arXiv:2601.08787v1 [math.NA] 13 Jan 2026

采样恢复综述

F. Dai 和 V. Temlyakov *

摘要

从有限个样本重构未知函数，是纯数学和应用数学中的一项基本挑战。本综述全面概述了采样恢复领域的最新进展，重点关注各种算法的精度，以及最优恢复误差、非线性逼近与函数类的柯尔莫哥洛夫宽度之间的关系。一个核心主题是通用采样离散化理论与贪心算法的 Lebesgue 型不等式之间的协同作用。我们讨论了三种主要的算法框架：加权最小二乘和 ℓ_p 最小化、稀疏逼近方法，以及贪心算法，例如希尔伯特空间中的弱正交匹配追踪（WOMP）和巴拿赫空间中的弱切比雪夫贪心算法（WCGA）。这些方法适用于由结构条件定义的函数类，如 A^r_β 和维纳型类，以及具有支配混合导数的经典 Sobolev 型类。值得注意的是，我们重点介绍了近期研究成果：对于某些多元函数类，与线性方法相比，非线性采样恢复能够提供更优的误差保证。

*本研究得到了俄罗斯科学基金会项目（编号：23-71- 30001，https://rscf.ru/project/23-71-30001/）的资助，并在莫斯科国立罗蒙诺索夫大学开展。

目录

1 引言 31.1 Lebesgue 型不等式.7 1.2 函数类上的采样恢复.10

2 一些定义和记号 15
2.1 普适性与非相干性.15 2.2 巴拿赫空间中的稀疏逼近.18

3 一些离散化结果 21
3.1 有限维子空间中的采样离散化 21 3.2 通用离散化.24

4 通过 ℓ_p 最小化进行恢复 25
4.1 子空间上的投影.25 4.2 稀疏逼近.31

5 贪心算法恢复 34
5.1 弱正交匹配追踪.34 5.2 WCGA.36

6 具有结构条件的类的恢复 41
6.1 具有立方分解条件的类的恢复 41 6.2 下界.44 6.3 具有双曲交叉分解条件的类的恢复.48 6.4 一般类的恢复 $\mathbf{A}_{\beta}^{r\,b}$,$(\Psi, \mathcal{G})$.51

7 满足光滑性条件的类的恢复 54
7.1 非线性恢复.55 7.2 线性恢复.59

8 总结 62

1 引言

从有限个点处的样本恢复（重构）定义在 $\mathbb{R}^d$ 子集上的未知函数，是纯数学和应用数学中的一个基本问题。我们希望构造恢复算子（算法），使其在精度、稳定性和计算复杂度方面表现良好。本文讨论精度问题。按照逼近理论中的标准方法，我们针对给定的函数类定义了一些最优特征量——柯尔莫哥洛夫宽度和最优恢复误差，并建立了它们之间的关系。近来，人们认识到，在 L_2 范数下进行恢复时，加权最小二乘算法是相当有效的恢复方法。随后，人们发现贪心型算法也是非常有效的恢复方法。本文将讨论这些结果。讨论的重点是说明，为了在采样恢复方面取得这些新成果，研究人员结合了两种深刻而强有力的技术——用于贪心型算法的勒贝格型不等式，以及通用采样离散化理论。

我们先简要介绍插值与恢复的经典问题，并讨论单变量周期情形。重点在于从连续函数和一致范数的情形（例如，参见 [62], 第 2 卷，第 X 章）转向积分范数 L_p,$1 \le p < \infty$ 的情形（例如，参见 [44], [55], 第 2 章及 [14]）。

我们用 C, C' 和 c, c' 表示若干正常数。它们的参数表示这些常数可能依赖的参数。通常，这些常数不依赖于函数 f 以及变化参数 m, v, u。为简洁起见，我们采用以下符号。对于两个非负序列$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，关系 $a_n \ll b_n$ 表示存在一个数 $C\,(a, b)$，使得对所有 n，都有 $a_n \le C\,(a, b)\, b_n$。关系 $a_n \gg b_n$表示 $b_n \ll a_n$，而 $a_n \asymp b_n$ 表示 $a_n \ll b_n$ 且 $a_n \gg b_n$。对于实数 x，用 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x的整数部分，用 $\lceil x \rceil$ 表示大于或等于 x的最小整数。

以下形式的函数

$$t(x) = \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikx} = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为阶数至多为 n 的三角多项式。这类多项式的集合记作 $\mathcal{T}(n)$。

阶数为 n 的狄利克雷核

$$\mathcal{D}_n(x) := \sum_{|k|\le n} e^{ikx} = e^{-inx}(e^{i(2n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)^{-1} = \frac{\sin(n + 1/2)x}{\sin(x/2)}$$

是一个偶三角多项式。记

$$x^j := 2\pi j/(2n + 1), \qquad j = 0, 1, ..., 2n.$$

显然，点 x^j, $j = 1,\ldots, 2n$ 是狄利克雷核 $\mathcal{D}_n$ on$[0, 2\pi]$ 的零点。因此，对于任意连续函数 $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$,

$$I_n(f)(x) := (2n + 1)^{-1} \sum_{j=0}^{2n} f(x^j)\mathcal{D}_n(x - x^j)$$

在点 x^j 处插值 f；也就是说， $I_n(f)(x^j) = f(x^j)$, $j = 0, 1, ..., 2n$。

容易验证，对于任意 $t \in \mathcal{T}(n)$，都有 $I_n(t) = t$。利用这一点和不等式

$$\left|\mathcal{D}_n(x)\right| \le \min\left(2n + 1, \pi/|x|\right), \qquad |x| \le \pi,$$

我们得到以下 Lebesgue 不等式

$$\|f - I_n(f)\|_\infty \le C(\ln(n + 1))E_n(f)_\infty,$$

其中， $E_n(f)_p$ 是 f 在 L_p 范数下由 $\mathcal{T}(n)$ 中的多项式给出的最佳逼近。

de la Vall´ee Poussin 核定义如下

$$\mathcal{V}_n(x) := n^{-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \mathcal{D}_k(x) = \frac{\cos nx - \cos 2nx}{n(\sin(x/2))^2}.$$

de la Vall´ee Poussin 核 $\mathcal{V}_n$ 是阶数为 $2n - 1$ 的偶三角多项式，其上界为

$$|\mathcal{V}_n(x)| \le C \min\left(n,\ 1/(nx^2)\right),\ |x| \le \pi.$$

考虑以下恢复算子（见 [44]和 [47]）

$$R_n(f) := (4n)^{-1} \sum_{j=1}^{4n} f\left(x(j)\right) \mathcal{V}_n\left(x - x(j)\right), \qquad x(j) := \pi j/(2n). \tag{1.1}$$

容易验证，对于任意 $t \in \mathcal{T}(n)$，都有 $R_n(t) = t$。利用这一点和上述上界估计，我们得到以下勒贝格型不等式（德拉瓦莱·普桑不等式）

$$\|f - R_n(f)\|_\infty \le C E_n(f)_\infty.$$

现在我们转而讨论 L_p, $p \in [1,\infty)$ 中的误差。设 $\varepsilon := \{\epsilon_k\}_{k=0}^\infty$ 是一个非负数的非递增数列。定义

$$E(\varepsilon, p) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) : \ E_k(f)_p \le \epsilon_k, \ k = 0, 1, \dots\}.$$

这里及下文中， $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{R}^2$中的单位圆；照例， $\mathbb{T}$ 上的每个函数都视为 $\mathbb{R}$上的 2π-周期函数。

定理 1.1 ([44, 定理 2])。 假设非负数的非递增数列 ε 满足以下条件，其中 $B, D > 0$ 为某些常数：对所有 $s = 0, 1, \dots,$

$$\sum_{\nu=s+1}^\infty \epsilon_{2^\nu} \le B\epsilon_{2^s}, \qquad \epsilon_s \le D\epsilon_{2s}.$$

那么对任意 $p \in [1,2]$，我们有

$$\sup_{f \in E(\varepsilon,p)} \|f - R_n(f)\|_p \asymp \sum_{\nu=0}^\infty 2^{\nu/p}\epsilon_{n2^\nu}.$$

当 $p < \infty$ 时，算子 R_n 在 L_p 上没有定义。历史上，最初的想法是考虑算子 $R_n J_r$，其中

$$J_r(f)(x) := (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{T}} f(x-y) F_r(y) dy,$$

$$F_r(y) := 1 + 2\sum_{k=1}^\infty k^{-r} \cos(ky - r\pi/2).$$

已在 [44] 中证明，对于 $p \in [1,\infty]$ 和 $r > 1/p$，我们有（I 是恒等算子）

$$\|I - R_n J_r\|_{L_p \to L_p} \le C(r,p) n^{-r}.$$

事实证明，下面的不等式更为方便。定义

$$V_s(f)(x) := (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{T}} f(x-y) \mathcal{V}_s(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

那么，对于 $s \geq n$，有（[47]）

$$\|R_n V_s\|_{L_p \to L_p} \leq C(s/n)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

and

$$\|I_n V_s\|_{L_p \to L_p} \leq C(p)(s/n)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty.$$

现在我们进入一般情形。设 Ω 是$\mathbb{R}^d$ 的一个紧子集，并赋予博雷尔概率测度 μ。对于定义在 Ω 上的实值或复值函数， $1 \leq p < \infty$的 L_p 范数，我们理解为

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

我们将 L_∞ 范数理解为连续函数的一致范数:

$$\|f\|_\infty := \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|,$$

并且为记号上的方便，有时将 $L_\infty(\Omega)$写作连续函数空间$\mathcal{C}(\Omega)$。

回顾最优线性恢复理论的设定。对于固定的$m \in \mathbb{N}$ 和点集 $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$，令 Φ为从 $\mathbb{C}^m$ 到 $L_p(\Omega, \mu)$ 的线性算子。对于 Ω 上的函数类 $\mathbf{F}$ （通常是 $L_p(\Omega, \mu)$ 的一个中心对称紧子集），定义

$$\varrho_m(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\xi} \inf_{\text{linear } \Phi} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \Phi(f(\xi^1), \ldots, f(\xi^m))\|_p.$$

上述恢复过程是一个线性过程。下面这种对上述恢复过程的修改也很有意义。现在允许任意映射 $\Phi : \mathbb{C}^m \to X_m \subset L_p(\Omega, \mu)$，其中 X_m 是一个维数为 m的线性子空间，并定义

$$\varrho_m^*(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\xi} \inf_{\Phi; X_m} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \Phi(f(\xi^1), \ldots, f(\xi^m))\|_p.$$

在上述两种情形中，我们构造的近似项来自维数至多为 m 的线性子空间。自然会将量 $\varrho_m(\mathbf{F}, L_p)$ 和 $\varrho_m^*(\mathbf{F}, L_p)$ 与柯尔莫哥洛夫宽度进行比较。设 $\mathbf{F} \subset L_p$ 是一个中心对称紧集。这些量

$$d_n(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\{u_i\}_{i=1}^n \subset L_p} \sup_{f \in \mathbf{F}} \inf_{c_i} \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i u_i \right\|_p, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

称为柯尔莫哥洛夫宽度，即$\mathbf{F}$ 在 L_p 中的柯尔莫哥洛夫宽度。在柯尔莫哥洛夫宽度的定义中，对于每个 $f \in \mathbf{F}$，我们取其在 $U := \operatorname{span}\{u_i\}_{i=1}^n$ 中的最佳逼近元素作为近似元素。这意味着一般而言（即若 $p \neq 2$），这种逼近方法不是线性的。

我们有以下显然的不等式:

$$d_m(\mathbf{F}, L_p) \leq \varrho_m^*(\mathbf{F}, L_p) \leq \varrho_m(\mathbf{F}, L_p). \tag{1.2}$$

此外，对于函数类 $\mathbf{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$，我们定义

$$\varrho_m^o(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\xi} \inf_{\mathcal{M}} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \mathcal{M}(f(\xi^1), \ldots, f(\xi^m))\|_p,$$

其中，$\mathcal{M}$ 遍历所有映射 $\mathcal{M} : \mathbb{C}^m \to L_p(\Omega, \mu)$，而 ξ 遍历 Ω 中所有由 m 个点组成的子集 $\{\xi^1, \cdots, \xi^m\}$。这里，我们用指标 o 表示最优性。显然，上述特征是非线性恢复的特征。

特征 ϱ_m、ϱ_m^*、ϱ_m^o 及其变体已针对许多特定的函数类得到了深入研究。关于已有结果的综述，请参阅著作 [61], [35], [14], [55], [36]–[38]及其中的参考文献。特征 ϱ_m^* 和 ϱ_m 受到柯尔莫哥洛夫宽度和线性宽度概念的启发。量 ϱ_m^* 似乎最早由 [13]、ϱ_m 于 [47], 中引入，而 ϱ_m^o 则由 [61] 引入。

本文重点研究两个特征 ϱ_m 和 ϱ_m^o。我们说明，如何从关于 Lebesgue 型不等式的更精细结果中推导出 $\varrho_m(\mathbf{F}, L_p)$ 和 $\varrho_m^o(\mathbf{F}, L_p)$ 的界。下面我们解释相应问题的背景。

问题。 如何设计一种实用算法，使其给出的采样恢复近似项的误差与最佳可能近似的误差相当?

我们将在接下来的第 1 小节中讨论上述问题的背景。 1

1.1 Lebesgue 型不等式

我们需要介绍一些关于贪心算法的 Lebesgue 型不等式理论中的定义（见 [55, 第 8.7] 节）。设 X 是一个范数为 $\|\cdot\|_X$的巴拿赫空间，且 $Y \subset X$ 是 X 的一个子空间，赋有更强的范数 $\|\cdot\|_Y$，满足 $\|f\|_Y \geq \|f\|_X$ 对所有 $f \in Y$均成立。在一般情形下，我们考虑一种算法（即一种逼近方法）

$\mathcal{A}:=\{A_v(\cdot)\}_{v=1}^{\infty}$，它是一个映射序列（线性或非线性） $A_v:Y\to A_v(Y)\subset Y, v=1,2,\cdots$，其中 $A_v(Y)$ 是映射 A_v的值域。显然，对于任意 $f\in Y$，我们有

$$\|f-A_v(f)\|_Y\geq d(f,A_v(Y))_Y:=\inf_{g\in A_v(Y)}\|f-g\|_Y,\quad v=1,2,\cdots.$$

我们关注这类算法 $\mathcal{A}$：它们在 X-范数下给出的逼近，接近于在更强的Y-范数下的最佳可能逼近。更准确地说，我们给出以下两个定义（关于 $X=Y$的情形，可在 [55, 第 8.7] 节找到类似定义）。

定义 1.1。 给定一个整数 $u\in\mathbb{N}$，若存在常数 $C_1\geq 1$ 和 $C_2>0$，使得对于任意 $f\in Y$，算法 $\mathcal{A}=\{A_v(\cdot)\}_{v=1}^{\infty}$ 都满足深度为 u、针对巴拿赫空间对 (X,Y) 的勒贝格型不等式或 ***de la Vall´ée Poussin*** 不等式，

$$\|f-A_{\lceil C_1v\rceil}(f)\|_X\leq C_2d(f,A_v(Y))_Y,\quad v=1,\dots,u. \tag{1.3}$$

在 $C_1=1$ 的情形下，我们称它们为 ***Lebesgue*** 不等式。

更一般地，我们有

定义 1.2。 设$\mathbf{a}=\{a(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 是$[1,\infty)$中给定的正数序列。给定一个整数 $u\in\mathbb{N}$，若存在常数 $C_3>0$，使得对于所有 $f\in Y$，算法 $\mathcal{A}=\{A_v(\cdot)\}_{v=1}^{\infty}$ 都满足深度为 u、针对巴拿赫空间对(X,Y) 的 ***Lebesgue*** $\mathbf{a}$型不等式，

$$\|f-A_{\lceil a(v)v\rceil}(f)\|_X\leq C_3d(f,A_v(Y))_Y,\quad v=1,\dots,u. \tag{1.4}$$

我们在此讨论不同的算法 $\mathcal{A}$。在某些情况下（见 [56]），$\{A_v(Y)\}_{v=1}^{\infty}$是一个由 v维子空间组成的序列；而在另一些情况下（例如见 [9]），$A_v(Y)$ 是给定系统 $\mathcal{D}$ 的所有 v 项线性组合构成的集合。我们使用两种不同类型的采样算法。第一类算法基于 ℓ_p 最小化，第二类则基于贪心算法。下面我们详细介绍这两类算法。

设 X_N 是空间 $\mathcal{C}(\Omega)$ 中由 Ω 上连续函数构成的一个 N 维子空间。给定固定的 $m\in\mathbb{N}$ 和一组点 $\xi:=\{\xi^\nu\}_{\nu=1}^m\subset\Omega$，我们将每个函数 $f\in\mathcal{C}(\Omega)$ 与一个向量（样本向量）相关联

$$S(f,\xi):=(f(\xi^1),\dots,f(\xi^m))\in\mathbb{C}^m.$$

记为

$$\|S(f,\xi)\|_p := \|S(f,\xi)\|_{L_p^m} := \left(\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m}|f(\xi^\nu)|^p\right)^{1/p}, \quad 1\le p<\infty,$$

and

$$\|S(f,\xi)\|_\infty := \max_{1\le\nu\le m}|f(\xi^\nu)|.$$

For 一个正权重 $\mathbf{w}:=(w_1,\dots,w_m)\in\mathbb{R}_+^m$，考虑以下范数

$$\|S(f,\xi)\|_{p,\mathbf{w}} := \left(\sum_{\nu=1}^{m} w_\nu|f(\xi^\nu)|^p\right)^{1/p}, \quad 1\le p<\infty.$$

现在我们考虑以下众所周知的恢复算子（算法）。

算法 1 ($\ell p\mathbf{w}(\xi,X_N)$)。

$$\ell p\mathbf{w}(\xi)(f) := \ell p\mathbf{w}(\xi,X_N)(f) := \operatorname*{argmin}_{g\in X_N}\|S(f-g,\xi)\|_{p,\mathbf{w}}.$$

在 $\mathbf{w}_m:=(1/m,\dots,1/m)$ 的情形下，我们在记号中省略 $\mathbf{w}_m$，并记为

$$\ell p(\xi,X_N)(f) := \ell p\mathbf{w}_m(\xi,X_N)(f).$$

给定 Ω 上的函数系统 $\mathcal{D}_N=\{g_j\}_{j=1}^N$ 和一个正整数v，我们用 $\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)$ 表示由 $\mathcal{D}_N$ 中的 v 个元素张成的所有线性子空间的集合族。

算法 2 ($\ell p^s(\xi,\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))$, $B_v(\cdot,\mathcal{D}_N,L_p(\xi))$。给定一个系统 $\mathcal{D}_N$和一组点 $\xi:=\{\xi^\nu\}_{\nu=1}^m\subset\Omega$，定义该算法

$$L^s(\xi,f) := \operatorname*{argmin}_{L\in\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)}\|S(f-\ell p(\xi,L)(f),\xi)\|_p,$$

$$\ell p^s(\xi,\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f) := \ell p(\xi,L^s(\xi,f))(f). \tag{1.5}$$

这里的索引 s 表示样本，以强调该算法仅使用样本向量 $S(f,\xi)$。显然，$\ell p^s(\xi,\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f)$ 是空间 $L_p(\Omega)$ 中关于 $\mathcal{D}_N$ 的 v 项最佳逼近：$=L_p(\Omega,\mu_m)$，其中 $\mu_m(\{\xi^\nu\})=1/m$，对于 $\nu=1,\dots,m$。为强调这一点，我们使用记号 $B_v(f,\mathcal{D}_N,L_p(\Omega)):=\ell p^s(\xi,\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f)$。文献中使用这两种记号 $\ell p^s(\xi,\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))$ 和 $B_v(\cdot,\mathcal{D}_N,L_p(\Omega))$。

算法 3. 该算法是一种著名的贪心算法——弱切比雪夫贪心算法（定义见第 5 节）；在希尔伯特空间 $L_2(\Omega,\ \mu)$ 的情形下，它与弱正交匹配追踪（弱正交贪心算法）（见第 5.1 节）一致。我们在空间 $L_p(\xi, \mu_m)$ 中应用该算法，这意味着我们只使用 $S(f, \xi)$，以及系统 $\mathcal{D}_N$ 在集合 ξ 上的限制。

从实际实现的角度来看，算法 3 很好。每次迭代中，这种贪心算法最多搜索 N 个字典元素来选择一个新元素，并在适当的子空间上进行 ℓ_p 次投影（与另外两种算法类似）。另一方面，算法 2 在 v 维子空间上进行 ℓ_p 次投影，共迭代 $\binom{N}{v}$ 次。

1.2 函数类上的采样恢复

在本小节中，我们强调由结构条件而非光滑性条件定义的类的重要性。我们简要回顾这一思想的发展历程。首个将最佳逼近 $\sigma_v(f,\ \Psi)_2$（定义见第 2 节）与级数 $\sum_k |\langle f,\ \psi_k\rangle|$ 的收敛联系起来的结果，由 S.B. Stechkin [43] 于 1955 年在正交归一系统 Ψ的情形下得到。我们马上陈述他的结果以及一个更一般的结果。以下函数类是在 [11] 研究相对于任意系统（字典）$\mathcal{D}$ 的稀疏逼近时引入的，其中系统位于希尔伯特空间 H中。对于一般字典 $\mathcal{D} \subset H$和参数 $\beta > 0$，定义函数类（元素类）

$$\mathcal{A}_\beta^o(\mathcal{D}, M) := \left\{ \sum_{k\in\Lambda} c_k g_k : \quad g_k \in \mathcal{D},\ \ k \in \Lambda,\ |\Lambda| < \infty,\ \sum_{k\in\Lambda} |c_k|^\beta \le M^\beta \right\},$$

