}$ 都是好的，即它由可数多个极大反链$A_n \subseteq \mathbb{P}_\alpha$ 决定，这些反链由决定 $\dot{x}(n)$的条件组成。这使我们可以假设：若 $\alpha < \beta < \omega_2$ 且 $\dot{x}$ 是一个不是$\mathbb{P}_\alpha$-名称的 $\mathbb{P}_\beta$-名称，那么所有 $\mathbb{P}_\alpha$-名称都按 $<_L$先于 $\dot{x}$，因为构造 x需要更长时间。每当 $x \in L[G_\alpha]$ 是一个实数，令 γ_x表示使得 x 有一个好的 $\mathbb{P}_\gamma$-名称的最小 γ，并将σ^α_x 定义为 x的 L-最小好的 $\mathbb{P}_{\gamma_x}$-名称。这样，我们可以通过考察集合 $N = \{\sigma^\alpha_x \restriction x \in L[G_\alpha] \cap \omega^\omega\}$ 来理解 $L[G_\alpha]$ 中的实数；该集合由 $<_L$典范地良序。因此对于实数 x、$y \in L[G_\alpha]$，令 $x <_\alpha y$当且仅当 $\sigma^\alpha_x <_L \sigma^\alpha_y$。由于对于任意 $\beta < \alpha$都有$\sigma^\alpha_x = \sigma^\beta_x = \sigma^{\gamma_x}_x$，$<_\beta$ 是 $<_\alpha$的初始段。令$\dot{<}_\alpha$ 表示 $<_\alpha$的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称。

固定一个递归编码 $\cdot * \cdot : \omega^\omega \times \omega^\omega \to \omega^\omega$，方法是令 $x * y = \{2n \mid n \in x\} \cup \{2n+1 \mid n \in y\}$，并对实数 x 定义 $\Delta(x) := x * (\omega \setminus x)$。最后，我们固定一种对 ω_2^L 的序数进行编码的绝对方法。

定义 3.18。设 $\beta < \omega_2^L$ 和 $X \subseteq \omega_1^L$。我们称 X 是的充分绝对代码，如果存在一个公式 $\psi(x, y)$，使得对于任何包含 $X \cap \omega_1^{\mathcal{M}}$的适宜模型 $\mathcal{M}$，都存在唯一的 $\beta \in \omega_2^{\mathcal{M}}$，使 $\psi(\beta, X \cap \omega_1^{\mathcal{M}})$在 $\mathcal{M}$中成立，并且 $\beta = \beta$

在 $\omega_1^{\mathcal{M}}=\omega_1^{L}$的情况下。此外，如果 $\mathcal{M},\mathcal{N}$是任意满足 $\omega_1^{\mathcal{M}}=\omega_1^{\mathcal{N}}$和 $X\cap\omega_1^{\mathcal{M}}\in\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$的适宜模型，那么使 $(\psi(\beta,X\cap\omega_1^{\mathcal{M}}))^{\mathcal{M}}$和 $(\psi(\beta,X\cap\omega_1^{\mathcal{N}}))^{\mathcal{N}}$成立的是同一个$\beta\in\omega_2^{\mathcal{M}}\cap\omega_2^{\mathcal{N}}$。

事实 3.19。([FZ10，事实 5]) 对每个 $\beta<\omega_2^{L}$，都存在充分绝对代码。

此后，我们固定上述公式 $\psi(x,\ y)$。在 $L[G_\alpha]$中工作，令 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha=\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^0*\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^1$ 为两步迭代的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，其中 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^0$ 是 $\mathbb{Q}$（定义 2.12）的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，而 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^1$ 是平凡强迫的一个 $\mathbb{P}_\alpha*\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^0$-名称，除非发生以下情况：对于某些实数 $x,\ y\in L[G_\alpha]$，$F(\alpha)=\{\sigma_x^\alpha,\sigma_y^\alpha\}$，且满足 $x<_\alpha y$。在这种情况下，令 $x_\alpha=x$、$y_\alpha=y$，并将 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^1$ 定义为三步迭代$\dot{\mathbb{K}}_\alpha^0*\dot{\mathbb{K}}_\alpha^1*\dot{\mathbb{K}}_\alpha^2$的一个 $\mathbb{P}_\alpha*\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^0$-名称，其中：

(1) $\dot{\mathbb{K}}_\alpha^0$ 是可数支撑迭代$\langle\mathbb{P}_{\alpha,\ \beta}^0,\ \mathbb{K}_{\alpha,\ n}^0\beta\le\omega,\ n\in\omega\rangle$，其中 $\mathbb{K}_{\alpha,\ m}^0$是$\mathbb{P}_{\alpha,\ m}^0$-名称，对于所有 $m\in\Delta(x_\alpha*y_\alpha)$，都有$Q(S_{\alpha+m})$。

(2) 设 R_α 是 $L[G_\alpha]$上的 $\mathbb{Q}_\alpha^0$-泛型，并设 H_α 是 $L[G_\alpha*R_\alpha]$上的 $\mathbb{K}_\alpha^0$-泛型。在 $L[G_\alpha*R_\alpha*H_\alpha]$ 中固定：

- 子集 $W_\alpha,\ W_\eta\subseteq\omega_1$，使得 W_α 是序数 α 的一个充分绝对代码，而 W_η 是某个序数 η 的充分绝对代码，且 $L_\eta\models|\alpha|\le\omega_1$；
- 一个实数 $x_\alpha\oplus y_\alpha$ 递归编码了对（$x_\alpha,\ y_\alpha$）；
- 一个子集 $Z_\alpha\subseteq\omega_1$ 编码 $G_\alpha*R_\alpha*H_\alpha$。

固定一个可计算双射 $\langle\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\rangle$: $\mathcal{P}(\omega_1)\to\mathcal{P}(\omega_1)$，并且对于 $X\subseteq\omega_1$ 和 $i<4$，将 $(X)_i$ 记为 $\mathcal{P}(\omega_1)$ 中满足$X=\langle(X)_i:\ i<4\rangle$ 的那些元素。令 $X_\alpha=\langle W_\alpha,x_\alpha\oplus y_\alpha,W_\eta,Z_\alpha\rangle$，并令 $\varphi_\alpha=\varphi_\alpha(\omega_1,X_\alpha)$ 为一个以 ω_1 和 X_α 为参数的句子，使得 φ_α 成立当且仅当：存在一个序数 $\alpha\in\omega_2$，使得 $(X_\alpha)_0=\alpha$；并且存在一对 (x,y)，使得 $(X_\alpha)_2=x\oplus y$；且对于所有 $m\in\Delta(x*y)$，$S_{\alpha+m}$ 都是非平稳的。接下来，定义 $\dot{\mathbb{K}}_\alpha^1$ 为 $\mathcal{L}(\varphi_\alpha)$ 的一个 $(\mathbb{P}_\alpha*\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^0*\mathbb{K}_\alpha^0)$- 名称。

(3) 令 Y_α 在 $L[G_\alpha*R_\alpha*H_\alpha]$上是 $\mathbb{K}_\alpha^1$-泛型。那么，由于 $\{n\in\omega\mid 2n\in Y_\alpha\}=X_\alpha$ 和 X_α 编码了 $G_\alpha*R_\alpha*H_\alpha$，我们有 $L[G_\alpha*R_\alpha*H_\alpha*$

$Y_\alpha] = L[Y_\alpha]$。在此模型中，令 $\mathbb{K}^2_\alpha$ 为 $C(Y_\alpha)$ 的一个（$\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha * \dot{\mathbb{K}}^0_\alpha * \dot{\mathbb{K}}^1_\alpha$）-名称。

至此，$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega_2}$的定义完成。于是，$\mathbb{P}$ 是一个可数支撑迭代，其中每个 $\mathbb{P}_\alpha$ 都强迫 $\mathbb{Q}_\alpha$ 是一个大小为 $\leq \omega_1$的 S_{-1}适当强迫概念；根据定理 2.22 和事实 3.14，$\mathbb{Q}_\alpha$ 被强迫为强保持 $\mathcal{A}$的紧致性。因此：

引理 3.20。 $\mathbb{P}$是 S_{-1}适当的，强保持$\mathcal{A}$的紧致性，并且满足 $\aleph_2$-链条件。

证明。 由引理 3.6、引理 2.3 和引理 1 可得。 □

设 G 是 L 和 $<_G = \bigcup <_\alpha$上的 $\mathbb{P}$-泛型，其中 $<_\alpha = \dot{<}^G_\alpha$。

