arXiv:2601.08767v1 [math.GT] 13 Jan 2026

区分 用 Heegaard Floer 同调区分异态 $\mathbb{R}^4$'s

SEAN ELI、JENNIFER HOM 和 TYE LIDMAN

ABSTRACT. 将卡森把手附着到切片圆盘补上，会得到一个与 $\mathbb{R}^4$ 同胚的光滑 4-流形。我们证明，如果两个切片纽结的结 Floer 同调差异足够大，那么用最简单的正 Casson 把手构造出的异态 $\mathbb{R}^4$'s 彼此并不同胚，从而得到一个可数无穷的两两不同胚的手性异态 $\mathbb{R}^4$'s。我们的主要工具是 Gadgil 端 Floer 同调，并利用它构造出具有各种现象的异态 $\mathbb{R}^4$ 族。作为应用，我们重新证明 Biˇzaca-Etnyre 的一个结果：$Y \times \mathbb{R}$，其中 Y 是任意闭三维流形，具有无穷多个不同的光滑结构。

1. 引言

光滑流形拓扑中一个令人惊讶、且为四维所独有的现象，是存在异态 $\mathbb{R}^4$'s：它们是与 $\mathbb{R}^4$同胚、但不同胚的光滑流形。这些流形于 20 世纪 80 年代首次被证实存在，其依据是 4-流形的 [Don83]-余边界定理在光滑范畴中的失效（Donaldson [Fre82]），以及在拓扑范畴中的成功（Freedman h）。发现这些流形后不久，相关研究取得了一系列进展 [Gom85，Tau87，DMF92，Gom93，BG96]，推动了异态 $\mathbb{R}^4$'s 分类问题的研究，但这一领域中许多基本问题至今仍未解决 [BG96，GS99，Tay97]。

我们考虑切片 $\mathbb{R}^4$的，它们是潜在的异态 $\mathbb{R}^4$，通过将卡森把手附加到切片圆盘补上并移除剩余边界而得到。示例见图1 。一个自然的问题是，这种构造何时会产生彼此不同的异态 $\mathbb{R}^4$。在卡森把手固定而改变切片圆盘补的情况下，目前已知只能得到一种异态 $\mathbb{R}^4$的微分同胚类型。我们利用 K的结 Floer 同调区分出一个无限族。

定理 1.1。令 $\mathcal{R}$ 由将卡森把手 CH^+ 附加到非平凡切片结 K 的切片圆盘补 $(B^4, S^3) - \nu(D^2, K)$ 并移除边界而得到。

(1) 流形 $\mathcal{R}$ 是一个异态 $\mathbb{R}^4$。*(2)* 此外，若 K_1 和 K_2 是两个非平凡切片结，且其结 *Floer* 同调 $\widehat{HFK}_{\mathrm{red}}$的最大非平凡 *Maslov* 分次不同，那么按上述方式构造的异态 $\mathbb{R}^4$'s $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 在任意定向选择下都不微分同胚。

这些异态 $\mathbb{R}^4$'具有手性。定义见第6 节中关于 $\widehat{HFK}_{\mathrm{red}}$的说明。（对于非平凡、薄的切片纽结，$\widehat{HFK}_{\mathrm{red}}$的最高非平凡分次与$\widehat{HFK}$的相同。）请注意，上述结果不依赖于切片圆盘的选择。证明依赖于 Gadgil 端 Floer 同调[Gad10]。

定理1.1 立即给出无穷多个由同一个卡森把手构造的切片 $\mathbb{R}^4$'：

推论 1.2。令 K_n 表示带状结 $T_{2,\,n}\#T_{2,\,-n}$，其中 $n \geq 3$ 为奇数。则如定理 $\mathbb{R}^4$所示，使用标准圆盘补空间构造的异态 $\mathcal{R}_n$，两两之间均不同胚。*1.1*。

SE 部分经费由 NSF 拨款 DMS-2203312 资助。JH 部分经费由 NSF 拨款 DMS-2104144 和 DMS-2506400，以及佐治亚理工学院 Elaine M. Hubbard Faculty Fellowship 资助。TL 部分经费由 NSF 拨款 DMS-2105469 和 DMS-2506277，以及 Simons Travel Support 奖项资助。

定理 $\mathbb{R}^4$中的异态1.1 是使用卡森把手 CH^+ 构造的，其每一阶段都只有一个正双重点。考虑定向可知，任何使用最简单的全负卡森把手 $\mathbb{R}^4$ 构造的切片 CH^- 都是异态；根据定理 1.1 (2)，我们可以区分这一族中的各个成员。此外，这表明，任何使用线性链卡森把手构造、且只有有限个同号双点的切片 $\mathbb{R}^4$ 都是异态：参见注记 7.3。我们也可以理解 $\mathbb{R}^4$使用更一般的卡森把手构造的切片，并得到性质不同于定理 1.1中那些异态的异态：

定理 1.3. 设 K 是一个非平凡切片结的 *Whitehead* 加倍，并设 $\mathcal{R}$ 由将一个卡森把手 *CH* 附接到切片圆盘补 $(B^4, S^3) - \nu(D^2, K) - \nu$ 并移除边界而构造。如果 *CH* 有一条无限正链，则有：

(1) $\mathcal{R}$ 是一个异态 $\mathbb{R}^4$。*(2)* 此外，如果 *CH* 有一条无限负链，那么 $\mathcal{R}$ 不与定理 $\mathbb{R}^4$ *1.1* 中任意选取定向的任何异态微分同胚。

一个具有无限负链和无限正链的卡森把手示例是 CH^*，其截断图见图 3。具有无限正链的卡森把手类包括 Gompf 所描述的 Stein 卡森把手 [GS99]，，这些把手正是 Gadgil 的切片 $\mathbb{R}^4$'s [Gad10] 中使用的把手。特别是，定理 11.3 的第 ($\mathbb{R}^4$1) 项给出了另一种证明：当起始纽结是 Whitehead 加倍时，Gadgil 的切片

定理 $\mathbb{R}^4$1.3 第（2）项中给出的异态4-流形 无论选择何种定向，其端 Floer 同调均不消失；这与定理 $\mathbb{R}^4$1.1 中的异态4-流形不同。与此相对，我们还有另一类异态 $\mathbb{R}^4$ 4-流形，无论选择何种定向，都与定理 1.1或 1.3中的流形均不微分同胚：

定理 1.4。 令 $\mathcal{R}$ 由将卡森把手 CH^+ 粘到非平凡切片结 K 的切片圆盘补$(B^4, S^3) - \nu(D^2, K)$ 上并移除边界而构造得到。流形 $\mathcal{R}\natural\mathcal{R}$是一个异态 $\mathbb{R}^4$，无论选择何种定向，其端 *Floer* 同调均消失。*</output>*

推论 $\mathbb{R}^4$1.2 中的异态 $\mathcal{R}_n$ 4-流形 $\mathcal{R}_n$ 的异态 $\mathcal{R}_n$ 4-流形

定理 1.5。 设 Y 是任意闭 *3* 维流形，不一定可定向。那么 $Y \times \mathbb{R}$ 有无穷多个彼此不同胚的光滑结构。

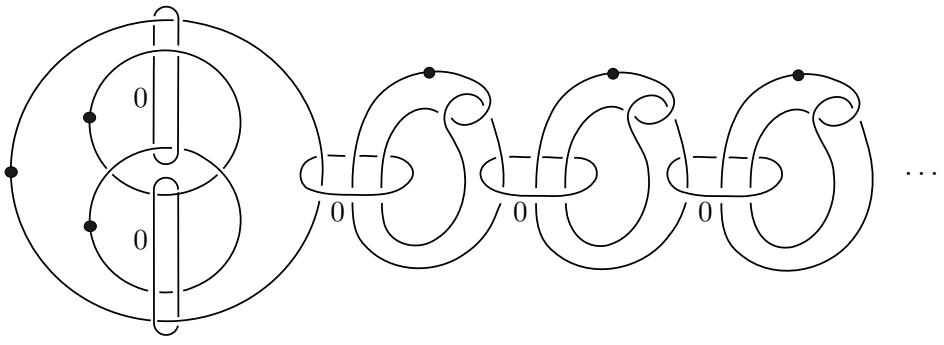


FIGURE 1. 通过将卡森把手 CH^+ 附加到 $T_{2,3}\# - T_{2,3}$ 的带状圆盘补而得到的异态的 Kirby 图。

1.1. 背景与语境。回顾一下，带状 $\mathbb{R}^4$'s [DMF92,BG96] 是异态 $\mathbb{R}^4$'s 的一个子族，它们嵌入于 $\mathbb{R}^4_{\text{std}}$，并且具有显式的 Kirby 图。这些异态 $\mathbb{R}^4$'s 最初是在闭 4-流形之间的非乘积 h-余边界内部发现的，并包围着其中的非乘积部分。带状 $\mathbb{R}^4$'s 有一种简单的描述：选取 B^4 中的一个带状圆盘补，沿被删去圆盘的子午线附加一个 0-框架卡森把手，然后删去剩余的边界。（有关卡森把手的更多细节，参见第2节。）根据 Freedman 定理——卡森把手与开 2-把手同胚——以此方式构造的任意流形都与 $\mathbb{R}^4$ 同胚。这种简单的描述使人们得以从多个角度研究带状 $\mathbb{R}^4$'s，包括微分同胚群 [Gom93], 、黎曼几何 [CMM24], 和 Floer 同调[Gad10]。然而，自 90 年代提出这一问题以来，关于如何精确理解带状结、圆盘和卡森把手的选择如何影响带状 $\mathbb{R}^4$ 的微分同胚类型，进展一直有限 [BG96, DMF92]。类似地，也可以定义切片 $\mathbb{R}^4$'s 并提出相同的问题；本文关注的是这一可能更大的类别。

下面总结先前的结果。若一个光滑流形与 $\mathbb{R}^4$ 异态同胚，但不同胚于标准的 $\mathbb{R}^4$，则称它为异态流形。

(1) 若将平凡结及其标准圆盘补空间与任意卡森把手结合，所得即为标准的 $\mathbb{R}^4$。这可由 [Fre82] 中概述的吞入论证得出。Gompf 指出，若使用平凡结、任意切片圆盘以及任意卡森把手，所得也为标准对象。这是因为 Casson 的证明表明，平凡结的切片圆盘的 Whitehead 加倍是标准的。(2) 假设 $(W^5;\, X_1, X_2)$ 是两个闭 4-流形组成的异种对之间的 h-余边界。De Michelis 和 Freedman [DMF92] 证明，存在一个带状 $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{R}$ 以及一个拓扑平凡的适当 h-余边界 $(U;\, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1) \subset (W^5;\, X_1, X_2)$，其中 $W - U$ 是光滑乘积，且 $\mathcal{R}_0 \cong \mathcal{R}_1 \cong \mathcal{R}$。一般而言，这个 $\mathcal{R}$ 由带状链环补构成。在 [DMF92]中，他们证明，通过改变卡森把手并保持圆盘补空间不变，可以得到不可数多个彼此不同的带状 $\mathbb{R}^4$。这一结果由基数论证得出，特别是，目前尚不清楚哪些具体的卡森把手会产生不同的微分同胚类型。(3) Biˇzaˇca-Gompf [BG96], 使用一个圆盘（对应于 $(-3,-3,3)$-椒盐结）和最简单的卡森把手 CH^+构造出的"最简单带状 $\mathbb{R}^4$"是异态的：虽然尚不清楚它是否以所需方式明确出现在某个 h-余边界中，但它与另一个具有此性质的异态 $\mathbb{R}^4$ 足够相似，因此可以采用类似的论证证明其奇异性。(4) Biˇzaˇca-Gompf 的最简单带状 $\mathbb{R}^4$ 在 [BG96] 中被证明不允许存在一个保定向微分同胚将其映到镜像上；该镜像是一个带状 $\mathbb{R}^4$，它使用了对应于 $(3,3,-3)$-椒盐结的标准圆盘，以及一个所有交叉均为负的最简单卡森把手。在本研究之前，这是唯一已知的、能够区分由不同带状圆盘补空间构成的带状 $\mathbb{R}^4$ 的结果。(5) 对任意切片圆盘补空间，都存在某个卡森把手，使所得的切片 $\mathbb{R}^4$ 为异态。Gadgil [Gad10] 利用端 Floer 同调得到了这一结果；端 Floer 同调是 Heegaard Floer 同调的一个直极限。该结果也可由定理 1.1 的第 (1) 项推出。由 Gadgil 的证明可知，从 Stein 卡森把手的某个适当子族中选取任意卡森把手 [GS99]，都会得到一个异态 $\mathbb{R}^4$。这一结果无法区分这些异态 $\mathbb{R}^4$。

我们指出，上述（4）中的这对是此前唯一已知的、由非平凡且不同的切片纽结制成的切片 $\mathbb{R}^4$ 之间能够被区分的例子；注意，它们互为镜像，因此是反定向微分同胚的。

关于这些先前的结果，早期证明奇异性的方式是间接的，而且只适用于在特殊情况下出现的某些缎带 $\mathbb{R}^4$ 的情形；Gadgil 端 Floer 同调 [Gad10] 是相对较新的突破，它提供了首个能够检测一般缎带何时