其中 $M > 0$ 是一个常数，并将希尔伯特空间 H 中 $\mathcal{A}_\beta^o(\mathcal{D}, M)$ 的闭包定义为 $\mathcal{A}_\beta(\mathcal{D}, M)$。此外，我们将所有 $M > 0$ 对应的类 $\mathcal{A}_\beta(\mathcal{D}, M)$ 的并集定义为 $\mathcal{A}_\beta(\mathcal{D})$。当 $\mathcal{D}$ 是正交归一系统时，S.B. Stechkin [43] 证明了（关于这一结果的讨论见 [14], 第 7.4 节）

$$f \in \mathcal{A}_1(\mathcal{D}) \quad \text{if and only if} \quad \sum_{v=1}^{\infty} (v^{1/2}\sigma_v(f, \mathcal{D})_H)\frac{1}{v} < \infty. \tag{1.6}$$

文献 [11] 给出了适用于类 $\mathcal{A}_\beta(\mathcal{D})$、 $\beta \in (0,2)$ 的 (1.6) 的一个版本：

$$f \in \mathcal{A}_\beta(\mathcal{D}) \quad \text{if and only if} \quad \sum_{v=1}^{\infty} (v^\alpha \sigma_v(f,\mathcal{D})_H)^\beta \frac{1}{v} < \infty, \tag{1.7}$$

其中 $\alpha := 1/\beta - 1/2$。特别地，(1.7) 表明，对于 $f \in \mathcal{A}_\beta(\mathcal{D})$,$\beta \in (0,2)$，我们有

$$\sigma_v(f,\mathcal{D})_H \ll v^{1/2-1/\beta}. \tag{1.8}$$

我们回顾一下，关系 (1.6)–(1.8) 是针对正交归一系统 $\mathcal{D}$ 证明的。值得注意的是，只要满足 $\beta \in (0,1]$，(1.8) 实际上对一般的归一化系统 $\mathcal{D}$ 也成立。在 $\beta = 1$ 的情况下，该结论由 B. Maurey 证明（见 [39]）。对于 $\beta \in (0,1]$，该结论在 [11] 中得到证明。我们注意到，类 $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ 及其在巴拿赫空间情形下的推广，在研究最佳 v 项逼近以及相对于一般字典的贪心算法的收敛性质时发挥着根本作用 $\mathcal{D}$ （见[49]）。这一事实促使专家们引入并研究由函数展开系数的限制所定义的函数类。我们将详细说明这一方法。

设 $\Psi := \{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ 是由 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ 索引的系统。考虑子集序列 $\mathcal{G} := \{G_j\}_{j=1}^\infty$, $G_j \subset \mathbb{Z}^d$, $j = 1, 2, \ldots,$ 满足

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_j \subset G_{j+1} \subset \cdots, \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = \mathbb{Z}^d. \tag{1.9}$$

Co考虑可表示为绝对收敛级数的形式的函数：

$$f = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}}(f)\psi_{\mathbf{k}}, \qquad \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{k}}(f)| < \infty. \tag{1.10}$$

对于 $\beta \in (0,1]$ 和 $r > 0$，考虑类 $\mathbf{A}_\beta^r(\Psi, \mathcal{G})$，它由所有具有满足以下条件的表示式 (1.10) 的函数 f 组成

$$\left(\sum_{\mathbf{k}\in G_j\setminus G_{j-1}} |a_{\mathbf{k}}(f)|^\beta \right)^{1/\beta} \le 2^{-rj}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad G_0 := \emptyset. \tag{1.11}$$

还可以考虑以下更窄的版本$\mathbf{A}_\beta^r(\Psi, \mathcal{G}, \infty)$，即所有具有表示式 f （1.10）且满足条件

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{r\beta j} \sum_{\mathbf{k}\in G_j\setminus G_{j-1}} |a_{\mathbf{k}}(f)|^\beta \le 1, \quad G_0 := \emptyset. \tag{1.12}$$

类$\mathbf{A}_{\beta}^{r}(\Psi,\ \mathcal{G})$这一思想可能最早于 [51] 在特殊情形下得到实现：此时 Ψ 为三角系统 $\mathcal{T}^{d}$：

$\{e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{d}}$ $\quad$ $\quad$ $\quad

在 [59] 中研究的类$\mathbf{A}^r_\beta(\Psi)$对应于满足以下条件的类$\mathbf{A}^r_\beta(\Psi,\ \mathcal{G})$

$$G_j := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \|\mathbf{k}\|_\infty < 2^j\}, \quad j = 1, 2, \dots. \tag{1.13}$$

注意到，类 $\mathbf{A}^r_\beta(\mathcal{T}^d)$ 与周期各向同性Nikol'skii类 H^r_q有关。类 H^r_q有几个等价定义。我们给出一个对我们而言最方便的定义。设 $r > 0$ 和 $1 \le q \le \infty$。类 H^r_q 由所有满足以下条件的 d 变量周期函数 f 组成

$$\left\| \sum_{\lfloor 2^{j-1} \rfloor \le \|\mathbf{k}\|_\infty < 2^j} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right\|_q \le 2^{-rj}, \quad j = 0, 1, \dots.$$

例如，很容易看出，当 $q = 2$ 且 $r > d/2$时，类 H^r_q 嵌入类 $\mathbf{A}^{r-d/2}_1(\mathcal{T}^d)$。然而，类$\mathbf{A}^{r-d/2}_1(\mathcal{T}^d)$明显大于 H^r_2。例如，取 $\mathbf{k} \in G_j \setminus G_{j-1}$，其中 G_j在（1.13）中定义。那么，函数 $g_\mathbf{k} := 2^{-(r-d/2)j} e^{i(\mathbf{k},\cdot)}$属于$\mathbf{A}^{r-d/2}_1(\mathcal{T}^d)$，但不属于任何满足 $r' > r - d/2$的 $H^{r'}_2$。

现在我们简要比较类H^r_q 和$\mathbf{A}^r_\beta(\mathcal{T}^d)$的采样恢复结果。已知（见 [55], 定理3.6.4，第125页），对于所有$1 \le p, q \le \infty$, $r > d/q$，都有

$$\varrho_m(H^r_q, L_p) \asymp m^{-r/d+(1/q-1/p)_+}, \tag{1.14}$$

其中（a）$_+ :=$ max(a,0)，对于 $a \in \mathbb{R}$。显然，（1.14）蕴含 $\varrho^o_m(H^r_q, L_p)$的相同上界。关于 $\varrho^o_m(\mathcal{T}(\mathbf{N}\ d)_q, L_p)$下界的结果（见第6.2小节中 $\mathcal{T}(\mathbf{N}\ d)_q$的定义），来自 [58]（见其中的引理4.3）、 [59], 的引理4.1以及下文的引理 6.1，表明以下关系成立

$$\varrho^o_m(H^r_q, L_p) \asymp m^{-r/d+(1/q-1/p)_+}. \tag{1.15}$$

特别是,

$$\varrho^o_m(H^r_2, L_p) \asymp m^{-r/d+(1/2-1/p)_+}. \tag{1.16}$$

[58] 和 [59] 中的下界 (1.13) 给出了 $\beta = 1$情况下的以下界:

$$\varrho^o_m(\mathbf{A}^r_1(\mathcal{T}^d, L_p) \gg m^{-1/2+(1/2-1/p)_+-r/d}. \tag{1.17}$$

[59] 中的上界 (1.13) 给出了以下界

$$\varrho_m^o(\mathbf{A}_1^r(\mathcal{T}^d, L_p) \ll \left(\frac{m}{(\log m)^3}\right)^{-1/2+(1/2-1/p)_+-r/d}. \tag{1.18}$$

关系式 (1.16)–(1.18) 表明，对于类 H_2^r 以及更大的类 $\mathbf{A}_1^{r-d/2}(\mathcal{T}^d)$，$r > d/2$，其界限相近。请注意，对于类 H_2^r，线性采样恢复也具有相同的界限。文献 [58] 证明，对于 $\mathbf{A}_\beta^r(\mathcal{T}^d)$ 中的线性采样恢复，我们有

$$\varrho_m(\mathbf{A}_\beta^r(\mathcal{T}^d, L_2) \gg m^{-r/d}. \tag{1.19}$$

不等式 (1.19)（其中 $\beta = 1$）和 (1.18)（其中 $p = 2$）表明，非线性采样恢复比线性采样恢复具有更好的误差保证。

关于重要步骤的简要说明。下面列出若干步骤，它们在近期非线性采样恢复理论的发展中发挥了重要作用。

步骤 1。文献 [20] 的作者发现，对于某些周期函数类 $\mathbf{F}$，相对于三角系统的这些类 $\sigma_v(\mathbf{F}, \mathcal{T}^d)_{L_\infty}$ 的最佳 v 项一致范数逼近，可用于估计 $\varrho_m^o(\mathbf{F}, L_2)$ 的上界。

步骤 2. 论文 [7]–[9] 的作者开始在采样恢复中使用积分范数的通用离散化。

步骤 3. 论文 [8]和 [9]中采用了贪心型算法和 ℓ_p 最小化型算法，这些算法能够提供稀疏逼近。并证明了这些算法的 Lebesgue 型不等式。

步骤 4. [7] 和 [9] 中指出，可以使用范数 $L_p(\Omega, \mu_\xi)$下的最佳 v项逼近，其中 $p < \infty$ （参见下文式（2.5）中 μ_ξ 的定义）。该范数弱于一致范数，因此可以利用巴拿赫空间中稀疏逼近方面的已知深刻结果，改进$\varrho_m^o(\mathbf{F}, L_p)$ 的已知上界。

2 一些定义和记号

2.1 普适性与非相干性

我们先简要介绍稀疏逼近的一些必要概念。设 X 是一个范数为 $\|\cdot\|:=\|\cdot\|_X$的巴拿赫空间，且$\mathcal{D}=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X中的一个给定（可数）元素系统。给定一个有限子集 $J\subset\mathbb{N}$，我们定义 $V_J(\mathcal{D}):=\text{span}\{g_j\colon j\in J\}$。对于正整数$v$，记 $\mathcal{X}_v(\mathcal{D})$为所有满足 $|J|=v$的线性空间 $V_J(\mathcal{D})$组成的集合族，并将 $\Sigma_v(\mathcal{D})$记为关于 $\mathcal{D}$的所有 v项近似项的集合；即 $\Sigma_v(\mathcal{D}):=\bigcup_{V\in\mathcal{X}_v(\mathcal{D})}V.$ 给定 $f\in X$，我们定义

$$\sigma_v(f,\mathcal{D})_X:=\inf_{g\in\Sigma_v(\mathcal{D})}\|f-g\|_X=d(f,\Sigma_v(\mathcal{D}))_X,\quad v=1,2,\cdots.$$

此外，对于函数类 $\mathbf{F}\subset X$，我们定义 $\sigma_0(\mathbf{F}\ \mathcal{D})_X:=\sup_{f\in\mathbf{F}}\|f\|_X$，并且

$$\sigma_v(\mathbf{F},\mathcal{D})_X:=\sup_{f\in\mathbf{F}}\sigma_v(f,\mathcal{D})_X,\quad v=1,2,\cdots.$$

本文主要考虑 $X=L_p(\Omega\ \mu)$ 和 $1\leq p<\infty$ 的情形。在这种情况下，为简洁起见，我们有时用 $\sigma_v(\cdot,\cdot)_p$ 代替 $\sigma_v(\cdot,\cdot)_{L_p(\Omega\ \mu)}$。

我们研究具有通用采样离散化性质的系统。

定义 2.1。设 $1\leq p<\infty$。如果有限子集 $\xi:=\{\xi^j\}_{j=1}^m\subset\Omega$ 为集合族 $\mathcal{X}:=\{X(n)\}_{n=1}^k$ 中的有限维线性子空间 $X(n)$ 提供 L_p-通用采样离散化，则称其满足以下条件:

$$\frac{1}{2}\|f\|_p^p\leq\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m|f(\xi^j)|^p\leq\frac{3}{2}\|f\|_p^p\quad for\ any\quad f\in\bigcup_{n=1}^k X(n).\tag{2.1}$$

我们用 $m(\mathcal{X},p)$ 表示最小整数 m，使得存在一个由 m 个点组成的集合 ξ，为集合族 $\mathcal{X}$提供 L_p-通用采样离散化 *(2.1)*。

对于 L_p-通用采样离散化 *(2.1)*，我们将使用简写形式 L_p-*usd*。

在 [9]下文中使用了集合族上的以下单侧普适离散化条件。

定义 2.2 ([9])。 设 $1 \le p < \infty$。我们称集合 $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ 为集合族 $\mathcal{X} := \{X(n)\}_{n=1}^k$ 上的单侧 L_p-通用采样离散化，常数为$D \ge 1$，其中集合族由有限维线性子空间组成$X(n)$，如果满足

$$\|f\|_p \le D \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^p \right)^{1/p} \quad for\ any \quad f \in \bigcup_{n=1}^{k} X(n). \tag{2.2}$$

下面给出一个比上述条件稍弱的条件的定义。

定义 2.3 ([31]). 设 $1 \le p < \infty$。如果集合族 $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$为有限维线性子空间 $X(n)\ \}_{n=1}^k$ 提供具有常数 $D \ge 1$ 的通用 ***LDI***(p, ∞) （***LDI*** 是左离散化不等式的缩写），则称该集合族满足此条件：

$$\|f\|_p \le D \max_{1 \le j \le m} |f(\xi^j)| \quad for\ any \quad f \in \bigcup_{n=1}^{k} X(n), \tag{2.3}$$

$_k$在这种情况下，我们记作$\bigcup X(n) \in \mathcal{LD}(m, p, \infty, D)._{n=1}$

下面定义 2.4 中给出的性质涉及系统的非相干性，已知它对 WCGA 逼近有用（例如，参见 [55],第 8.7 节）。

定义 2.4. 设 X 为带有范数 $\|\cdot\|$的巴拿赫空间。设给定整数 $v, S \in \mathbb{N}$，使得 $v \le S$。如果对任意 $A \subset B \subset \mathbb{N}$, $|A| \le v$, $|B| \le S$ 和 $\{c_i\}_{i \in B} \subset \mathbb{C}$，都有以下结论，则称系统 $\mathcal{D} = \{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ 在空间 X中具有参数为 $V > 0$ 和 $r > 0$ 的 (v, S)-非相干性：

$$\sum_{i \in A} |c_i| \le V |A|^r \left\| \sum_{i \in B} c_i g_i \right\|. \tag{2.4}$$

对于参数为 $V > 0$ 和 $r > 0$ 的 X中的 ***(v, S)*-非相干性**，我们将使用简写形式 ***(v, S)*-ipw(*V*, *r*)**。

我们给出了可数系统 $\mathcal{D}$ 的定义 2.4。类似的定义也可以用于任意系统 $\mathcal{D}$ 。

对于 Ω 中由 m 个点组成的集合 ξ，记为: $=\{\xi^1,\cdots,\xi^m\}$

$$\Omega_m := \{\xi^1,\cdots,\xi^m\},\quad \mu_m := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\delta_{\xi^j},\quad \text{and}\quad \mu_\xi := \frac{\mu+\mu_m}{2}, \tag{2.5}$$

其中， $\delta_{\mathbf{x}}$ 表示支撑于点 $\mathbf{x}$ 处的狄拉克测度。

如先前论文（例如参见 [58]）所述，我们研究 $\mathcal{D}$ 满足某些限制条件的特殊情形。为方便起见，沿用文献中的记号，在这种情况下，我们使用记号 Ψ 表示一个系统 $\mathcal{D}$。我们将这些限制条件表述为施加于 Ψ 上的条件。

条件 A。 假设 $\Psi: = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 Ω 上的一致有界函数系统 $\subset\mathbb{R}^d$，满足

$$\sup_{\mathbf{x}\in\Omega}|\varphi_j(\mathbf{x})|\le 1,\quad 1\le j<\infty. \tag{2.6}$$

条件 B1。 假设 $\Psi: =\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 L_2(Ω μ) 中的正交归一系统。

条件 B2。 假设 $\Psi: =\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是空间 L_2(Ω μ) 中的 Riesz 系统；即存在两个正常数 $0<R_1\le R_2<\infty$，使得对于任意 $N\in\mathbb{N}$ 以及任意（a_1，$\cdots$，a_N） $\in\mathbb{C}^N$,

$$R_1\left(\sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\right)^{1/2}\le\left\|\sum_{j=1}^{N}a_j\varphi_j\right\|_2\le R_2\left(\sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\right)^{1/2}. \tag{2.7}$$

条件 B3。 假设 Ψ 是一个贝塞尔系统，即存在一个常数 $K>0$，使得对于任意 $N\in\mathbb{N}$ 以及任意 (a_1，$\cdots$，a_N) $\in\mathbb{C}^N$,

$$\sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\le K\left\|\sum_{j=1}^{N}a_j\varphi_j\right\|_2^2. \tag{2.8}$$

显然，条件 B1 蕴含条件 B2，其中 $R_1=R_2=1$。条件 B2 蕴含条件 B3，其中 $K=R_1^{-2}$。

我们经常用到 Nikol'skii 不等式这一概念。为方便读者，我们在此对其进行阐述。其他定义和记号将在下文中介绍。

尼科尔斯基型不等式。设 $1\le p\le q\le\infty$，并设 $X_N\subset L_q$是一个维数 (Ω) 为 N 的子空间。该不等式

$$\|f\|_q\le H\|f\|_p,\quad \forall f\in X_N \tag{2.9}$$

称为关于 $(p,\ q)$ 这一对的 Nikol'skii不等式，其常数为 H。在这种情况下，我们记作 $X_N \in NI(p,\ q,\ H)$。通常，H 取决于 N；例如，H 可以是 $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ 阶。

除了上述表述的Nikol'skii不等式外，我们还需要一个类似性质。

u项Nikol'skii不等式。 设 $1 \le p \le q \le \infty$，且 Ψ 是 $L_q := L_q(\Omega,\ \mu)$中的一个系统。对于自然数 u，如果系统Ψ 满足以下不等式，我们就称其对于数对 $(p,\ q)$ 满足 u项Nikol'skii不等式，常数为H

$$\|f\|_q \le H\|f\|_p, \qquad \forall f \in \Sigma_u(\Psi). \tag{2.10}$$

在这种情况下，我们记作 $\Psi \in NI(p,\ q,\ H,\ u)$。

注意，显然 $H \ge 1$。

2.2 巴拿赫空间中的稀疏逼近

回忆一下，巴拿赫空间 X 的光滑模是定义在 $(0,\ \infty)$ 上的函数，其定义为

$$\eta(X,w) := \sup_{x,y\in X;\|x\|=\|y\|=1} \left(\frac{\|x+wy\|+\|x-wy\|}{2}-1\right),\ \ w>0, \tag{2.11}$$

并且，当 $w \to 0+$ 时，若 X $\eta(w)/w \to 0$，则称其为一致光滑。众所周知，具有 $1<p<\infty$ 的 L_p 空间是一个一致光滑的巴拿赫空间，且

$$\eta(L_p,w) \le \begin{cases} (p-1)w^2/2, & 2 \le p < \infty, \\ w^p/p, & 1 \le p \le 2. \end{cases} \tag{2.12}$$

我们将采用一些已知的一般性结果，这些结果涉及在巴拿赫空间中相对于任意系统的最佳 v 项逼近。通常，这些结果是在实巴拿赫空间的情形下证明的。考虑复巴拿赫空间对我们而言更为方便，部分原因是我们要将其应用于系统为三角系统 $\mathcal{T}^d$ 的特殊情形。现在，我们证明实巴拿赫空间情形下已知结果的复数版本。对于系统 $\mathcal{D} \subset X$，记

$$A_1(\mathcal{D}) := \left\{ f \in X :\ f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i, \quad g_i \in \mathcal{D}, \quad a_i \in \mathbb{C}, \ \ \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \le 1 \right\}.$$

引理 2.1 ([42])。 设 $\mathcal{D}$ 是复巴拿赫空间 X 中的一个元素系统，满足 上确界 $_{g\in\mathcal{D}}\|g\|_X \le 1$。假设 X 的光滑模满足以下条件，其中常数为 $1 < q \le 2$ 和 $\gamma > 0$:

$$\eta(X, w) \le \gamma w^q \quad for\ all\ w > 0.$$

那么，存在一个常数 $C(q,\gamma) > 0$，它只可能依赖于 q 和γ，使得

$$\sigma_v(A_1(\mathcal{D}), \mathcal{D})_X \le C(q,\gamma)(v+1)^{1/q-1} \quad for\ any\ v \in \mathbb{N}_0. \tag{2.13}$$