引理 3.21 ([FF10])。 设 G 是 L上的 $\mathbb{P}$-泛型，并设 x，y是 $L[G]$中的实数。那么，当且仅当满足以下条件时，$x <_G y$ 成立：（$*$）存在一个实数 r，使得对于每个包含 r 作为元素的可数适当 $\mathcal{M}$，都存在 $\alpha < \omega_2^{\mathcal{M}}$，使得对所有 $m \in \Delta(x * y)$，$S^{\mathcal{M}}_{\alpha+m}$在 $\mathcal{M}$中是非平稳的。因此，$<_G$ 是 $L[G]$中一个可由 Δ^1_3 定义的实数良序。

$<_G$ 的复杂度明确计算如下。我们有 $x <_G y \Leftrightarrow \Phi(x, y)$，其中 $\Phi(x, y)$ 是公式

$$\underbrace{\exists r \in \mathcal{P}(\omega^\omega)}_{\exists}[\underbrace{\forall \mathcal{M} \text{ countable, suitable, } r \in \mathcal{M}}_{\forall}$$
$$\underbrace{(\exists \alpha < \omega_2^{\mathcal{M}}}_{\exists}\ \underbrace{(\mathcal{M} \models \forall m \in \Delta(x * y)\ S_{\alpha+m} \in \mathrm{NS}_{\omega_1}))}_{\Delta^1_1}]$$

因此，$\Phi(x, y)$ 是一个 Σ^1_3 公式。然而，$<_G$ 也是一个全序，因为如果 x，y 是 $L[G]$中的任意实数，那么存在 $\alpha = \max(\gamma_x, \gamma_y) < \omega_2$ 使得 $x = (\sigma^\alpha_x)^G$ 且 $y = (\sigma^\alpha_y)^G$。要么$\sigma^\alpha_x <_L \sigma^\alpha_y$，要么 $\sigma^\alpha_y <_L \sigma^\alpha_x$；在 $\neg(x <_G y)$ 的情形下，我们必有$y <_G x$。因此，$<_G$ 的补集是 Σ^1_3-可定义的，这表明 $<_G$ 是 Δ^1_3-可定义的。

定理 *3.1* 的证明。 假设 $V = L$，并固定引理 3.17 中一个由 Π^1_1 可定义的紧致极大几乎不交族 $\mathcal{A}$。令 $\mathbb{P}$ 为 ω_2 长度的

本节构造的可数支撑迭代，并令 G 为在 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型。由引理 3.20， $\mathbb{P}$ 是 S_{-1}-适当的。定义$<_G=\bigcup_{\alpha<\omega_2}\dot{<}_\alpha^G$ ；由引理 3.21， $<_G$ 是实数的一个 Δ_3^1 良序。由于任何满足 $|\mathcal{S}|<\omega_2$ 的集合 $\mathcal{S}\subseteq[\omega]^\omega\cap V[G]$ 都会在迭代的某个初始阶段 $\alpha<\omega_2$ 出现，根据定义， $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha^0$ 是定义 2.12 中强迫 $\mathbb{Q}$ 的一个$\mathbb{P}_\alpha$-名称，因此 $\mathcal{S}$ 在 $V[G_{\alpha+1}]$ 中不是分裂的。因此 $(\mathfrak{s}=\aleph_2)^{V[G]}$。接下来注意，由Shoenfield绝对性， $\mathcal{A}$ 在 $V[G]$ 中由与在V 中相同的 Π_1^1 公式定义。此外，由引理 3.20， $\mathcal{A}$ 在 $V[G]$ 中仍是一个紧致极大几乎不交族，因此 $\mathcal{A}$ 为 $(\mathfrak{a}=\aleph_1)^{V[G]}$ 提供了一个见证。证明完毕。□

4. 可定义谱

本节讨论射影极大几乎不交族，其最优复杂度的定义使其基数为 $\kappa>\aleph_1$。我们简要介绍迄今为止这方面的研究工作。

Friedman和Zdomskyy [FZ10] 证明，具有最优射影定义的紧致极大几乎不交族与 $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=\aleph_2$ 相容；Fischer、Friedman和Zdomskyy[FFZ11] 又将此结果推广到了 $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=\aleph_3$。根据 [Rag09]，紧致极大几乎不交族不能包含完美子集；而Mansfield-Solovay定理指出，任何 Σ_2^1 集要么是 L的子集，要么包含一个由非构造实数组成的完美集。因此，在 $\mathfrak{b}>\aleph_1$的模型中不存在 Σ_2^1 紧致极大几乎不交族；由此，基数大于 $\aleph_2$ 的紧致极大几乎不交族的最优定义是 Π_2^1。去掉紧致性要求后，Brendle和Khomskii [BK13]证明 $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\geq\aleph_2$与一个 Π_1^1 极大几乎不交族相容；此外，Fischer、Friedman和Khomskii [FFK13]证明，在这样的模型中还可以有一个实数的 Δ_3^1良序。关于基数为κ 的射影见证且 $\aleph_1<\kappa<\mathfrak{c}$ 的首项研究由Fischer、Friedman、Schrittesser和Törnquist [FFST25]完成；同样根据Mansfield-Solovay定理，这类对象可能达到的最佳复杂度是 Π_2^1。

迄今为止，关注的重点一直是寻找可定义的极大几乎不交族，以见证 $\mathfrak{a}$ 的值，即集合

spec(𝔞) $= \{|\mathcal{A}| \mid \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ is mad$\}$. 。对此集合的研究由赫克勒开创 [Hec72], 随后布拉斯 [Bla93], 以及 Shelah 和斯皮纳斯 [SS15]继续推进。此后，人们也对基数 $\mathfrak{a}_T$ 和 $\mathfrak{i}$ 作了类似研究；前者参见 [FS25], [Bri24] ，后者参见 [FS19], [FS22] 。鉴于如今我们对如何控制哪些 $\kappa \in$spec(𝔞)，以及如何定义大小为 $\mathfrak{a} = \min(\text{spec}(\mathfrak{a}))$ 的极大几乎不交族，已经有了相当深入的认识，自然会想把这两条研究路线结合起来，提出这样的问题：对于每个 $\kappa \in \text{spec}(\mathfrak{a})$，是否都存在一个大小为 κ 、具有最优定义的射影极大几乎不交族。我们得到：

定理 *4.1.* *</style}*与 $\mathfrak{a} = \aleph_1 < \mathfrak{c} = \aleph_2$ 相容：存在一个大小为 $\aleph_1$ 的 Π^1_1-可定义紧致极大几乎不交族，以及一个大小为 $\aleph_2$ 的 Π^1_2-可定义紧致极大几乎不交族。

证明上述陈述的策略如下。我们从 $V = L$ 的一个模型开始，并固定一个 Π^1_1 紧致 mad 族 $\mathcal{A}_1$。我们递归地定义一个可数支撑迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\beta : \alpha \leq \omega_2, \beta < \omega_2 \rangle$，同时构造一个 Π^1_2 紧致 mad 族 $\mathcal{A}_2$，它由 ω_2-多个 $\mathbb{Q}_\alpha$-泛型实数 a_α组成，这些实数来自某个强迫概念 $\mathbb{K}_\alpha$；并且对于每个 $\mathbb{Q}_\alpha$ ， $\mathbb{P}_\alpha$ 都强迫它是一个 S-适当的偏序集，且能强保持 $\mathcal{A}_1$的紧致性。通过适当地登记那些出现在 $\mathcal{I}(\mathcal{A}^2_\alpha)^+$中的实数可数序列，来保证 $\mathcal{A}_2$ 的紧致性，其中 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 表示 $\mathcal{A}_2$ 截至阶段 α构造出的部分。这个定义稍微修改了 FZ10 的证明中定理1]所定义的迭代。主要修改之处在于：FZ10]沿迭代 cofinally 多次加入赫克勒实数，以增大 $\mathfrak{b}$并确保不存在大小为 $\aleph_1$ 的 mad 族；而在当前构造中，我们 cofinally 多次令 $\mathbb{Q}_\alpha$ 为某个大小为 $\aleph_1$的 S-适当强迫。$\mathbb{Q}_\alpha$ 是为未来的应用保留的。在 FZ10] 中使用赫克勒强迫的意图，已由 FZ10 的问题18], 指出；该问题表明，作者并不清楚迭代因子 $\mathbb{K}_\alpha$ 本身是否会添加一个支配实数。注意，下面的命题 4.10 将表明事实并非如此。