$\mathbb{R}^4$ 是异态的。其核心思想是，任何异态 $\mathbb{R}^4$ 都可分解为一个紧致 4-流形与一列无限延伸的余边界的组合。粗略地说，端 Floer 同调是这列无限余边界所诱导的协边映射下 Heegaard Floer 模的直极限。利用端 Floer 不变量 $HE(X)$，Gadgil 证明，对于任意切片圆盘补，都存在某个卡森把手，使得由此得到的缎带 $\mathbb{R}^4$ 具有非零端 Floer 同调，因此与 $\mathbb{R}^4$不同胚。此外，Gadgil 证明这一结果时并未完整描述群$HE(X)$：只需证明该群非平凡即可。

本文细化了 Gadgil 关于可容许余边界的概念，以便赋予 $HE(X)$ 一个定义良好的绝对 $\mathbb{Q}$-分次。借助这一点，并仔细分析 2-把手余边界映射，我们得以利用端 Floer 同调证明 1.1 和推论1.2。

注 1.6。 运用与定理1.5 证明中类似的技巧，我们可以区分该 $\mathcal{R}_n$的各种端和。见下文注7.9。

定理 1.5 中构造的 $Y \times \mathbb{R}$ 的任意异态光滑结构，其 Taylor 不变量 [Tay97] 都将与 $Y \times \mathbb{R}$的标准光滑化相同。回顾一下，非紧 4-流形 X 的 Taylor 不变量，是使得 X 能够光滑嵌入某个闭自旋 4-流形且满足 $b_2^+ = b_2^- = n$的最小 $n \geq 0$ 。此前，Bi˘zaca 和 Etnyre [BE98] 证明，对于任意紧致 3维流形 M， $Y \times \mathbb{R}$ 都有无穷多个光滑化；但它们的 Taylor 不变量各不相同，且可以任意大。Fang 和 Gompf [Fan99, GS99, Gom17]发现，对于某些 Y，存在无穷多个光滑化，且它们的 Taylor 不变量均相同；但对于一般的闭合 Y，此前尚不清楚是否如此。

注记 1.8。 这里不作精确陈述，但粗略来说，若某个 4-流形只有一个端，且其端 Floer 同调非平凡，并且支撑在有上界的相对分次中，那么与各种 $\mathcal{R}_n$ 作端和将产生一个无限的异态流形族。

1.2. **证明策略概述**。 我们以简要概述证明策略作为引言的结尾。Gadgil 端 Floer 同调定义为由余边界构成的有向系统的直极限。在当前情形中，这些余边界各由一个 1-把手和一个 2-把手组成。与 1-柄附着相对应的 Heegaard Floer 余边界映射是标准的，因此接下来需要理解 2-柄余边界。由于 2-把手的附着圆在同调中非平凡，直接计算该余边界映射十分困难。因此，我们借助图 6所示的手术正合三角来确定该余边界映射。

手术正合三角中的三个 3维流形有两个很容易处理： $S^3_0(K)\#(S^1 \times S^2)$ 和 $S^3_0(Wh(K))$，其中 K 本身通常是初始切片结的某个迭代 Whitehead 加倍。正合三角中的第三个流形见图 7。我们结合 [OS08],的 K¨unneth 公式，以及 d-不变量和 L-空间结的性质，利用手术映射锥公式计算该流形的 Heegaard Floer 同调。

一旦我们知道手术正合三角中三个 3维流形的 Heegaard Floer 同调，通过分次和秩的论证即可确定所讨论的协边映射。对协边映射的计算使我们能够证明，端 Floer 同调在某个特定分次上是无限维的；这个分次取决于初始切片结的结 Floer 同调。

1.3. 文章结构。第2节介绍卡森把手的相关背景，描述非紧 4-流形的有用穷竭，并讨论端和运算。第3节定义分次容许穷竭这一新概念，并借此为 Gadgil 端 Floer 不变量赋予与穷竭无关的绝对分次。第4节回顾 Heegaard Floer 预备知识并确定符号约定。第5节计算 $HF^+(S^3_0(\mathrm{Wh}(K))$，其中 K是一个切片结，并利用手术正合三角分析从 $HF^+(S^3_0(K)) \to HF^+(S^3_0(\mathrm{Wh}(K)))$ 出发的相关余边界映射。第6节研究 Whitehead 双结的结 Floer 复形。最后，第7节证明定理 1.1、推论 1.2、定理 1.3、定理 1.4 和定理 1.5，并讨论推广。

本文中，若称某个纽结的 Whitehead 加倍，指的是正交叉环、无扭的 Whitehead 加倍。我们使用系数为 $\mathbb{F}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 Heegaard Floer 同调。

1.4. **致谢**。 我们感谢 2025 年佐治亚国际拓扑会议，本研究的部分工作正是在会议期间完成的。我们也感谢 John Etnyre、Bob Gompf、Adam Levine 和 JungHwan Park 提供的有益交流。TL 感谢佐治亚理工学院在 2025 年夏季访问期间的热情款待。

2. Noncompact 4-manifold background

2.1. 卡森把手。我们简要介绍卡森把手及其把手分解。更多背景知识可参见 [Cas80、Ben16、GS99、Fre82]。首先回顾一些关于自丛扎的 2-把手的事实，它们是卡森把手的构造基元。设 $(k,\partial_- k)$ 是一个在远离附着区域处有限次进行自丛扎的 2-把手。这里，$\partial_- k$ 表示该 2-把手的附着区域在丛扎商映射下的像；我们也将 $\partial_+ k := \partial k \setminus \partial_- k$ 记作 k 的上边界。令 D 表示该 2-把手的核心圆盘 $D^2\times 0 \subset \overline{D^2\times D^2}$ 在丛扎操作下的像，因此 $D\subset k$ 是一个带有有限个双点的浸入圆盘；我们将 $C := \partial D \subset \partial_- k$ 称为 k 的附着圆。丛扎把手 $(k,\partial_- k)$ 在微分同胚意义下由 D 的正、负双点数决定。附着圆 C 的框架经过选取，使得沿一个带框架的纽结附加 k ，对交形式产生的作用与沿同一个带框架的纽结附加一个普通 2-把手相同。这相当于将 $\partial D^2\times 0$ 上由 $\partial D^2\times D^2$ 给出的乘积框架扭转两倍于自丛扎的带符号数。注意，浸入核心 D 的每个双点在 D 上都有一个双点环。我们可以通过同痕将这些双点环移至 $\partial_+ k$ 中，使它们彼此不相交。这些环的框架经过选取，使得沿它们向 k 附加普通 2-把手后得到 B^4，其中 C 映射为 S^3 中的一个 0框架平凡结。

一个*1* 阶 *Casson* 塔$(T_1,\ \partial_- T_1)$ 是一个自丛扎的二把手（$k,\ \partial_- k$）。*n* 阶 *Casson* 塔$(T_n,\ \partial_- T_n)$ 是通过对高度为 $n-1$ 的 Casson 塔的所有双点环附加自丛扎的二把手，并采用我们描述的框架，归纳构造得到的。卡森把手是去掉上边界的无限 Casson 塔，描述如下。先取一个 1 阶 Casson 塔（$T_1,\ \partial_- T_1$），再附加自丛扎的二把手，依次得到 2 阶塔 T_2、3 阶塔T_3，如此继续，直到得到一个嵌套的塔序列 $T_1\subset T_2\subset T_3\subset\ldots$。卡森把手（$CH\ \partial_- CH$）是以这种方式构造的任意一列 T_i 的无限并，去掉除 $\partial_- T_1$ 内部以外的所有边界，记作 $\partial_- CH$。要沿着一个带框架的纽结附加卡森把手，请使用第一阶段附着圆 $C\subset\partial_- CH$，其框架来自 T_1。

Freedman 定理 [Fre82] 表明，任意卡森把手（$CH\ \partial_- CH$）都与一个开二维把手（$D^2\times\mathbb{R}^2,\ S^1\times\mathbb{R}^2$）在边界相对意义下同胚。根据唐纳森定理 [Don83] 以及五维中 h余边界定理失效这一事实可知，并非所有卡森把手都与该开二维把手在边界相对意义下微分同胚。目前尚不清楚这是否对所有卡森把手都成立。

我们指出，在一般的 Casson 把手中，每个阶段都可以进行任意有限次带有符号选择的自丛扎；每个 Casson 把手在微分同胚意义下由一棵带符号、具有有限度顶点且没有有限分支的单根树决定。若描述其结构的树包含一条从根顶点出发、符号全为正（分别全为负）的无限线性链，我们就称该 Casson 把手含有无限正链（分别为无限负链）。图2 展示了一个沿着零框架平凡结附着于 B^4 的三阶段 Casson 塔的 Kirby 图。每个阶段恰有一个正双重点。在本文余下部分，令CH^+ 表示每个阶段都恰有一个正双重点的 Casson 把手，并令 T_i^+表示它的 i阶段近似。图3 展示了最简单的 Casson 把手的前三个阶段：它恰有一条无限正链和一条无限负链，并沿着零框架平凡结附着于 B^4 。在本文余下部分，将此 Casson 把手记作CH^*。

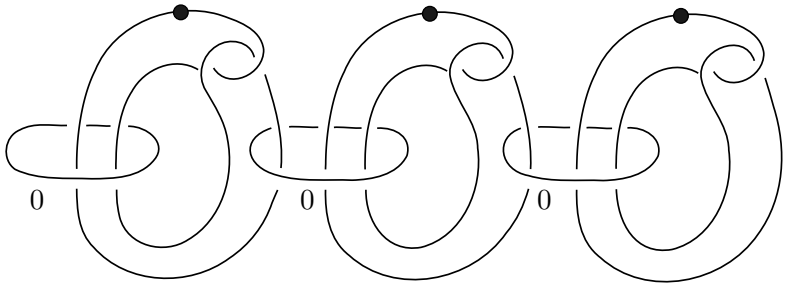


FIGURE 2. $B^4 \cup T_3^+$ 的 Kirby 图。我们可以看到 T_1^+ 的三个副本：0框架平凡结是它们的附着圆，而点圈的子午线则是它们的双点环。将这一模式无限地向右延伸并删去边界，便得到 int($B^4 \cup CH^+$)。

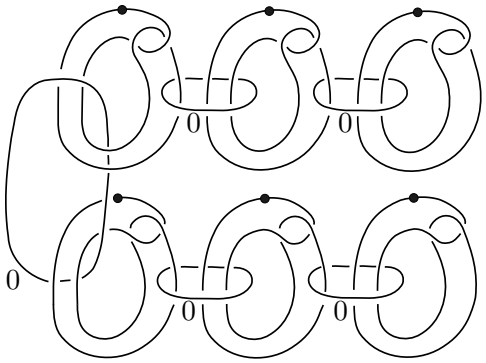


FIGURE 3. B^4 的 Kirby 图，以及 CH^* 的前 3 个阶段；它们沿着 S^3 中的一个 0框架平凡结附着。

2.2. 切片 $\mathbb{R}^4$**的穷竭**。回顾一下，切片 $\mathbb{R}^4$的构造方法是：在 B^4中取一个切片圆盘补，沿被删除圆盘的子午线附着一个零框架 Casson 把手，再删去剩余的边界。设 $\mathcal{R}$ 是由（D^2, K）和（B^4, S^3）的切片圆盘补以及 Casson 把手CH^+构造的一个切片 $\mathbb{R}^4$ 。下面介绍 $\mathcal{R}$的一个有用的紧穷竭。令 X_0 为切片圆盘补 $B^4 \setminus \nu$（D）。令 X_1 为 X_0 与 ∂X_0的一个领圈之并，再与一份沿 D的零框架子午线附着的 T_1^+之并。归纳地，定义 X_i 为 X_{i-1} 与 ∂X_{i-1}的一个领圈之并，再与一份沿前一个塔的双点环附着的 T_1^+之并。加入这些领圈可确保对每个 i，都有 $X_i \subset$int（X_{i+1}）。显然， X_i 是 $\mathcal{R}$的一个紧穷竭。我们陈述该穷竭的一些性质，这些性质预示了 Heegaard Floer 同调的应用。

引理 2.1。 设 X_i 如上所述。那么对所有 i:

(1) $X_i \cong B^4 \setminus \nu(Wh^i(D))$ 和 $\partial X_i \cong S^3_0(Wh^i(K))$。*(2)* $X_{i+1} - int\ X_i$ 是一个余边界，从 $S^3_0(Wh^i(K))$ 到 $S^3_0(Wh^{i+1}(K))$，由按图 *4* 所示附加的一个 *1*-把手和一个 *2*-把手组成，其中我们将图中的 K 替换为 $Wh^i(K)$。