此外，*(2.13)* 中的界是通过一种基于贪心算法的构造性方法得到的。

证明。 对于实巴拿赫空间，引理 2.1 已是已知结果（例如参见 [49], 第342页）。相应的界由弱切比雪夫贪心算法给出。我们由实数情形推导出复数情形。

通过标准的去复化过程，每个复巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 都可以视为两个相同实巴拿赫空间的直和，分别表示其向量的“实部”和“虚部”。具体而言，令 $X_{\mathbb{R}} = (X_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_X)$ 表示通过将 X 的数乘限制到实数域 $\mathbb{R}$ 而得到的底层实巴拿赫空间。那么， X 可以分解为直和 $X = Y \oplus iY$，其中 Y 是 $X_{\mathbb{R}}$ 的实巴拿赫子空间。此外，由开映射定理，存在一个常数 $c > 0$，使得对所有 $x, y \in Y$，

$$c(\|x\|_X + \|y\|_X) \le \|x + iy\|_X \le \|x\|_X + \|y\|_X.$$

在此情形下，每个向量 $f \in X$ 都具有唯一表示

$$f = f^R + if^I,$$

其中 $f^R = \mathrm{Re}(f) \in Y$， $f^I = \mathrm{Im}(f) \in Y$，且

$$\|f\|_X \sim \|f^R\|_X + \|f^I\|_X.$$

现在考虑这些系统

$$\mathcal{D}_1^r := \{g^R : g \in \mathcal{D}\} \ \text{ and } \ \mathcal{D}_2^r := \{g^I : g \in \mathcal{D}\}.$$

对于 $i=1,\ 2$，我们定义

$$X_i^r = \overline{\operatorname{span}(\mathcal{D}_i^r)}^{X_{\mathbb{R}}}$$

为由 $\mathcal{D}_i^r$ 张成的 $(X_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_X)$ 的实巴拿赫子空间。显然，对于$i=1$,2,

$$\eta(X_i^r, w) \le \eta(X, w) \quad \text{and} \quad \sup_{g\in\mathcal{D}_i^r} \|g\|_X \le C \sup_{g\in\mathcal{D}} \|g\|_X \le C.$$

因此，将引理 2.1 的实空间类比应用于实巴拿赫空间 X_i^r 中的系统 $\mathcal{D}_i^r$，可得

$$\sigma_v(A_1(\mathcal{D}_i^r), \mathcal{D}_i^r)_{X_{\mathbb{R}}} \le C_1(q,\gamma)(v+1)^{1/q-1}, \quad i=1,2. \tag{2.14}$$

接下来，令 $f\in X$ 满足

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k, \quad g_k \in \mathcal{D}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \le 1.$$

将 $c_k = a_k + ib_k$ 写成 $a_k, b_k \in \mathbb{R}$，可得

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k g_k^R - b_k g_k^I) + i \sum_{k=1}^{\infty} (a_k g_k^I + b_k g_k^R) =: f^R + i f^I.$$

显然，

$$|a_k| + |b_k| \le \sqrt{2}(a_k^2 + b_k^2)^{1/2} = \sqrt{2}|c_k|.$$

因此，

$$2^{-1/2} f^R \in \operatorname{conv}(A_1(\mathcal{D}_1^r), A_1(\mathcal{D}_2^r)) \ \text{ and } \ 2^{-1/2} f^I \in \operatorname{conv}(A_1(\mathcal{D}_1^r, A_1(\mathcal{D}_2^r)).$$

由此可得

$$\sigma_{4v}(A_1(\mathcal{D}), \mathcal{D})_X \le 2 \max_{i=1,2} \sigma_v(A_1(\mathcal{D}_i^r), \mathcal{D}_i^r)_{X_R}.$$

由此及式 (2.14) 可得引理 2.1。

□

请注意，文献 [12] 和 [18] 致力于研究复巴拿赫空间中的贪心算法。特别地，引理 2.1 可由文献 [18]中的定理 3.2 推出。

3 一些离散化结果

3.1 有限维子空间中的采样离散化

关于有限维子空间中的采样离散化，已有若干综述论文—— [4], [21], 和 [31]。这里我们仅详细讨论本文中用到的结果。众所周知，关于 L_2-范数的采样离散化结果可以推出一些关于 L_∞-范数的采样离散化结果。我们将通过一些已知例子来说明这一现象。这类例子中最早的或许是多元三角多项式。用 Q 表示 $\mathbb{Z}^d$的一个有限子集，用 $|Q|$表示 Q中元素的个数。令

$$\mathcal{T}(Q) := \left\{ f : f = \sum_{\mathbf{k}\in Q} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C} \right\}.$$

以下定理 3.1 在 [53] 中得到了证明。

定理 3.1 ([53, 定理 1.1]). 存在三个正的绝对常数 C_1、 C_2 和 C_3，具有以下性质：对于任意 $d \in \mathbb{N}$ 和任意 $Q \subset \mathbb{Z}^d$，都存在一组 $m \le C_1|Q|$ 个点 $\xi^j \in \mathbb{T}^d$、 $j = 1$、.....、 m，使得对于任意 $f \in \mathcal{T}(Q)$，我们有

$$C_2\|f\|_2^2 \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^2 \le C_3\|f\|_2^2. \tag{3.1}$$

在 [4] 中，作者展示了定理 3.1 如何推出关于 L_∞-范数的采样离散化结果。具体而言，证明了以下定理 3.2。

定理 3.2 ([4]). 设 C_1、 C_2 和 C_3 是定理 *3.1* 中的三个正绝对常数。那么，对于任意 $d \in \mathbb{N}$ 和任意 $Q \subset \mathbb{Z}^d$，都存在一个由 $m \le C_1|Q|$ 个点 $\xi^j \in \mathbb{T}^d$、 $j = 1$、.....、 m 组成的集合 ξ，使得对于任意 $f \in \mathcal{T}(Q)$，(3.1)成立，并且

$$\|f\|_\infty \le C_2^{-1/2}|Q|^{1/2}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(\xi^j)|^2\right)^{1/2} \le C_2^{-1/2}|Q|^{1/2}\max_{1\le j\le m}|f(\xi^j)|.$$

证明。为方便读者，我们在此给出 [4]中的一行证明。我们使用定理 3.1 所提供的点集。于是 $m \le C_1|Q|$，并且对于任意 $f \in \mathcal{T}$（Q），我们有

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &\le |Q|^{1/2}\|f\|_2 \le |Q|^{1/2} C_2^{-1/2} \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^2 \right)^{1/2} \\ &\le |Q|^{1/2} C_2^{-1/2} \max_{1 \le j \le m} |f(\xi^j)|.\end{aligned}$$

□

我们指出，在上述证明中，除了采样离散化结果——定理 3.1——之外，还用到了 Nikol'skii不等式 $\|f\|_\infty \le |Q|^{1/2}\|f\|_2$。下面的采样离散化结果表明，Nikol'skii不等式假设可以保证一般子空间满足良好的离散化不等式。

定理 3.3 ([30])。设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非空集合，并配备概率测度 μ。假设 $X_N \in NI(2, \infty, KN^{1/2})$ 对某个常数$K \ge 1$成立。那么存在绝对常数 $C_1, C_2, C_3 > 0$ 以及一个由 $m \le C_1 K^2 N$ 个点构成的集合$\{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$，使得对于任意 $f \in X_N$，都有

$$C_2\|f\|_2^2 \le \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^2 \le C_3 K^2 \|f\|_2^2.$$

无需假设 Nikol'skii不等式，也可以证明离散化结果。不过，这方面已知的结果所给出的离散化需要使用权重。

定理 3.4 ([30])。给定任意一个维数为 N 的复线性子空间 X_N （位于 $L_2(\Omega, \mu)$ 中），存在一组 $m \le C_1' N$ 个点 $\xi^1, \ldots, \xi^m \in \Omega$，以及一组非负权重 $w_1, \cdots, w_m \ge 0$，使得

$$c_0'\|f\|_2^2 \le \sum_{j=1}^{m} w_j |f(\xi^j)|^2 \le C_0'\|f\|_2^2, \quad \forall f \in X_N,$$

其中 C_1'、 c_0'、 C_0' 是绝对正常数。

下面给出定理 3.4 的一个更精确版本，其中常数 C_1' 接近于 1。

定理 3.5 ([3])。 若 X_N 是 $L_2(\Omega\ \mu)$ 的一个实 N 维子空间，那么对于任意 $b \in (1, 2],$，都存在一组 $m \le bN$ 个点 $\xi^1, \ldots, \xi^m \in \Omega$ 以及一组非负权重 $w_j,\ j = 1, \ldots, m$，使得

$$\|f\|_2 \le \left(\sum_{j=1}^{m} w_j |f(\xi^j)|^2 \right)^{1/2} \le \frac{C}{b-1} \|f\|_2, \qquad \forall f \in X_N, \tag{3.2}$$

其中 $C > 1$ 是一个绝对常数。

定理 3.4 和定理 3.5 是根据 [1] 中确立的深刻结果推导得出的。有关相关结果的详细讨论，请读者参阅 [3, 第 6] 节。

[22] 中展示了定理 3.4 如何推出关于 L_∞-范数采样离散化的结果。具体而言，证明了以下定理 3.6。

定理 3.6 ([22])。 存在两个绝对常数 c_1 和 c_2，使得对于任意 $X_N \in NI(2、\ \infty、\ M)$，都存在一个由 $m \le c_1 N$ 个点组成的集合 ξ^1、.....、$\xi^m \in \Omega$，满足以下性质：对于任意 $f \in X_N$，都有

$$\|f\|_\infty \le c_2 M \max_{1 \le j \le m} |f(\xi^j)|. \tag{3.3}$$

请注意，在 $M = KN^{1/2}$ 的特殊情形下，[22] 中定理 3.6 的证明表明，定理 3.3 可推出以下关于 L_∞ 和 L_2 范数的同时采样离散化结果。

定理 3.7。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非空集合，并配备了概率测度 μ。假设 $X_N \in NI(2, \infty, KN^{1/2})$ 对某个常数 $K \ge 1$成立。令 C_1, C_2, C_3 表示定理 *3.3* 中的三个正绝对常数。那么存在一个集合 $\{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$，包含 $m \le C_1 K^2 N$ 个点，使得对于任意 $f \in X_N$，都有

$$\|f\|_\infty \le C_2^{-1/2} K N^{1/2} \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^2 \right)^{1/2} \le C_2^{-1/2} K N^{1/2} \max_{1 \le j \le m} |f(\xi^j)|, \tag{3.4}$$

and

$$C_2 \|f\|_{L_2(\Omega,\mu)}^2 \le \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^2 \le C_3 K^2 \|f\|_{L_2(\Omega,\mu)}^2. \tag{3.5}$$

上述定理 3.6 和 3.7 是条件性结果——它们在 Nikol'skii不等式假设下成立。最近，人们认识到（参见 [29]），其中一些条件性结果可以转化为无条件结果。这一进展基于 J. Kiefer 和 J. Wolfowitz 的结果 [23]。

David Krieg 指出，J. Kiefer 和 J. Wolfowitz 已有一项关于尼科尔斯基型不等式的已知结果 [23] （另见 [29, 第 2] 节）。

定理 3.8 ([23])。设 X_N 是 $\mathcal{C}(\Omega)$的一个有限维实子空间。那么存在一个定义在Ω 上的概率测度 μ，使得对所有 $f \in X_N$，都有

$$\|f\|_\infty \le \sqrt{N}\|f\|_{L_2(\Omega,\mu)}. \tag{3.6}$$

由此以及定理 3.6 可得以下结论。

推论 3.1 ([24])。对于任意实数 X_N，存在一组 $m \le C_1 N$ 点 ξ^1，.....，$\xi^m \in \Omega$，使得对于任意 $f \in X_N$，

$$\|f\|_\infty \le C_2\sqrt{N}\max_j |f(\xi^j)|,$$

其中 C_1、$C_2 > 0$ 是两个绝对常数。

因此，对于实子空间的情形，推论 3.1 是已知结果（定理 3.6 和定理 3.8）的直接推论。通过一个标准的简单论证，可以由 (3.6) 推出复数情形下的类似不等式，其中 $\sqrt{N}$ 被$\sqrt{2N}$替换，因此推论 3.1 在复数情形下也成立。 [29]的作者在复数情形下证明了 (3.6)，这需要一个非平凡的论证。此外， [29]中证明了一个强于推论 3.1 的结论。具体而言，他们将 $C_1 N$ 替换为 $2N$，并将连续函数替换为有界函数。

3.2 通用离散化

现在，我们陈述两个本文中用到的通用离散化结果。定理 3.9 讨论 $p \in (2, \infty)$ 的情形，而定理 3.10 涵盖 $p \in [1, 2]$。关于通用离散化结果的详细讨论，请读者参阅最新的综述论文 [6]。

定理 3.9 ([5])。 假设 $\mathcal{D}_N = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ 是一个满足 *(2.6)* 和 (2.7) 的一致有界的里斯系统，其中常数为 $0 < R_1 \le R_2 < \infty$。令

$2 < p < \infty$，并令 $1 \le u \le N$ 为一个整数。那么，对于足够大的常数$C = C(p, R_1, R_2)$ 以及任意 $\varepsilon \in (0,\ 1)$，存在 m 个点 $\xi^1, \cdots, \xi^m \in \Omega$，使得

$$m \le C\varepsilon^{-7} u^{p/2} (\log N)^2, \tag{3.7}$$

使得对于任意 $f \in \Sigma_u(\mathcal{D}_N)$，

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^p \le (1+\varepsilon)\|f\|_p^p.$$

定理 3.10 ([8])。 设 $1 \le p \le 2$。假设 $\mathcal{D}_N = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 是一个满足条件 (2.6) 和 (2.8) 的系统，其中某个常数为 $K \ge 1$。令ξ^1、$\cdots$、ξ^m 为 Ω 上的独立随机点，且均按照 μ同分布。则存在常数 $C = C(p) > 1$ 和 $c = c(p) > 0$，使得对于任意整数 $1 \le u \le N$ 和

$$m \ge CKu \log N \cdot (\log(2Ku))^2 \cdot (\log(2Ku) + \log\log N),$$

不等式

$$\frac{1}{2}\|f\|_p^p \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^p \le \frac{3}{2}\|f\|_p^p, \quad \forall f \in \Sigma_u(\mathcal{D}_N) \tag{3.8}$$

以概率 $\ge 1 - 2\exp\left(-\frac{cm}{Ku\log(2Ku)}\right)$成立。

4 通过 ℓ_p 最小化进行恢复

4.1 子空间上的投影

设 X_N 是连续函数空间$\mathcal{C}(\Omega)$ 的 N 维子空间。与第 1 节 1.1 中一样，对于固定的 m 和一组 m 个点 $\xi := \{\xi^\nu\}_{\nu=1}^m \subset \Omega$，我们将函数 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ 与一个向量相关联

$$S(f,\xi) := (f(\xi^1), \ldots, f(\xi^m)) \in \mathbb{C}^m,$$

并考虑加权的 ℓ_p 范数

$$\|S(f,\xi)\|_{p,\mathbf{w}} := \left(\sum_{\nu=1}^{m} w_\nu |f(\xi^\nu)|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

当 $p=\infty$时按通常方式作相应改变。定义 $f\in L_p(\Omega,\mu)$中 $1\le p\le\infty$由 X_N 中的元素给出的最佳逼近如下

$$d(f,X_N)_p:=\inf_{g\in X_N}\|f-g\|_p.$$

众所周知，存在一个元素，记作 $P_{X_N,p}(f)\in X_N$，使得

$$\|f-P_{X_N,p}(f)\|_p=d(f,X_N)_p.$$

映射 $P_{X_N,p}$：$L_p(\Omega,\mu)\to X_N$ 称为切比雪夫投影，但它可能并不唯一（在 $p=1$ 或 $p=\infty$ 的情况下）。

接下来，我们将在假设**A1**和 **A2**下证明下面的定理 **4.1**。

A1. 离散化。 设 $1\le p\le\infty$。假设 $\xi:=\{\xi^j\}_{j=1}^m\subset\Omega$ 满足：对于任意 $g\in X_N$

$$\|g\|_p\le D\|S(g,\xi)\|_{p,\mathbf{w}}$$

其中 D 是一个正常数，可能依赖于 d 和 p。

A2. 权重。 假设存在一个正常数 $W=C(p)$，使得 $\sum_{\nu=1}^m w_\nu\le W$。

考虑以下著名的恢复算子（算法）（见第 1 节中的算法 1）

$$\ell p\mathbf{w}(\xi)(f):=\ell p\mathbf{w}(\xi,X_N)(f):=\operatorname*{argmin}_{u\in X_N}\|S(f-u,\xi)\|_{p,\mathbf{w}}.$$

注意，上述算法 $\ell p\mathbf{w}(\xi)$ 仅使用函数值 $f(\xi^\nu),\nu=1,\ldots\ldots,m$。在 $p=2$ 的情形下，它是一个线性算法——相对于范数 $\|\cdot\|_{2,\mathbf{w}}$ 的正交投影。因此，在 $p=2$ 的情形下，算法 $\ell 2\mathbf{w}(\xi)$ 的逼近误差给出了恢复特征 $\varrho_m(\cdot,L_2)$ 的一个上界。在 $p\ne 2$ 的情形下，算法 $\ell p\mathbf{w}(\xi)$ 的逼近误差给出了恢复特征$\varrho_m^o(\cdot,L_p)$ 的一个上界。

定理 4.1 （[56]）。 设 $1\le p<\infty$。那么，在假设 ***A1*** 和 ***A2*** 下，对于任意 $f\in C(\Omega)$，有

$$\|f-\ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_p\le(2DW^{1/p}+1)d(f,X_N)_\infty.$$

*Fu*此外，在假设 ***A1*** 并满足 $p=\infty$的条件下，对于任意 $f\in C(\Omega)$，我们有

$$\|f-\ell\infty(\xi)(f)\|_\infty\le(2D+1)d(f,X_N)_\infty.$$

证明。我们给出 $1 \le p < \infty$情形的详细证明。 $p = \infty$情形类似，而且更简单。为简洁起见，记 $g := P_{X_N,\,\infty}(f)$。根据映射 $P_{X_N,\,\infty}$的定义，我们得到

$$\|f - g\|_p \le \|f - g\|_\infty = d(f, X_N)_\infty. \tag{4.1}$$

显然，

$$\|S(f - g, \xi)\|_\infty \le \|f - g\|_\infty = d(f, X_N)_\infty.$$

因此，由**A2** 可得

$$\|S(f - g, \xi)\|_{p,\mathbf{w}} \le W^{1/p} \|S(f - g, \xi)\|_\infty \le W^{1/p} d(f, X_N)_\infty. \tag{4.2}$$

接下来，根据算法 $\ell p\mathbf{w}(\xi)$ 的定义以及 (4.2)，我们得到

$$\|S(f - \ell p\mathbf{w}(\xi)(f), \xi)\|_{p,\mathbf{w}} \le \|S(f - g, \xi)\|_{p,\mathbf{w}} \le W^{1/p} d(f, X_N)_\infty. \tag{4.3}$$

界 (4.2) 和 (4.3) 蕴含

$$\|S(g - \ell p\mathbf{w}(\xi)(f), \xi)\|_{p,\mathbf{w}} \le 2W^{1/p} d(f, X_N)_\infty. \tag{4.4}$$

然后，离散化假设**A1**蕴含

$$\|g - \ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_p \le 2DW^{1/p} d(f, X_N)_\infty. \tag{4.5}$$

结合界 (4.1) 和 (4.5)，我们得到

$$\|f - \ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - \ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_p \le (1 + 2DW^{1/p}) d(f, X_N)_\infty,$$

至此，定理 4.1 的证明完成。 □

在 Nikol'skii不等式的一个附加条件下， $\|f - \ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_\infty$的误差满足定理 4.1 的以下版本，该版本已在 [31]中得到证明。

定理 4.2 ([31])。 设 $1 \le p < \infty$。在假设 ***A1***、***A2*** 以及额外假设 $X_N \in NI(p, \infty, H)$ 成立的条件下，对于任意 $f \in C(\Omega)$ ，我们有

$$\|f - \ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_\infty \le (2HDW^{1/p} + 1) d(f, X_N)_\infty.$$

证明。 证明很简单，思路与定理 4.1 的证明相同。设 $u := \ell p\mathbf{w}(\xi)(f)$。对于任意 $g \in X_N$，我们有以下一系列不等式

$$\begin{aligned}\|f-u\|_\infty &\le \|f-g\|_\infty + \|g-u\|_\infty \le \|f-g\|_\infty + H\|g-u\|_p \\ &\le \|f-g\|_\infty + HD\|S(g-u,\xi)\|_{p,\mathbf{w}} \\ &\le \|f-g\|_\infty + HD(\|S(f-g,\xi)\|_{p,\mathbf{w}} + \|S(f-u,\xi)\|_{p,\mathbf{w}}) \\ &\le \|f-g\|_\infty + 2HD\|S(f-g,\xi)\|_{p,\mathbf{w}} \\ &\le \|f-g\|_\infty + 2HDW^{1/p}\|S(f-g,\xi)\|_\infty \le (1+2HDW^{1/p})\|f-g\|_\infty.\end{aligned}$$

对所有 $g \in X_N$ 取最小值，证明即告完成。

□

以下这个定理 4.1 的类似结果，在较弱的离散化假设下，已由 [31] 证明。

定理 4.3 ([31, 定理 5.2])。 设 $p \in [1,\infty)$。假设子空间$X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 具有性质 $X_N \in \mathcal{LD}(m, p, \infty, D)$，且该性质由 Ω 中的 m 个点组成的集合$\xi = \{\xi^j\}_{j=1}^m$ 实现；也就是说，

$$\|g\|_p \le D \max_{1\le j\le m} |g(\xi^j)|, \quad \forall g \in X_N. \tag{4.6}$$