Π^1_2 的可定义性与上一节中Δ^1_3 良序的可定义性类似，但在一些细微而重要之处有所不同。具体而言，按照命题 3.15 中的做法，利用 $\vec{S} = \langle S_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$ 和 S_{-1}， $\mathbb{K}_\alpha$-泛型实数 a_α 会通过编码一个闭无界集序列 $\vec{C}_\alpha = \langle C_{\alpha+m} : m \in \Delta(a_\alpha)\rangle$，将平稳/非平稳模式编码进 $\vec{S}$ 的第 α个 ω-块中；这些闭无界集也由 $\mathbb{K}_\alpha$添加。因此，条件由有限部分和无限部分组成：有限部分对 a_α作出近似，无限部分则为有限部分中的每个 m，对 $\omega_1 \setminus S_{\alpha+m}$中的一个闭无界集作出可数多个近似。必须谨慎地进行这一同步构造，以确保当 $m \notin \Delta(a_\alpha)$时， $S_{\alpha+m}$ 仍然是平稳的。无参数射影定义同样依赖上一节中的局部化技术来获得，因此 $\mathbb{K}_\alpha$ 还必须添加 α的充分绝对代码 $\langle Y_{\alpha+m} : m \in \Delta(a_\alpha)\rangle$ 。在最终扩张 $V[G]$中，对于所有 $a \in V[G] \cap [\omega]^\omega$，我们有

$$a \in \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \forall \mathcal{M}(\mathcal{M} \text{ 是一个可数合适模型}, \ a \in \mathcal{M})$$
$$\exists \overline{\alpha} < \omega_2^{\mathcal{M}} \ (\mathcal{M} \models \forall m \in \Delta(a) \ S_{\overline{\alpha}+m} \text{ is nonstationary}).$$

右侧的形式为 $\forall\exists$，因此是一个 Π^1_2 公式。

为证明定理 4.1，我们先建立一些预备结果。在本节余下部分中，除非另有说明，我们都在 $V = L$ 的一个模型中工作。固定一个余解析紧 mad 族 $\mathcal{A}_1$，以及由命题 3.15 给出的 $\vec{S} = \langle S_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$ 和 $S_{-1} \subseteq \omega_1$ 。取 $F\colon \mathrm{Lim}(\omega_2) \to L_{\omega_2}$，使得对所有 $x \in L_{\omega_2}$， $F^{-1}(x)$ 在 ω_2 中无界。根据 [FF10，引理 14]，，我们可以取 S 和 F 为关于 L_{ω_2}的 Σ_1-可定义对象；而且，只要 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$是满足 $\omega_1^{\mathcal{M}} = \omega_1^{\mathcal{N}}$的适当模型，那么 $\vec{S}^{\mathcal{M}}$ 和$\vec{S}^{\mathcal{N}}$ 在 $\omega_2^{\mathcal{M}} \cap \omega_2^{\mathcal{N}}$ 上就一致。最后，对所有 $\alpha < \omega_2^L$，令 X_α 表示 α的一个充分绝对代码。可构造宇宙的良序是通过 $C(Y)$-泛型实数实现编码的，而当前情境中的泛型实数则由几乎不交编码产生；这种方法由 Solovay 和 Jensen [SJ70], 提出，我们将在此给出一般定义。

定义 4.2. 设 $\mathcal{R}$ 是 V中的一个几乎不交族，且$X \in V$ 是 ω_1的子集。相对于 $\mathcal{R}$ 对 X进行几乎不交编码所用的偏序为 $\mathbb{P}_{\mathcal{R}}(X)$，其条件为 (s, F)，其中 s是 ω的有限子集， F是 $\{r_\xi \mid \xi \in X\} \subseteq \mathcal{R}$的有限子集。扩展关系定义如下：$(t, G) \leq (s, F)$ 当且仅当

(1) t 向上延伸 s, $G \supseteq F$; (2) 对所有 $\xi \in X$ 和 $r_\xi \in F$, $(t \setminus s) \cap r_\xi = \emptyset$。

事实 4.3. $\mathbb{P}_{\mathcal{R}}(X)$ 是 σ-中心的。若 G 是 $\mathbb{P}_{\mathcal{R}}(X)$-泛型于 V之上，令$a := \bigcup\{s \mid \exists F (s, F) \in G\}$. 那么，在泛扩张中， G和 a可相互定义；并且在 $V[G] = V[a]$中，对所有 $\xi < \omega_1, \xi \in X$，当且仅当 $a \cap r_\xi$ 是有限的。

关于上述内容的证明，参见例如 [Har77] 或 [Jec97，例 IV]。利用 [FZ10，命题 3]，我们固定一个几乎不交族 $\mathcal{R} = \{R_{\langle \eta, \xi \rangle} \mid \eta \in \omega \cdot 2, \xi \in \omega_1\}$，它在$L_{\omega_1}$上是 Σ_1-可定义的，并且对每个适当模型 $\mathcal{M}$， $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{R_{\eta,\xi} \mid \eta \in \omega \cdot 2, \xi \in \omega_1^{\mathcal{M}}\}$。出于编码方面的技术原因，我们修改上一节中给出的函数 Δ: $\omega^\omega \to \omega^\omega$ 的定义：对于有限或无限的 $s \subseteq \omega$， 令 $\Delta(s) = \{2n+1 \mid n \in s\} \cup \{2n+2 \mid n \in (\sup s \setminus s)\}$. 令 $C(s) = \Delta(s) \cup (\omega \setminus \max(\Delta(s)))$。我们将 $C(s)$视为与 s相关联的“编码区域”。用$E(s)$ $O(s)$分别表示集合 $\{s(2n) \mid 2n < |s|\}$和 $\{s(2n+1) \mid 2n+1 < |s|\}$。对于极限序数 γ 和函数 r: $\gamma \to 2$， 令 $\mathrm{Even}(r) = \{\alpha < \gamma \mid r(2\alpha) = 1\}$，并令 $\mathrm{Odd}(r) = \{\alpha < \gamma \mid r(2\alpha+1) = 1\}$。最后，对于序数 $\alpha < \beta$， 令 $\beta - \alpha$ 表示满足 $\alpha + \gamma = \beta$的序数 γ。若 B是序数集， 令 $B - \alpha = \{\beta - \alpha \mid \beta \in \beta\}$。若 δ 是不可分解序数，则 $(\alpha + B) \cap \delta - \alpha = B \cap \delta$。

继续定义 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\beta : \alpha \leq \omega_2, \beta < \omega_2 \rangle$并构造一个 Π^1_2 紧致极大几乎不交族 $\mathcal{A}_2 = \{a_\alpha \mid \alpha < \omega_2\}$。假设已定义 $\alpha < \omega_2$ 和 $\mathbb{P}_\alpha$。令 G_α 为一个 $\mathbb{P}_\alpha$-泛型滤子，并令 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 为一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，表示截至阶段 α构造的$\mathcal{A}_2$ 的元素集合。引理

4.11 的稠密性论证需要以下归纳假设：

$$(*)\quad \forall r\in\mathcal{R}\,\forall A'\in[\mathcal{A}^2_\alpha]^{<\omega}\ (|\mathrm{E}(r)\setminus\bigcup A'|=|\mathrm{O}(r)\setminus\bigcup A'|=\aleph_0),$$

由于 $\mathcal{R}$ 是一个几乎不交族，(∗)意味着，对每个$A'\in[\mathcal{A}^2_\alpha\cup\mathcal{R}]^{<\omega}$和 $r\in\mathcal{R}\setminus A'$，也有 $|E(r)\setminus\bigcup A'|=|O(r)\setminus\bigcup A'|=\aleph_0$，否则对于某个 $r'\in A'\cap\mathcal{R}$，$r\cap r'$ 将是无限的。