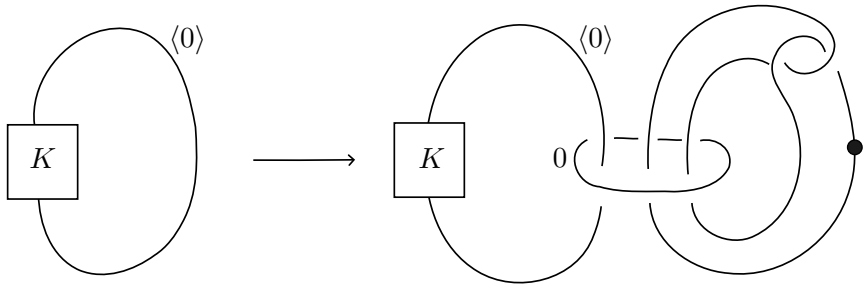


FIGURE 4. 一个从 $S^3_0(K)$ 到 $S^3_0(Wh(K))$ 的余边界，由一个 1-把手和一个 2-把手附着组成。

证明。(1)：通过 Kirby 演算，我们可以对 Casson 塔进行柄滑动和消去，从而将 X_i 描述为切片圆盘补 $X_0 = B^4 \setminus \nu(D)$，并沿着 D 的零框架子午线附加一份 T_1^+；其中 T_1^+ 的虚线圆已被正向 Whitehead 加倍 $i-1$ 次。由于这个虚线圆表示圆盘 $D' \subset X_0$ 的第 i 次 Whitehead 加倍，因此 X_i 是 X_0 与一个 2-把手 h 的并；该 2-把手沿着 D 的零框架子午线附加，然后去掉圆盘 $\mathrm{Wh}^i(D')$。利用 ∂X_0 内 D 的一个平行副本，我们可以将 D' 同痕至 ∂X_0 领圈内 D 的一个平行副本。通过考虑邻域，我们可以假设这次同痕将 $\mathrm{Wh}^i(D')$ 变为 $\mathrm{Wh}^i(D)$ 的一个副本；删去 $\mathrm{Wh}^i(D)$，并利用 2-把手 h 填充被删去的圆盘 D，即可得到结论。关于边界的断言源于这样一个事实：纽结 K 的任意切片圆盘补，其边界都是对 K 做 0手术。

(2)：由上文第（1）部分中的收缩步骤可知，μ 中第 i 阶段双点环的子午线与 X_i 中被删除圆盘的子午线同痕 $Wh^i(D)$。将其同痕至边界附近后可见，μ 与正在做手术的纽结 $Wh^i(K)$ 的子午线同痕。根据X_{i+1}的定义，所需的余边界恰好如图 4 所示，只需将图中的 K 替换为 $Wh^i(K)$。□

2.3. **端和与更多异态现象**。 在非紧 4-流形理论中，一个核心的开放问题是：每个非紧 4-流形是否都具有不可数多个奇异光滑结构？生成奇异光滑化候选对象的一种方法，是将给定的 4-流形与一个在无穷远处异态的 $\mathbb{R}^4$ 结合起来，进行端和。这种 端和运算 [（Gom85], 或无穷远处连通和）是一种组合两个非紧流形的运算，其方式类似于带边界流形的边界连通和。

定义 2.2。 设 X，X' 为非紧致光滑四维流形。端和 $X \natural X'$ 定义如下：设 $\gamma\colon [0,\infty) \to X$ 和 $\gamma'\colon [0,\infty) \to X'$ 为光滑真嵌入射线。设$\nu(\gamma) \cong \nu(\gamma') \cong [0,\infty) \times B^3$ 为正则邻域。定义

$$X \natural X' = X \cup_\phi (I \times \mathbb{R}^3) \cup'_\phi X'$$

其中 $\phi\colon [0,1/2) \times \mathbb{R}^3 \to \nu(\gamma)$ 和 $\phi'\colon (1/2,\ 1] \times \mathbb{R}^3 \to \nu(\gamma')$ 是保持定向的微分同胚，并且保持 $\mathbb{R}^3$-丛结构。

将异态 $\mathbb{R}^4$端和到非紧致光滑四维流形 X 上不会改变其同胚类型，但往往会改变其微分同胚类型 [Gom93，Gom85，Fan99]。在 [Gom85]中证明了，对于无穷远处单连通的 4-流形，端和与射线的选取无关。特别是，将异态 $\mathbb{R}^4$彼此进行端和时，无需指定使用哪些射线。对于更一般的 4-流形，射线的选取确实会产生影响 [CGH22]

但这与我们的应用无关。特别是，沿着 $\mathbb{R}^4$ 中的一条特定弧，将异态 X 端和到一个非紧 4-流形 X 上，仍有可能改变X给定的光滑结构。已知存在不可数多个不同的异态 $\mathbb{R}^4$，因此难点在于区分 $X\natural\mathcal{R}$ 不同异态 $\mathbb{R}^4$对应的端和 $\mathcal{R}$。通常人们采用间接方法 [Fan99，Gom93]；对于 $Y\times\mathbb{R}$ 闭三维流形上的 Y情形，我们将利用 Gadgil 端 Floer 同调来区分其中一些光滑化。

设 Y 是一个闭三维流形，且 $\mathcal{R}$是按上一小节所述构造的切片 $\mathbb{R}^4$ 。考虑 $(Y\times\mathbb{R})\natural\mathcal{R}$，其中端和沿标准射线 $\{p\}\times[1,\infty)\subset(Y\times\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{R}$中的任意射线进行。流形 $(Y\times[0,\infty))\natural\mathcal{R}$ 自然是 $(Y\times\mathbb{R})\natural\mathcal{R}$ 的一个子流形，也是非标准端的一个邻域。下面的引理与引理 2.1类似，描述了该端的一个有用的紧穷竭。

引理 2.3。 流形 $(Y\times[0,\infty))\natural\mathcal{R}$ 存在一个紧穷竭 X_i, $i\geq 0$，满足：

(1) $\partial X_i=-(Y\times\{0\})\sqcup(Y\#S^3_0(Wh^i(K)))$，对每个 i 均成立。*(2)* $X_i\subset int(X_{i+1})$，对每个 i 均成立。*(3)* $X_{i+1}-X_i$ 是从 $Y\#S^3_0(Wh^i(K))$ 到 $Y\#S^3_0(Wh^{i+1}(K))$ 的一个余边界，由一个 *1*-把手和一个 *2*-把手构成，如图 *4* 所示，其中将图中的 K 替换为 $Wh^i(K)$。

证明。注意到 $(Y\times[0,\infty))\setminus\nu(\{p\}\times[1,\infty))\cong Y\times[0,1]\cup(Y\setminus B^3)\times[1,\infty)$。第二部分可进一步分解为 $(Y\setminus B^3)\times[i,i+1]$ 对所有 $i\geq 1$ 的并。按照引理 2.1 中的描述，给 $\mathcal{R}$ 赋予分解 X_i。令 $\gamma\subset\mathcal{R}$ 为端和射线：由于 $\mathcal{R}$ 中的任意两条真射线都同痕，我们可以假设 $\gamma(0)\in\text{int}(X_0)$，对于所有 i，$\gamma(i+1)\in\partial X_i$，$\gamma$ 与每个 ∂X_i 横截于单个点，且 γ 与构造 $\mathcal{R}$ 时所用的卡森把手不相交。通过对 $Y\times\mathbb{R}$ 中的弧进行适当参数化，我们可以假设端和 $(Y\times[0,\infty))\natural\mathcal{R}$ 等于以下各部分的并

$$\begin{aligned}K_0&:=\big(Y\times[0,1]\cup(Y\setminus B^3)\times[1,2]\big)\cup_{\phi_1}(X_0\setminus\nu(\gamma[0,1]))\\ \cup K_1&:=\big((Y\setminus B^3)\times[2,3]\big)\cup_{\phi_2}(W_{12}\setminus\nu(\gamma[1,2]))\\ \cup K_2&:=\big((Y\setminus B^3)\times[3,4]\big)\cup_{\phi_3}(W_{23}\setminus\nu(\gamma[2,3]))\cup\dots\end{aligned}$$

其中 ϕ_1 是 B^3的微分同胚，ϕ_i 对于 $i\geq 1$ 是 $S^2\times I$的微分同胚，并且 ϕ_i 粘合起来形成 $\mathbb{R}^3$的微分同胚；K_i 通过与ϕ_i相容的自然识别进行附接。令 $X_i=K_0\cup\ldots\cup K_i$ 便得到所需的穷竭，其性质由引理 2.1 的证明得出。□

3. End Floer homology

我们简要回顾 Gadgil 的 [Gad10] 端 Floer 同调 $HE(X,\mathfrak{s})$，并给出能够在 $HE(X,\mathfrak{s})$ 上定义绝对分次的充分条件。

令 X 为一个具有一个端的开4-流形，并令

$$X_1\subset X_2\subset\dots$$

为 X 由紧流形 X_i 构成的穷竭，其中具有 $X_i\subset\text{int}\,X_{i+1}$ 和连通边界。令$Y_i=\partial X_i$，并且对于 $i<j$，令

$$W_{ij}=X_j-\text{int}\,X_i.$$

从 Y_i 到 Y_j 的余边界 W_{ij} 若包含映射诱导的映射是可容许的

$$H^1(W_{ij})\to H^1(Y_j)$$

是满射。可容许性保证，旋^c 结构 $\mathfrak{s}_{ij}$ 上的 W_{ij} 和 $\mathfrak{s}_{jk}$ 上的 W_{jk} 旋结构唯一确定^c 上的旋 $W_{ik}=W_{ij}\cup W_{jk}$ 结构，并且该结构限制为给定的结构；参见 [Gad10，第

1] 了解更多详情。4-流形 X 的一个容许穷竭 $\{X_i\}$ 是 X 的一个穷竭，其中每个相应的 W_{ij} 都是可容许的。在全文中，我们假设所有穷竭都是可容许的。

我们将关注 4 维流形端上的 spin^c 结构，定义如下。 X 上的渐近 *spin*^{c} 结构 $\mathfrak{s}$ 是 $X - X'$上的 spin^c 结构，其中 X' 是 X的紧子集；若存在紧集 $X''' \supset X'$， X'' 使得 $\mathfrak{s}'|_{X-X'''} = \mathfrak{s}''|_{X-X'''}$，则 $X - X'$ 上的渐近 spin^c 结构 $\mathfrak{s}'$ 与 $X - X''$ 上的渐近 spin^c 结构 $\mathfrak{s}''$ 等价。

在上述设定下，Gagdil 证明了以下结论：

定理 3.1 ([Gad10，定理 1。4])。 给定 X上的渐近 *spin*^{c} 结构 $\mathfrak{s}$ ，存在一个不变量

$$HE(X, \mathfrak{s}) = \varinjlim HF_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})$$

它是 $HF_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})$ 在由余边界 W_{ij}诱导的态射下的直极限。此外，不变量 $HE(X, \mathfrak{s})$ 与所选的容许穷竭无关。

在某些特殊情形下，我们将关注于赋予 $HE(X, \mathfrak{s})$ 一个绝对的 $\mathbb{Q}$-分次。注意，Gadgil 的不变量并不带有分次，因为由W_{ij} 诱导的余边界映射一般具有分次平移。

我们要求我们的穷竭满足以下附加条件：

定义 3.2。 若对所有 i，均有$b_2(X_i) = b_3(X_i) = 0$，则 X 上的可容许穷竭 $\{X_i\}$ 称为分次容许。

我们需要相对于 $b_1(Y)/2$对 $HF^+(Y)$ 的分次进行标准化。令 $HF^+(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})[n]$表示 $HF^+(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})$，其分次向上平移 n，即 $HF^+_k(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})[n] = HF^+_{k-n}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})$。

定理 3.3。 假设 X 具有一个分次容许穷竭，并且 $\mathfrak{s}$ 是 X上的渐近自旋^c 结构。那么直极限

$$HE(X, \mathfrak{s}) = \varinjlim HF_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})[-b_1(Y_i)/2]$$

具有独立于分次容许穷竭选择的绝对分次。

注 3.4。 在 [Gad10 中，引理 3。2], Gadgil 需要选择符号以获得一个直接系统；而在我们的情形中这并不是问题，因为我们是在 $\mathbb{F}$ 上工作的。

注 3.5。 由于直接极限在取子序列时保持不变，并且由于 X 的端的任意邻域都必须包含 Y_i 的一个子序列，因此绝对分次的$HE(X, \mathfrak{s})$ 是 X 的端的微分同胚不变量。

从本质上说，其思想是条件 $b_2(X_i) = b_3(X_i) = 0$ 将意味着，余边界 W_{ij} 的分次平移由 $b_1(Y_i)$ 与 $b_1(Y_j)$ 之间的差所决定。定理 3.3 将直接由以下命题推出：

命题 3.6。 设 $\{X_i\}$ 是关于渐近自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$ 的 X 的分次容许穷竭。那么

$$\mathrm{gr}(F_{W_{ij}, \mathfrak{s}|_{W_{ij}}}(x)) - \mathrm{gr}(x) = \frac{b_1(Y_j) - b_1(Y_i)}{2}$$

其中 $x \in$ *Heegaard Floer* 同调$^+(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})$ 是一个齐次分次元素。

为了证明命题 3.6，我们需要以下引理：

引理 3.7。 设 $\{X_i\}$ 是 X 的分次容许穷竭。则

$$b_1(X_i) = b_1(Y_i).$$

证明。 考虑对 (X_i, Y_i) 的 $\mathbb{Q}$-系数长正合列：

$$\cdots \to H_3(X_i) \to H_3(X_i, Y_i) \to H_2(Y_i) \to H_2(X_i) \to \cdots \tag{3.1}$$

由于 $\{X_i\}$ 是分次容许的，我们有 $H_3(X_i) = H_2(X_i) = 0$。于是

$$\begin{aligned} H^1(Y_i) &= H_2(Y_i) \\ &= H_3(X_i, Y_i) \\ &= H^1(X_i) \end{aligned}$$

其中第一个等式由庞加莱对偶性得出，第二个等式由 (3.1) 的正合性得出，第三个等式由庞加莱-勒夫谢茨对偶性得出。□

有了这个引理，我们现在可以证明命题 3.6。

命题 *3.6* 的证明。我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{gr}(F_{W_{ij},\mathfrak{s}}(x)) - \operatorname{gr}(x) &= \frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - 3\sigma(W_{ij}) - 2\chi(W_{ij})}{4} \\ &= \frac{-\chi(W_{ij})}{2} \\ &= \frac{b_1(X_j) - b_1(X_i)}{2} \\ &= \frac{b_1(Y_j) - b_1(Y_i)}{2} \end{aligned}$$