那么，对于任意 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，我们有

$$\|f - \ell\infty(\xi)(f)\|_p \le (2D+1)d(f, X_N)_\infty.$$

现在我们对上述结果作一些评论。定理 4.1 保证，在假设 **A1** 和 **A2** 下，对于 $p \in [1,\infty)$，我们有

$$\|\ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_p \le (2DW^{1/p}+2)\|f\|_\infty. \tag{4.7}$$

如果进一步假设 $X_N \in NI(p,\infty,H)$，则可得

$$\|\ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_\infty \le H(2DW^{1/p}+2)\|f\|_\infty. \tag{4.8}$$

因此，我们可以表述定理 4.1 的以下直接推论。

推论 4.1。 假设 $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 满足假设 ***A1***、***A2***，此外还满足 $X_N \in NI$ (p、 ∞、 H)，其中 $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p(\Omega,\mu)}$。则有

$$\|\ell p\mathbf{w}(\xi, X_N)(f)\|_\infty \le H(2DW^{1/p}+2)\|f\|_\infty, \qquad \forall f \in \mathcal{C}(\Omega). \tag{4.9}$$

最近，文献 [29] 讨论了求取从 $\mathcal{C}(\Omega)$ 到 $\mathcal{C}(\Omega)$ 的投影算子范数良好界的问题。特别是，该文还讨论了仅使用采样点的投影算子。现在，我们针对这一情形给出上述结果的一些推论。推论 4.1 在情形 $p=2$ 下给出了一个条件性结果，此时算子 $\ell p\mathbf{w}(\xi、X_N)$ 是线性投影算子。下面利用已知结果将其转化为无条件结果。任取子空间 $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$。令 $p=2$，并应用定理 3.8。由此得到概率测度 μ，使得 $X_N \in NI(2、\infty、N^{1/2})$。接下来，对子空间 X_N 和范数 $\|\cdot\|_2 := \|\cdot\|_{L_2(\Omega\,\mu)}$ 使用带有 $K=1$ 的定理 3.3。该定理给出集合 $\{\xi^j\}_{j=1}^m$、$m \le C_1 N$，以及绝对常数 C_1，使得假设 **A1** 在等权重 $\mathbf{w}_m := (1/m、.....、1/m)$ 下成立。因此，假设 **A2** 在 $W=1$ 下成立。最后，应用推论 4.1，得到

$$\|\ell 2\mathbf{w}_m(\xi, X_N)\|_{L_\infty \to L_\infty} \le CN^{1/2}, \tag{4.10}$$

其中 C为绝对常数。

注意，除了 (4.10) 之外，我们还有以下有用的离散化性质，该性质可由定理 3.3 推得：对于任意 $f \in X_N$

$$C_2\|f\|_2^2 \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(\xi^j)|^2 \le C_3\|f\|_2^2,$$

其中 C_2 和 C_3 是绝对正常数。

如果改用定理 3.5 而非定理 3.3，我们可以用更强的界 $m \le bN$改进上述界 $m \le C_1 N$，其中 b 是 $(1,2]$, 中的任意固定数。在这种情况下，我们需要使用定理 3.5 给出的权重$\mathbf{w}$，而非等权重$\mathbf{w}_m$。注意，[29]的作者证明了 (4.10) 的一个类似结果，其中 $C_1 = 2$。

以下简单事实是逼近理论中的一个经典结果，经常会用到。设 $P: X \to X$ 是 X_N 上的线性投影算子，满足性质 $\|P\|_{X\to X} \le L$。那么对于任意 $f \in X$，我们有 Lebesgue 不等式

$$\|f - P(f)\|_X \le (L+1)d(f, X_N)_X. \tag{4.11}$$

事实上，对于任意 $g \in X_N$，我们有

$$\|f - P(f)\|_X = \|f - g - P(f-g)\|_X \le (L+1)\|f-g\|_X,$$

这意味着 (4.11)。

因此，(4.10) 表明，对于任意 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，我们有

$$\|f - \ell 2\mathbf{w}_m(\xi, X_N)(f)\|_\infty \le (CN^{1/2} + 1) d(f, X_N)_\infty. \tag{4.12}$$

基于 ℓ_p 最小化的算法在采样恢复理论中发挥着重要作用。因此，研究者引入并研究了以下最优特征量（参见 [56] for $p = 2$）。对于固定的 m，对 Ω 上的函数类$\mathbf{F}$，定义

$$\varrho_m^{wls}(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\mathbf{w}, \xi \subset \Omega, X_N} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \ell p \mathbf{w}(\xi, X_N)(f)\|_p.$$

以下结果见于 [56]。

定理 4.4 （[56]）。存在两个正绝对常数 b 和 B，使得对于 $\mathbb{R}^d$ 中的任意紧子集Ω、其上的任意概率测度 μ 以及 $\mathcal{C}$（Ω）中的任意紧子集$\mathbf{F}$，均有

$$\varrho_{bn}^{wls}(\mathbf{F}, L_2(\Omega, \mu)) \le B d_n(\mathbf{F}, L_\infty).$$

上述定理致力于通过加权最小二乘算子 $\ell 2\mathbf{w}(\xi)$ 进行恢复。我们可能希望恢复算法 $\ell 2\mathbf{w}(\xi)$ 成为经典最小二乘算法，即 $\mathbf{w} = \mathbf{w}_m := (1/m, \ldots, 1/m)$。在这种情况下，我们如下引入相应的最优特征量（参见[56]）

$$\varrho_m^{ls}(\mathbf{F}, L_2) := \inf_{\xi, X_N} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \ell 2\mathbf{w}_m(\xi, X_N)(f)\|_2$$

以及（参见 [10]）

$$\varrho_m^{lp}(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\xi, X_N} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \ell p \mathbf{w}_m(\xi, X_N)(f)\|_p.$$

读者可以找到关于 $\varrho_m^{lp}(\mathbf{F}\ L_p)$ 的定理 4.4 的类似结果，其中柯尔莫哥洛夫宽度 $d_n(\mathbf{F}\ L_\infty)$ 被 E-条件柯尔莫哥洛夫宽度所替代（参见 [56] 和 [10]）

$$d_N^E(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\{u_1, \ldots, u_N\} \text{ satisfies Condition} E} \sup_{f \in \mathbf{F}} \inf_{c_1, \ldots, c_N} \left\| f - \sum_{i=1}^N c_i u_i \right\|_p$$

对于不同的条件 E。

4.2 稀疏逼近

为简洁起见，记 $L_p(\xi) := L_p(\Omega_m, \mu_m)$，其中 $\Omega_m = \{\xi^\nu\}_{\nu=1}^m$ 以及 $\mu_m(\{\xi^\nu\}) = 1/m, \nu = 1, \ldots, m$。令 $B_v(f, \mathcal{D}_N, L_p(\xi))$（见第 1 节中的算法 2）表示相对于系统 $\mathcal{D}_N$，在 $L_p(\xi)$ 范数下对 f 的最佳 v 项逼近。注意， $B_v(f, \mathcal{D}_N, L_p(\xi))$ 可能并不唯一。显然，

$$\|f - B_v(f, \mathcal{D}_N, L_p(\xi))\|_{L_p(\xi)} = \sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_{L_p(\xi)}. \tag{4.13}$$

我们在 [9]中证明了以下定理。

定理 4.5（[9]）。设 $1 \le p < \infty$，并设 m、 v、 N 为给定的自然数，满足 $2v \le N$。设 $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 为一个由 N 个元素构成的系统。假设存在集合 $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$，它提供单侧 L_p-通用采样离散化（见定义 *2.2*）

$$\|f\|_p \le D \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(\xi^j)|^p \right)^{1/p}, \quad \forall\, f \in \Sigma_{2v}(\mathcal{D}_N). \tag{4.14}$$

那么，对于任意函数 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，我们有

$$\|f - B_v(f, \mathcal{D}_N, L_p(\xi))\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le 2^{1/p}(2D+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_{L_p(\Omega,\mu_\xi)} \tag{4.15}$$

and

$$\|f - B_v(f, \mathcal{D}_N, L_p(\xi))\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le (2D+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty. \tag{4.16}$$

以下定理在 [59] 中得到证明。

定理 4.6（[59, 定理 3。3]）。设 $2 \le p < \infty$，并设 m、 v、 N 为给定的自然数，满足 $2v \le N$。设 $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 为一个由N个元素构成的系统，且满足 $\mathcal{D}_N \in NI(2、 p、 H、 2v)$。假设存在集合 $\xi :$
$= \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$，它提供单侧 L_2-通用采样离散化

$$\|f\|_2 \le D \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(\xi^j)|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall\, f \in \Sigma_{2v}(\mathcal{D}_N). \tag{4.17}$$

那么，对于任意函数 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，我们都有（参见 μ_ξ *in* 的定义 *(2.5))*

$$\|f - B_v(f, \mathcal{D}_N, L_2(\xi))\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le 2^{1/p}(2DH+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_{L_p(\Omega,\mu_\xi)} \tag{4.18}$$

and

$$\|f - B_v(f, \mathcal{D}_N, L_2(\xi))\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le (2DH+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty. \tag{4.19}$$

下面来自 [31] 的定理 4.7 在稍弱的条件下确立了（4.16）。

定理 4.7 ([31])。 设 $p \in [1,\infty)$，并设 m, v, N 为给定的自然数，使得 $2v \le N$。设 $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 为一个由 N 个元素组成的系统。假设存在集合 $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$，它为集合族 $\mathcal{X}_{2v}(\mathcal{D}_N)$提供通用 *LDI*$(p,\infty)$ *(2.3)*。那么，对于任意函数 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，有

$$\|f - B_v(f, \mathcal{D}_N, L_\infty(\xi))\|_p \le (2D+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty. \tag{4.20}$$

证明。 我们由下述显然的关系推出 (4.20)：

$$\|f - B_v(f, \mathcal{D}_N, L_\infty(\xi))\|_{L_\infty(\xi)} = \sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_{L_\infty(\xi)}. \tag{4.21}$$

显然，

$$\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_{L_\infty(\xi)} \le \sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty.$$

为简洁起见，记 $u := B_v(f,\ \mathcal{D}_N,\ L_\infty(\xi))$，并设 h 为 f 在 $\Sigma_v(\mathcal{D}_N)$中的最佳 L_∞-逼近。于是，由 (4.21) 可得

$$\|h - u\|_{L_\infty(\xi)} \le \|f - h\|_{L_\infty(\xi)} + \|f - u\|_{L_\infty(\xi)} \le 2\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty.$$

利用 $h - u \in \Sigma_{2v}(\mathcal{D}_N)$，由离散化 (2.3) 可得

$$\|h - u\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le 2D\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty. \tag{4.22}$$

最后，

$$\|f - u\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le \|f - h\|_{L_p(\Omega,\mu)} + \|h - u\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

由此以及（4.22）可证明（4.20）。

□

上述讨论的算法 $B_v(f,\ \mathcal{D}_N,\ L_p(\xi))$ 仅使用有关采样向量 $S(f,\ \xi)$ 的信息，因此可用于证明 $\rho_m^o(\mathbf{F}\ L_p)$ 的上界。算法 $B_v(f,\ \mathcal{D}_N,\ L_p(\xi))$ 可定义如下（见 (1.5)）

$$L^s(\xi, f) := \operatorname*{argmin}_{L \in \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)} \|S(f - \ell p(\xi, L)(f), \xi)\|_p,$$

$$B_v(f, \mathcal{D}_N, L_p(\xi)) := \ell p(\xi, L^s(\xi, f))(f). \tag{4.23}$$

在 [7]和 [57]中研究了该算法的以下类似形式。我们以更一般的方式给出它的定义。对于一个由有限维子空间 $\mathcal{X} := \{X(n)\}_{n=1}^{k}$ 构成的集合族，我们将该算法定义如下:

$$n(\xi, f) := \operatorname*{argmin}_{1\le n\le k} \|f - \ell p(\xi, X(n))(f)\|_p,$$

$$\ell p(\xi, \mathcal{X})(f) := \ell p(\xi, X(n(\xi, f)))(f). \tag{4.24}$$

以下结果已在 [9]中证明。

定理 4.8 ([9])。 设 m、 v、 N 为满足 $v \le N$的正整数。设 $\mathcal{X}: = \{X(n)\}_{n=1}^{k}$ 为有限维子空间的集合族。假设存在集合 $\xi : = \{\xi^j\}_{j=1}^{m}$ ，其中包含 Ω 中的 m 个点，并为该集合族提供单侧 L_p-通用采样离散化

$$\|f\|_p \le D\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(\xi^j)|^p\right)^{1/p}, \quad \forall\, f \in \bigcup_{n=1}^{k} X(n), \tag{4.25}$$

对于集合族 $\mathcal{X}$。则对于任意函数 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，有

$$\|f - \ell p(\xi, \mathcal{X})(f)\|_p \le 2^{1/p}(2D+1)\min_{1\le n\le k} d(f, X(n))_{L_p(\Omega,\mu_\xi)} \tag{4.26}$$

and

$$\|f - \ell p(\xi, \mathcal{X})(f)\|_p \le (2D+1)\min_{1\le n\le k} d(f, X(n))_{\infty}. \tag{4.27}$$

注释 4.1. 首先，我们注意到，算法 $B_v(\cdot, \mathcal{D}_N, L_p(\xi))$ 仅使用点 ξ 处的函数值，而算法 $\ell p(\xi, \mathcal{X})$ 在选择 $n(\xi, f)$ 时还使用额外信息。其次，定理 4.5 和 4.8（在 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)$ 的情形下）非常相似：定理 4.5 要求对 $\Sigma_{2v}(\mathcal{D}_N)$ 进行单侧通用离散化，而定理 4.8（在 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)$ 的情形下）要求对 $\Sigma_v(\mathcal{D}_N)$ 进行单侧通用离散化。然而，对于一般集合族 $\mathcal{X}$，这一点会带来很大差异。文献 [57] 通过一个例子对此作了说明：该例中的子空间集合族由频率取自体积大致相同的平行六面体的多元三角多项式构成。文献 [57] 给出了算法 $\ell\infty(\xi, \mathcal{X})$ 的恢复结果，但没有给出与算法 $B_v(\cdot, \mathcal{D}_N, L_\infty(\xi))$ 类似的算法的恢复结果。

5 贪心算法恢复

5.1 弱正交匹配追踪

弱正交匹配追踪（WOMP）是一种相对于希尔伯特空间 H 中的字典（或系统） $\mathcal{D} \subset H$ 定义的贪心算法，该空间配备了内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 及其诱导范数 $\| \cdot \|_H$。这种算法也常被称为弱正交贪心算法（例如参见 [49]）。

弱正交匹配追踪（WOMP）。设 $\mathcal{D} = \{g\}$ 是希尔伯特空间 H 中非零元素构成的系统，满足 $\sup_{g \in \mathcal{D}} \|g\|_H \leq 1$。设 $\tau := \{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, 1]$ 是给定的弱参数序列。给定 $f_0 \in H$，我们归纳定义残差序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$，其中 $k = 1, 2, \cdots$，如下所示：

(1) $g_k \in \mathcal{D}$ 是满足以下条件的任意元素

$$|\langle f_{k-1}, g_k \rangle| \geq t_k \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f_{k-1}, g \rangle|.$$

(2) 令 $H_k := \text{span}\{g_1, \ldots, g_k\}$，并定义 $G_k^{\tau}(\cdot, \mathcal{D})$ 为从 H 到空间 H_k 的正交投影算子。

(3) 将算法第 k 次迭代后的残差定义为

$$f_k := f_0 - G_k^{\tau}(f_0, \mathcal{D}).$$

当 $t_k = 1$ 对所有 $k \geq 1$均成立时，弱正交匹配追踪（WOMP）便退化为正交匹配追踪（OMP）。本文将重点限定在 $t_k = t \in (0, 1]$ 对所有 $k \geq 1$均成立）的情形。我们将 $\{G_k^t(\cdot, \mathcal{D})_H\}_{k=1}^{\infty}$ 记为希尔伯特空间 H 中相对于弱参数 t和系统 $\mathcal{D}$ 定义的 WOMP。尽管算法每一步选取的元素 g_k 可能并不唯一，但下文给出的所有结果均与 g_k的具体选择无关。关于贪心逼近理论的全面介绍，请参阅 [49]。

UP(u, D)**. (u, D)-无条件性质**。设 u, D 为满足 $1 \leq u \leq D$的整数。我们称希尔伯特空间 $H = (H, \| \cdot \|)$ 中由元素构成的系统 $\mathcal{D} = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ 是具有常数 $U > 0$ 的 (u, D)-无条件系统，当任意

$A \subset I$ 和 $J \subset I \setminus A$ 满足 $|A| \le u$ 和 $|A| + |J| \le D$，且对于任意 $f = \sum_{i\in A} c_i\varphi_i \in \Sigma_u(\mathcal{D})$，我们有

$$\|f\| \le U \inf_{g\in V_J(\mathcal{D})} \|f - g\|, \tag{5.1}$$

其中 $V_J(\mathcal{D}) := \mathrm{span}\{\varphi_i : i \in J\}$。

定理 5.1 ([32, 推论 I。1])。设 $\mathcal{D}$ 是希尔伯特空间$H = (H, \|\cdot\|)$ 中的一个字典，具有性质 $\boldsymbol{UP}(u, D)$，其常数为 $U > 0$，其中u, D 为满足 $1 \le u \le D$的整数。设 $f \in H$，且 $t \in (0, 1]$。则存在一个正常数 $c_* := c(t, U)$，仅依赖于 t和 U，使得对每个整数

$$1 \le v \le \min\left\{u,\ \frac{D}{1 + c_*}\right\},$$

我们有

$$\sigma_{\lceil c_* v\rceil}(f, \mathcal{D})_H \le \left\|f - G^t_{\lceil c_* v\rceil}(f, \mathcal{D})_H\right\| \le C\sigma_v(f_0, \mathcal{D})_H,$$

其中 $C > 1$ 是一个绝对常数，而 $\{G^t_k(\cdot, \mathcal{D})_H\}_{k=1}^{\infty}$ 表示相对于弱参数 t 和 H中的系统 $\mathcal{D}$ 定义的弱正交匹配追踪。

我们将考虑希尔伯特空间 $L_2(\Omega_m, \mu_m)$，而不是 $L_2(\Omega, \mu)$，其中 $\Omega_m = \{\xi^\nu\}_{\nu=1}^m$ 是一个能够提供良好通用离散化的点集，而 μ_m 是 Ω_m上的均匀概率测度，即 $\mu_m\{\xi^\nu\} = 1/m, \nu =$1、.....、 m。令 $\mathcal{D}_N(\Omega_m)$表示系统 $\mathcal{D}_N$在集合 Ω_m上的限制。下文的定理 5.2 保证，简单的贪心算法弱正交匹配追踪可在范数 $L_2(\Omega_m, \mu_m)$下给出相应的勒贝格型不等式，从而实现良好的稀疏恢复。为简便起见，当上下文中明确了底集 Ω_m 时，我们将 $L_2(\Omega_m, \mu_m)$记作 L_2^m。定理 5.2 是在 [8]中由定理 5.1 推导得出的。

定理 *5.2*（[8]）。设 $\mathcal{D}_N = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ 是 $L_2(\Omega, \mu)$ 中的一致有界的黎兹基，满足 *(2.6)* 和 *(2.7)*，其中常数为 $0 < R_1 \le R_2 < \infty$。设 $\Omega_m = \{\xi^1, \cdots, \xi^m\}$ 是 Ω 的一个有限子集，它为集合族 $\mathcal{X}_u(\mathcal{D}_N)$ 和给定的整数$1 \le u \le N$提供了 L_2-通用采样离散化 *(2.1)*。那么，对于每个弱参数 $t \in (0, 1],)$，存在常数 $c_* = c(t, R_1, R_2) \ge 1$，它仅取决于 t 和常数 R_1 与 R_2，使得对于任意整数 $0 \le v \le u/(1 + c_*)$ 和任意 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，我们有

$$\sigma_{\lceil c_* v\rceil}(f, \mathcal{D}_N)_{L_2^m} \le \left\|f - G^t_{\lceil c_* v\rceil}(f, \mathcal{D})_{L_2^m}\right\|_{L_2^m} \le C\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_{L_2^m}, \tag{5.2}$$

and

$$\left\|f - G^t_{\lceil c_* v\rceil}(f,\mathcal{D})_{L_2^m}\right\|_{L_2(\Omega,\mu)} \le C\sigma_v(f,\mathcal{D}_N)_{L_\infty(\Omega,\mu)}, \tag{5.3}$$

其中 $C > 1$ 是一个绝对常数，而 $\{G^t_k(\cdot,\mathcal{D})_{L_2^m}\}_{k=1}^{\infty}$ 表示相对于弱参数 t 以及离散系统 $\mathcal{D}(\Omega_m)$，在希尔伯特空间 $L_2^m = L_2(\Omega_m,\mu_m)$ 中定义的 *WOMP*。