若 $\alpha<\omega_2$ 是后继序数，则令 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha=\dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha$ 为一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，表示一个基数为 $\aleph_1$ 的真偏序集，使得 $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$“$\dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha$ 强保持 $\mathcal{A}_1$的紧致性”。对于极限 $\alpha\in\omega_2$，除非另有明确说明，$\mathbb{Q}_\alpha$ 是平凡偏序集的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称。设 $F(\alpha)$是一个序列 $\langle\dot{x}_i:\ i\in\omega\rangle$，其中各项为 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，且 $x_i=\dot{x}_i^{G_\alpha}$ 是 ω 的一个无限子集，并且对所有 $i\in\omega$，$x_i\in\mathcal{I}(\mathcal{A}^2_\alpha)^+$。假设(∗)以及 $\mathcal{R}$ 的几乎不交性意味着存在一个极限序数 $\eta_\alpha\in\omega_1$，使得不存在有限子集J、E分别属于 $\omega\cdot2\times(\omega_1\setminus\eta_\alpha)$ $\mathcal{A}^2_\alpha$，且满足 $i\in\omega$、$x_i\subseteq\bigcup_{\langle\eta,\ \xi\rangle\in J}R_{\langle\eta}$。固定这样一个 $\eta_\alpha\in\omega_1$，以及一个将 ω 映射到 η_α上的满射的 $Z_\alpha\subset\omega$编码。以下是 [FZ10 第 3]节中的原始定义。

定义 4.4。(Friedman、Zdomskyy；[FZ10]) 偏序$\mathbb{K}_\alpha$由所有满足以下条件的对 $p=\langle\langle s,s^*\rangle,\langle c_k,y_k:\ k\in\omega\rangle\rangle$ 组成：
(1) $c_k\subseteq\omega_1\setminus\eta_\alpha$ 是闭有界的，且 $S_{\alpha+k}\cap c_k=\emptyset$；(2) y_k：$|y_k|\to2$ 是一个函数，其中 $|y_k|\in\omega_1$ 是极限，且满足

- $|y_k|>\eta_\alpha$, $y_k\restriction\eta_\alpha=0$;
- 对于所有 $\gamma<|y_k|$, $y_k(\eta_\alpha+2\gamma)$, $=1$ 当且仅当 $\gamma=0$ 或$\gamma\in X_\alpha$, 因此 $\mathrm{Even}(y_k)=(\{\eta_\alpha\}\cup(\eta_\alpha+X_\alpha))\cap|y_k|$.[1]

(3) $s\in[\omega]^{<\omega}$ 且 s^* 是集合 $\{R_{\langle m,\xi\rangle}\mid m\in\Delta(s)$ $\xi\in c_m\}\cup\{R_{\langle\omega+m,\xi\rangle}\mid m\in\Delta(s)$ $y_m(\xi)=1\}\cup\mathcal{A}^2_\alpha$的有限子集。此外，对于所有满足 $2n<|s\cap R_{\langle0,0\rangle}|$, $n\in Z_\alpha$ 的 $n\in\omega$，当且仅当存在满足 $(s\cap R_{\langle0,0\rangle})(2n)=R$ 的 $m\in\omega$ $^{\langle0,0\rangle}(2m)$;
(4) 对所有 $k\in C(s)$，以及所有满足 $\eta_\alpha<\gamma\le|y_k|$ 的极限 $\gamma\in\omega_1$，i f γ 是 c_k 和 $\gamma=\omega_1^{\mathcal{M}}$的一个极限点，其中某个可数合适模型 $\mathcal{M}$ 同时将 $y_k\restriction\gamma$ 和 $c_k\cap\gamma$ 作为元素，

[1]回顾一下，X_α 表示事实 3.19 给出的 α 的充分绝对代码。

以下命题在 $\mathcal{M}$中成立：“[Even(y_k) –min(Even(y_k))] $\cap \gamma$是某个极限序数 $\alpha \in \omega_2$ 的编码，且$\bar{S}_{\alpha+k}$ 是非平稳的。”

对于 $p = \langle\langle s,\ s^*\rangle,\ \langle c_k,\ y_k :\ k \in \omega\rangle\rangle$ 且 $q = \langle\langle t,\ t^*\rangle,\ \langle d_k,\ z_k :\ k \in \omega\rangle\rangle$在 $\mathbb{K}_\alpha$ 中，定义 q 扩展 p，并且当且仅当满足以下条件时记作 $q \leq p$：

(1) t 末端扩张 s、 $t^* \supseteq s^*$，且对于所有 $x \in s^*$，$(t \setminus s) \cap x = \emptyset$;

(2) 对于所有 $k \in C(t)$， d_k 末端扩张 c_k 和 $z_k \supseteq y_k$。

对于 $p = \langle\langle s,\ s^*\rangle,\ \langle c_k,\ y_k :\ k \in \omega\rangle\rangle \in \mathbb{K}_\alpha$，令 Fin($p$) $= \langle s,\ s^*\rangle$ 表示 p 的有限部分，令 Inf(p) $= \langle c_k,\ y_k :\ k \in \omega\rangle$ 表示 p 的无限部分。当 p, $q \in \mathbb{K}_\alpha$ 且 $q \leq p$ 时，我们称 q 是 p 的纯扩张，若 Fin(p) =Fin(q)。

命题 4.10 将证明 $\mathbb{K}_\alpha$ 的真性，以及 $\mathcal{A}_1$ 的保留。不过，为了证明这一点，我们还需要一些中间引理：

引理 4.5 （[FF10，引理 1]）。对于每个 $p = \langle\langle s,\ s^*\rangle,\ \langle c_k,\ y_k :k \in \omega\rangle\rangle$ 属于 $\mathbb{K}_\alpha$，以及每个 $\gamma \in \omega_1$，都存在一个纯扩张 $q \leq p$，使得 Inf(q) $= \langle d_k,$ $z_k :\ k \in \omega\rangle$，且 $|z_k| \geq \gamma$ 并且 max(d_k) $\geq \gamma$，对每个 $k \in \omega$ 均成立。

以下概念隐含地出现在 [FZ10] 中。

定义 4.6。对于条件 $p = \langle\langle s,\ s^*\rangle,\ \langle c_k,\ y_k : k \in \omega\rangle\rangle$ 属于 $\mathbb{K}_\alpha$，以及开稠密集 $D \subseteq \mathbb{K}_\alpha$，我们称 p 对 D 是预处理的，当且仅当对于每个扩张 $q = \langle\langle t,$ $t^*\rangle,\ \langle d_k,\ z_k : k \in \omega\rangle\rangle \leq p$，若 $q \in D$，则已经存在某个 t_2^*，使得 $q' = \langle\langle t,$ $t_2^*\rangle,\ \langle c_k,\ y_k : k \in \omega\rangle\rangle$是 $\mathbb{K}_\alpha$ 中扩张 p 的一个条件，并且 $q' \in D$。

注意，如果 $p \in \mathbb{K}_\alpha$ 针对 D 和 $r \leq p$经过预处理，那么 r 就针对 D经过预处理。

引理 4.7 ([FZ10，断言 9])。对于任意 $p \in \mathbb{K}_\alpha$ 和开稠密$D \subseteq \mathbb{K}_\alpha$，存在一个纯扩张 $q \leq p$，使得 q 针对 D经过预处理。

引理 4.8. 设 $q \in \mathbb{K}_\alpha \cap M$，其中 $M \prec H_\theta$ 是一个包含 $\mathbb{K}_\alpha$ 和 $\mathcal{A}_1$ 的可数初等子模型，并设 $Z \in M$ 是一个

用于 $\mathcal{I}(\mathcal{A}_1)^+$ 中某个元素的 $\mathbb{K}_\alpha$-名称。那么

$$W = \{m \in \omega \mid \exists p \leq q\ (\mathrm{Fin}(p) = \mathrm{Fin}(q) \wedge p \Vdash m\ \in \dot{Z})\}$$

是 $\mathcal{I}(\mathcal{A}_1)^+ \cap M$ 的一个元素。

证明。固定一个有限的 $F \subseteq \mathcal{A}_1 \cap M$。根据关于 Z 的假设，我们有 $q \Vdash_{\mathbb{K}_\alpha} Z \setminus \bigcup F \in [\omega]^\omega$。

引理 4.9。对于所有 $q \in \mathbb{K}_\alpha$ 和 X，若 $\mathbb{K}_\alpha$ 是 ω 的无限子集的一个名称，则存在 $p \leq q$，使得 $\mathrm{Fin}(p) = \mathrm{Fin}(q)$，并且存在 $m^p \in \omega$，使得 $p \Vdash m^p = X(j)$。