其中第一个等式来自 [OS06，定理 7。1]，第二个和第三个等式由以下事实得出：$b_2(X_i) = b_3(X_i) = 0$ 对所有 i 都成立；第四个等式由引理 3.7 得出。□

现在我们可以证明定理 3.3。

定理 *3.3* 的证明。 设 $\{X_i\}$ 是关于渐近自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$的分次容许穷竭。我们先证明直极限上存在一个绝对分次。回忆

$$\varinjlim HF_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})[-b_1(Y_i)/2] = \bigsqcup_i HF_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})[-b_1(Y_i)/2]/\sim$$

其中，对于 $x_i \in$ *Heegaard Floer* 同调 $_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})$ 和 $x_j \in$ *Heegaard Floer* 同调 $_{\mathrm{red}}(Y_j, \mathfrak{s}|_{Y_j})$，有 $x_i \sim x_j$若存在某个k使得 $F_{W_{ik},\mathfrak{s}|_{W_{ik}}}(x_i) = F_{W_{jk},\mathfrak{s}|_{W_{jk}}}(x_j)$。令 gr 表示 *Heegaard Floer* 同调 $_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})$ 上的绝对分次，$\mathrm{gr}_{\mathrm{sh}}$ 表示 *Heegaard Floer* 同调 $_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})[-b_1(Y_i)/2]$ 上的绝对分次；也就是说，

$$\mathrm{gr}_{\mathrm{sh}}(x_i) = \operatorname{gr}(x_i) - \frac{b_1(Y_i)}{2}.$$

Then

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_{\mathrm{sh}}(x_i) &= \operatorname{gr}(x_i) - \frac{b_1(Y_i)}{2} \\ &= \operatorname{gr}(F_{W_{ik},\mathfrak{s}|_{W_{ik}}}(x_i)) - \frac{b_1(Y_k)}{2} \\ &= \operatorname{gr}(F_{W_{jk},\mathfrak{s}|_{W_{jk}}}(x_j)) - \frac{b_1(Y_k)}{2} \\ &= \operatorname{gr}(x_j) - \frac{b_1(Y_j)}{2} \\ &= \mathrm{gr}_{\mathrm{sh}}(x_j) \end{aligned}$$

其中第二个和第四个等式由命题3.6得出。因此，直极限上存在一个绝对分次。

现在我们证明，绝对分次与分次容许穷竭的选择无关。证明与 [Gad10，命题 34]完全相同；为求完整起见，我们在此重述。首先注意，取子序列不会影响绝对分次。设 $\{X_i\}$ 和$\{X_i'\}$ 是关于渐近自旋 X 结构 $^{\mathfrak{c}}$ 的两个分次容许穷竭，其中 $\mathfrak{s}$。取子序列后，我们不妨假设

$$X_1 \subset X_1' \subset X_2 \subset X_2' \subset \dots$$

以及 [Gad10，引理 25]表明该穷竭

$$X_1' \subset X_2 \subset X_2' \subset \dots \tag{3.2}$$

是可容许的。此外，该穷竭也是分次容许的，因为 $\{X_i\}$和 $\{X_i'\}$都是分次容许的。由于 $X_2 \subset X_3 \subset \dots$ 和 $X_1' \subset X_2' \subset \dots$都是（3.2）中穷竭的子序列，因此关于 $\{X_i\}$和 $\{X_i'\}$的直极限一致，正如所需。□

4. Heegaard Floer preliminaries

我们假设读者熟悉 Heegaard Floer 同调 [OS04b，OS03a]，，尤其是结 Floer 同调 [OS04a，Ras03] 以及映射锥公式 [OS08]。我们简要回顾这些概念，主要是为了确立记号。

4.1. 结 Floer 复形。对于一个纽结 $K \subset S^3$，我们考虑与之相关的链复形$CFK^-(K)$，它在 $\mathbb{F}[U]$上自由且有限生成。每个生成元都有一个 Maslov 分次（亦称同调分次），以及一个 Alexander 分次。生成元的 Alexander 分次在 $CFK^-(K)$ 上诱导出一个滤过，而 $CFK^-(K)$ 的滤过链同伦类型是一个纽结不变量。

作为一个 $\mathbb{F}$-向量空间，$\mathrm{CFK}^-(K) = \oplus_{i,j}\mathrm{CFK}^-(K,i,j)$，其中 $i \in \mathbb{Z}_{\le 0}$是U指数的相反数，而 $j \in \mathbb{Z}$ 是 Alexander 分次。通常会在 (i,j) 平面上描绘 $\mathrm{CFK}^-(K)$。也就是说，我们根据生成元的 Alexander 分次将它们放置在竖直轴上。（图中省略了 Maslov 分次。）变量 U 将生成元向下、向左各移动一个单位。图 5 给出了一个例子。我们还将考虑复形 $\mathrm{CFK}^\infty(K) = \mathrm{CFK}^-(K) \otimes_{\mathbb{F}[U]} \mathbb{F}[U,U^{-1}]$。我们有类似的分解：$\mathrm{CFK}^\infty(K) = \oplus_{i,j\in\mathbb{Z}} CFK^\infty(K,i,j)$。

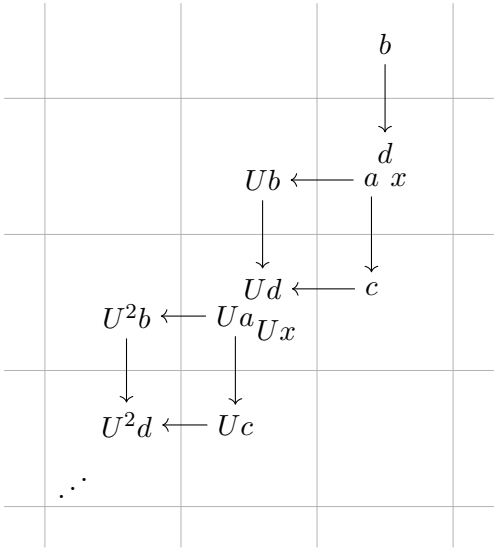


Figure 5. 结 Floer 复形 $CFK^-(4_1)$.

我们还将关注 3维流形 Y 中的零同调结 J，其中 Y 是一个同调$S^1 \times S^2$。对于 Y 上的挠 Spin ^{c} 结构 $\mathfrak{s}_0$，我们可以得到与 S^3 中的纽结类似的图示，用来表示 $CFK^\infty(Y, J, \mathfrak{s}_0)$。

4.2. **映射锥公式**。 现在我们回顾用于确定*Heegaard Floer* 同调 $^+(S^3_n(K))$ 的映射锥公式，遵循 [OS08]。更一般地，该公式适用于一般 3维流形 Y中的零同调结，前提是我们将范围限制在挠自旋^c 结构上。

令 $C = CFK^\infty(Y, K, \mathfrak{s}_0)$，其中 $\mathfrak{s}_0$是 Y上的挠自旋^c 结构。回顾一下，作为向量空间，我们有分解$C = \bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}} C(i, j)$。对于 $\mathbb{Z}^2$的子集 X，令 $CX = \bigoplus_{(i,j)\in X} C(i, j)$。我们有以下商复形

$$A_s = C\{\max(i, j - s) \geq 0\}$$
$$B = C\{i \geq 0\}.$$

我们还有映射

$$v_s \colon A_s \to B$$
$$h_s \colon A_s \to B.$$

映射 v_s 由投影给出。映射 h_s 是投影到 $C\{j \geq s\}$ 之后再接一个 $C\{j \geq s\}$ 与 B之间的链同伦等价。关于该链同伦等价的更多细节，请参见 [OS08]。考虑映射

$$\Phi_n \colon \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} A_s \to \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} B_s$$

其中每个 B_s 都只是 B 的一个副本，并且

$$\Phi_n = v_s + h_s$$

其中

$$v_s \colon A_s \to B_s$$
$$h_s \colon A_s \to B_{s+n}.$$

那么， [OS08] 指出

$$H_*(\operatorname{Cone}\Phi_n) = HF^+(Y_n(K)), [\mathfrak{s}_0[)$$

其中， $[\mathfrak{s}_0]$ 表示对 $Y_n(K)$ 上与 $\mathfrak{s}_0$ 沿关联的 2-把手余边界余边界的旋 spin^c 结构求和。此外，Cone Φ_n 继承了一个相对 $\mathbb{Z}$分次，该分次来自 A_s 和 B上的分次，并且在复形 Cone Φ_n中，映射 Φ_n 使分次降低 1。这个相对分次可以提升为一个绝对 $\mathbb{Q}$ 分次，它恢复了 $HF^+(Y_n(K))$ $[\mathfrak{s}_0]$ 上的绝对 $\mathbb{Q}$分次，并限制在适当的 spin^c 结构上。我们将关注 $n = -1$这种情形，此时 Cone Φ_n 上的绝对分次只需保留 B_0从 CFK^∞继承的分次；以及 $n = 0$这种情形，此时 Cone Φ_n上的绝对分次由将 B_0 上的分次下移 $1/2$得到。

最后，我们注意到，当*Heegaard Floer* 同调 $_{\mathrm{red}}(Y) = 0$时，可以先取同调（即考虑$v_{s,*}\colon H_*(A_s) \to H_*(B)$，而非 v_s，对于 $h_{s,*}$ 也同样如此），再取映射锥。

5. The cobordism map between 0-surgeries

5.1. **一个关键定理**。 本节旨在证明以下关于沿迭代 Whitehead 双结进行 0-手术所得流形之间的余边界映射的定理。注意，在定理的表述中，纽结 K 本身已经是一个 Whitehead 加倍。

定理 5.1。 设 $K \subset S^3$ 为一个切片结的 *Whitehead* 加倍。

(1) 我们有

$$HF^+(S^3_0(Wh(K))) = \mathcal{T}^+_{(1/2)} \oplus \mathcal{T}^+_{(-1/2)} \oplus \left(HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(K)) \otimes V\right)$$

其中 $V = \mathbb{F}^2_{(0)} \oplus \mathbb{F}^2_{(-1)}$。

(2) 从 $HF^+(S^3_0(K)) \to HF^+(S^3_0(Wh(K)))$ 的协边映射1- 和 2-柄附加（见图 4 在 $HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(K))$ 的最高分次直和项上是单射。

注 5.2。 定理 5.1在更一般的情形下也成立：只要 K 是一个亏格一结，其结 Floer 复形 $CFK^-(K)$ 是一个单生成元与任意多个 1×1 方框的直和，如图 10所示。

证明定理 5.1 的策略如下。首先，文献 [OS06]中描述了 1-把手的余边界映射。更准确地说，存在一个典范同构

$$HF^+(S^3_0(K)\#S^1 \times S^2) \cong HF^+(S^3_0(K)) \otimes_{\mathbb{F}[U]} \left(\mathbb{F}[U]_{(-1/2)} \oplus \mathbb{F}[U]_{(1/2)}\right).$$

1-柄余边界的映射将 $HF^+(S^3_0(K))$ 纳入其分次平移后的副本中$+1/2$。因此，难点在于确定 F 2-柄余边界的映射。我们利用图 F 6 中的手术正合三角来确定映射 6。具体来说，我们的策略是计算这三个三维流形各自的 HF^+，随后通过分次与正合性论证完成证明。

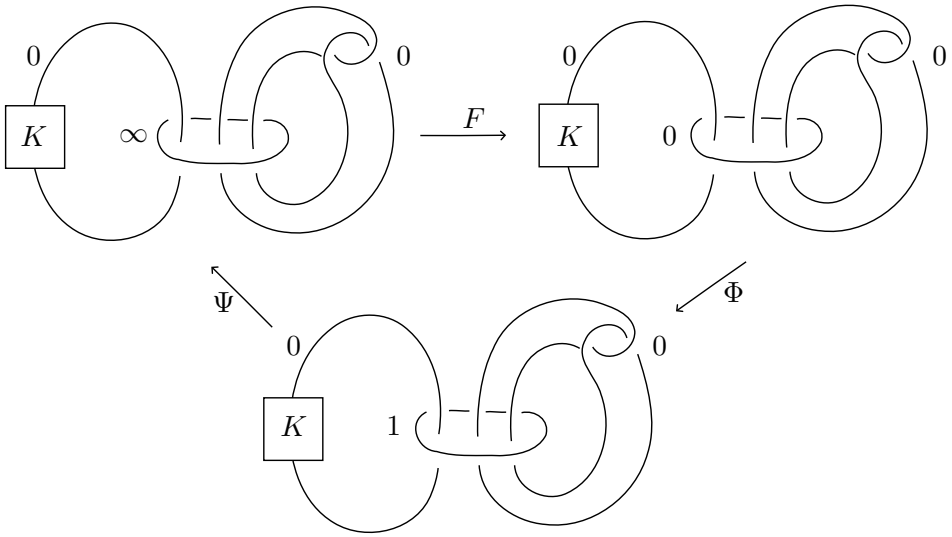


FIGURE 6. 手术正合三角中涉及的流形。（我们稍微滥用一下记号，用 F, Φ 和 Ψ 同时指代余边界及其在 *Heegaard Floer* 同调$^+$ 上诱导的映射。）