下面给出定理 5.2 在 $L_p(\Omega,\mu)$, $p\in[2,\infty)$ 情形下的推广，并附加 Nikol'skii 型不等式条件。

定理 *5.3 (*[59, 定理 *3.*1]*)*。设 $\mathcal{D}_N = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ 是 $L_2(\Omega,\mu)$ 中的一致有界的里斯系统，满足某些常数 $0 < R_1 \le R_2 < \infty$ 下的 *(2.6)* 和 *(2.7)*。设 $\Omega_m = \{\xi^1,\cdots,\xi^m\}$ 是 Ω 的一个有限子集，它为集合族 $\mathcal{X}_u(\mathcal{D}_N)$ 提供了 L_2-通用采样离散化，其中 $1 \le u \le N$。此外，假设对于某个 $p\in[2,\infty)$，有 $\mathcal{D}_N \in NI(2,p,H,u)$。那么，对于给定的弱参数 $0 < t \le 1$，存在一个常数整数 $c_* = c(t,R_1,R_2) \ge 1$，它仅依赖于 t 以及常数 R_1 和 R_2，使得对于任意整数 $0 \le v \le u/(1+c_*)$ 和任意 $f\in\mathcal{C}(\Omega)$，我们有

$$\sigma_{\lceil c_* v\rceil}(f,\mathcal{D}_N)_{L_2^m} \le \left\|f - G^t_{\lceil c_* v\rceil}(f,\mathcal{D})_{L_2^m}\right\|_{L_2^m} \le C\sigma_v(f,\mathcal{D}_N)_{L_2^m}, \tag{5.4}$$

and

$$\left\|f - G^t_{\lceil c_* v\rceil}(f,\mathcal{D})_{L_2^m}\right\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le HC\sigma_v(f,\mathcal{D}_N)_{L_p(\Omega,\mu_\xi)}, \tag{5.5}$$

其中，$C > 1$ 是一个绝对常数，$\{G^t_k(\cdot、\mathcal{D})_{L_2^m}\}_{k=1}^{\infty}$ 表示相对于弱参数 t 和离散系统 $\mathcal{D}(\Omega_m)$ 在希尔伯特空间 $L_2^m = L_2(\Omega_m、\mu_m)$ 中定义的*WOMP*，μ_ξ 的定义见（*2.5*）。

5.2 WCGA

我们给出巴拿赫空间中的弱切比雪夫贪心算法（WCGA）的定义。该算法在 [48]中作为弱正交匹配追踪（WOMP）的一种推广被提出。更准确地说，设 X^*表示巴拿赫空间 X的对偶空间。对于非零元素 $g\in X$，我们用 F_g 表示 g的一个范数化（峰值）泛函，即满足以下条件的元素 $F_g\in X^*$

$$\|F_g\|_{X^*} = 1, \qquad F_g(g) = \|g\|_X.$$

根据 Hahn-Banach 定理，这样的泛函必然存在。

现在我们可以如下定义 WCGA。

弱切比雪夫贪心算法（WCGA）。设 $\tau := \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是给定的正数弱参数序列 ≤ 1。设 $\mathcal{D} = \{g\} \subset X$ 是 X 中由非零元素构成的系统，满足 $\|g\| \leq 1$，其中 $g \in \mathcal{D}$。给定 $f_0 \in X$，我们归纳地定义元素 $f_m \in X$ 和 $\phi_m \in \mathcal{D}$，其中 $m = 1, 2, \cdots$，如下所示：

(1) $\phi_m \in \mathcal{D}$ 是满足以下条件的任意元素

$$|F_{f_{m-1}}(\phi_m)| \geq t_m \sup_{g \in \mathcal{D}} |F_{f_{m-1}}(g)|.$$

(2) 定义

$$\Phi(m) := \operatorname{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_m\},$$

并令 $G_m(f_0, \mathcal{D})_X$ 为从空间 $\Phi(m)$ 中对 f_0 的最佳逼近元；也就是说，

$$G_m(f_0, \mathcal{D})_X := \operatorname*{argmin}_{G \in \Phi(m)} \|f_0 - G\|_X.$$

(3) 定义

$$f_m := f_0 - G_m(f_0, \mathcal{D})_X.$$

注5.1。我们针对满足额外条件 $\|g\| \leq 1$ *for* $g \in \mathcal{D}$的系统定义了 *WCGA*。显然，对于新系统$\mathcal{D}^B := \{Bg, g \in \mathcal{D}\}$（其中 B 是一个正数），*WCGA* 的实现与系统 $\mathcal{D}$的实现相同。这意味着限制 $\|g\| \leq 1$ 可以替换为限制 $\|g\| \leq B$，其中 B是某个正数。

我们只考虑满足 $t_k = t \in (0, 1]$ 对所有 $k \geq 1$均成立的情形下的 WCGA。对于系统 $\mathcal{D} \subset X$以及弱参数 $t \in (0, 1]$, 我们将相应的 WCGA 记为 $\{G_m^t(\cdot, \mathcal{D})_X\}_{m=1}^{\infty}$。我们还指出，当 X 为希尔伯特空间时，WCGA 与广为人知的 WOMP 一致。WOMP 在信号处理中非常流行，尤其是在压缩感知领域。在逼近理论中，WOMP 也被称为弱正交贪心算法（WOGA）。

注意，根据定义， $G_k^t(f_0, \mathcal{D})_X \in \Sigma_k(\mathcal{D})$。因此，

$$\sigma_k(f_0, \mathcal{D})_X \le \|f_k\|_X = \|f_0 - G_k^t(f_0, \mathcal{D})_X\|_X.$$

在系统 $\mathcal{D}$ 和巴拿赫空间 X满足某些条件时，逆不等式也成立。下面的定理 5.4 给出了这一结果；该定理针对实巴拿赫空间的证明见 [50]（另见 [55], 第 8.7 节，定理 8.7.17，第 431 页），针对复巴拿赫空间的证明见 [12]。尽管该定理最初是针对字典表述的，但其证明对一般系统 $\mathcal{D}$仍然有效。

回顾一下，系统 $\mathcal{D} \subset X$ 的（v, S）-非相干性在定义 2.4 中给出，其中v 和 S 为满足 $1 \le v \le S$的整数。由此定义可直接得出，对于任意整数 $1 \le v' \le v$，参数为 $V > 0$ 和 $r > 0$ 的（v, S）-非相干性蕴含具有相同参数的（v', S）-非相干性。

定理 5.4 ([50, 定理 2.7], [55, 定理 8.7.17]). 设 X 为巴拿赫空间，并对某个参数 $1 < q \le 2$ 和常数 $\gamma > 0$满足以下条件：

$$\eta(X, w) \le \gamma w^q, \quad \forall w > 0.$$

假设 $\mathcal{D} \subset X$ 是一个具有 (v_0, S)-非相干性性质的系统，其参数为 $V > 0$ 和 $r > 0$，其中 v_0、 S 是满足 $1 \le v_0 \le S$ 的整数。令 $f \in X$，并设 $t \in (0, 1]$ 为给定的弱参数。则存在一个常数 $C(q) > 0$，它仅依赖于 q，使得

$$\sigma_u(f, \mathcal{D})_X \le \|f - G_u^t(f, \mathcal{D})_X\|_X \le C\sigma_v(f, \mathcal{D})_X$$

对于满足 $u + v \le S$ 的每个整数 $1 \le v \le v_0$，其中

$$u = u(v, t) := \left\lceil C(q)\gamma^{\frac{1}{q-1}} \left(\frac{V \cdot v^r}{t}\right)^{q'} \ln(V \cdot v) \right\rceil, \quad q' := \frac{q}{q-1},$$

$C > 1$ 是一个绝对常数，而 $\{G_k^t(\cdot, \mathcal{D})_X\}_{k=1}^{\infty}$ 表示相对于系统 $\mathcal{D}$ 、弱参数为 t 的 *WCGA*。

我们将把定理 5.4 应用于给定系统$\mathcal{D}_N = \{g_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{C}(\Omega)$的离散化版本。通常，我们不考虑空间 $L_p(\Omega, \mu)$，而是考虑空间 $L_p(\Omega_m, \mu_m)$，其中 $\Omega_m = \{\xi^\nu\}_{\nu=1}^m$来自定义 2.1，且$\mu_m(\xi^\nu) = 1/m$, $\nu = 1, \dots, m$。令 $\mathcal{D}_N(\Omega_m)$ 表示将 $\mathcal{D}_N$限制在集合 Ω_m上。在本文中以及其他地方，我们使用记号 Ω_m 表示集合 ξ，以强调集合 ξ 充当新定义域 Ω_m 的角色，该定义域由 m 个点组成，而不是原始定义域 Ω。

命题 5.1 ([58])。令 $1 \le p < \infty$，并令 v、u、S 为给定的整数，使得 $1 \le v \le u \le S \le N$。假设 $\mathcal{D}_N = \{g_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 是一个在空间 $L_p(\Omega, \mu)$ 中具有 (v, S)-非相干性的系统，其中参数为 $V > 0$ 和 $r > 0$。进一步假设存在有限集 $\Omega_m := \{\xi^1, \cdots, \xi^m\} \subset \Omega$，其为集合族 $\mathcal{X}_u(\mathcal{D}_N)$提供 L_p-通用采样离散化 (2.1)。则系统 $\mathcal{D}_N(\Omega_m)$ 具有参数为 $2^{1/p}V$ 和 r的 (v, u)-非相干性，而且，

$$\|g_i\|_{L_p(\Omega_m, \mu_m)} \le (3/2)^{1/p} \|g_i\|_p, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{5.6}$$

现在我们证明一个关于 WCGA 采样恢复的条件性结果。我们称之为条件性 结果，因为下面的定理 5.5 是在系统 $\mathcal{D}_N$ 满足两个非平凡且非标准的条件下证明的。

定理 *5.5*（[58]）。设 $1 < p < \infty$, $q := \min(p, 2)$，且 $q' := q/(q-1)$。设 v_0, u, S 为满足 $1 \le v_0 \le u \le S \le N$ 的给定整数。设 $\mathcal{D}_N = \{g_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 是一个系统，它在空间 $L_p(\Omega, \mu)$ 中具有 (v_0, S)-非相干性，参数为 $V, r > 0$。假设存在一个有限集合 $\xi = \Omega_m = \{\xi^1, \cdots, \xi^m\} \subset \Omega$，它为集合族 $\mathcal{X}_u(\mathcal{D}_N)$ 提供 L_p-通用采样离散化 *(2.1)*。那么，对于给定的每个弱参数 $t \in (0, 1]$，，存在一个常数 $c = C(t, p) \ge 1$，它仅依赖于 t 和 p，使得对于任意满足以下条件的正整数 $1 \le v \le v_0$

$$v + a(v) \le u \quad with \quad a(v) := \lceil c(2V \cdot v^r)^{q'} (\ln(2Vv)) \rceil,$$

对于任意 $f_0 \in \mathcal{C}(\Omega)$，我们有

$$\sigma_{a(v)}(f_0, \mathcal{D}_N)_{L_p^m} \le \left\| f_0 - G^t_{a(v)}(f_0, \mathcal{D})_{L_p^m} \right\|_{L_p^m} \le C \sigma_v(f_0, \mathcal{D}_N)_{L_p^m}, \tag{5.7}$$

and

$$\left\| f_0 - G^t_{a(v)}(f_0, \mathcal{D})_{L_p^m} \right\|_{L_p(\Omega, \mu)} \le C \sigma_v(f_0, \mathcal{D}_N)_{L_\infty(\Omega, \mu)}, \tag{5.8}$$

其中，$C \ge 1$ 是一个绝对常数，L_p^m表示 L_p-空间 $L_p(\Omega_m, \mu_m)$，而 $\{G^t_k(\cdot, \mathcal{D})_{L_p^m}\}_{k=1}^\infty$ 表示相对于弱参数 $t \in (0, 1]$ 和空间 $L_p^m = L_p(\Omega_m, \mu_m)$中的系统 $\mathcal{D}_N(\Omega_m)$ 定义的 *WCGA*。

证明。定理 5.5 是定理 5.4 和命题 5.1 的推论。我们先证明 (5.7)。分别考虑两种情况：(I) $2 \le p < \infty$和 (II) $1 < p \le 2$。

情况 (I) $2 \le p < \infty$。 由 (2.12) 可得 $\eta(L_p, w) \le (p-1)w^2/2, \ \ w > 0.$ 在我们的情形下 $q = q' = 2$。我们设 $c_* = C(t,p) := C(t,(p-1)/2, 2)$, 其中$C(t, \gamma, q)$ 来自定理 5.4。命题 5.1 保证我们可以在空间 $L_p(\Omega_m, \mu_m)$ 中对系统 $\mathcal{D}_N(\Omega_m)$ 应用定理 5.4。由此得到不等式 (5.7)。

情形 (II) $1 < p \le 2$。 由此情形下的 (2.12), 可得 $\eta(L_p, \ w) \ \le w^p/p,$ $w > 0.$ 此外, $q = p$ 以及定理 5.4 中定义的 $q' = p/(p-1) = p'$。令 $c = C(t, \ p) := C(t, \ 1/p, \ p)$, 其中 $C(t, \ \gamma, \ q)$ 来自定理 5.4。命题 5.1 保证我们可以在空间 $L_p(\Omega_m, \ \mu_m)$ 中对系统$\mathcal{D}_N(\Omega_m)$ 应用定理 5.4。由此得到不等式 (5.7)。

现在我们由 (5.7) 推导出 (5.8)。显然,

$$\sigma_v(f_0, \mathcal{D}_N(\Omega_m))_{L_p(\Omega_m,\mu_m)} \le \sigma_v(f_0, \mathcal{D}_N)_\infty.$$

设 $f \in \Sigma_v(\mathcal{D}_N)$ 满足 $\|f_0 - f\|_\infty = \sigma_v(f_0, \ \mathcal{D}_N)_\infty$。为简洁起见, 令 $v' := \lceil c(2V)^{q'}(\ln(2Vv))v^{rq'} \rceil$。于是 (5.7) 蕴含

$$\|f - G^t_{v'}(f_0, \mathcal{D}_N(\Omega_m))\|_{L_p(\Omega_m,\mu_m)} \le \|f - f_0\|_{L_p(\Omega_m,\mu_m)} + \|f_{v'}\|_{L_p(\Omega_m,\mu_m)}$$

$$\le (1 + C)\sigma_v(f_0, \mathcal{D}_N)_\infty.$$

利用 $f - G^t_{v'}(f_0, \ \mathcal{D}_N(\Omega_m)) \in \Sigma_u(\mathcal{D}_N)$, 由离散化 (2.1) 可得

$$\|f - G^t_{v'}(f_0, \mathcal{D}_N(\Omega_m))\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le 2^{1/p}(1 + C)\sigma_v(f_0, \mathcal{D}_N)_\infty. \tag{5.9}$$

最后,

$$\|f_{v'}\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le \|f - f_0\|_{L_p(\Omega,\mu)} + \|f - G^t_{v'}(f_0, \mathcal{D}_N(\Omega_m))\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

由此及 (5.9) 可证 (5.8)。

□

定理 5.6。 在定理 *5.5* 的条件下, 我们有

$$\left\| f_0 - G^t_{a(v)}(f_0, \mathcal{D})_{L_p^m} \right\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le C'\sigma_v(f_0, \mathcal{D}_N)_{L_p(\Omega,\mu_\xi)}, \tag{5.10}$$

其中 $a\ (v)$ 来自定理 *5.5*, C' 是一个正绝对常数, 并且

$$\mu_\xi := \frac{\mu + \mu_m}{2} = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^m \delta_{\xi^j}.$$

证明。 为方便起见，我们使用记号 $\|\cdot\|_{p,\ \nu}$ 表示关于 Ω 上测度 ν 定义的 L_p 的范数。令 $g \in \Sigma_v(\mathcal{D}_N)$ 满足 $\|f_0 - g\|_{p,\ \mu_\xi} = \sigma_v(f_0,\ \mathcal{D}_N)_{p,\ \mu_\xi}$。令

$$v' := a(v) = \lceil c(2V)^{q'}(\ln(2Vv))v^{rq'}\rceil.$$

Then

$$\begin{aligned}\|f_{v'}\|_{p,\mu} &\le 2^{1/p}\|f_0 - G^t_{v'}(f_0,\mathcal{D}_N)_{L_p^m}\|_{p,\mu_\xi}\\ &\le 2^{1/p}\|f_0 - g\|_{p,\mu_\xi} + 2^{1/p}\|g - G^t_{v'}(f_0,\mathcal{D}_N)_{L_p^m}\|_{p,\mu_\xi}\\ &\le 2^{1/p}\sigma_v(f_0,\mathcal{D}_N)_{p,\mu_\xi} + 2^{1/p}\|g - G^t_{v'}(f_0,\mathcal{D}_N)_{L_p^m}\|_{p,\mu_\xi}.\end{aligned}$$

由于

$$g - G^t_{v'}(f_0,\mathcal{D}_N)_{L_p^m} \in \Sigma_{v+v'}(\mathcal{D}_N) \subset \Sigma_u(\mathcal{D}_N),$$

根据 L_p-usd 假设可得

$$\begin{aligned}\|g - G^t_{v'}(f_0,\mathcal{D}_N)_{L_p^m}\|_{p,\mu_\xi} &\le C_1\|g - G^t_{v'}(f_0,\mathcal{D}_N)_{L_p^m}\|_{p,\mu_m}\\ &\le C_1\|f_0 - g\|_{p,\mu_m} + C_1\|f_0 - G^t_{v'}(f_0,\mathcal{D}_N)_{L_p^m}\|_{p,\mu_m}\\ &\le 2^{1/p}C_1\|f_0 - g\|_{p,\mu_\xi} + C_1\|f_{v'}\|_{p,\mu_m},\end{aligned}$$

根据定理 5.5，其估计为

$$\le C_2\sigma_v(f_0,\mathcal{D}_N)_{p,\mu_\xi} + C_3\sigma_v(f_0,\mathcal{D}_N(\Omega_m))_{p,\mu_m} \le C'\sigma_v(f_0,\mathcal{D}_N)_{p,\mu_\xi}.$$

□

6 具有结构条件的类上的恢复

6.1 立方分解满足条件的类上的恢复

为方便读者，我们给出类$\mathbf{A}^r_\beta(\Psi)$的详细定义。这些类在 [58] 中被引入并研究。对于给定的 $1 \le p \le \infty$，设 $\Psi = \{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ 是空间 $L_p(\Omega\ \mu)$ 中的一个系统，使得 $\psi_{\mathbf{k}} \in \mathcal{C}(\Omega)$ 且

$\|\psi_{\mathbf{k}}\|_p \le B$ 对所有$\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$均成立。我们考虑可表示为绝对收敛级数的函数

$$f = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}}(f)\psi_{\mathbf{k}} \qquad \text{with} \quad \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{k}}(f)| < \infty. \tag{6.1}$$

对于 $\beta \in (0,1]$ 和 $r > 0$，考虑由所有函数 f 组成的类 $\mathbf{A}^r_\beta(\Psi)$，这些函数具有满足以下条件的表示式 (6.1)

$$\left(\sum_{\lfloor 2^{j-1} \rfloor \le \|\mathbf{k}\|_\infty < 2^j} |a_{\mathbf{k}}(f)|^\beta \right)^{1/\beta} \le 2^{-rj}, \quad j = 0, 1, \dots. \tag{6.2}$$

以下定理 6.1 在 [58] 中得到了证明。

定理 6.1 ([58])。设 $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\beta \in (0,1]$。假设$\sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \|\psi_{\mathbf{k}}\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le B$，其中 $B \ge 1$ 为某个常数。则存在两个正常数 $c^* = c(r,\beta,p,d)$ 和 $C = C(r,\beta,p,d)$，使得对于任意整数 $v \in \mathbb{N}$，都存在一个与测度 μ 无关的整数 $J \in \mathbb{N}$，满足 $2^J \le v^{c^*}$，且该系统

$$\Psi_J := \left\{ \psi_{\mathbf{k}} : \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \ \|\mathbf{k}\|_\infty < 2^J \right\},$$

我们有

$$\sigma_v(\mathbf{A}^r_\beta(\Psi), \Psi_J)_{L_p(\Omega,\mu)} \le CBv^{1/q-1/\beta-r/d},$$

其中 $q := \min\{p, 2\}$。此外，这个界由一个简单的贪心算法给出。

以下定理 6.2 在 [59] 中得到证明。

定理 *6.2*（[59]）。设 $\Psi \subset L_2(\Omega,\mu)$ 是一个一致有界的里斯系统，满足 *(2.6)* 和 *(2.7)*，其中常数为 $0 < R_1 \le R_2 < \infty$。设 $v \in \mathbb{N}$，且 $u := \lceil (1+c_*)v \rceil$，其中 c_* 是定理 *5.3* 中的常数。假设 $\Psi \in NI(2,p,H,u)$，其中常数为 $2 \le p < \infty$ 和 $H > 0$。那么，对于任意 $r > 0$ 和 $\beta \in (0,1]$,，存在正常数 $c' = c'(r,\beta,p,R_1,R_2,d)$ 和 $C' = C'(r,\beta,p,d)$，使得

$$\varrho^o_m(\mathbf{A}^r_\beta(\Psi), L_p(\Omega,\mu)) \le C'Hv^{1/2-1/\beta-r/d} \tag{6.3}$$

对于满足以下条件的任意整数 m

$$m \ge c'v(\log(2v))^4.$$

此外，这个界由弱正交匹配追踪给出。

证明。首先，我们在空间 $L_p(\Omega,\mu)$ 中应用定理 6.1，其中 $B=1$、$2\le p<\infty$ 和 $q=2$。与定理 6.1 中一样，考虑系统

$$\Psi_J:=\Big\{\psi_{\mathbf{k}}:\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d,\ \ \|\mathbf{k}\|_\infty<2^J\Big\},$$