证明。固定上述的 $q = \langle\langle s, s^*\rangle, \langle c_k, y_k\colon k \in \omega\rangle\rangle$, X。考虑可数支撑积 $\mathbb{P}_s := \prod_{k\in C(s)} Q^{\eta_\alpha}(S_{\alpha+k}) \times \mathcal{L}^{\eta_\alpha}(Y_{\alpha+k})$，其中 $Q^{\eta_\alpha}(S_{\alpha+k})$ 由闭有界子集 $c_k \subseteq \omega_1 \setminus \eta_\alpha$ 构成，满足 $c_k \cap S_{\alpha+k} = \emptyset$，并按端延拓排序；偏序 $\mathcal{L}^{\eta_\alpha}(Y_{\alpha+k})$ 由函数 $y_k\colon |y_k| \to 2$ 构成，其定义域为 $|y_k|$，满足

- $|y_k| \in \omega_1 \setminus \eta_\alpha$ 是可数极限序数，且 $y_k \restriction \eta_\alpha = 0$;
- 偶数$(y_k) = (\{\eta_\alpha\} \cup (\eta_\alpha + X_\alpha)) \cap |y_k|$;
- 对于所有 $\gamma \leq |y_k|$，如果 $\gamma = \omega_1^{\mathcal{M}}$对于一个合适的 $\mathcal{M}$，满足 $y_k \restriction \gamma \in \mathcal{M}$且 γ 是 c_k的极限点，那么 $\mathcal{M} \models$“Even(y_k) 是某个 $\alpha \in \omega_1$ 的编码，且 $\overline{S_{\alpha+k}}$ 是非平稳的”。

$\mathcal{L}^{\eta_\alpha}(Y_{\alpha+k})$ 按末端扩张排序。为简化记号，以下省略上标 η_α。$\mathbb{P}_s$ 上的序由 $\langle d_k, z_k\colon k \in \omega\rangle \leq \langle c_k, y_k\colon k \in \omega\rangle$ 给出：当且仅当 d_k 是 c_k 的末端扩张且 $z_k \supseteq y_k$时，$d_k, z_k) \leq_{Q(S_{\alpha+k}\times\mathcal{L}(Y_{\alpha+k})} (c_k, y_k)$。这里，$\leq_{Q(S_{\alpha+k})}$ 表示定义 3.2 中俱乐部射击强迫的排序，不过作了如下修改：条件是只包含严格大于 η_α的序数的闭有界子集。同样，$\leq_{\mathcal{L}(Y_{\alpha+k})}$ 表示定义 3.8 中定位强迫的扩展关系，其中被定位的 Σ_1-公式为 $\varphi(\omega_1, X_\alpha)$，它断言：“Even$(y_k)$ –min(Even(y_k)) 是某个 $\alpha \in \omega_1$的编码，且 $S_{\alpha+k}$ 是非平稳的。”注意，如果 $\langle c_k, y_k\colon k \in \omega\rangle \Vdash_{\mathbb{P}_s}$

. $\dot{X}(j) = m_j$，那么 $\langle\langle\emptyset, \emptyset\rangle, \langle c_k, y_k : k \in \omega\rangle\rangle \Vdash_{\mathbb{K}_\alpha} \dot{X}(j) = m_j$。此外，$\mathbb{P}_s$ 是 $\mathbb{P}_\emptyset$的完备子序。

对于所有 $k \in C(s)$，求出 c'_k, y'_k 使得 $c'_k \leq_{Q(S_{\alpha+k})} c_k$ 且 $y'_k \leq_{\mathcal{L}(Y_{\alpha+k})} y_k$，并且 $(c_k, y_k) \Vdash_{Q(S_{\alpha+k})\times\mathcal{L}(Y_{\alpha+k})} \dot{X}(j) = \check{m}_j$ 对某个 $m_j \in \omega$ 成立。于是 $\langle c'_k, y'_k : k \in \omega\rangle \in \mathbb{P}_s$ 是 . 的扩张$\langle c_k, y_k : k \in \omega\rangle$ 并强制 $\dot{X}(j) = \check{m}_j$。因此 $\langle \mathrm{Fin}(q)\ \langle c'_k, y'_k : k \in \omega\rangle\rangle \leq_{\mathbb{K}_\alpha} q$ 并决定 $\dot{X}(j)$。□

. 现在，令 X 为 $Z \setminus \bigcup F$ 的一个 $\mathbb{K}_\alpha$-名称，对于每个 $k \in \omega$，存在 $j > k$ 以及 $\mathbb{K}_\alpha$ 中的一个纯扩张 $q_j \leq q$，并且存在$m_j \in \omega$，使得 $q \Vdash \dot{X}(j) = \check{m}_j$。于是

$$Y_k = \{m_j \mid j > k, q_j \leq q \wedge q_j \Vdash \check{m}_j = \dot{X}(j)\}$$

是一个见证 $W \setminus \bigcup F$为无限集的无限集。 □

命题 4.10. 对于每个 $p = \langle\langle s, s^*\rangle, \langle c_k, y_k : k \in \omega\rangle\rangle \in \mathbb{K}_\alpha$，每个足够大的可数初等子模型 θ $M \prec H_\theta$（包含 p，$\mathbb{K}_\alpha$，$\mathcal{A}_1$），以及每个 $B \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_1)$，若对所有 $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_1)^+ \cap M$，$B \cap Y$都是无限集，且 $M \cap \omega_1 = j \notin \bigcup_{k\in C(s)} S_{\alpha+k}$，那么存在一个 $(M, \mathbb{K}_\alpha, \mathcal{A}_1, B)$-泛型条件 $q \leq p$，使得 $\mathrm{Fin}(q) = \mathrm{Fin}(p)$。

证明。令 θ 为一个足够大的正则基数，并令 $M \prec H_\theta$为一个包含 p、$\mathbb{K}_\alpha$ 和 $\mathcal{A}_1$的可数初等子模型，使得 $j = M \cap \omega_1 \notin \bigcup_{k\in C(s)} S_{\alpha+k}$。取定 $B \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_1)$，使得对所有 $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_1)^+ \cap M$，$B \cap Y$都是无限集。令 $\{D_n \mid n \in \omega\}$ 枚举 M中 $\mathbb{K}_\alpha$ 的所有开稠密子集，并令 $\{Z_n \mid n \in \omega\}$ 枚举 M 中所有 $\mathbb{K}_\alpha$-名称（它们是 ω 的子集），且这些名称被强制属于 $\mathcal{I}(\mathcal{A}_1)^+$，并使每个名称都出现无限多次。令 $\langle j_n : n \in \omega\rangle$为一个递增的、趋于 j的序数共尾序列。我们归纳地定义一个下降序列 $\langle q_n : n \in \omega\rangle \subseteq M \cap \mathbb{K}_\alpha$，其中 $q_n = \langle\langle s、 s^*\rangle、 \langle d^n_k、 c^n_k : k \in \omega\rangle\rangle$，并满足：

(1) $d^0_k = c_k$, $z^0_k = y_k$; (2) 对所有 $n \in \omega$ 和 $k \in C(s)$，d^{n+1}_k 是 d^n_k和 $z^{n+1}_k \supseteq z^n_k$的末端扩张；

(3) $\max(d_k^{n+1})$ $|z_k^{n+1}| \geq j_n$; (4)

q_{n+1} 是为 D_n预处理的；(5)

$q_{n+1} \Vdash (Z_n \cap B) \setminus n \neq \emptyset$。

假设 q_n 已构造完成。首先用纯扩张 q'_n 扩张 q_n，使得 q_n 是针对 D_n 的预处理。接下来令

$$W_{n+1} = \{m \in \omega \mid \exists r \leq q'_n(\mathrm{Fin}(r) = \mathrm{Fin}(q) \wedge r \Vdash m \in \dot{Z}_n)\}.$$

由引理 4.8，$W_{n+1} \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_1)^+$，固定 $m_n \in \omega$，使得 $m_n > n$ 且 $m_n \in W_{n+1} \cap B$。令 $r \leq q'_n$ 由 $m_n \in W$ 给出，并令 $q_{n+1} \leq r$ 为 r 的一个纯扩张，使得 $\max(d_k^{n+1}) \geq j_n$ 且 $|z_k^{n+1}| \geq j_n$。那么 q_{n+1} 满足上述条件，从而完成归纳构造。