计算图 6 中上方两个 3维流形的 HF$^+$ 很直接，因为这两个流形分别是$S^3_0(K)$ 和 $S^3_0(\mathrm{Wh}(K))$，而 Hedden 已给出了 Whitehead 双结 [Hed07] 的结 Floer 同调公式。计算下方 3维流形的 HF$^+$ 则稍复杂一些。将以 $+1$ 为系数的平凡结吹下后，可得到图 7 中的 Kirby 图，它是 $K \subset S^3$ 与图 8 中纽结 $J \subset Y$ 的连通和。也就是说， J 是右手三叶结的 0-手术中的一个零同调纽结。如果我们能够计算 $J\#K$ 的结 Floer 复形，就可以应用映射锥公式，计算这个剩余 3维流形的 Floer 同调：$Y_{-1}(J\#K)$。

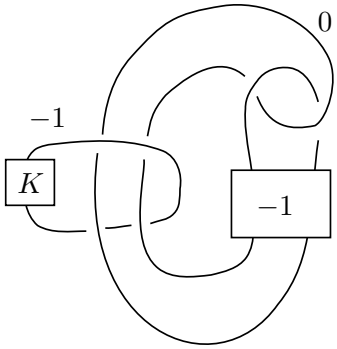


FIGURE 7

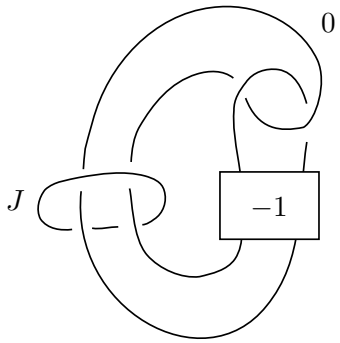


FIGURE 8. 结 J 位于 Y中。

由于我们可以使用 K¨unneth 公式，而且已知 $\mathrm{CFK}^-(S^3,K)$，因此只需计算结 Floer 复形 $\mathrm{CFK}^-(Y,J)$。我们在引理 5.3 中通过比较 Y 的 d-不变量及约化 Heegaard Floer 同调与 $Y_{-1}(J)$ 的相应不变量和同调，完成这项计算。关键观察是， J 是一个流形中的纽结，该流形的 $\mathrm{HF}_{\mathrm{red}}$ 平凡；沿 J 进行 -1-手术后，约化 Heegaard Floer 同调也平凡。接着，关于 L-空间中的 L-空间结（及其一个温和推广）的熟知结果，给出了 $Y_{-1}(J\#K)$ 的 Floer 同调所需公式，以供恰当三角使用。这正是引理 5.4 的主题。

现在我们采用这一策略来证明定理 5.1。

引理 5.3。 结 *Floer* 复形 $\mathit{CFK}^-(Y,J)$ 在 $\mathbb{F}[U]$ 上由 a、b、c 和 d 生成，其分次和边界映射如下：

	m	A	∂
a	$1/2$	1	b
b	$-1/2$	0	0
c	$-3/2$	-1	Ub
d	$-1/2$	0	0

我们在图 *9* 中以图示方式描绘了这一点。

证明。 回想一下， Y 是 $S^3_0(T_{2,\,3})$。利用映射锥公式进行直接计算可得

$$HF^+(Y)=\mathcal{T}^+_{(-3/2)}\oplus\mathcal{T}^+_{(-1/2)}.$$

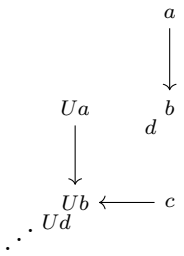


FIGURE 9. $J \subset Y$ 的结 Floer 复形。

特别地，*Heegaard Floer* 同调$_{\mathrm{red}}(Y) = 0$。此外，对 J 进行 -1-手术得到 $S^1 \times S^2$，因此

$$HF^+(Y_{-1}(J)) = HF^+(S^3_0(U)) = \mathcal{T}^+_{(1/2)} \oplus \mathcal{T}^+_{(-1/2)}.$$

我们注意到， J 是流形 Y 中的一个亏格一结，且 $HF\mathrm{red}(Y) = 0$，而 $HF\mathrm{red}(Y_{-1}(J))$ 也为零。因此，我们所处的情形与 S^3 中的负 L-空间结类似。现在我们使用 d-不变量。首先，考虑 $HF^+(Y)$ 和 $HF^+(Y_{-1}(J))$ 中属于 H_1 作用像的子模。由于 $d_{-1/2}(Y) = d_{-1/2}(Y_{-1}(J)) = -1/2$，我们得出结论：$CFK^-(Y, J)$ 含有一个由单个生成元组成的子复形，该生成元 d 的 Maslov 分次为 $-1/2$，Alexander 分次为 0；也就是说，经过分次平移后，它的结 Floer 复形与 S^3 中平凡结的结 Floer 复形相同。

现在我们来考察 H_1 作用的余核。我们有

- $d_{1/2}(Y) = -3/2$,
- $d_{1/2}(Y_{-1}(J)) = 1/2$，且

• *Heegaard Floer* 同调 $_{\mathrm{red}}(Y) =$ *Heegaard Floer* 同调 $_{\mathrm{red}}(Y_{-1}(J)) = 0$.

根据 [Krc18]（这是 [OS05，定理 1.2] 的推论）， S^3 中 L-空间结的结 Floer 复形具有一种特别特殊的形式：它们的结 Floer 复形呈阶梯形。这一结果更普遍地适用于任意整同调 L-空间中的 L-空间结（证明完全相同）；通过镜像对称，我们还可得到关于负 L-空间结的结果。特别地，对于一个亏格一结，若其上进行 -1手术可得到一个具有 *Heegaard Floer* 同调$_{\mathrm{red}} = 0$ 的流形，那么其唯一的结 Floer 复形在分次平移意义下，等同于左手三叶结的结 Floer 复形；也就是说，该结 Floer 复形由 a、b、和 c 生成，其分次和微分如引理 5.3 的陈述所示。

确定了由 H_1 作用给出的二步滤过的关联分次复形后，现在很容易验证，经过基变换后，$CFK^-(Y, J)$ 如所述。□

全文中，令 $B[k_i]$ 为由 a, b, c, d 生成的 1×1-盒，其分次和微分如下：

	m	A	∂
a	k_i	0	$Ub + c$
b	$k_i + 1$	1	d
c	$k_i - 1$	-1	Ud
d	k_i	0	0

我们在图 10 中以图形方式描绘这个盒。

有了 $CFK^-(Y, J)$ 后，我们就可以计算图 6 中流形的 Heegaard Floer 同调了。

引理 5.4. 设 $K \subset S^3$ 是一个亏格一结，其结 *Floer* 复形 $CFK^-(K)$ 具有形式$x \oplus \bigoplus_{i=1}^n B[k_i]$，其中 x 位于 *Maslov* 分次和 *Alexander* 分次0，而 $B[k_i]$ 是上文所述的 1×1-盒。那么

(1) $HF^+(S^3_0(K)\#S^1 \times S^2) = \mathcal{T}^+_{(1)} \oplus (\mathcal{T}^+_{(0)})^2 \oplus \mathcal{T}^+_{(-1)} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \left(\mathbb{F}_{(k_i)} \oplus \mathbb{F}_{(k_i-1)}\right))$

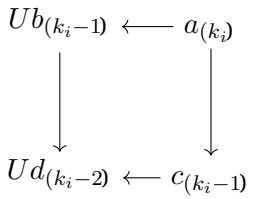


FIGURE 10. 一个 1×1-盒 $B[k_i]$，下标表示 Maslov 分次。例如，Ub 的分次为 k_i-1。

(2) $HF^+(S^3_0(Wh(K))) = \mathcal{T}^+_{(1/2)} \oplus \mathcal{T}^+_{(-1/2)} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \left(\mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{1}{2})} \oplus \mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{3}{2})}\right)$
(3) $HF^+(Y_{-1}(J\#K)) = \mathcal{T}^+_{(1/2)} \oplus \mathcal{T}^+_{(-1/2)} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \left(\mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{1}{2})} \oplus \mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{3}{2})}\right)$.

证明. 我们先证明（1）。首先计算 *Heegaard Floer* 同调 $^+(S^3_0(K))$。由于 K 是亏格一结，我们只需考虑映射锥的同调

$$\begin{array}{c} A_0 \\ \downarrow{\scriptstyle v_0+h_0} \\ B_0. \end{array}$$

我们有

$$H_*(A_0) = \mathcal{T}^+_{(0)} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}_{(k_i-1)}$$

and

$$H_*(B_0) = \mathcal{T}^+_{(0)},$$

并且 $v_{0,\ *}$ 且 $h_{0,\ *}$ 在 $\mathcal{T}^+$ 上均为同构，并在 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}_{(k_i-1)}$ 上为零。映射锥 v_0+h_0 中的分次平移使 $H_*(B_0)$ 的分次降低 $1/2$，并使 $H_*(A_0)$ 的分次升高 $1/2$。应用 K¨unneth 公式，将其与 $S^1\times S^2$ 作连通和，即可得到所需结果。接下来我们证明 (2)

. 命题 6 . 下方的 1 表明 $CFK^-(Wh(K))$ 具有如下形式

$$x \oplus \bigoplus_{i=1}^n \left(B[k_i]^2 \oplus B[k_i-1]^2\right),$$

其中 x 的 Maslov 分次和 Alexander 分次均为 0。接下来如第 (1) 部分所示，即可得出结果。

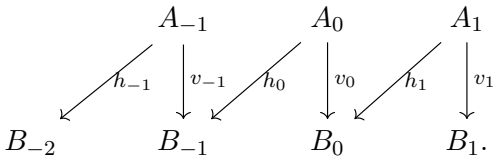
最后，我们证明 (3)。首先应用 K¨unneth 公式来确定 $CFK^-(Y, J\#K)$，我们看到它具有如下形式

$$CFK^-(Y,J) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \left(B[k_i-\tfrac{1}{2}]^2 \oplus B[k_i+\tfrac{1}{2},1] \oplus B[k_i-\tfrac{3}{2},-1]\right)$$

其中 $B\,[k_i, j]$ 表示由 a、b、c、d 生成的 1×1-盒，其分次和微分 al:

	m	A	∂
a	k_i	j	$Ub+c$
b	k_i+1	$j+1$	d
c	k_i-1	$j-1$	Ud
d	k_i	j	0

注意， $B[k_i,0]$ 恰好就是 $B[k_i]$。现在我们考虑 $Y_{-1}(J\#K)$ 的映射锥公式。由于 $J\#K\subset Y$ 的亏格为二，截断映射锥的形式为



我们知道， $CFK^-(Y,\ J)$ 是 $CFK^-(Y,\ J\#K)$ 的一个直和项，它对 $\mathcal{T}^+_{1/2}\oplus\mathcal{T}^+_{-1/2}HF^+(Y_{-1}(J\#K))$ 有贡献，因为 $Y_{-1}(J)\ =S^1\times S^2$。（一般来说， $CFK^-(Y,\ J)$ 的一个直和项不一定能作为映射锥公式中的直和项分离出来，但对于具有 $b_1\leq 1$ 和$HF_{red}=0$ 的 3维流形，确实可以。）因此，接下来要确定的是以下对象的贡献：

$$C=\bigoplus_{i=1}^{n}\Big(B[k_i-\tfrac{1}{2}]^2\oplus B[k_i+\tfrac{1}{2},1]\oplus B[k_i-\tfrac{3}{2},-1]\Big).$$

聚焦于与 C 相关的 A_s 复形，我们有

$$\begin{aligned}H_*(A_{-1})&=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{F}_{(k_i-\frac{5}{2})}\\ H_*(A_0)&=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{3}{2})}\\ H_*(A_1)&=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{F}_{(k_i-\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

映射 $v_{i,\ *}$ 和 $h_{i,\ *}$ 在 $H_*(A_s)$、 $s=-1$，0， 和 1 上均为零。对于 -1-手术，映射锥公式中的分次平移使 A_{-1} 的分次提高 1，使 A_0 的分次提高 1，并使 A_1 的分次降低 1，从而得到所述结果。□

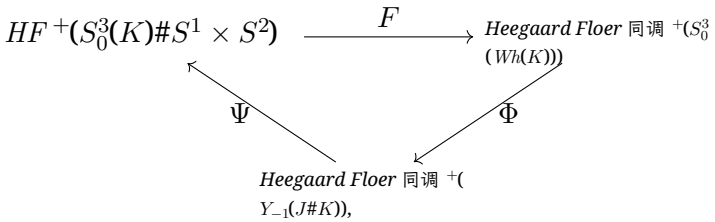
现在我们已经知道图6中各流形的 Heegaard Floer 同调，接下来利用分次和正合性证明以下引理：

引理 5.5。 设 $K\subset S^3$ 是一个纽结，其结 *Floer* 复形具有 $x\oplus\bigoplus_{i=1}^{n}B[k_i]$ 的形式，其中 x 位于 *Maslov* 分次和 *Alexander* 分次 0， 而 $B[k_i]$ 是 1×1-盒。则 *2*-手柄协边映射

$$F\colon HF^+(S^3_0(K)\#S^1\times S^2)\to HF^+(S^3_0(Wh(K)))$$

如图 *6*所示，在 $HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(K)\#S^1\times S^2)$ 的最高分次直和项上是单射的。