其中 $J\in\mathbb{N}$ 不依赖于 μ，并且满足 $2^J\le v^{c^*}$。由 $\mathcal{D}_N=\Psi_J$ 的定理 5.3 以及 $p=2$ 和 $K=R_1^{-2}$的定理 3.10，可得存在 m个点 $\xi^1,\cdots,\xi^m\in\Omega$，使得

$$m\le Cu(\log N)^4\le Cu(\log v)^4, \tag{6.4}$$

因此，对于任意给定的 $f_0\in\mathcal{C}(\Omega)$，在空间 $L_2(\Omega_m,\mu_m)$ 中，针对系统 $\mathcal{D}_N(\Omega_m)$ 对 f_0应用弱参数为 t的弱正交匹配追踪，可对任意整数 $1\le v\le u/(1+c_*)$得到以下界：

$$\|f_{\lceil c_*v\rceil}\|_{L_p(\Omega,\mu)}\le C'H\sigma_v(f_0,\mathcal{D}_N)_{L_p(\Omega,\mu_\xi)}. \tag{6.5}$$

为了估计 (6.5) 的右侧，我们在空间$L_p(\Omega,\mu_\xi)$中应用定理 6.1。为此，只需验证$\|\psi_{\mathbf{k}}\|_{L_p(\Omega\mu_\xi)}\le 1,\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$。这由假设 Ψ 满足 (2.6) 可得。因此，由定理 6.1 可知，对于 $f_0\in\mathbf{A}^r_\beta(\Psi)$,

$$\sigma_v(f_0,\Psi_J)_{L_p(\Omega,\mu_\xi)}\le Cv^{1/2-1/\beta-r/d}. \tag{6.6}$$

结合 (6.6)、(6.5)，并考虑到 (6.4)，证明完成。

□

推论 6.1 ([59])。假设 Ψ 是一个一致有界的里斯系统（在空间 $L_2(\Omega,\mu)$ 中），并且对于某些常数 $0<R_1\le R_2<\infty$满足 *(2.6)* 和 *(2.7)*。令 $2\le p<\infty$ 和 $r>0$。存在常数 $c=c(r,\beta,p,R_1,R_2,d)$ 以及 $C=C(r,\beta,p,d)$，使得我们有如下界

$$\varrho^o_m(\mathbf{A}^r_\beta(\Psi),L_p(\Omega,\mu))\le Cv^{1-1/p-1/\beta-r/d} \tag{6.7}$$

对于满足以下条件的任意 m

$$m\ge cv(\log(2v))^4.$$

此外，该界可由弱正交匹配追踪得到。

我们由定理 5.3 推导出了定理 6.2。现在，我们提出一个与定理 6.2 类似的定理，它可以通过与由定理 5.3 推导定理 6.2 相同的方式，从定理 4.6 推导出来。

定理 6.3 ([59])。设 $2 \le p < \infty$，并给定自然数 m、v。设 Ψ 是满足 *(2.6)* 和 *(2.8)* 的一致有界贝塞尔系统，且满足 $\Psi \in NI(2, p, H, 2v)$。存在常数 $c = c(r, \beta, p, K, d)$ 和 $C = C(r, \beta, p, d)$，使得我们有如下界

$$\varrho_m^o(\mathbf{A}_\beta^r(\Psi), L_p(\Omega, \mu)) \le CHv^{1/2-1/\beta-r/d} \tag{6.8}$$

对于满足 m 的任意

$$m \ge cv(\log(2v))^4.$$

在 $\Psi = \mathcal{T}^d$ 为三角系统这一特殊情况下，推论 6.1 给出

$$\varrho_m^o(\mathbf{A}_\beta^r(\mathcal{T}^d), L_p(\mathbb{T}^d)) \ll v^{1-1/p-1/\beta-r/d} \quad \text{for} \quad m \gg v(\log(2v))^4. \tag{6.9}$$

[8] 中指出，关于三角系统的限制等距性质的已知结果，可用于改进三角系统情形下关于 L_2 范数的通用离散化结果。下面对此作更详细的说明。设 $M \in \mathbb{N}$ 和 $d \in \mathbb{N}$。定义 $\Pi(M) := [-M, M]^d$ 为 d 维立方体。考虑定义在 $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$ 上的函数系统 $\mathcal{T}^d(M) := \mathcal{T}^d(\Pi(M))$，其中函数为 $e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$，$\mathbf{k} \in \Pi(M)$。那么，$\mathcal{T}^d(M)$ 是 $L_2(\mathbb{T}^d, \mu)$ 中的一个正交归一系统，其中 μ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的归一化勒贝格测度。该系统的基数为 $N(M) := |\mathcal{T}^d(M)| = (2M+1)^d$。我们关注特殊情况下 $m(\mathcal{X}_v(\mathcal{T}^d(M)), 2)$ 的界，其中 $M \le v^c$，且某个常数 c 可能依赖于 d。于是，定理 3.10 配合 $p = 2$ 给出

$$m(\mathcal{X}_v(\mathcal{T}^d(v^c)), 2) \le C(c, d)v(\log(2v))^4. \tag{6.10}$$

在 [8] 中指出，[17] 和 [2] 的已知结果使我们能够改进界(6.10)：

$$m(\mathcal{X}_v(\mathcal{T}^d(v^c)), 2) \le C(c, d)v(\log(2v))^3. \tag{6.11}$$

进而可得以下估计

$$\varrho_m^o(\mathbf{A}_\beta^r(\mathcal{T}^d), L_p) \ll v^{1-1/p-1/\beta-r/d} \quad \text{for} \quad m \gg v(\log(2v))^3. \tag{6.12}$$

6.2 下界

我们来讨论非线性特征 $\varrho_m^o(\mathbf{A}_\beta^r(\Psi), L_p)$ 的下界。我们将考虑 Ψ 为三角系统 $\mathcal{T}^d :=$ 的特殊情形

$\{e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$。对于 $\mathbf{N}=(N_1,\dots,N_d)\in\mathbb{N}_0^d$，定义

$$\mathcal{T}(\mathbf{N},d):=\left\{\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d:-\mathbf{N}\le\mathbf{k}\le\mathbf{N}} c_j e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}:\ \ c_j\in\mathbb{C}\right\},\quad \vartheta(\mathbf{N}):=\prod_{j=1}^{d}(2N_j+1),$$

其中，对于$\mathbf{k}$，$\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$，我们用$\mathbf{k}\le\mathbf{n}$表示 $k_j\le n_j$ 对所有 $1\le j\le d$都成立。显然，

$$\dim\mathcal{T}(\mathbf{N},d)=\vartheta(\mathbf{N}).$$

在本节中，$\Omega=\mathbb{T}^d$，而 μ 是定义在 $\mathbb{T}^d$上的归一化勒贝格测度。

引理 6.1 ([59, 引理 4.1]). 设 $1\le q\le p\le\infty$，并令 $\mathcal{T}(\mathbf{N}\ d)_q$表示子空间 $\mathcal{T}(\mathbf{N}\ d)$的单位 L_q-球。那么，对于任意正整数$m\le\vartheta(\mathbf{N})/2$，我们有

$$\varrho_m^o(\mathcal{T}(2\mathbf{N},d)_q,L_p)\ge c(d)\vartheta(\mathbf{N})^{1/q-1/p}.$$

证明。给定由 m 个点组成的集合 $\xi=\{\xi^1,\dots,\xi^m\}\subset\mathbb{T}^d:=[0,2\pi)^d$，我们考虑子空间

$$T(\xi):=\{f\in\mathcal{T}(\mathbf{N},d):\ f(\xi^\nu)=0,\quad \nu=1,\dots,m\}.$$

令 $g_\xi\in T(\xi)$ 满足：对于一个点$\mathbf{x}^*$，有 $|g_\xi(\mathbf{x}^*)|=\|g_\xi\|_\infty=1$。接下来的论证需要用到一些经典的三角多项式。回顾一下，阶数为 $j-1$ 的一元 Fejér 核定义为

$$\mathcal{K}_j(x):=\sum_{|k|\le j}\bigl(1-|k|/j\bigr)e^{ikx}=\frac{(\sin(jx/2))^2}{j(\sin(x/2))^2}.$$

Fejér 核是一个偶的、非负的 $j-1$ 阶三角多项式。它满足显然的关系

$$\|\mathcal{K}_j\|_1=1,\qquad \|\mathcal{K}_j\|_\infty=j. \tag{6.13}$$

令 $\mathcal{K}_\mathbf{j}(\mathbf{x}):=\prod_{i=1}^d\mathcal{K}_{j_i}(x_i)$ 为 d 元 Fejér 核，其中 $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_d)\in\mathbb{N}_0^d$ 且 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)$。定义

$$f(\mathbf{x}):=g_\xi(\mathbf{x})\mathcal{K}_\mathbf{N}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*), \tag{6.14}$$

W这里$\mathbf{N}=(N_1,\ .....,\ N_d)$。然后 $f\in\mathcal{T}(2\mathbf{N}\ d)$，$f(\xi^\nu)=0,\nu=1,\ .....,\ m$，并且

$$\|f\|_q\le\|g_\xi\|_\infty\|\mathcal{K}_\mathbf{N}\|_q\le C_1(d)\vartheta(\mathbf{N})^{1-1/q}. \tag{6.15}$$

在最后一步，我们使用了 Fej´er 核的 L_q 范数的已知界（见 [55], 第 83 页, (3.2.7)）。由 (6.14) 可得

$$|f(\mathbf{x}^*)| \ge C_2(d)\vartheta(\mathbf{N}). \tag{6.16}$$

由 $\mathcal{T}(2\mathbf{N}\ d)$ 的 Nikol'skii不等式（参见 [55], 第 90 页，定理 3.3.2），从 (6.16) 可得

$$\|f\|_p \ge C_3(d)\vartheta(\mathbf{N})^{1-1/p}. \tag{6.17}$$

设 $\mathcal{M}$ 是从 $\mathbb{C}^m$ 到 L_p 的任意映射，并设 $g_0 := \mathcal{M}(\mathbf{0})$。令 $\tilde{f} := f/\|f\|_q$。那么

$$\left\|\tilde{f} - g_0\right\|_p + \left\| - \tilde{f} - g_0\right\|_p \ge 2\left\|\tilde{f}\right\|_p \ge 2C(d)\vartheta(\mathbf{N})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

其中最后一步用到了 (6.15) 和 (6.17)。由此可得

$$\max\left\{\|\tilde{f} - g_0\|_p, \| - \tilde{f} - g_0\|_p\right\} \ge C(d)\vartheta(\mathbf{N})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

由于 $\pm f$ 均属于 $\mathcal{T}(2\mathbf{N}\ d)_q$，并且

$$\mathcal{M}\Big(\tilde{f}(\xi^1), \cdots, \tilde{f}(\xi^m)\Big) = \mathcal{M}\Big(- \tilde{f}(\xi^1), \cdots, -\tilde{f}(\xi^m)\Big) = \mathcal{M}(\mathbf{0}) = g_0,$$

这就完成了引理 6.1 的证明。 □

引理 6.1 给出了类 $\mathbf{A}^r_\beta(\mathcal{T}^d)$ 的以下下界。

命题6.1。 对于 $\beta \in (0,1]$ 和 $r > 0$，对于 $2 \le p \le \infty$，我们有

$$\varrho^o_m(\mathbf{A}^r_\beta(\mathcal{T}^d), L_p) \gg m^{1-1/p-1/\beta-r/d}. \tag{6.18}$$

证明。 取 $n \in \mathbb{N}$ 并设 $N := 2^n - 1$, $\mathbf{N} := (N, \dots, N)$。那么对于 $f \in \mathcal{T}(\mathbf{N}\ d)_2$，由参数为 $2/\beta$ 的 Hölder 不等式可得

$$\left(\sum_{\mathbf{k}:\|\mathbf{k}\|_\infty \le N} |\hat{f}(\mathbf{k})|^\beta\right)^{1/\beta} \le (2N+1)^{d(1/\beta-1/2)} \left(\sum_{\mathbf{k}:\|\mathbf{k}\|_\infty \le N} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2\right)^{1/2}$$

$$= (2N+1)^{d(1/\beta-1/2)}\|f\|_2.$$

这个界与引理 6.1 结合 $q = 2$ 可推出（6.18）。 □

现在我们说明如何利用定理 4.5 来证明，定理 3.9 无法在 m 与 u 之间的关系方面得到实质性改进。

命题 6.2 ([59, 命题 4.1])。 令$\mathbf{N} = (N_1, \cdots, N_d) \in \mathbb{N}_0^d$，并定义三角系统

$$\mathcal{D}_N = \left\{ e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} : \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \ -2\mathbf{N} \le \mathbf{k} \le 2\mathbf{N} \right\},$$

其中，该系统的基数为

$$N = |\mathcal{D}_N| = \vartheta(2\mathbf{N}) = \prod_{j=1}^{d} (4N_j + 1).$$

令 $p \in (2, \ \infty)$。假设存在一个集合 $\xi = \{\xi^1, \cdots, \xi^m\} \subset \mathbb{T}^d$ **of** $m \le \vartheta(\mathbf{N})/2$ 个点，为集合族 $\mathcal{X}_{2v}(\mathcal{D}_N)$ 提供带常数 $D > 0$ 的单侧 $L_p(\mathbb{T}^d)$-通用采样离散化 ***(4.14)***，其中某个整数为 $1 \le v < N$。则

$$v \le C(d,p)(2D+1)^2 (\vartheta(\mathbf{N}))^{2/p},$$

其中 $C(d, p) > 0$ 是一个仅依赖于 p 和 d 的常数。

证明。 根据定理 4.5，不等式 (4.15) 对任意 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ 均成立。我们取引理 6.1 的证明中在 (6.14) 定义的函数 f。根据 f 的定义，对于所有 $j = 1, \ldots\ldots, \ m$, 我们得到 $f(\xi^j) = 0$。因此，$B_v(f, \ \mathcal{D}_N, \ L_p(\xi)) = 0$，并由 (6.17) 得到

$$\|f - B_v(f, \mathcal{D}_N, L_p(\xi))\|_p \ge C_3(d)\vartheta(\mathbf{N})^{1-1/p}. \tag{6.19}$$

另一方面，利用（6.15）及 $q = 2$, 可得

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(\mathbf{k})| \le \vartheta(2\mathbf{N})^{1/2} \|f\|_2^{1/2} \le C_1(d)\vartheta(\mathbf{N}). \tag{6.20}$$

由（2.12）可得

$$\eta(L_p(\mathbb{T}^d, \mu_\xi), w) \le (p-1)w^2/2, \ \ \forall w > 0.$$

已知（例如参见 [49], 第342页及上文的引理 2.1），对于巴拿赫空间 X 中的任意字典 $\mathcal{D} = \{g\}$, $\|g\|_X \le 1$，若 $\eta(X, w) \le \gamma w^q$, $1 < q \le 2$, 则有

$$\sigma_v(A_1(\mathcal{D}), \mathcal{D})_X \le C(q,\gamma)(v+1)^{1/q-1}. \tag{6.21}$$

Here

$$A_1(\mathcal{D}) := \left\{ f : \ f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i, \quad g_i \in \mathcal{D}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \le 1 \right\}.$$

现在应用不等式 (6.21) 和 (6.20)，得到

$$\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_{L_p(\mathbb{T}^d, \mu_\xi)} \le C_1(d,p)\vartheta(\mathbf{N})(v+1)^{-1/2}. \tag{6.22}$$

将 (6.19) 和 (6.22) 代入 (4.15)，可得

$$v + 1 \le C(d,p)(2D+1)^2 \vartheta(\mathbf{N})^{2/p}$$

其中某个正常数为 $C(d, \ p)$。我们取该常数 $C(d, \ p)$，证明完毕。

□

6.3 关于双曲交叉分解的条件类的恢复

本节将进一步讨论第1.2小节中引入的类 $\mathbf{W}^{a\ b}_{A_\beta,}(\Psi)$，它们最初是针对三角系统 $\Psi = \mathcal{T}^d$ with$\beta = 1$ 定义的。现在，我们给出概率空间 $(\Omega \ \mu)$ 上一般函数系统 $\Psi = \{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ 的定义。

设 $\mathbf{s} = (s_1, \ \ldots, \ s_d) \in \mathbb{N}_0^d$ 是一个非负整数向量。我们将指标块 $\rho(\mathbf{s})$定义为

$$\rho(\mathbf{s}) := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \lfloor 2^{s_j - 1} \rfloor \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = 1, \ldots, d \right\}.$$

对于可由绝对收敛级数表示的函数 f

$$f = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}}(f)\psi_{\mathbf{k}} \quad \text{with} \quad \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{k}}(f)| < \infty, \tag{6.23}$$

我们定义

$$\delta_{\mathbf{s}}(f,\Psi) := \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}}(f)\psi_{\mathbf{k}}, \qquad f_j := \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{N}_0^d: \ \|\mathbf{s}\|_1 = j} \delta_{\mathbf{s}}(f,\Psi), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

且对于 $\beta \in (0, 1]$,

$$|f|_{A_\beta(\Psi)} := \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{k}}(f)|^\beta \right)^{1/\beta}.$$

对于参数 $a \in \mathbb{R}_+$ 和 $b \in \mathbb{R}$，类 $\mathbf{W}^{a\,b}_{A_\beta}(\Psi)$ 由具有表示式 (6.23) 的函数 f 组成，且这些双曲层满足

$$|f_j|_{A_\beta(\Psi)} \le 2^{-aj}(\bar{j})^{(d-1)b}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \tag{6.24}$$

其中 $\bar{j} := \max(j,1)$。

这些类最初是针对三角系统引入的，其中$\beta = 1$ 属于 [51], ; 后来， [8]中给出了适用于任意 Ψ 和 $\beta = 1$ 的一般定义。为简便起见，我们记 $\mathbf{W}^{a\,b}_{A}(\Psi) := \mathbf{W}^{a\,b}_{A_1}(\Psi)$。

[42] 中的下述结果给出了 L_p 范数下类 $\mathbf{W}^{a\,b}_{A_\beta}(\Psi)$ 的最优非线性恢复上界。

定理 6.4 ([42]). 设 Ψ 是$L_2(\Omega\ \mu)$ 中的一致有界的里斯系统，满足一致有界条件 *(2.6)* 和里斯条件 *(2.7)*，其常数为 $0 < R_1 \le R_2 < \infty$。设 $2 \le p < \infty$ 和 $a > 0$。存在正常数 $c = c(a, b, \beta, p, R_1, R_2, d)$ 和 $C = C(a, b, \beta, p, d)$，使得下述上界成立：

$$\varrho^o_m(\mathbf{W}^{a,b}_{A_\beta}(\Psi), L_p(\Omega, \mu)) \le Cv^{1-1/p-1/\beta-a}(\log(2v))^{(d-1)(a+b)} \tag{6.25}$$

对于满足以下条件的任意样本数 m

$$m \ge cv(\log(2v))^4.$$

此外，弱正交匹配追踪（*WOMP*）算法可以构造性地达到此恢复界。

在系统 Ψ 为三角系统 $\mathcal{T}^d$ 这一特定情形下，所需样本数 m 中的对数因子可以略微降低。

定理 6.5 ([42])。假设 Ψ 是 d 变量三角系统 $\mathcal{T}^d$。令 $2 \le p < \infty$ 和 $a > 0$。存在正常数 $c = c(a, b, \beta, p, d)$ 以及 $C = C(a, b, \beta, p, d)$，使得以下恢复界成立：

$$\varrho^o_m(\mathbf{W}^{a,b}_{A_\beta}(\mathcal{T}^d), L_p(\mathbb{T}^d)) \le Cv^{1-1/p-1/\beta-a}(\log(2v))^{(d-1)(a+b)} \tag{6.26}$$

对于满足以下条件的任意样本数 m

$$m \ge cv(\log(2v))^3.$$

此外，弱正交匹配追踪（*WOMP*）以构造性方式达到了这一界限。

设 Q 是 $\mathbb{Z}^d$ 的一个有限子集。我们将子空间 $\Psi(Q)$ 定义为

$$\Psi(Q) := \left\{ \sum_{\mathbf{k}\in Q} a_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} : \quad a_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C} \right\}.$$

定理 6.4 的证明基于以下稀疏逼近结果。

定理 6.6（[42]）。设 $1 < p < \infty$、 $a > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$。假设对所有 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $\|\psi_{\mathbf{k}}\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le 1$。那么存在常数 $c = c(a, \beta, d, p)$ 和 $C = C(a, b, \beta, d, p)$，使得对于任意 $v \in \mathbb{N}$，存在一个子集$Q \subset \mathbb{Z}^d$，满足 $|Q| \le v^c$ 且与测度 μ 无关；并且存在一种基于贪心算法的构造性方法$A_{v,\mu}$，能够从 $\Psi(Q)$ 中给出一个 v 项近似项，使得对于任意 $f \in W^{a,b}_{A,\beta}(\Psi)$，

$$\|f - A_{v,\mu}(f)\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le C v^{-a+1/q-1/\beta} (\log(2v))^{(d-1)(a+b)},$$

其中 $q := \max(p,2)$。

下面的引理 6.2 是定理 6.6 的推论。

引理 6.2 ([42])。 假设 $\Psi = \{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ 是定义在Ω 上的一致有界函数系，使得

$$|\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})| \le 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \tag{6.27}$$