对所有 $k \in C(s)$，令 $d_k = \bigcup_{n\in\omega} d_k^n \cup \{j\}$ 和 $z_k = \bigcup_{n\in\omega} z_k^n$；对于 $k \notin C(s)$，令 $d_k = z_k = \emptyset$。定义 $q := \langle\langle s, s^*\rangle, \langle d_k, z_k: k \in \omega\rangle\rangle$。那么 $q \in \mathbb{K}_\alpha$，这可以按照引理 4.7 的证明进行验证。剩下要证明 q 是一个 $(M, \mathbb{K}_\alpha, \mathcal{A}_1, B)$-泛型条件。

首先，我们通过证明对于所有的 $n \in \omega$，$D_n \cap M$ 在 q 以下都是稠密的，来说明 q 是 $(M, \mathbb{K}_\alpha)$-泛型。固定 n，并令 $r = \langle\langle t, t^*\rangle, \langle d'_k, z'_k: k \in \omega\rangle\rangle \leq q$，且不妨设 $r \in D_n$。那么，由于 $r \leq q_{n+1}$ 且 q_{n+1} 已针对 D_n 预处理，存在 $r' = \langle\langle t, t_2^*\rangle, \langle d_k^{n+1}, z_k^{n+1}: k \in \omega\rangle \leq q_{n+1}$，其中某个有限的 $t_2^* \in M$，使得 $r' \in D_n$ 已经成立。显然，$r' \in M$。于是 r 和 r' 相容，见证它们相容的条件是 $\langle\langle t, t^* \cup t_2^*\rangle, \langle d'_k, z'_k: k \in \omega\rangle\rangle$。

最后，对于所有的 $n \in \omega$，我们有 $q \Vdash |Z_n \cap B| = \omega$。任取一个 $r \leq q$。找出 $i > \ell$ 使得 $Z_i = Z_n$；于是 $r \leq q_{i+1}$，因此由于 q_{i+1} 满足性质 (5)，我们有

$$r \Vdash \emptyset \neq (\dot{Z}_i \cap B) \setminus i = (\dot{Z}_n \cap B) \setminus i \subseteq (\dot{Z}_n \cap B) \setminus \ell.$$

由于 ℓ 是任意的，这表明 q 强迫 $Z_n \cap B$ 是无限的，因此 q 是一个 $(M, \mathbb{K}_\alpha, \mathcal{A}_1, B)$-泛型条件。□

令 H_α 在 $V[G_\alpha]$ 上是 $\mathbb{K}_\alpha$-泛型的，并设 $Y_k^\alpha = \bigcup_{p\in H_\alpha} y_k$, $C_k^\alpha = \bigcup_{p\in H_\alpha} c_k$, $a_\alpha = \bigcup_{p\in H_\alpha} s$, $\mathcal{A}_{\alpha+1}^2 = \mathcal{A}_2 \cup \{a_\alpha\}$。下面的引理给出了用 $\mathbb{K}_\alpha$ 进行强迫的推论。

引理 4.11 ([FZ10，命题 11])。 以下结论成立。

(1) $a_\alpha \in [\omega]^\omega$ 与 $\mathcal{A}^2_\alpha$的所有元素几乎不交；(2) 对所有 $i \in \omega$, $a_\alpha \cap x_i$ 都是无限的；(3) 对所有 $m \in \Delta(a_\alpha)$, C^α_m 是 ω_1 中的闭无界集，使得 $C^\alpha_m \cap S_{\alpha+m} = \emptyset$，并且对所有 $\xi \in \omega_1$, $\xi \in C^\alpha_m$ 当且仅当$a_\alpha \cap R_{\langle m}$时，$\xi\rangle$ 是有限的；(4) 对所有 $m \in \Delta(a_\alpha)$, Y^α_m: $\omega_1 \to 2$ 是一个全函数，并且对所有$\xi \in \omega_1$, $Y^\alpha_m(\xi) = 1$ 当且仅当 $a_\alpha \cap R_{\langle \omega+m}$时，$\xi\rangle$ 是有限的；(5) 对所有 $n \in \omega$, $n \in Z_\alpha$ 当且仅当存在 $m \in \omega$ ，使得$(a_\alpha \cap R_{\langle 0,0\rangle})(2n) = R_{\langle 0,\ 0\rangle}(2m)$；(6) 对每个 $r \in \mathcal{R}$ 以及有限的 $A' \subseteq \mathcal{A}^2_{\alpha+1}$, $|E(r) \setminus \bigcup A'| = |O(r) \setminus \bigcup A'| = \omega$。

引理 4.12 ([FZ10，推论 12])。 $\mathbb{K}_\alpha$ 是 S_{-1}-适当的。此外，对于每个 $p = \langle\langle s,\ s^*\rangle\colon \langle c_k,\ y_k\colon k \in \omega\rangle\rangle \in \mathbb{K}_\alpha$，子偏序集 $\mathbb{K}_\alpha \restriction p = \{r \in \mathbb{K}_\alpha \mid r \leq p\}$ 是 $(\omega_1 \setminus \bigcup_{n\in C(s)} S_{\alpha+n})$-适当的。

这就完成了 $\langle \mathbb{P}_\alpha,\ \mathbb{Q}_\beta\colon \alpha \leq \omega_2,\ \beta < \omega_2\rangle$ 的定义。

推论 4.13。 $\mathbb{P}_{\omega_2}$ 是 S_{-1}-适当的，并且强保持 $\mathcal{A}_1$ 的紧致性。此外，对于所有 $m \in \omega \setminus \Delta(a_\alpha)$, $S_{\alpha+m}$ 在 $L[G]$ 中仍然是平稳的。

证明。 由命题 4.10、引理 4.12 和 3.6 得出。 □

引理 4.14 ([FZ10，引理 13])。 若 G 在 L上是 $\mathbb{P}$-泛型的，那么在 $L[G]$中，$\mathcal{A}_2$ 可由以下 Π^1_2 公式定义：

$$a \in \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \forall \mathcal{M}[(\mathcal{M} \text{ 是可数合适模型},\ a \in \mathcal{M})$$
$$\exists \overline{\alpha} < \omega_2^{\mathcal{M}}(\mathcal{M} \models \forall m \in \Delta(a)(S_{\overline{\alpha}+m} \text{ is nonstationary})]$$

有了这一点，我们就可以证明本节的主要定理了：

定理 *4.1* 的证明 令 $\mathbb{P}$ 为上述定义的可数支撑迭代，令 G 为在 L 上的 $\mathbb{P}$-泛型，并令 $\mathcal{A}_2 = \{a_\alpha \mid \alpha < \omega_2\}$，其中 $a_\alpha = \dot{a}^G_\alpha$，且 $\dot{a}_\alpha$ 是由 $\mathbb{Q}_\alpha$ 添加的泛型实数。根据引理 4.11 的第 (1) 项，$\mathcal{A}_2$ 是由 ω 的无限子集构成的几乎不交族。为证明它是紧致的，假设存在 $\{x_i \mid i \in \omega\} \in L[G]$，使得对每个 $i \in \omega$ 都有 $x_i \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_2)^+$。那么存在 $\alpha < \omega_2$ 使得 $\langle x_i\colon\ i \in \omega\rangle \in L[G_\alpha]$，其中 $G_\alpha = G \cap \mathbb{P}_\alpha$，因此存在一个由 $\mathbb{P}_\alpha$-名称组成的序列 $\langle \dot{x}_i\colon\ i \in \omega\rangle \in L_{\omega_2}$，使得

$x_i = \dot{x}_i^{G_\alpha}$。由于 $F^{-1}(\langle \dot{x}_i : i \in \omega\rangle)$ 在 ω_2 中无界，存在 $\beta \geq \alpha$，使得 $F(\beta) = \langle \dot{x}_i : i \in \omega\rangle$。根据 $\mathbb{Q}_\beta$ 的定义以及引理 4.11 的第 (2) 项，对于所有 $i \in \omega$，$a_\beta \cap x_i$ 在 $L[G_\beta]$ 中都是无限的，其中 a_β 是 $\mathbb{Q}_\beta$-泛型实数。由于 $a_\beta \in \mathcal{A}_2$，我们有（$\mathcal{A}_2$ 是紧致的）$^{L[G]}$。根据引理 4.14，$\mathcal{A}_2$ 在 $L[G]$ 中是 Π^1_2-可定义的。

由于 $\mathcal{A}_1 \in L$ 在 L 中是 Π^1_1-可定义的，根据 Shoenfield绝对性，$\mathcal{A}_1$ 在 $L[G]$ 中仍然是 Π^1_1-可定义的。根据命题 4.10，对于每个 $\alpha < \omega_2$，$\mathbb{Q}_\alpha$ 都是一个 $\mathbb{P}_\alpha$ 名称，表示一种能强保持 $\mathcal{A}_1$ 的紧致性的真强迫。因此 $(\mathfrak{a} = |\mathcal{A}_1| = \aleph_1 < \mathfrak{c} = \aleph_2 = |\mathcal{A}_2|)^{L[G]}$。□

5. 星座与可定义性

有了上述结果，我们现在可以证明主要定理 .