证明。 证明依赖于以下手术正合三角：



其中 $J\subset Y$ 如图 8。

我们在引理 5.4 中计算了这些 Heegaard Floer 同调的值。回顾 [OS03a]，可知 F，并且 Ψ 将分次降低 $1/2$。事实上，恰当三角中的映射原则上由所有自旋^c 结构上的余边界映射之和组成。然而，对于恰当三角中的每个 3维流形，Floer 同调都支撑在唯一的挠自旋^c 结构上，因此唯一可能贡献的自旋^c

余边界映射是与唯一具有平凡第一陈类的自旋^{c}结构相关联的映射，其中一个（分别为 Ψ）可能对 F 作出贡献。分次平移随之得到。我们有 Ψ 将 $HF^+(Y_{-1}(J\#K)$ 中的两份 $\mathcal{T}^+$ 单射地映射到 $HF^+(S^3_0(K)\#S^1\times S^2)$。类似地，将限制在属于 U的任意高次幂像中的元素所构成的子模上，我们有 F 在 Ψ的余核上是单射的。特别地，只需在 HF_{red}上考虑恰当三角：

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\mathbb{F}_{(k_i)}\oplus\mathbb{F}_{(k_i-1)}\right) & \xrightarrow{\quad F\quad} & \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{1}{2})}\oplus\mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{3}{2})}\right) \\ & {\scriptstyle\Psi}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle\Phi} & \\ & \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{1}{2})}\oplus\mathbb{F}^2_{(k_i-\frac{3}{2})}\right). & \end{array} \tag{5.1}$$

由于 Ψ 会使分次降低 $1/2$，因此*Heegaard Floer* 同调 $\mathrm{red}(S^3_0(K)\#S^1\times S^2)$ 的最高分次直和项不在 Ψ 的像中。由正合性即可得到所需结果。□

最后，我们可以证明定理 5.1。

定理 *5.1* 的证明。 定理的第（1）项由引理（2）推出5.4，再结合命题 6.1。定理的第（2）项可通过将 1-柄余边界映射与引理 F 中的映射复合得到5.5。□

5.2. **负交叉 Whitehead 加倍**。 一个自然的问题是，我们能否为5.1 （2）中的定理得到一个适用于 负交叉Whitehead 加倍 Wh^-的版本。事实上，这样的结果将有助于我们研究具有混合符号的卡森把手。

遗憾的是，关于负交叉 Whitehead 加倍的定理 5.1 (2 的版本指出，从 *Heegaard Floer* 同调 $^+(S^3_0(K))$ 到 *Heegaard Floer* 同调 $^+(S^3_0(Wh^-(K)))$ 的余边界映射为零映射。

定理 5.6。 若 K 是一个非平凡切片结的负*Whitehead*加倍，则余边界映射

$$HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(K))\to HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(Wh^-(K)))$$

将图*4* 中交叉的符号改变后，得到的映射为零映射。

证明。 在此情形下，图 8 的对应图变为 $J'\subset Y'$，其中 Y' 是对带负交叉的纽结进行的 0手术，也就是八字结。应用映射锥可得

$$HF^+(Y')=\mathcal{T}^+_{(1/2)}\oplus\mathcal{T}^+_{(-1/2)}\oplus\mathbb{F}_{(-1/2)}.$$

由于 $Y'_{-1}(J')=S^1\times S^2$，我们有 HF $^+(Y'_{-1}(J'))=\mathcal{T}^+_{(1/2)}\oplus\mathcal{T}^+_{(-1/2)}$。因此， $J'\subset Y'$是一个亏格一纤维化纽结（其纤维化性质源于 Whitehead链环是纤维化的），对其进行 -1-手术可得到一个流形，其 d不变量与 Y' 相同，且其 HF $_{\mathrm{red}}$平凡。由此可直接推出，CFK $^\infty(Y',J')$ 是图11中的复形与 $\mathbb{F}[U,U^{-1}]$ 的张量积。

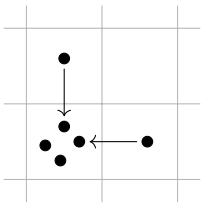
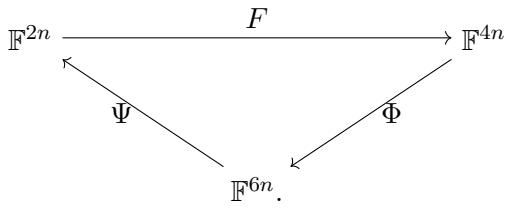


FIGURE 11. $J'\subset Y'$的结 Floer 复形。

应用命题6.1并取镜像后，我们可以计算 K的负Whitehead加倍的结 Floer 复形。现在我们可以运用与上述类似的论证

（也就是说，应用 K¨unneth 公式来求出 $CFK^-(Y', J'\#K)$，然后应用映射锥公式，再考虑恰当三角），而（5.1）的类似结果变为



观察各个秩可知，根据正合性，要得出映射 F 是零映射，甚至不需要考虑分次。□

6. Whitehead doubles

鉴于定理 5.1，我们希望了解 Whitehead 加倍的结 Floer 同调。为此，我们先引入一些记号。

令 $\widehat{HFK}_{\mathrm{red}}(K)=\bigoplus_{m,\ s}\widehat{HFK}_{\text{约化}}{}_m(K,s)$，其中

$$\widehat{HFK}_{\mathrm{red},m}(K,s)=\begin{cases}\mathbb{F}^{-1}_{(0)}\oplus\widehat{HFK}_m(K,s) & s=\tau(K)\\ \widehat{HFK}_m(K,s) & s\neq\tau(K).\end{cases}$$

也就是说，约化 *HFK* 可视为$\widehat{HFK}(K)$ 对一个在从 $\widehat{HFK}(K)$ 到 $\widehat{HFK}$ *Heegaard Floer* 同调 (S^3) 的谱序列中存活下来的生成元取商。我们还需要了解当 $\tau(K)=0$ 时的 $H_*(\mathcal{F}(K,i))$。我们假设$\widehat{CFK}(K)$ 是约化的，这意味着我们可以为 $\mathbb{Z}$-过滤的链复形$\widehat{CFK}(K)$ 选取一个 $\mathbb{Z}$-过滤的基，也就是说，一个如下形式的基

$$x, y_i, z_i$$

对于某个有限指标集 $\{i\}_{i\in I}$，其分次和微分如下：

	m	A	∂
x	0	0	0
y_j	m_j	A_j	z_j
z_j	m_j-1	A_j-d_j	0

采用此记号，x 是我们取商所用的生成元，从而得到 $\widehat{HFK}_{\mathrm{red}}$。

命题 6.1。 设 K 是一个非平凡结，$\tau(K)=0$ 的结 *Floer* 复形如上所述。其结 *Floer* 复形 $CFK^-(Wh(K))$ 具有如下形式：

$$x\oplus\bigoplus_{j=1}^{n}(B[m_j-1])^{2d_j}$$

其中 x的 *Maslov* 分次和 *Alexander* 分次均为零，$B[k_i]$ 是图10中的 1×1 盒，且$\max\{m_j\}=\max\{m\mid \widehat{HFK}_{\mathrm{red},\ m}(K)\neq0\}$。

备注 6.2。 注意，对于 $K_n=T_{2,\ n}\#-T_{2,\ n}$ 当 $n\geq3$ 为奇数时，我们有

$$\max\{m\mid\widehat{HFK}_m(K_n)\neq0\}=n-1.$$

这是因为 K_n 是交错的，而根据 [OS03b] 和 [Pet13]，结 Floer 复形由亚历山大多项式和签名决定。

本命题的证明将依赖于 Hedden 的以下一个非常有用的结果：

定理 6.3 ([Hed07，定理 1。2])。 设 K 是一个亏格为 g的切片结。则

$$\widehat{HFK}_*(Wh(K),s)=\begin{cases}\mathbb{F}_{(1)}^{-2g-2}\oplus\bigoplus_{i=-g}^{g}[H_{*-1}(\mathcal{F}(K,i))]^2 & s=1\\ \mathbb{F}_{(0)}^{-4g-3}\oplus\bigoplus_{i=-g}^{g}[H_*(\mathcal{F}(K,i))]^4 & s=0\\ \mathbb{F}_{(-1)}^{-2g-2}\oplus\bigoplus_{i=-g}^{g}[H_{*+1}(\mathcal{F}(K,i))]^2 & s=-1.\end{cases}$$

命题 *6.1* 的证明。 利用上述基，我们先来理解 $H_*(\mathcal{F}(K,i))$.

我们首先考察 x 对 $H_*(\mathcal{F}(K,i))$ 的贡献。对于 $i<0$，其贡献为零；对于 $\widehat{\mathbb{F}}$，其贡献为 $0\le i\le g$。因此，由定理 6.3 可知， x 对 $HFK_*(Wh(K)\ s)$ 的贡献为

$$\begin{array}{ll}\mathbb{F}_{(1)}^{2g+2} & s=1\\ \mathbb{F}_{(0)}^{4g+4} & s=0\\ \mathbb{F}_{(-1)}^{2g+2} & s=-1.\end{array}$$

注意，这些项几乎恰好与定理 6.3 中初始的负指数项相抵消，唯一剩下的一项是 $\mathbb{F}$ 在 Maslov 分次和 Alexander 分次均为零时的一份拷贝。

接下来我们注意到，每一对 y_j,z_j 对 $H_*(\mathcal{F}(K,i))$ 的贡献，在 $\mathbb{F}$ 的情况下为 $A_j-d_j\le i\le A_j-1$，其他情况下为零。现在利用定理 6.3 来考察每一对 y_j,z_j 对 $\widehat{HFK}_*(Wh(K)\ s)$ 的贡献，即

$$\begin{array}{ll}\mathbb{F}_{(m_j)}^{2d_j} & s=1\\ \mathbb{F}_{(m_j-1)}^{4d_j} & s=0\\ \mathbb{F}_{(m_j-2)}^{2d_j} & s=-1.\end{array}$$

将这些结果取直和可得

$$\widehat{HFK}_*(Wh(K),s)=\begin{cases}\bigoplus_j\mathbb{F}_{(m_j)}^{2d_j} & s=1\\ \mathbb{F}_{(0)}\oplus\bigoplus_j\mathbb{F}_{(m_j-1)}^{4d_j} & s=0\\ \bigoplus_j\mathbb{F}_{(m_j-2)}^{2d_j} & s=-1\end{cases}$$

最后，按照 [CHH13第 9 节中的论证，1] 即可得到所需结果。也就是说，对每个 j，我们得到 $2d_j$ 个 1×1 方框 $B[m_j-1]$的副本。□

7. Proofs of Theorem 1.1, Corollary 1.2, Theorem 1.3, and Theorem 1.5.

定理 1.1 的证明。设 K 是一个非平凡切片结，设 D 是 K 的一个切片圆盘，并设 $\mathcal{R}$ 表示通过将 CH^+ 附加到切片圆盘补（B^4,S^3）−（D,K）并删除上边界而构造的异态 $\mathbb{R}^4$。赋予 $\mathcal{R}$ 其唯一的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，并注意到 c_1（$\mathfrak{s}$）$=0$。我们将使用引理 2.1 中的穷竭来证明，端 Floer 同调 $\widehat{\text{HE}}$（$\mathcal{R},\mathfrak{s}$）的最高分次直和项由 HFK red 的最高分次决定，由此立即得到结论 (1) 以及结论 (2) 中的保定向情形。要排除不同 $\mathcal{R}$ 之间的反向微分同胚，只需证明任意 $\mathcal{R}$ 与由最简单的全负扣结 Casson 把手构造出的任意切片 $\mathbb{R}^4$ 之间不存在保向微分同胚。利用定理 5.6，我们证明后者的端 Floer 同调消失，从而完成证明。

根据引理 2.1， $\mathcal{R}$ 有一个紧穷竭 X_i， $i\ge0$，其中 $X_0=B^4\setminus\nu(D)$，且 $X_i=X_0\cup T_i^+$，其中 T_i^+沿着 D的一个零框架子午线附着。此外，每个 $Y_i:=\partial X_i\cong S_0^3$（$\text{Wh}^i(K)$），且每个 $W_{ij}:=X_j-\text{int}\ X_i$都是通过向 Y_i附着 1-把手和 2-把手得到的，其中所有 2-把手都沿着表示 $H_1(Y_i\#(S^1\times S^2))$ 中本原元素的纽结附着。因此，根据 Gadgil 关于容许把手附着的例子 [Gad10，引理 2.3], , 以及容许余边界的复合仍是容许的这一事实 [Gad10，引理 2.1]， $\{X_i\}$ 是一个可容许的

$\mathcal{R}$的穷竭。根据引理 2.1，X_i 与 $B^4\setminus\nu$（Wh^i（D））微分同胚。由 $B^4 = X_i\cup$（2-把手）的 Mayer-Vietoris 序列可得，对于所有 i，b_2（X_i）$=b_3$（X_i）$=0$。因此，$\{X_i\}$ 是（$\mathcal{R}$，$\mathfrak{s}$）的分次可容许穷竭。由于对于所有 i，b_1（Y_i）$=1$，定理 3.3 得出

$$HE(\mathcal{R},\mathfrak{s}) = \varinjlim HF_{\mathrm{red}}(Y_i,\mathfrak{s}|_{Y_i})\,[-1/2]$$