令 $1 < p < \infty$、 $a > 0$、 $b \in \mathbb{R}$ 和 $v \in \mathbb{N}$。存在两个常数 $c^* = c(a、\ \beta、\ d、\ p)$、 $C = C(a、\ b、\ \beta、\ d、\ p)$，以及一个基数为 $|Q| \le v^{c^*}$ 的有限集 $Q \subset \mathbb{Z}^d$，使得对于任意概率测度 μ 和任意有限样本集 $\xi \subset \Omega$，都存在一种构造性方法 $A_{v,\ \xi}$，该方法基于贪心算法，从子空间 $\Psi(Q)$ 中提供一个 v 项近似项，并满足以下界：对于 $f \in \mathbf{W}^{a,b}_{A,\beta}(\Psi)$，

$$\|f - A_{v,\xi}(f)\|_{L_p(\Omega,\mu_\xi)} \le C v^{-a+1/q-1/\beta} (\log(2v))^{(d-1)(a+b)},$$

其中 $q := \max(p,\ 2)$，且 μ_ξ 是在(2.5)中定义的测度。

下面的定理 6.7 是定理 6.4 的一个变体，额外假设满足 Nikol'skii 不等式。

定理 6.7（[42]）。设 Ψ 是一致有界的里斯系统（位于空间 $L_2(\Omega,\mu)$ 中），满足 (2.6) 和 (2.7)，其中常数为 $0<R_1\le R_2<\infty$。设 $2\le p<\infty$ 和 $a>0$。对于任意 $v\in\mathbb{N}$，记 $u:=\lceil(1+c_*)v\rceil$，其中 c_* 来自定理 5.3。此外，假设 $\Psi\in NI(2,p,H,u)$，其中 $p\in[2,\infty)$。存在常数 $c'=c'(a,b,\beta,p,R_1,R_2,d)$ 和 $C'=C'(a,b,\beta,p,d)$，使得

$$\varrho_m^o(\mathbf{W}_{A_\beta}^{a,b}(\Psi),L_p(\Omega,\mu))\le C'Hv^{1/2-1/\beta-a}(\log(2v))^{(d-1)(a+b)}. \tag{6.28}$$

对于满足以下条件的 m

$$m\ge c'v(\log(2v))^4.$$

此外，这个界可由弱正交匹配追踪给出。

注意，定理 6.7 蕴含定理 6.4（见 [42]）。下面的定理 6.8 借助弱正交匹配追踪算法以外的方法，在关于 Ψ 的较弱条件下给出了界 (6.28)。

定理 6.8 ([42])。设 $2\le p<\infty$，并给定自然数 m、v。设 Ψ 是满足 (2.6) 和 (2.8) 的一致有界贝塞尔系统，且满足 $\Psi\in NI(2,p,H,2v)$。存在常数 $c=c(a,b,\beta,p,K,d)$ 和 $C=C(a,b,\beta,p,d)$，使得

$$\varrho_m^o(\mathbf{W}_{A_\beta}^{a,b}(\Psi),L_p(\Omega,\mu))\le CHv^{1/2-1/\beta-a}(\log(2v))^{(d-1)(a+b)} \tag{6.29}$$

对于满足以下条件的 m

$$m\ge cv(\log(2v))^4.$$

与上述定理 6.3 后关于特殊情形 $\Psi=\mathcal{T}^d$ 的讨论类似，我们可以将限制 $m\ge cv(\log(2v))^4$ 改进为 $m\ge cv(\log(2v))^3$。由此得到定理 6.5。

6.4 一般类上的恢复 $\mathbf{A}_\beta^{r\,b}$，（Ψ，$\mathcal{G}$）

在本小节中，我们讨论 [41] 关于一般类 $\mathbf{A}_\beta^{r\,b},(\Psi,\mathcal{G})$ 上采样恢复的最新结果。请注意，这些类中的一个特例，即类 $\mathbf{A}_\beta^r(\Psi,\mathcal{G})$，已在第1.2小节中定义。以下类的集合族由 [59] 引入。给定一个系统 $\Psi=(\psi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$，考虑子集序列 $\mathcal{G}:=\{G_j\}_{j=1}^\infty$, $G_j\subset\mathbb{Z}^d$，使得

$$G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_j\subset G_{j+1}\subset\cdots,\quad \bigcup_{j=1}^\infty G_j=\mathbb{Z}^d,\quad G_0:=\emptyset, \tag{6.30}$$

以及可表示为绝对收敛级数形式的函数

$$f = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}}(f)\psi_{\mathbf{k}}, \qquad \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{k}}(f)| < \infty. \tag{6.31}$$

对于 $\beta \in (0,1]$, $r>0$ 和 $b\in\mathbb{R}$，定义类 $\mathbf{A}_\beta^{r\,b}(\Psi,\mathcal{G})$，其函数$f$ 具有满足以下条件的表示式（6.31）

$$\Big(\sum_{\mathbf{k}\in G_j\setminus G_{j-1}} |a_{\mathbf{k}}(f)|^\beta\Big)^{1/\beta} \le 2^{-rj}j^b, \quad j=1,2,\dots. \tag{6.32}$$

本节前文已讨论过这些类的两个特殊情形。在 [58] 和 [59], 中，研究了类 $\mathbf{A}_\beta^r(\Psi) := \mathbf{A}_\beta^{r\,0}(\Psi,\mathcal{G}^c)$ 上 $\varrho_m^o(\mathbf{F}\ L_p)$ 的行为，其中 $\mathcal{G}^c$ 为二进立方体，

$$G_j^c := \{\mathbf{k}:\ \|\mathbf{k}\|_\infty < 2^j\}, \quad j\in\mathbb{N}.$$

第二个特殊情形是类 $\mathbf{W}_{A_\beta}^{a\,b}(\Psi) := \mathbf{A}_\beta^{a\,b}(\Psi,\mathcal{G}^h)$，其中$\mathcal{G}^h$ 为二进双曲十字；相关研究见 [42]。在该情形下，对于$\mathbf{s}=(s_1,\dots,s_d)\in\mathbb{N}^d$，双曲十字集合 $\mathcal{G}^h$ 定义如下

$$\rho(\mathbf{s}) := \big\{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d : [2^{s_j-1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j=1,\dots,d\big\}, \quad G_j^h := \bigcup_{\|\mathbf{s}\|_1\le j} \rho(\mathbf{s}).$$

类 $\mathbf{A}_\beta^r(\Psi)$ 与二进立方体序列 $\mathcal{G}^c := \{G_j^c\}_{j=1}^\infty$ 有关（下标 c 表示立方体），对应于经典的 Sobolev-Nikol'skii-Besov 类（关于这些类上的逼近，例如参见 [55], 第 3 章）。类 $\mathbf{W}_{A_\beta}^{a\,b}(\Psi)$ 与二进双曲十字序列 $\mathcal{G}^h := \{G_j^h\}_{j=1}^\infty$ 有关（下标 h 表示双曲），对应于具有混合光滑性的经典类（关于这些类上的逼近，例如参见[55], 第 4–7 章）。

众所周知，研究 Sobolev-Nikol'skii-Besov类和具有混合光滑性的类需要采用不同的技术。令人惊讶的是，论文 [59] 和 [42] 表明，在研究 $\mathbf{A}_\beta^r(\Psi)$ 和 $\mathbf{W}_{A_\beta}^{a\,b}(\Psi)$ 类时，我们可以采用相同的技术。这促使我们在一般情形下研究相应的$\mathbf{A}_\beta^{r\,b}(\Psi,\mathcal{G})$ 类。结果表明， [59] 和 [42] 中提出的技术使我们能够在对指标集序列 $\mathcal{G}$施加一个较弱限制的情况下处理$\mathbf{A}_\beta^{r\,b}(\Psi,\mathcal{G})$ 类。这个较弱的限制就是关于系统 $\mathcal{G}$的以下条件。

正则性条件 RC(θ,θ')。如果存在正数 $\theta > \theta' > 0$，使得对任意 $j \in \mathbb{N}$，都有下式成立，则称系统 $\mathcal{G}$ 满足正则性条件 $\mathbf{RC}(\theta,\theta')$。

$$2^{\theta'} \le \frac{|G_{j+1}|}{|G_j|} \le 2^{\theta}, \quad j \in \mathbb{N}, \qquad |G_0| = 1. \tag{6.33}$$

该条件意味着，指标集 $\{G_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的基数呈指数增长，其增长速率可能有所变化，但上下界均有限。

对于给定的 $v \in \mathbb{N}$，通过以下不等式定义 $n := n(v) \in \mathbb{N}$。

$$|G_{n-1}| < v \le |G_n|. \tag{6.34}$$

那么，在满足上述基数增长正则性条件的情况下，[41] 中证明了以下结果。（关于一个稍微一般化的条件，在该条件下这些结果仍然成立，请参见 [41]。）

第一个结果给出了类 $\mathbf{A}_\beta^{r,b}(\Psi,\mathcal{G})$ 的非线性 v 项逼近速率。

定理 6.9。设 $1 < p < \infty$, $p^* := \min\{p,2\}$, $r > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0,1]$. 假设

1) $\|\psi_{\mathbf{k}}\|_{L_p(\Omega,\mu)} \le B$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$，其中 Ω 上的某个概率测度为 μ，

2）系统 $\mathcal{G}$ 满足条件 $\boldsymbol{RC}(\theta,\theta')$。

那么存在两个常数 $c = c(r,b,\beta,p,\theta,\theta')$ 和 $C = C(r,b,\beta,p,\theta,B)$，使得对于任意 $v \in \mathbb{N}$，存在一个 $J \in \mathbb{N}$, $|G_J| \le v^c$，满足以下性质

$$\sigma_v(\mathbf{A}_\beta^{r,b}(\Psi,\mathcal{G}),\Psi_J)_{L_p(\Omega,\mu)} \le C v^{1/p^*-1/\beta} 2^{-rn(v)} n(v)^b, \quad \Psi_J := \{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in G_J}.$$

此外，这一界由一个简单的贪心算法给出。

第二个结果给出了这些类的最优采样恢复速率。

定理 6.10。设 $2 \le p < \infty$，且给定自然数 m, v .

1）设 Ψ 是满足（*2*的一个一致有界贝塞尔系统 .*6*）和（*2* .*8*）

。*2*）此外，假设系统 $\mathcal{G}$ 满足条件 $\boldsymbol{RC}(\theta,\theta')$。那么存在常数 $c = c(r,\beta,p,K,\theta,\theta')$ 和 $C = C(r,\beta,p,\theta,\theta')$，使得我们有如下界

$$\varrho_m^o(\mathbf{A}_\beta^{r,b}(\Psi,\mathcal{G}),L_p(\Omega,\mu)) \le C v^{1-1/p-1/\beta} 2^{-rn(v)} n(v)^b \tag{6.35}$$

对于满足 m 的任意对象

$$m \ge cv(\log(2v))^4.$$

注意，在对 Ψ 施加更强的限制时，即要求 Ψ 是满足（2.6）和（2.7）的一致有界的里斯系统，我们可以将 m 的界略微改进为 $m \geq cv(\log(2v))^3$，并保证估计式（6.35）由贪心型算法给出。

如果 $\theta = \theta' = d$，则

$$n(v) = \left\lfloor \frac{\log v}{d} \right\rfloor, \quad 2^{-rn(v)} \asymp v^{-r/d}$$

定理 6.9 中的估计变为

$$\sigma_v(\mathbf{A}_\beta^{r,b}(\Psi, \mathcal{G}), \Psi_J)_{L_p(\Omega,\mu)} \leq C v^{1/p^* - 1/\beta - r/d} \ln^b v, \qquad \Psi_J := \{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in G_J}.$$

7 具有光滑性条件的类上的恢复

我们首先给出类 $\mathbf{W}_q^r$ 的定义，并对单变量情形作非常简短的评论。在单变量情形中，对于 $r > 0$，令

$$F_r(x) := 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kx - r\pi/2) \tag{7.1}$$

在多变量情形中，对于 $\mathbf{x} =$（x_1，.....，x_d），令

$$F_r(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{d} F_r(x_j).$$

记

$$\mathbf{W}_q^r := \{f : f = \varphi * F_r, \quad \|\varphi\|_q \leq 1\},$$

其中

$$(\varphi * F_r)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) F_r(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

类 $\mathbf{W}_q^r$ 是具有主导混合导数的经典函数类（混合光滑性 Sobolev 型函数类）。读者可在著作 [55] 和 [14] 中找到有关这些类的逼近性质的结果。

设 I_n 与 R_n 为第 1 节开头所定义的恢复算子，且 W_q^r 表示单变量情形中的$\mathbf{W}_q^r$。

定理 7.1 ([47])。设 $1 \le q$， $p \le \infty$ 与 $r > 1/q$。则

$$\varrho_{4m}(W_q^r, L_p) \asymp \sup_{f \in W_q^r} \|f - R_m(f)\|_p \asymp m^{-r+(1/q-1/p)_+}.$$

在 $1 < p < \infty$ 的情况下，上述估计对算子 I_m 也成立，而非算子 R_m。

7.1 非线性恢复

[20] 的作者（见 v3 中的推论 4.16）证明了以下关于 $1 < q < 2$、 $r > 1/q$ 和 $m \ge c\,(r, d, q)\ v(\log(2v))^3$ 的界：

$$\varrho_m^o(\mathbf{W}_q^r, L_2(\mathbb{T}^d)) \le C(r, d, q) v^{-r+1/q-1/2} (\log v)^{(d-1)(r+1-2/q)+1/2}. \tag{7.2}$$

[8] 的作者证明了以下界

$$\varrho_m^o(\mathbf{W}_q^r, L_2(\mathbb{T}^d)) \le C'(r, d, q) v^{-r+1/q-1/2} (\log v)^{(d-1)(r+1-2/q)} \tag{7.3}$$

条件是

$$m \ge c'(r, d, q) v (\log(2v))^3. \tag{7.4}$$

上述结果研究了 L_2 范数下的采样恢复。证明界 (7.2) 和 (7.3) 所用的技术，很大程度上依赖于我们在 L_2 范数下进行逼近这一事实。 [25] 中证明了以下界。

定理 7.2 ([25])。 设 $1 < q \le 2 \le p < \infty$。存在两个常数$c = c(r, d, p, q)$ 和 $C = C(r, d, p, q)$， 使得对于 $r > 1/q$,

$$\varrho_m^o(\mathbf{W}_q^r, L_p(\mathbb{T}^d)) \le C v^{-r+1/q-1/p} (\log v)^{(d-1)(r+1-2/q)} \tag{7.5}$$

对于任意 $v \in \mathbb{N}$ 以及满足以下条件的任意 m

$$m \ge c v (\log(2v))^3.$$

首先，我们讨论上述结果，然后说明如何根据第 6 节的结果推导出定理 7.2。

定理 7.2 将关于 $p = 2$的现有界推广到了更广的范围$p \in [2, \infty)$。下面我们对界 (7.2) 和 (7.3) 作几点评论。首先，这两个界是通过不同的方法证明的。界 (7.2) 的证明

利用了压缩感知理论中的有力结果，见 [20] ；而界 (7.3) 基于 L_2 范数的通用离散化，其证明以一种贪心型算法——弱正交匹配追踪（WOMP）为核心。其次，WOMP 产生的近似项相对于三角系统是稀疏的，而 (7.2) 中的方法并不保证这种稀疏性。第三， [20]中的算法需要关于函数类的特定信息（此处为 $\mathbf{W}_q^r$），因此必须针对每个特定的类设计相应算法。与此相反，WOMP 无需预先了解函数类即可达到界 (7.3)，因此它适用于类的集合族 $\mathbf{W}_q^r$。最后，界 (7.3) 比界 (7.2) 略紧。

论文 [9] 致力于将 [8], 的结果推广到 L_p 空间的情形，其中研究的是范数 L_2 下的恢复，并且满足 $p \in [2, \infty)$。这里没有采用对 L_2 范数的通用离散化，而是采用了对L_p 范数的通用离散化。弱正交匹配追踪被推广为适用于巴拿赫空间的算法——弱切比雪夫贪心算法（WCGA）。此外，除了 WCGA，还定义并研究了一种基于 ℓ_p最小化的恢复算法（见上文 $B_v(\cdot, \mathcal{D}_N, L_p(\xi))$）。然而，将 [9] 的结果用于在范数 L_p 下对类 $\mathbf{W}_q^r$ 进行采样恢复，且满足 $p \in (2, \infty)$，所得界限不如定理 7.2 中的界限。这与使用对 L_p 范数的通用离散化有关。

[25] 的作者采用了恢复算法 $B_v(\cdot, \mathcal{D}_N, L_2(\xi))$、对 L_2 范数的通用离散化，以及 u项 Nikol'skii不等式。一方面，定理 7.2 的证明沿用了 [8]中相应证明的思路。另一方面，在定理 7.2 的证明中，他们采用了 u项 Nikol'skii不等式这一新概念、关于 $p \in [2, \infty)$ 的 L_p 范数下稀疏逼近的深刻结果，以及一种不同的恢复算法。

记为

$$\mathbf{W}_A^{a,b} := \mathbf{W}_{A_1}^{a,b}(\mathcal{T}^d).$$

现在，我们给出定理 6.5 的一些直接推论，其中 $\beta = 1$ 针对其他一些类，这些类比类 $\mathbf{W}_A^{a\,b}$. 更为人熟知。以下这些类由 [52] 引入并研究（另见 [55],第 364 页）

$$\mathbf{W}_q^{a,b} := \{f : \|f_j\|_q \le 2^{-aj}(\bar{j})^{(d-1)b}, \quad \bar{j} := \max(j, 1), \quad j \in \mathbb{N}_0\}.$$

已知结果（参见 [45], 第 1 章定理 2.2 和 [55], 定理 9.1.10,

第 454 页）表明，对于 $1 < q \le 2$

$$\|f_j\|_A \le C(d,q)2^{j/q} j^{(d-1)(1-1/q)} \|f_j\|_q. \tag{7.6}$$

不等式 (7.6) 表明，对于 $1 < q \le 2$ 类 $\mathbf{W}_q^{a\,b}$, 嵌入于 $\mathbf{W}_A^{a'\,b'}$, 其中 $a' = a - 1/q$、 $b' = b + 1 - 1/q$。因此，定理 6.5 给出了类 $\mathbf{W}_q^{a\,b}$ 的如下界。

定理 7.3 ([25])。 设 $1 < q \le 2 \le p < \infty$。存在两个常数$c = c(a、\ d、\ p、\ q)$ 和 $C = C(a、\ b、\ d、\ p、\ q)$，使得对于 $a > 1/q$，有如下界

$$\varrho_m^o(\mathbf{W}_q^{a,b}, L_p(\mathbb{T}^d)) \le C v^{-a+1/q-1/p} (\log v)^{(d-1)(a+b+1-2/q)} \tag{7.7}$$

对于任意 $v \in \mathbb{N}$ 以及满足下式的任意 m

$$m \ge cv(\log(2v))^3.$$

最后，考虑上文已经定义的经典类$\mathbf{W}_q^r$。众所周知（例如参见 [45], 第 2 章、定理 2.1 以及 [55], 定理 4.4.9，第 174 页），对于 $f \in \mathbf{W}_q^r$、 $1 < q < \infty$，有

$$\|f_j\|_q \le C(d,q,r)2^{-jr}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{7.8}$$

特别地，界（7.8）表明，类 $\mathbf{W}_q^r$ 嵌入类$\mathbf{W}_q^{r\,0}$, 其中 $1 < q < \infty$。因此，定理 7.3 推出定理 7.2。

一些下界。 类 $\mathbf{W}_q^r$ 是具有混合导数占优 的函数的经典类（混合光滑性 Sobolev 型函数类）。读者可以在著作 [55] 和 [14]中找到关于这些类的逼近性质的结果。

现在我们转而定义类 $\mathbf{H}_p^r$，其定义基于混合差分。本小节讨论这些类的相关结果。

定义 7.1。 设$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$ 和 $\Delta_{\mathbf{t}}^l f(\mathbf{x})$ 是步长为 t_j 、关于变量 x_j 的混合 l 阶差分，即

$$\Delta_{\mathbf{t}}^l f(\mathbf{x}) := \Delta_{t_d,d}^l \dots \Delta_{t_1,1}^l f(x_1, \dots, x_d).$$

设 e 是 $[1,d]$中的一个自然数子集。我们记

$$\Delta_{\mathbf{t}}^l(e) := \prod_{j \in e} \Delta_{t_j,j}^l, \qquad \Delta_{\mathbf{t}}^l(\varnothing) := Id - \textit{identity operator}.$$

我们将类 $\mathbf{H}^r_{q,l}B$, $l > r$ 定义为满足以下条件的 $f \in L_q$ 的集合：对任意 e

$$\left\|\Delta^l_{\mathbf{t}}(e)f(\mathbf{x})\right\|_q \le B\prod_{j\in e}|t_j|^r. \tag{7.9}$$

在 $B = 1$ 的情形下，我们省略它。众所周知（例如参见 *[55],* 第*137*页），具有不同 $l > r$ 的类 $\mathbf{H}^r_{q,l}$ 是等价的。因此，为方便起见，我们固定一个 $l = [r] + 1$，并在记号中省略 l。