定理 5.1. $\aleph_1 = \mathfrak{a} < \mathfrak{s} = \aleph_2$ 成立是相容的：存在一个Δ^1_3 实数的良序，以及基数为$\aleph_1$ 和 $\aleph_2$的紧 *mad* 族，它们分别是 Π^1_1 可定义和 Π^1_2 可定义的。

证明。 我们在 $V = L$ 的一个模型中工作。以下结果可仿照引理 3.15 得到，使用索洛维定理：存在 ω_1 个两两不交的驻定子集，它们是 ω_1的子集；并使用相对化的 $\diamondsuit$ 序列 $\diamondsuit_T$ 来处理驻定的 $T \subseteq \omega_1$；在 $V = L$ 下，对任意这样的 T，断言 $\diamondsuit_T$ 成立。

引理 5.2。 存在两两不相交的平稳子集 $\{T_i\}_{i\in 3}$属于 ω_1，使得对每个 $i \in 2$，都有一个序列 $\vec{S}^i = \langle S^i_\alpha \subseteq T_i : \alpha < \omega_2\rangle$，其中的元素是 ω_1的平稳余平稳子集；对于不同的 α，$\beta < \omega_2$，$S^i_\alpha \cap S^i_\beta$ 有界。此外，只要 $\mathcal{M}$，$\mathcal{N}$是适当模型且满足 $\omega_1^{\mathcal{M}} = \omega_1^{\mathcal{N}}$，那么 $\langle (S^i_\alpha)^{\mathcal{M}} : \alpha < \omega_2^{\mathcal{M}} \cap \omega_2^{\mathcal{N}}\rangle = \langle S^i_\alpha{}^{\mathcal{N}} \alpha < \omega_2^{\mathcal{M}} \cap \omega_2^{\mathcal{N}}\rangle$ ( ) : 。

设 $\mathcal{A}_1$ 是一个余解析紧 mad 族，并固定一个 Σ_1-可定义的记账函数 F: $\mathrm{Lim}\cap\omega_2 \to L_{\omega_2}$，以及一个 Σ_1-可定义的几乎不交族 $\mathcal{R}$，使得 $F, \mathcal{R}$ 与推论 3.1 的证明及定义 4.4 中的情形相同。定义一个可数支撑迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\beta : \alpha \leq \omega_2, \beta < \omega_2\rangle$，其中 $\mathbb{P}_0$ 是平凡强迫。令 G_α 是 L 上的 $\mathbb{P}_\alpha$-泛型；$L[G_\alpha]$ 的实数集上的良序 $<_\alpha$ 定义为

$\dot{}$与定理 3.1 的证明完全相同。令 $\mathbb{Q}_\alpha$ 是两步迭代 $\dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}^1_\alpha$ 的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，使得 $\dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha$ 是定义 2.12 中 $\mathbb{Q}$ 的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称。除非出现以下情形之一，否则 $\dot{\mathbb{Q}}^1_\alpha$ 是平凡强迫的一个 $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha$-名称。

$\dot{}$情形 I：α 是一个极限序数，并且 $F(\alpha) = \{b_i \mid i \in \omega\}$ 是一个由 $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha$-名称组成的序列，使得在 $V[G_\alpha]$中，$\dot{b}^G_i$是 $\mathcal{I}(\mathcal{A}^2_\alpha)^+$ 的一个元素，对每个 $i \in \omega$均如此。于是，令 $\dot{\mathbb{Q}}^1_\alpha$ 为关于同一个可数极限序数$\eta_\alpha \in \omega_1$的、用于定义 4.4 中强迫概念 $\mathbb{K}_\alpha$的一个 $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha$ 名称，并修改条目 (1)：令 $c_k \subseteq \omega_1 \setminus \eta_\alpha$ 为一个满足 $S^0_{\alpha+k} \cap c_k = \emptyset$的闭有界子集。

情形 II：$F(\alpha) = \{\sigma^\alpha_x, \sigma^\alpha_y\}$ 是 $L[G_\alpha]$中实数的两个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称组成的对，满足 $\sigma^\alpha_x <_L \sigma^\alpha_y$（即，$x = (\sigma^\alpha_x)^G <_\alpha y = (\sigma^\alpha_y)^G$）。在此情形下，定义 $\dot{\mathbb{Q}}^1_\alpha$为一个 $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}^0_\alpha$-名称，用于表示在推论 3.1 的证明中定义的 $\mathbb{Q}^1_\alpha = \mathbb{K}^0_\alpha * \mathbb{K}^1_\alpha * \mathbb{K}^2_\alpha$，但将 $\mathbb{K}^0_\alpha$的定义修改为：对于 $k \in \Delta(x_\alpha * y_\alpha)$，取 $\omega_1 \setminus S^1_{\alpha+k}$的闭有界子集。

至此，$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega_2}$的定义完成。注意，对所有$\alpha < \omega_2$，$\mathbb{Q}_\alpha$ 都是一个 $\mathbb{P}_\alpha$名称，对应于一个适当强迫概念、一个 $T_1 \cup T_2$-适当强迫概念，$\dot{}$或一个 $T_0 \cup T_2$-适当强迫概念；并且在每种情况下，$\mathbb{Q}_\alpha$ 都强保持 $\mathcal{A}_1$ 的紧致性。因此，$\mathbb{P}$是 T_2-适当的，因而既保持 ω_1，也保持 $\mathcal{A}_1$的紧致性。令 G 是 $\mathbb{P}$上的泛型。对每个 $\alpha < \omega_2$，$\mathbb{Q}_\alpha = \mathbb{Q}$ 都会添加一个不被基模型实数分裂的实数，因此 $(\mathfrak{s} = \aleph_2)^{L[G]}$。对共尾多个 $\alpha < \omega_2$，$\mathbb{Q}_\alpha$ 会添加一个无限的 $a_\alpha \subseteq \omega$，使得 $\mathcal{A}_2 = \{a_\alpha \mid \alpha < \omega_2\}$ 是在 $L[G]$中具有 Π^1_2 定义的紧致极大几乎不交族。此外，可以证明良序$<_G = \bigcup_{\alpha<\omega_2}$ 是 $L[G]$的实数的一个 Δ^1_3 良序，如定理 3.1所示。总之，我们得到 $L[G]$ 见证了该定理的结论。□

6. 总结性评论和问题

星座 $\aleph_1 = \mathfrak{b} < \mathfrak{a} = \mathfrak{s}$ 最初在 [She84]，中确立，并被证明与 [FF10]中的实数的 Δ^1_3 良序相容。在 [FZ10]中，证明了 $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ 与实数的 Δ^1_3 良序以及 $\mathfrak{a}$ 的紧致射影见证相容。在我们的结果中，$\mathfrak{a}$ 仍然很小，并具有可定义见证。不过，仍有一个值得关注的问题：

Q问题 6.1. $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ 是否与一个 Π^1_2 （紧致）mad 族相容?

Brendle 和 Khomskii [BK13]给出了一个含有 $\aleph_2 < \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ 及 Π^1_1 的见证的模型。这种构造却严重依赖于分裂族的保真性，因此仍有一个值得关注的问题:

问题 6.2. 是否与 $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ 甚至与 $\mathfrak{a} < \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$ 相容，使得存在基数为 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{c}$ 的余解析极大几乎不交族?

请注意，我们的结果严重依赖于可数支撑迭代的使用，因此我们的方法只能得到满足 $\mathfrak{c} = \aleph_2$ 的模型。一个自然的问题是:

问题 6.3. 是否相容于 $|\mathrm{spec}(\mathfrak{a})| \geq 3$，并且对于每个$\kappa \in \mathrm{spec}(\mathfrak{a})$，都存在一个基数为 κ 且具有最优定义的射影极大几乎不交族?