具有绝对的 $\mathbb{Q}$-分次，且与所选的穷竭无关。

直接极限在取子序列后保持不变，因此我们可以令有向系统中的第一个模为 $HF_{\mathrm{red}}(Y_1,\ \mathfrak{s}|_{Y_1})\ [-1/2]$。我们有 $Y_1\cong S^3_0(Wh(K))$，且 $Wh(K)$ 是非平凡的，因为 K 是非平凡的（例如，可像 [Sch03、Sch54] 中那样考察桥数）。因此，由命题 6.1，我们得出结 Floer 复形 $CFK^-(Wh(K))$ 具有如下形式

$$x\oplus\bigoplus_{i=1}^{n}B[k_i],$$

且至少有一个方框。应用 0-手术的映射锥公式，我们得到 $HF_{\mathrm{red}}(Y_1,\ \mathfrak{s}|_{Y_1})\neq 0$，而最高分次直和项为 $\mathbb{F}^{k}{}_{(b-\frac{1}{2})}$，其中

$$b := \max\{m\mid \widehat{HFK}_{\mathrm{red},m}(K)\neq 0\}-1.$$

将此与定理 15.1 的第 (1) 项结合起来可知，对每个 $i\geq 1$，$HF_{\mathrm{red}}(Y_i,\ \mathfrak{s}|_{Y_i})\ [-1/2]$ 的最高分次直和项为 $\mathbb{F}^{k\cdot 2^{i-1}}$，分次为 $(b-1)$。根据定理 5.1的第 (2) 项，对每个 $i\geq 1$，协边映射

$$F_{W_{i,i+1},\mathfrak{s}|_{W_{i,i+1}}}: HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(Wh^i(K)))\to HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(Wh^{i+1}(K)))$$

在定义域的最高分次直和项上是单射。由于每个 $W_{i,i+1}$ 都是通过向 $Y_i\times I$附加一个 1-把手和一个 2-把手得到的，我们计算得其分次平移为 0。因此，$HE(\mathcal{R},\mathfrak{s})$ 在分次 $(b-1)$ 上包含一个 $\mathbb{F}^\infty$ 直和项，且这是任何非平凡齐次元素的最高分次。

由于分次群 HE$(\mathcal{R},\mathfrak{s})$ 是 $\mathcal{R}$ 微分同胚类型的不变量，而标准的 $\mathbb{R}^4$ 的端 Floer 同调消失 [Gad10，由命题 1.5]，我们得出 $\mathcal{R}$ 是异态的。这就证明了条目 (1)。条目 (2) 中保定向的情形可由我们的最大分次计算立即得出。为证明条目 (2) 中反定向的情形，假设 $\mathcal{R}'$ 是由一个非平凡可切片圆盘补空间与最简单的、所有交叉均为负的卡森把手拼接而成。按上述方法进行，我们得到 $\mathcal{R}'$ 的一个分次容许穷竭，其余边映射如定理 5.6 所述。因此，HE $(\mathcal{R}',\mathfrak{s})=0$，因为它是所有映射均为零的直极限。因此，对于任意 $\mathcal{R}$，$\mathcal{R}\ncong\mathcal{R}'$。□

注记 7.1。由于取子序列不会改变直极限，我们可以将有向系统中的第一个模取为$HF_{\mathrm{red}}(Y_m,\ \mathfrak{s}|_{Y_m})\ [-1/2]$，其中 m任意。因此，在对 K作出相同假设的情况下，若我们从任意一个$Wh^m(K)$ 的圆盘开始，而不是从 K开始构造 $\mathcal{R}$，则结论$HE(\mathcal{R},\ \mathfrak{s})$ 的最高分次直和项为 $\mathbb{F}^\infty_{(b-1)}$ 仍然成立。

请注意，即使使用不同痕的圆盘，切片圆盘的选择也不会影响端 Floer 同调。若使用同一个切片结、两个不同胚的切片圆盘补空间以及 CH^+来构造切片 $\mathbb{R}^4$，则这两个端 Floer 同调相同。

推论 1.2 的证明。设 $K_n = T_{2,n}\#-T_{2,n}$，其中 $n\geq 3$ 为奇数；设 CH$^+$ 为每一层都只有一次正向管道化的卡森把手，并令 $\mathcal{R}_n$ 表示通过将 CH^+ 附着到 K_n 的标准圆盘补空间，再删除上边界而构造的带状 $\mathbb{R}^4$。为每个 $\mathcal{R}_n$ 配备其唯一的自旋^c-结构 $\mathfrak{s}_n$。由定理 1.1 和注 6.2 可知，当 $n\neq m$ 为奇数且 $n,m\geq 3$ 时，HE $(\mathcal{R}_n,\mathfrak{s}_n)$ 与 HE$(\mathcal{R}_m,\mathfrak{s}_m)$ 不同构。□

定理 1.3 的证明。(1) 设 CH 是一个包含无限正链的卡森把手，并令 $\mathcal{R}$ 如定理陈述所述。令 $\mathcal{R}^+$ 为将 CH^+ 附着到同一圆盘补空间而得到的异态 $\mathbb{R}^4$。令 $\{X_n^+\}$ 为 $\mathcal{R}^+$ 的标准穷竭，并注意到 $\mathcal{R}$ 有一个类似于引理 2.1 中的标准穷竭 $\{X_n\}$，其中 X_n 是通过将 CH 的前 n 层交错 2-把手附着到圆盘补空间 $B^4 \setminus \nu(D)$ 上得到的。这为 $\mathcal{R}$ 提供了一个可容许穷竭。在 X_n 顶层的交错把手中，恰有一个来自正链；将其余把手全部用沿零框架子午线附着的 2-把手填补后，我们得到 $X_n^+ = X_n \cup Z_n$，其中 Z_n 是由这些 2-把手附着得到的余边界。因此，定理 5.1 的余边界映射 $F_{W_1^+,j}$ 可分解为 $F_{Z_n} \circ F_{W_1,j}$。根据我们的假设，即 K 是 Whitehead 加倍，定理 5.1 表明映射 $F_{W_1^+,j}$ 在 $\mathrm{HF\ red}(S^3_0(K))$ 的最高分次直和项上是单射。因此可知 $F_{W_1,j}$ 也必为单射，故 $\mathcal{R}$ 的端 Floer 同调非零。

(2) 假设CH 具有一条无限正链和一条无限负链。根据上文第（1）部分， $\mathcal{R}$ 的端 Floer 同调非零。注意，反向定向流形 $\mathcal{R}$ 是一个切片 $\mathbb{R}^4$，它是通过将带有无限正链的卡森把手（初始卡森把手中无限负链的镜像）附加到一个非平凡可切片圆盘补空间上得到的，其中该纽结是一个非平凡切片结的 Whitehead 加倍。这仍然是一个亏格为 1 的可切片结，其结 Floer 复形CFK^- 是由一个单生成元和 1×1 个方框组成的和，因此根据注5.2，将该圆盘补$\mathbb{R}^4$ 与 CH^+ 结合得到的切片具有非零的端 Floer 同调。因此，我们可以重复上文第（1）部分的证明，从而得出 $\mathcal{R}$ 具有非平凡的端 Floer 同调。定理 $\mathbb{R}^4$中的切片's1.1并不具有这一性质：我们已看到，它们反向定向后，端 Floer 同调消失。□

注记 7.2。 在上述证明中，如果我们知道 K 仍为 Whitehead 加倍，则可以去掉这一假设，因为定理 5.1 的单射性结论仍然成立。

注记 7.3。 在上述证明中，当初始切片结分别经过正或负 Whitehead 加倍时，可以看到端 Floer 同调不消失。一般而言，这使我们能够将定理1.1的第（1）项的证明扩展到仅含有限个同号双点的线性链卡森把手。这是因为这样的切片 $\mathbb{R}^4$ 与由 CH^+ 或 CH^- 以及一个非平凡切片结的正或负 Whitehead 加倍构成的对象微分同胚。在线性链卡森把手中存在无限多个正、负双点时，当前方法不适用。

定理 *1.4*的证明。 我们证明一个略为一般的陈述。设 K 和 K' 是选定了切片圆盘的切片纽结。设 $\mathcal{R}$ 由 K 的圆盘补空间与 CH^+ 结合得到，并设 $\mathcal{R}'$ 由 K' 的圆盘补空间与 CH^- 结合得到。于是 $\mathcal{R}\natural\mathcal{R}'$ 具有一个标准可容许穷竭 $\{X_n\}$，类似于引理 2.1中的穷竭。因此，为了计算具有唯一挠 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}$的端 Floer 同调，相关的余边界映射是定理 5.1 和 5.6中出现的 1-把手和 2-把手余边界映射：

$$F_{W_{i,i+1},\mathfrak{s}|_{W_{i,i+1}}} : HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(Wh^i_+(K))\#S^3_0(Wh^i_-(K'))) \to HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(Wh^{i+1}_+(K))\#S^3_0(Wh^{i+1}_-(K'))).$$

根据 K¨unneth 公式以及定理 5.6中证明的负双重配边映射的消失性质，可知这些映射全为零，因此端 Floer 同调消失。类似地，反向定向流形上的相关映射也全为零。

这些流形显然与 $\mathbb{R}^4$同胚。它们是异态的，因为 $\mathcal{R}$ 由 CH^+ 构造的流形是异态的，而且对于端和 [Gom85，推论 A 中所述，不存在逆元。3]。为得到定理陈述，请注意，选择 $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ 相当于选择 $K' = -K$。□

为了证明定理1.5，我们希望使用引理2.3 中构造的穷竭，来计算（$Y \times \mathbb{R}$）$\natural\mathcal{R}_n$非标准端的端 Floer 同调。然而，这个穷竭不满足定义3.2中所说的分次容许性；相反，它满足分次容许性的一种相对版本

，我们现在对其加以定义。我们将证明，这个条件仍允许构造良定义且绝对分次的直接极限不变量；此外，该条件还允许计算 4-流形中相对于 3维流形“切割”的各个端的$HE(X)$。

定义7.4。 设 $(X,\ Y_0,\ \mathfrak{s})$ 是一个光滑、定向的非紧 4-流形，具有恰好一个端、恰好一个边界分支 Y_0，以及一个 spin^c 结构 $\mathfrak{s}$。我们要求 Y_0 是闭的。假设 $\{(X_i,\ Y_0)\}$ 是 $(X,\ Y_0)$ 的一个紧穷竭，使得对所有 i，均有 $X_i \subset \mathrm{int}(X_{i+1})$。令 $Y_i := \partial X - Y_0$ 和 $W_{ij} := X_j - \mathrm{int}(X_i)$（$j > i$），且 Y_i 连通。若穷竭 $\{(X_i,\ Y_0)\}$ 满足以下条件，则称其为分次容许： 穷竭 $\{X_i\}$按照 Gadgil 的定义是可容许的，并且还满足

(1) $H_2(X_i,\ Y_0;\ \mathbb{Q}) = H_3(X_i,\ Y_0;\ \mathbb{Q})$ 对所有 $i > 0$ 均成立，并且 (2) 对所有 $i > 0$，$\mathfrak{s}|_{Y_i}$ 都是挠的。

定理 7.5。 设 $(X, Y_0, \mathfrak{s})$ 是一个带有 *spin*^{c} 结构的光滑 *4*-流形，如定义 7.4所述，并假设它具有一个分次容许穷竭 $\{(X_i, Y_0)\}$。那么 $(HF\,\mathrm{red}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})\ F_{W_{ij}})$ 构成一个正向系统，其直极限

$$HE(X, Y_0, \mathfrak{s}) := \varinjlim HF_{\mathrm{red}}(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})[-b_1(Y_i)/2]$$

是一个绝对 $\mathbb{Q}$ 分次的 $\mathbb{F}[U]$-模，且不依赖于分次容许穷竭的选取。

注 7.6。 由于取子序列不会改变直极限，且 X 的端的任意邻域都必定包含 Y_i的一个子序列，因此 $HE(X, Y_0, \mathfrak{s})$ 是 X之端的渐近 spin^c 微分同胚不变量。

分次可容许性的相对版本使我们能够以同样的方式证明引理 3.7的一个类似结果。

引理 7.7. L 且 $\{(X_i, Y_0)\}$ 是 (X, Y_0) 的分次容许穷竭。那么对所有 $i \geq 0$,

$$b_1(X_i) = b_1(Y_i).$$

证明。 考虑系数在 over$\mathbb{Q}$ 上的三元组 $(X_i, Y_0 \sqcup Y_i, Y_i)$ 的长正合列中的以下一段：

$$H_3(X_i, Y_i) \to H_3(X_i, Y_0 \sqcup Y_i) \to H_2(Y_0 \sqcup Y_i, Y_i) \to H_2(X_i, Y_i).$$

由分次容许性可知，第一个和最后一个向量空间是平凡的，因此中间两个向量空间同构。我们有

$$H^1(X_i) \cong H_3(X_i, Y_0 \sqcup Y_i) \cong H_2(Y_0 \sqcup Y_i, Y_i) \cong H_2(Y_0) \cong H^1(Y_0),$$

在 $\mathbb{Q}$ 上。 □

定理 7.5 的证明。 由 Gadgil 可容许性以及我们是在 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ 上进行计算这一事实，可得到所需的正向系统和直极限。我们必须验证该直极限具有绝对分次，并且与穷竭的选择无关。