众所周知，在单变量情形（$d = 1$）下，上述 $\mathbf{W}^r_q$ 类和 $\mathbf{H}^r_q$ 类的逼近性质相似。同样众所周知，在多变量情形（$d \ge 2$）下，渐近特征（例如柯尔莫哥洛夫宽度、熵数、最佳双曲交叉三角逼近等）在大多数情况下具有不同的衰减速率。最近，引入并研究了一种新的类尺度（参见上文定义的类 $\mathbf{W}^{a\,b}_q$,和 $\mathbf{W}^{a\,b}_{A_\beta},(\Psi)$）。事实证明，这一尺度便于同时分析 $\mathbf{W}^r_q$ 类和 $\mathbf{H}^r_q$ 类的最优采样恢复。这里我们讨论 $\Psi = \mathcal{T}^d$的情形，并提醒注意 $\mathbf{W}^{a\,b}_A,:= \mathbf{W}^{a\,b}_{A_1},(\mathcal{T}^d)$。以下嵌入结果可由已知结果轻易推出（参见 [19]）。

命题7.1。我们有 $r > 1/q$

$$\mathbf{W}^r_q \hookrightarrow \mathbf{W}^{a,b}_A \quad with \quad a = r - 1/q,\, b = 1 - 1/q, \quad 1 < q \le 2; \tag{7.10}$$

$$\mathbf{H}^r_q \hookrightarrow \mathbf{W}^{a,b}_A \quad with \quad a = r - 1/q,\, b = 1, \quad 1 \le q \le 2. \tag{7.11}$$

在 [25]定理 7.2 是由嵌入 (7.10) 以及以下关于 $\mathbf{W}^{a\,b}_A$, 类的结果推导得出的（见 [25], 定理 3.3、注 3.1 和命题 3.1）。

定理 7.4 ([25])。 令 $p \in [2,\infty)$。存在两个常数 $c(a,p,d)$ 和$C(a,b,p,d)$，使得我们有如下界

$$\varrho^o_m(\mathbf{W}^{a,b}_A, L_p(\mathbb{T}^d)) \le C(a,b,p,d)v^{-a-1/p}(\log(2v))^{(d-1)(a+b)} \tag{7.12}$$

对于任意 $v \in \mathbb{N}$ 以及满足条件的任意 m

$$m \ge c(a,d,p)v(\log(2v))^3.$$

定理 7.4 和嵌入 (7.11) 推出以下针对 $\mathbf{H}_q^r$ 类的、与界 (7.5) 类似的结果。存在两个常数 $c = c(r, d, p, q)$ 和 $C = C(r, d, p, q)$，使得我们对 $r > 1/q$ 有如下界

$$\varrho_m^o(\mathbf{H}_q^r, L_p(\mathbb{T}^d)) \le Cv^{-r+1/q-1/p}(\log(2v))^{(d-1)(r+1-1/q)} \tag{7.13}$$

对于任意 $v \in \mathbb{N}$ 以及满足以下条件的任意 m

$$m \ge cv(\log(2v))^3.$$

然而，我们指出，界 (7.13) 弱于线性恢复的相应已知界（参见 [25] 中的讨论部分）。

以下关于 $\mathbf{H}_q^r$ 类的下界是 [25] 的主要结果。

定理 7.5。对于 $1 \le q \le p < \infty$、$p > 1$、$r > 1/q$，有

$$\varrho_m^o(\mathbf{H}_q^r, L_p) \ge c(d)m^{-r+1/q-1/p}(\log m)^{(d-1)/p}.$$

请注意，定理 7.5 的一个新颖且非平凡的特征是对数因子 $(\log m)^{(d-1)/p}$，这表明需要某种关于 m 的对数因子。

在 [25] 中，以下下界是根据数值积分领域已知的研究结果推导出来的。

命题 7.2. 对于 $r > 0$

$$\varrho_m^o(\mathbf{H}_\infty^r, L_1) \gg m^{-r}(\log m)^{d-1}.$$

7.2 线性恢复

我们先简要评论经典的 Smolyak 恢复算子。关于这些算子及相关算子的详细讨论，请参阅 [46], [55], 和 [14]。令 $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ 为 (1.1) 中定义的采样恢复算子序列。对于每个 $i = 1,\dots, d$，令 R_n^i 表示专门作用于变量 x_i 的算子 R_n。我们将单变量差分算子定义为

$$\Delta_s^i := R_{2^s}^i - R_{2^{s-1}}^i, \quad s \in \mathbb{N}_0, \qquad R_{1/2} = 0,$$

对于多重指标 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}_0^d$，我们定义多变量算子

$$\Delta_{\mathbf{s}} := \prod_{i=1}^d \Delta_{s_i}^i.$$

相应的 Smolyak 算子定义为

$$T_n := \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{N}_0^d:\ \|\mathbf{s}\|_1\le n} \Delta_{\mathbf{s}}.$$

算子 T_n 使用 m 个函数值，其中样本数满足

$$m \ll \sum_{k=1}^{n} 2^k k^{d-1} \ll 2^n n^{d-1}.$$

1960 年，S. Smolyak 建立了一致范数下的以下误差界：

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_\infty^r} \|f - T_n f\|_\infty \ll 2^{-rn} n^{d-1}, \quad r > 0.$$

随后，这一结果被推广到 [44] 中的 L_p 范数，其中 $p < \infty$ ：

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_p^r} \|f - T_n f\|_p \ll 2^{-rn} n^{d-1}, \quad r > 1/p.$$

进一步的发展包括 [47] 中的以下结果：

$$\varrho_m(\mathbf{W}_2^r)_\infty \asymp m^{-r+1/2}(\log m)^{r(d-1)}, \quad r > 1/2.$$

在这种情况下，通过恰当选择 n，Smolyak 算子T_n可达到最优恢复的阶。此外，对于 $q \in (1, \infty)$ 和 $r > \frac{1}{q}$，有 ([47])

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_q^r} \|f - T_n(f)\|_\infty \asymp 2^{-(r-1/q)n} n^{(d-1)(1-1/q)}.$$

在前面的小节中，讨论重点是研究非线性特征 $\varrho_m^o(W, L_p)$。然而，已有的最优采样恢复结果大多涉及线性恢复方法。下面简要介绍这一领域的最新进展，并推荐读者参阅著作 [14], [55] 和综述论文 [21] ，以全面了解此前在这一方向上的研究成果。

对于再生核希尔伯特空间中的特殊集合$\mathbf{F}$ ，已证明以下不等式（参见 [15], [34], [26], 和 [27]）：

$$\varrho_{cn}(\mathbf{F}, L_2) \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k\ge n} d_k(\mathbf{F}, L_2)^2\right)^{1/2}, \tag{7.14}$$

其中， $c > 0$ 是一个绝对常数。这里， d_k(**F** L_2)表示**F** 在空间 L_2中的柯尔莫哥洛夫 k-宽度。

关于柯尔莫哥洛夫宽度 $d_k(\mathbf{W}_p^r, L_2)$ 的已有结果（例如参见 [55], p.216）表明，对于 $1 < q \leq 2$ with $r > 1/q - 1/2$ and 和 for$2 < q < \infty$ with $r > 0$，以下渐近关系成立：

$$d_k(\mathbf{W}_q^r, L_2) \asymp \left(\frac{(\log k)^{d-1})}{k}\right)^{r-(1/q-1/2)_+}, \tag{7.15}$$

其中 $(a)_+ := \max(a,0)$。结合 (7.14)，可得 $1 < q \leq \infty$ and $r > \max(1/q, 1/2)$ 的以下上界：

$$\varrho_m(\mathbf{W}_q^r, L_2) \ll \left(\frac{(\log m)^{d-1})}{m}\right)^{r-(1/q-1/2)_+}.$$

这些上界解决了序列$\rho_m(\mathbf{W}_q^r, L_2)$ 衰减阶正确性的问题，适用于 $1 < q < \infty$ and $r > \max(1/q, 1/2)$ 的情形，因为显然 $\varrho_m(\mathbf{W}_q^r, L_2) \geq d_m(\mathbf{W}_q^r, L_2)$。 [20] 中指出，对于$q < 2$ and 充分大的 d，上界 (7.2) 和由 (7.15) 得到的已知下界意味着

$$\varrho_m^o(\mathbf{W}_q^r, L_2) = o(\varrho_m(\mathbf{W}_q^r, L_2)).$$

这表明，在这些情况下，非线性方法的采样恢复误差率优于线性方法。

对于我们关注的情形 $1 < q < 2 < p < \infty$，ϱ_m（$\mathbf{W}_q^r$， L_p）的正确阶数仍然未知。利用 Smolyak 点集得到的已知结果给出了 $1 < q < p < \infty$ 和 $r > 1/q$ 的以下上界（例如，见 [55], 第 308 页）：

$$\varrho_m(\mathbf{W}_q^r, L_p) \ll \left(\frac{(\log m)^{d-1})}{m}\right)^{r-1/q+1/p} (\log m)^{(d-1)/p}. \tag{7.16}$$

将 (7.16) 与定理 7.2 中得到的界进行比较可见，对于某些参数 d 和 p，非线性恢复方法的误差率优于 (7.16) 给出的线性恢复界。

上述不等式 (7.14) 只有在其右侧的级数收敛时才能使用。对于相应级数发散的情况，以下在 [56] 中建立的不等式则成为特别有用的替代方案（另见上文定理 4.4）

：存在两个正绝对常数 b和 B，使得对于 $\mathcal{C}(\Omega)$ 的任意紧子集 W，都有

$$\varrho_{bn}(W, L_2) \leq B d_n(W, L_\infty).$$

该不等式结合 [60]，中得到的 Kolmogorov 宽度上界，可得采样恢复的以下界（见 [60]）：对于 $2 < q \leq \infty$ 和 $1/q < r < 1/2$,

$$\varrho_m(\mathbf{W}_q^r, L_2) \ll m^{-r} (\log m)^{(d-2)(1-r)+1}. \tag{7.17}$$

8 总结

采样恢复是一个正在蓬勃发展的研究领域，其根源在于函数插值这一经典问题。传统上，该研究领域属于逼近理论和调和分析。该领域的最新进展表明，它与其他研究领域有着密切联系。本文综述表明，采样恢复的重要进展得益于近期离散化和巴拿赫空间中稀疏逼近方面的重大突破性成果。反过来，离散化结果也运用了论文 [1] 和 [33] 中获得的有限维几何基本成果。稀疏逼近是压缩感知和贪婪逼近的核心主题（参见著作 [16], [49], 和 [55]）。

本综述是对现有关于离散化和采样恢复的综述 [4], [21], [31], and [6] 的补充。这一领域正蓬勃发展，我们无法详细讨论该主题的所有最新成果。我们尝试系统地介绍与本研究团队所得成果直接相关的新结果。本综述未收录尚未解决的问题。关于这方面的若干未解问题，请参阅综述 [4], [21], [31], 。近期，采样恢复领域取得了重要进展（参见第 1 节末尾提到的步骤 1–4），本文对此进行了详细讨论。采样恢复领域的近期进展揭示了其发展方向——从特殊问题逐步走向越来越一般的设定和问题。例如，这包括从单变量光滑性类发展到多变量光滑性类，再到具有结构条件的多变量类。

参考文献

[1] J. Batson、D.A. Spielman 和 N. Srivastava, Twice-Ramanujan 稀疏化器，《*SIAM* 计算杂志》，41(2012)，1704–1721。[2] J. Bourgain，限制等距问题中的一个改进估计，载于《泛函分析的几何方面》，《数学讲义》，第 2116 卷，Springer，(2014)，65–70。[3]F. Dai、A. Prymak、A. Shadrin、S. Tikhonov 和 V. Temlyakov，熵数与 Marcinkiewicz 型离散化定理，《函数分析杂志》，**281** (2021)，109090。[4] F. Dai、A. Prymak、V.N. Temlyakov 和 S.U. Tikhonov，积分范数离散化及相关问题，《数学科学进展》，**74**(2019)，第 4 期（448），3–58；译文见《俄罗斯数学调查》，**74** (2019)，第 4 期，579–630。[5] F. Dai 和 V.N. Temlyakov，通用采样离散化，《构造逼近》，**59** (2024)，173–207。[6] F. Dai、E. Kosov 和 V. Temlyakov，采样离散化及相关主题综述，已投稿（2023）。[7] F. Dai 和 V.N. Temlyakov，通用离散化与稀疏恢复，《逼近理论杂志》，**311**(2025)，论文编号 106199。*arXiv:2301.05962*(2023)。[8] F. Dai 和 V.N. Temlyakov，随机点有利于通用离散化，《数学分析及其应用杂志》，**529** (2024)，127570。[9]F. Dai 和 V.N. Temlyakov，稀疏采样恢复中的 Lebesgue 型不等式，*Sirius* 数学杂志，即将刊出。*arXiv:2307.04161* (2023)。[10] F. Dai 和 V. Temlyakov，积分范数的采样离散化及其应用，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，**319**(2022)，1–13。[11] R.A. DeVore 和 V.N. Temlyakov，关于贪心算法的一些评论，《计算数学进展》，**5** (1996)，173–187。

[12]S. Dilworth, G. Garrig´os, E. Hern´andez, D. Kutzarova 和 V. Temlyakov，贪婪逼近中的 Lebesgue 型不等式，《函数分析杂志》，**280** (2021), 108885.[13] D. D˜ung，关于多变量周期函数的恢复与单侧逼近，《苏联科学院通报》, **313**(1990), 787–790.[14] D. D˜ung, V.N. Temlyakov 和 T. Ullrich，双曲交叉逼近，巴塞罗那 CRM 数学高级课程, Birkh¨auser，2018.[15] M. Dolbeault, D. Krieg 和 M. Ullrich， L_2中抽样数的尖锐上界，《应用与计算调和分析》, **63**(2023), 113–134.[16] S. Foucart 和 H. Rauhut，压缩感知数学导论，Birkh¨auser，2013.[17] I. Haviv 和 O. Regev，子采样傅里叶矩阵的受限等距性质，载于《泛函分析的几何方面》，《数学讲义》，第 2169 卷，Springer，(2017), 163–179.[18] A. Gasnikov 和 V. Temlyakov，复巴拿赫空间中的贪婪逼近，《俄罗斯数学调查》（《数学科学进展》），**79**No 6 (480) (2024), 39–56.[19] A. Gasnikov 和 V. Temlyakov，混合光滑函数最优采样恢复的一些下界，《数学文集》，**216** (2025), 90–107; arXiv:2412.02797v2 [math.NA] 27 2025年5月.[20] T. Jahn, T. Ullrich 和 F. Voigtlaender，通过 ℓ^1-最小化求光滑类的抽样数，*arXiv:2212.00445*(2023).[21] B.S. Kashin, E. Kosov, I. Limonova 和 V.N. Temlyakov，采样离散化及相关问题，《复杂性杂志》, **71** (2022), 101653.[22] B.S. Kashin, S. Konyagin 和 V.N. Temlyakov，一致范数的采样离散化，《构造逼近》, **57** (2023), no. 2, 663–694.[23] J. Kiefer 和 J. Wolfowitz，两个极值问题的等价性，《加拿大数学杂志》,**12** (1960), 363–366.

[24] E. Kosov 和 V. Temlyakov，抽样离散化误差的界及其在通用采样离散化中的应用，《复杂性杂志》90(2025) 101958; arXiv:2312.05670v2 [math.NA] 272024年1月.[25]E. Kosov 和 V. Temlyakov，混合光滑函数的采样恢复，《算子理论进展》(2025) 10:49. https://doi.org/10.1007/s43036-025-00439-9[26]D. Krieg 和 M. Ullrich，函数值足以实现 L_2-逼近，*Found. Comput. Math.*, **21** (2021), 1141–1151.[27]D. Krieg 和 M. Ullrich，函数值足以实现 L_2-逼近：第二部分，《复杂性杂志》, 66(2021), 101569.[28] D. Krieg, K. Pozharska, M. Ullrich 和 T. Ullrich， L_2 及其他范数下的采样恢复，*arXiv:2305.07539* (2023).[29] D. Krieg, K. Pozharska, M. Ullrich 和 T. Ullrich，一致范数下的采样投影，*arXiv:2401.02220* (2024).[30] I. Limonova 和 V. Temlyakov，关于 L_2中的采样离散化，*J.Math. Anal. Appl.*,**515** (2022), no. 2, 126457.[31] I. Limonova, Yu. Malykhin 和 V. Temlyakov，单侧离散化不等式与采样恢复，《数学科学进展》, **79** (2024), no. 3(477), 149–180.[32] E. Livshitz 和 V. Temlyakov，稀疏逼近与贪心算法恢复，*IEEE Trans. Inform. Theory*, **60** (2014), 3989–4000.[33] A. Marcus, D.A. Spielman 和 N. Srivastava，交错族 II：混合特征多项式与 Kadison-Singer 问题，*Annals of Math.*, **182:1** (2015), 327–350.[34] N. Nagel, M. Sch¨afer 和 T. Ullrich，抽样数的一个新上界，*Found. Comput. Math.*,**22** (2022), 445–468.[35]E. Novak，数值分析中的确定性与随机误差界，施普林格出版社，柏林，1988.

[36] E. Novak 和 H. Wozniakowski，《多元问题的可处理性》第 1 卷：线性信息，EMS 数学专著丛书，第 6 卷，欧洲数学学会，苏黎世，2008 年。[37] E. Novak 和 H. Wozniakowski，《多元问题的可处理性》第 2 卷：泛函的标准信息，EMS 数学专著丛书，第 12 卷，欧洲数学学会，苏黎世，2010 年。[38] E. Novak 和 H. Wozniakowski，《多元问题的可处理性》第 3 卷：算子的标准信息，EMS 数学专著丛书，第 18 卷，欧洲数学学会，苏黎世，2012 年。[39] G. Pisier，关于 B. Maurey 一项未发表结果的评论，《泛函分析研讨会》，巴黎综合理工学院，帕莱索，1980–1981 年。[40] K. Pozharska 和 T. Ullrich，关于一致范数下多元函数采样恢复的一则短文，《SIAM 数值分析杂志》，《60》(2022)，第 3 期，1363–1384。[41] A. Shadrin、V. Temlyakov 和 S. Tikhonov，具有结构条件的函数类上的稀疏逼近与采样恢复，已于 2025年5月23日 投稿至 MIAN 论文集（Nikol’skii 专辑）。[42] A. Solodov 和 V. Temlyakov，具有结构条件的函数类上的采样恢复，《数学札记》，《215》(2024)，第 10 期，3–23；《arXiv:2404.07210》(2024)。[43] S.B. Stechkin，关于正交级数的绝对收敛，《苏联科学院通报》，《102》(1955 年)，37–44。[44] V.N. Temlyakov，多变量周期函数的近似恢复，《数学文集》，《128(170)》(1985)，256–268；英文译本见《苏联数学文集》，《56》(1987)。[45]V.N. Temlyakov，具有有界混合导数的函数的逼近，MIAN 论文集，《178》(1986)，1–112；英文译本见《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，《1》(1989)。[46] V.N. Temlyakov，《周期函数的逼近》，Nova Science Publishers, Inc.，纽约，1993 年。

[47] V.N. Temlyakov，关于具有有界混合导数的函数的近似恢复，《复杂性杂志》，《9》(1993)，41–59。[48] V.N. Temlyakov，巴拿赫空间中的贪心算法，《计算数学进展》，《14》(2001)，277–292。[49] V.N. Temlyakov，《贪婪逼近》，剑桥大学出版社，2011 年。[50] V.N. Temlyakov，巴拿赫空间中的稀疏逼近与贪心算法恢复，《数学论坛·西格玛》，《2》(2014)，e12，共 26 页。[51] V.N. Temlyakov，具有混合光滑性的函数的构造性稀疏三角逼近及其他问题，《数学文集》，《206》(2015)，131–160。[52] V.N. Temlyakov，具有小混合光滑性的函数的构造性稀疏三角逼近，《构造逼近》，《45》(2017)，467–495。[53] V. N. Temlyakov，针对双曲交叉多项式的 Marcinkiewicz 型离散化定理，《哈恩逼近杂志》，《9》(2017)，第 1 期，37–63。[54] V.N. Temlyakov，Marcinkiewicz 型离散化定理，《构造逼近》，《48》(2018)，337–369。[55]V. Temlyakov，《多元逼近》，剑桥大学出版社，2018 年。[56] V.N. Temlyakov，关于 d维实空间中的最优恢复，《复杂性杂志》，《65》(2021)，101545。[57] V. Temlyakov，关于一致范数下的通用采样恢复，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，《323》(2023)，206–216。[58] V. Temlyakov，基于贪心算法的稀疏采样恢复，IMA 数值分析杂志，2025 年；draf054；《arXiv:2312.13163》(2023)。[59] V. Temlyakov，某些函数类在积分范数下的稀疏采样恢复，《数学文集》，《215》(2024)，146–166；《arXiv:2401.14670》(2024)。

[60] V.N. Temlyakov 和 T.Ullrich，具有小混合光滑性的类的 Kolmogorov 宽度界，《复杂性杂志》，67 (2021)，101575。

[61]J.F. Traub、G.W. Wasilkowski 和 H. Wo´zniakowski，《信息型复杂性》，学术出版社，1988。

[62] A. Zygmund，三角级数，剑桥大学出版社，1959。

F. Dai, Department of Mathematical and Statistical Sciences
University of AlbertaEdmonton, Alberta T6G 2N8, Canada
E-mail: fdai@ualberta.ca

V.N. Temlyakov,
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy ofSciences, Moscow, Russia;Lomonosov Moscow State University;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics;
University of South Carolina.E-mail: temlyakovv@gmail.com