参考文献

[Abr10] Uri Abraham, 《适当强迫》, 《集合论手册》第1、2、3卷（Matthew Foreman和Akihiro Kanamori编），施普林格，多德雷赫特，2010年，第333–394页。[BFB22] Jeffrey Bergfalk、Vera Fischer和Corey Bacal Switzer, 《射影良序与余解析见证》, 《纯粹与应用逻辑年鉴》**173** （2022年），第8期，103135。[BHK76] James E. Baumgartner、Leo A. Harrington和Eugene M. Kleinberg, 《添加一个闭无界集》, 《符号逻辑杂志》**41** （1976年），第2期，481–482。[BHST22] Karen Bakke Haga、David Schrittesser和Asger Törnquist, 《极大几乎不交族、决定性与强迫》, 《数学逻辑杂志》**22**（2022年），第1期，论文编号2150026，42页。[BK13] Jörg Brendle和Yurii Khomskii, 《由完美几乎不交族构造的MAD族》, 《符号逻辑杂志》**78** （2013年），第4期，1164–1180。[Bla93] Andreas Blass, 《连续统的简单基数特征》, 《实数集合论》（拉马特甘，1991年），《以色列数学会议论文集》第6卷，巴伊兰大学，拉马特甘，1993年，第63–90页。[BPS80] Bohuslav Balcar、Jan Pelant和Petr Simon, 《超滤子的空间》 $\mathbb{N}$ 被无处稠密集覆盖, 《数学基础》**110** （1980年），第1期，11–24（英文）。

[Bri24] Will Brian，《将实数线划分为博雷尔集》，《符号逻辑杂志》89（2024年），第2期，549–568。[BY05] Jörg Brendle和Shunsuke Yatabe，《MAD族的强制不可毁性》，《纯粹与应用逻辑年鉴》132（2005年），271–312。[CF11] Andrés Eduardo Caicedo和Sy-David Friedman，《博雷尔强迫公理与实数的射影良序》，《符号逻辑杂志》76（2011年），第4期，1126–1136。[Cum10] James Cummings，《迭代强迫与初等嵌入》，《集合论手册》第1、2、3卷（Matthew Foreman和Akihiro Kanamori编），施普林格，多德雷赫特，2010年，第775–883页。[Dav82] René David，《一个非常绝对的 Π^1_2 实数单点集》，《数学逻辑年鉴》（1982年），第3期（2-3），101–120。[Dev17] Keith J. Devlin，《可构造性》，《逻辑展望》，剑桥大学出版社，2017年。[Dow95] Alan Dow，《面向拓扑学家的更多集合论》，《拓扑学及其应用》64（1995年），第3期，243–300。[FF10] Vera Fischer和Sy David Friedman，《基数特征与射影良序》，《纯粹与应用逻辑年鉴》161（2010年），第7期，916–922。[FFK13] Vera Fischer、Sy David Friedman和Yurii Khomskii，《余解析MAD族与可定义良序》，《数理逻辑档案》52（2013年），第7-8期，809–822。[FFST25] Vera Fischer、Sy David Friedman、David Schrittesser和Asger Törnquist，《良好的射影见证》，《纯粹与应用逻辑年鉴》176（2025年），第8期，论文编号103606，29页。[FFZ11] Vera Fischer、Sy-David Friedman和Lyubomyr Zdomskyy，《射影良序与连续统势大的MAD族》，《纯粹与应用逻辑年鉴》162（2011年），853–862。[Fis08] Vera Fischer，《界数与分裂数之间任意大的间距的一致性》，博士论文，约克大学，多伦多，安大略省，2008年。[FS19] Vera Fischer和Saharon Shelah，《独立性谱》，《数理逻辑档案》58（2019年），第7-8期，877–884。[FS21] Vera Fischer和David Schrittesser，《萨克斯强迫不可毁的余解析极大最终不同族》，《数学基础》252（2021年），第2期，179–201。[FS22] Vera Fischer和Saharon Shelah，《独立性谱，II》，《纯粹与应用逻辑年鉴》173（2022年），第9期，论文编号103161，9页。

[FS25] Vera Fischer 和 Lukas Schembecker，《将贝尔空间划分为紧集》，《数学基础》269 1，45 2025 69（），第 – 期。[FSS25] Vera Fischer、L. Schembecker 和 David Schrittesser，《紧余有限群》，《纯粹与应用逻辑年鉴》176（2025），103570。[FZ10] Sy-David Friedman 和 Lyubomyr Zdomskyy，《射影极大几乎不交族》，《纯粹与应用逻辑年鉴》161（2010年），第12期，1581–1587。[GHT20] Osvaldo Guzman、Michael Hrušák 和 Osvaldo Tellez，《受限极大几乎不交族》，《符号逻辑杂志》85 1，149 2020 165（），第 – 期。[Göd39] 库尔特·哥德尔，《广义连续统假设的一致性证明》，《美国国家科学院院刊》25（1939），第4期，220–224。[Gol93] Martin Goldstern，《用于强迫构造的工具》，《实数集合论》（拉马特甘，1991），《以色列数学会议论文集》第6卷，巴伊兰大学，拉马特甘，1993年，第305–360页。[Gol98] ，《适当强迫浅尝》，《集合论》（多德雷赫特）（Carlos Augusto Di Prisco、Jean A. Larson、Joan Bagaria 和 A. R. D. Mathias 编），施普林格·荷兰，1998年，第71–82页。[Har77] Leo Harrington，《长射影良序》，《数理逻辑年刊》12（1977），第1期，1–24页。[Hec72] Stephen H. Hechler，《 $\beta N \setminus N$ 中的短完备嵌套序列与小的极大几乎不交族》，《一般拓扑及其应用》2（1972），139–149页。[HGF03] Michael Hrušák 和 Salvador García-Ferreira，《按 Katětov 方式对极大几乎不交族排序》，《符号逻辑杂志》68 4，1337 2003 1353（），第 – 期。[Hru01] Michael Hrušák，《极大几乎不交族与有理数》，《布拉格查理大学数学评论》42（2001），第2期，345–352页。[Jec97] Thomas Jech，《集合论》，第2版，《逻辑展望》，施普林格出版社，柏林、海德堡，1997年。[Jec03] ，《集合论：第三个千年版》，修订扩充第3版，《施普林格数学专著》，施普林格出版社，柏林、海德堡，2003年。[Kur01] Miloš S. Kurilić，《柯恩稳定的整数子集族》，《符号逻辑杂志》66（2001），第1期，257–270页。[Mal89] V. I. Malykhin，《柯恩泛型扩张的拓扑性质》，《莫斯科数学会会刊》52（1989），3–33，247。[Mat77] Adrian R. D. Mathias，《快乐族》，《数理逻辑年刊》12（1977），第1期，59–111页。

[Mil89] Arnold W. Miller，《无限组合学与可定义性》，《纯粹与应用逻辑年鉴》**41**（1989），第2期，179–203页。[NN18] Itay Neeman 和 Zach Norwood，《中的快乐族与极大几乎不交族》 $l(\mathbb{R})$，《符号逻辑杂志》**83**（2018），572–597页。[Rag09] Dilip Raghavan，《函数的极大几乎不交族》，《数学基础》**204**（2009），第3期，241–282页。[RS99] Andrzej Rosłanowski 和 Saharon Shelah，《可能性上的范数。I：使用树与生物的强迫》，《美国数学会回忆录》，美国数学会，1999年。[She82] Saharon Shelah，《真强迫》，《数学讲义》第940卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1982年。[She84] , 连续统的基数不变量，《公理化集合论》（博尔德，科罗拉多州，1983），《当代数学》第31卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1984年，第183–207页。[She17] , 真强迫与非真强迫，第2版，《逻辑展望》，剑桥大学出版社，2017年。[SJ70] Robert B. Solovay 和 Ronald M. Jensen，《几乎不交集的一些应用》，《数理逻辑与集合论表述》（1970），84–104页。[SS15] Saharon Shelah 和 Otmar Spinas，《MAD谱》，《符号逻辑杂志》（2015），第80期，243–262页。[Tö18] Asger Törnquist，《可定义性与几乎不交族》，《数学进展》**330**（2018），61–73页。

维也纳大学数学研究所，Kolingasse 14-16，奥地利维也纳 1090电子邮件地址：vera.fischer@univie.ac.at

维也纳大学数学研究所，Kolingasse 14-16，奥地利维也纳 1090电子邮件地址：julia.marie.millhouse@univie.ac.at