首先，我们证明命题3.6的结论在我们的情形下成立：证明几乎完全相同，唯一的区别是我们使用引理 7.7 来得出 $\chi(W_{ij}) = b_1(Y_i) - b_1(Y_j)$，并且必须证明 $\sigma(W_{ij}) = 0$。只需证明每个 $H_2(X_i)$ 上的交配对为零。考虑系数在 $\mathbb{Q}$ 上的对 $(, Y_0)$ 的长正合列中的以下一段：

$$H_3(X_i, Y_0) \to H_2(Y_0) \to H_2(X_i) \to H_2(X_i, Y_0).$$

由于首项和末项均为零，因此对于任意 i，有 $H_2(Y_0,\ \mathbb{Q}) \cong H_2(X_i,\ \mathbb{Q})$，且该同构由包含映射诱导。因此， $H_2(X_i)$ 的交形式由其在 Y_0 中的曲面上的作用决定。由于 Y_0 中的任意曲面在 X_i 中的自交数均为零（将其推入领圈），我们看到 $H_2(X_i)$ 上的交形式为零。

直极限具有绝对分次，且直极限与所选的可容许穷竭无关这一证明的其余部分，与定理3.3的证明完全相同。注意，显然，相对于 Y_0 交织穷竭保持分次容许条件。□

定理证明 *1.5.* 设 M 是一个固定的闭、连通 3维流形。我们通过与推论 $M \times \mathbb{R}$ 中的异态 $\mathbb{R}^4$'s $\mathcal{R}_n$ 作端和，构造出 1.2给出的无穷多个光滑化。我们将考察从两个端计算得到的相对端 Floer 同调，以区分这些光滑化。

首先，假设 M 是可定向的，并考虑（$M \times \mathbb{R}$）$\natural\mathcal{R}_n$，其中端和沿着一条标准射线 $\{p\} \times [1, \infty) \subset (Y \times \mathbb{R})$ 进行。固定一个嵌入 $M = M \times \{0\} \subset (M \times \mathbb{R})\natural\mathcal{R}_n$，并令$\mathfrak{S}$ 为（^{c}）上的挠 Spin$M \times \mathbb{R}$结构的集合$\natural\mathcal{R}_n$。由于（$M \times \mathbb{R}$）的任意微分同胚都会将端映到端，根据注释 7.6，它必须保留两个端的端 Floer 同调集合，其中对挠 Spin^c 结构求和：

$$\mathcal{HE}((M \times \mathbb{R})\natural\mathcal{R}_n, \mathfrak{S}) := \left\{ \bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} HE(M \times (-\infty, 0], M, \mathfrak{s}_L), \bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} HE((M \times [0, \infty))\natural\mathcal{R}_n, M, \mathfrak{s}_R) \right\}.$$

（这里我们写作 $\mathfrak{s}_L$，$\mathfrak{s}_R$ 来表示 $\mathfrak{s}$ 的适当限制。）标准端具有一个由 M 的副本之间的乘积余边界构成的穷竭：这些在相对意义下显然是分次可容许的，因此

$$\bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} HE(M \times (-\infty, 0], M, \mathfrak{s}_L) \cong \bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} HF_{\mathrm{red}}(M, \mathfrak{s}|_M)[-b_1(M)/2]$$

作为绝对 $\mathbb{Q}$-分次的 $\mathbb{F}[U]$-模。注意，这具有一个固定的最高分次非平凡直和项，其分次不依赖于 n。

引理 2.3给出了一个紧穷竭 $\{(X_i, M)\}$，对于 $((M \times [0, \infty))\natural\mathcal{R}_n, M$其对应的余边界系统为

$$W_{i,i+1} \colon M\#S^3_0(Wh^i(K_n)) \to M\#S^3_0(Wh^{i+1}(K_n))$$

是分次可容许的。由 Heegaard Floer 同调的 K¨unneth 公式以及定理 5.1 的第（1）项可知，如果 n相对于 HF^+（M）在挠 Spin^c 结构中的分次足够大，那么对于所有 $i \geq 1$,

（1）$HF_{\mathrm{red}}(M\#S^3_0(Wh^i(K_n))\#S^1 \times S^2)$ 的最高分次非平凡直和项，限制到挠 Spin^{c}结构后，其分次为（$n + f(M)$）；以及（2）$HF_{\mathrm{red}}(M\#Y_{-1}(J\#Wh^i(K_n)))$ 的最高分次非平凡直和项，限制到挠- sion Spin^{c}结构后，其分次为（$n + f(M) - \frac{1}{2}$），

其中 $f(M)$ 是一个仅取决于 ***Heegaard Floer*** 同调 $^+(M)$ 的数。按照引理 5.5 证明中的做法，利用手术正合三角，我们发现余边界映射 W_{ij} 在 ***Heegaard Floer*** 同调 $_{\mathrm{red}}(M\#S^3_0(Wh^i(K_n)))$ 的最高分次直和项上是单射，且限制在挠旋 Spin^c 结构上。因此，通过追踪分次平移，我们发现 $\bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} HE((M \times[0, \infty))\natural\mathcal{R}_n, M, \mathfrak{s}_R)$ 的最高分次非平凡直和项位于分次 $(n + f(M) - 1 - b_1(M)/2)$。因此，考虑所有充分大的 n，我们得到无穷多个不同的集合 $\mathcal{HE}((M \times \mathbb{R})\natural\mathcal{R}_n, \mathfrak{S})$，进而得到无穷多个微分同胚类型 $(M \times \mathbb{R})\natural\mathcal{R}_n$。

接下来假设 M是不可定向的：令 M'为定向双覆盖，并考虑（$M' \times\mathbb{R}$）$\natural_2\mathcal{R}_n$，其中端和沿着纤维射线的提升进行。这个可定向流形是（$M \times \mathbb{R}$）$\natural\mathcal{R}_n$的双覆盖，其中端和沿着一条纤维射线进行。注意，微分同胚（$M\times\mathbb{R}$）$\natural\mathcal{R}_n \to (M\times\mathbb{R})\natural\mathcal{R}_m$会诱导覆盖空间（$M'\times\mathbb{R}$）$\natural_2\mathcal{R}_n \to (M' \times \mathbb{R})\natural_2\mathcal{R}_m$之间的微分同胚。令 $\mathfrak{S}$为（^{c}）$M' \times \mathbb{R}$上的挠自旋结构集合。稍微修改引理2.3，我们得到非标准端的一个分次容许穷竭，它由一叠余边界构成：

$$W_{i,i+1} : M\#_2\, S^3_0(Wh^i(K_n)) \to M\#_2\, S^3_0(Wh^{i+1}(K_n)).$$

按照与可定向情形类似的推理，令 n充分大并改变其取值，我们得到彼此不同的集合 $\mathcal{HE}((M'\times\mathbb{R})\natural_2\mathcal{R}_n,\ \mathfrak{S})$. □

注记 7.8。我们使用了 $\mathcal{R}_n$，以便在 $M\times\mathbb{R}$ 上获得新的光滑结构；为方便起见，任意满足以下条件的带状 $\mathbb{R}^4$，只要其在定理 1.1 中的分次相对于 $HF^+(M)$ 的分次足够大，就会给出 $M\times\mathbb{R}$的不同光滑化。请注意，我们的方法只能得到可数多个光滑化。

注记 7.9。定理 1.5 的证明使我们能够区分以下形式的各种端和：$\mathcal{R}_{n_1}\natural\ldots\natural\mathcal{R}_{n_k}$：使用上述 K¨unneth 公式，我们可以确定相应端 Floer 同调中非平凡元素的最大分次，并得到不同的值。例如，采用推论 1.2中的记号，$\mathcal{R}_a\natural\mathcal{R}_b$ 与 $\mathcal{R}_a\natural\mathcal{R}_c$ 的端 Floer 同调中最高的非平凡分次相差 $|b-c|$。

References

[BE98] ˇZarko Bi˘zaca 和 John Etnyre, *Smooth structures on collarable ends of 4-manifolds*, Topology 37 (1998), 第 3, 461 467 1604866 ↑2 4 期–。MR, Ben Julia Bennett, [16] *Exotic smoothings via large $\mathbb{R}^4$'s in Stein surfaces* **16** 2016 3, , 代数与几何拓扑 (), 第–期。MR[1637 1681 3523051 ↑5

BG96] ˇZarko Bi˘zaca 和 Robert E. Gompf, *Elliptic surfaces and some simple exotic* $\mathbb{R}^4$*'s*, 微分几何杂志 **43** 1996 3, 458 504 ↑1 3 (), 第–期。, Cas A.J. Casson, [80] *Three lectures on new-infinite constructions in 4-dimensional manifolds*, 奥赛数学预印本, 数学系, 1980 ↑5 。CGH Jack S. Calcut、Craig R. Guilbault 和 Patrick V. Haggerty, [22] *Extreme nonuniqueness of end-sum*, J. Topol. Anal. **14** 2022 2, 461 503 4446916 ↑7 (), 第–期。MR CHH Tim D. [13] Cochran、Shelly Harvey 和 Peter Horn, *Filtering smooth concordance classes of topologically slice knots* **17** 2013 4, 2103 2162 3109864 ↑20 , Geom. Topol. (), 第–期。MR[CMM24] Otis Chodosh、Davi Maximo 和 Anubhav Mukherjee, *Complete Riemannian 4-manifolds with uniformly positive scalar curvature* 2024 , 。 ↑3

[92] DMF Stefano De Michelis 和 Michael H. Freedman, *Uncountably many exotic* $\mathbb{R}^4$*'s in standard 4-space*, J. Differential Geom. **35** 1992 1, 219 254 1152230 ↑1 3 (), 第–期。MR, [83] Don S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, 微分几何杂志 **18** 1983 2, 279 315 ↑1 5 (), 第–期。, Fan Fuquan Fang, , Topology and its Applications 99 (1999), 123–131。 [99] *Smooth structures on* $\Sigma\times\mathbb{R}$ ↑4, 7, 8[Fre82] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, 微分几何杂志 17 (1982), 第3期, 357–453。 ↑1, 3, 5[Gad10] Siddhartha Gadgil, *Open manifolds, Ozsváth-Szabó invariants and exotic* $\mathbb{R}^4$*'s*, Expositiones Mathematicae **28** 2010 3, 254 261 ↑1 2 3 8 9 11 20 21 (), 第–期。, , , , , , , Gom Robert E. Gompf, [17] *Minimal genera of open 4-manifolds*, Geom. Topol. 21 (2017), 第1期, 107–155。MR[85] 3608710 ↑4 Gom, *An infinite set of exotic* $\mathbb{R}^4$*'s*, 微分几何杂志 21 (1985), 第2期, 283–300。 ↑1, 7, 22[Gom 93] *An exotic menagerie* **37** 1993 1, 199 223 ↑1 3 7 8 , , 微分几何杂志 (), 第–期。, , , [99] GS Robert E Gompf 和 Andras Stipsicz, , 美国数学会, 1999。 *4-manifolds and Kirby calculus* ↑1 2 3 4 5 , , , , Hed Matthew Hedden, [07] *Knot Floer homology of Whitehead doubles*, Geom. Topol. 11 (2007), 2277–2338。MR 2372849 ↑13 20 , Krc David Krcatovich, [18] *A restriction on the Alexander polynomials of L-space knots*, Pacific J. Math. 297 (2018), 第1期, 117–129。MR3864231 ↑15[OS03a] Peter Ozsv´ath 和 Zoltan Szabo, , Adv. Math. (), 第–期。MR, [03] *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary* **173** 2003 2, 179 261 1957829 ↑11 *Heegaard Floer homology and alternating knots* **7** 2003 225 254 1988285 ↑19 。MR OS a, , Topol. (), – 17 OS b, , Geom. [04] *Holomorphic disks and knot invariants* **186** 2004 1, 58 116 2065507 ↑11 Adv. Math. (), 第–期。MR[04] *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds* 2 OS b, , Ann. of Math. () 159 (2004 3, 1027 1158 2113019 ↑11), 第–期。MR OS, [05] *On knot Floer homology and lens space surgeries*, Topology 44 (2005), 第6期, 1281–1300。MR OS, *Holomorphic triangles and invariants for smooth four-manifolds* **202** 2006 2, , Adv. Math. (), 第–期。MR, 326 400 2222356 ↑10 13

[OS08] Peter S. Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o, *Knot Floer homology and integer surgeries*, 代数与几何拓扑 8（ 2008 1, 101 153 2377279 ↑4 11 12 ）, 第–期。MR, , Pet Ina Petkova, [13] *Cables of thin knots and bordered Heegaard Floer homology* **4** 2013 4, , 量子拓扑 377 409 3134023 ↑19 （）, 第–期。MR[03] Ras Jacob Andrew Rasmussen, *Floer homology and knot complements*, ProQuest LLC, 宾娜堡，密歇根州，2003。博士论文——哈佛大学。MR 2704683 ↑11 [03] *Additivity of bridge numbers of knots*Sch Jennifer Schultens, , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 135 (2003), 第 3, 539 544 2018265 ↑21 期–。MR Sch Horst Schubert, [54] *über eine numerische Knoteninvariante*, 数学杂志 61 (1954), 245–288。MR72483 ↑21[Tau87] Clifford Henry Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, 微分几何杂志 **25** 1987 3, 363 430 ↑1 [97] （）, 第–期。Tay Laurence R. Taylor, *An invariant of smooth 4-manifolds*, Geom. Topol. 1 (1997), 71–89。MR 1483766 ↑1, 4

School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332 *Email address*: seaneli@gatech.eduSchool of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332*Email address*: hom@math.gatech.eduDepartment of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh, NC 27607*Email address*: tlid@math.ncsu.edu