arXiv:2601.08802v1 [math.AT] 13 Jan 2026

不稳定合成变形 I：Malcev 理论

WILLIAM BALDERRAMA 和 PIOTR PSTRĄGO WSKI

摘要。本文是系列论文的第一篇，致力于构造和研究不稳定情形下 ∞-范畴的合成变形：也就是说，对能够范畴化谱序列信息或障碍理论信息的 ∞-范畴进行变形。我们的方法基于高阶泛代数的技术，所构造的变形取自 ∞-范畴化的代数理论（即 Lawvere 理论）的模型的 ∞-范畴。

本文为我们的研究奠定基础。我们引入并研究若干类 ∞-范畴理论和无穷代数理论。我们确立了不同类别理论的模型的 ∞-范畴的许多基本性质，例如自由分解、像分解、单子性理论和可呈性的存在性，以及用于识别由此产生的 ∞-范畴的识别定理。

我们在高阶泛代数中给出马尔采夫理论的内在定义。这些理论的特征是满足 Quillen 条件，即所有单纯模型都满足 Kan 条件；我们证明，这等价于一种在实践中易于验证的弱类群条件。我们确立了马尔采夫理论的模型的 ∞-范畴可以刻画为向该理论自由添入几何实现所得的范畴。这引出了马尔采夫理论的模型的 ∞-范畴之间导出函子的概念，并研究了这些导出函子关于连通性和极限的一些性质。

我们工作的核心思想是，马尔采夫理论的模型的 ∞-范畴 $\mathcal{P}$ 可以被视为一种变形，其特殊纤维是其同伦范畴 $h\mathcal{P}$的模型的 ∞-范畴。我们还回顾环理论的概念；环理论是一类马尔采夫理论，其 ∞-范畴的模型还具有一个一般纤维，由环模型的全子范畴给出。我们详细研究了环模型的 ∞-范畴与模型的函子和导出函子之间的相互作用，特别证明了一般纤维上的单子以及一大类余单子都可以典范地提升到整个变形。

在本文最后一部分，我们证明，考虑这些变形余单子在 ∞ 个模型范畴上的余代数，可以恢复文献中研究过的各种稳定变形，例如滤模型或 Postnikov 完备的合成谱。随后，我们通过构造合成空间的 ∞ 范畴和合成 $\mathbf{E}_k$-环，进一步拓展这些结果；正如后续论文将进一步阐述的那样，它们分别将广义不稳定 Adams 谱序列和 Goerss–Hopkins 谱序列范畴化。

目录

1. 引言 2
1.1. 项目概述 1.2. 结果概要 1.3. Malcev 条件简史 1.4. 约定 3 3 10

2. 单纯对象与马尔采夫运算 12
2.1. Kan 纤维化 2.2. 马尔采夫运算 2.3. 与 Kan 条件的相互作用 2.4. 普遍 Kan 对象 12 12 15 19 22

3. 无穷代数理论 3.1. 理论及其模型 25 25

3.2. 理论的构造 3.3. 高阶像分解 3.4. 自由分解的存在性 3.5. 有界理论与可呈性 27 28 29 30

4. Malcev 理论 4.1. Malcev 条件 4.2. Malcev 理论的模型作为余完备化 4.3. 离散理论与动画化 32 32 34 36

5. 识别原理 5.1. 弱投射生成的 ∞-范畴 5.2. 强投射生成的 ∞-范畴 5.3. 加法情形 37 40

6. 导出函子 43

6.1. 基本定义 6.2. 左正合性与右正合性 6.3. 弱左正合性 43 45 45

7. 环理论与环模型 7.1. 什么是环理论？ 7.2. 变体：反环理论 7.3. 函子性与环模型 7.4. 松单性与作用 7.5. 模型和环模型中的（余）代数 48 49 51 54 57 60

8. 理论与单子 8.1. 一般单子性定理 8.2. 马尔采夫理论与单子 64

9. 示例 67 9.1. 连通模 67 9.2. 滤模 69 9.3. 合成 R-代数 72 9.4. 合成谱 73 9.5. 合成空间 77 9.6. 合成$\mathbf{E}_k$-环 80

参考文献 82

1. 引言

稳定同伦论近期诸多进展中的一个关键要素，是发现许多谱序列和障碍理论都可以通过适当的变形 来编码∞-范畴，特别是 ∞合成谱的 -范畴；这些范畴化了稳定 Adams 型谱序列 [GIKR22、Pst23a]。本文是系列论文中的第一篇，旨在发展关于此类变形的综合理论，并将其置于非稳定 背景下。特别地，我们构造了∞-范畴：

(1) 合成空间，将不稳定 Adams 谱序列范畴化 [BCM78，BT00]；(2) 合成$\mathbf{E}_k$-环，将 Goerss–Hopkins 谱序列范畴化 [GH04，GH05]；(3) 还有许多变体，例如等变、动机以及 $K(n)$-局部类似理论、合成$\mathbf{E}_k$-空间、合成 v_n-周期空间、合成 $\mathcal{O}$-代数，等等。

我们将说明如何把这些 ∞-范畴视为变形：存在定义良好的一般纤维 （即被变形的 ∞-范畴）、特殊纤维 （它纯粹是代数性的，并编码相应谱序列的 E_2项，或障碍群

相应障碍理论的障碍群），以及适当的“τ 的余纤维”或“τ-Bockstein”形式体系，用以细化相关的谱序列或障碍理论。特别地，我们证明，在每种情形下，变形本身都可以构造为从特殊纤维出发的 ∞-范畴平方零扩张塔的极限。

我们的方法基于 [Pst23b、Bal25] 的观察：许多变形都可以构造为 ∞-范畴，即某个 ∞-范畴*Malcev* 理论的模型范畴。这是对代数理论（或 Lawvere 理论）这一经典概念的一种性质良好的变体 [Law63、BB04]。我们证明，变形（余）单子也有一种自然的方式，从而大幅拓展了可用这些方法构造的变形范围；此外，变形（余）单子上的（余）代数所成的 ∞-范畴本身也继承了所有相同的结构，因此可以将其视为一种独立的变形。

例如，我们构造的 ∞-范畴 $\mathbf{F}_p$-合成空间，源自对与伴随对应的余单子进行变形：

$$\mathbf{F}_p \otimes \Sigma^\infty_+(-) : \mathcal{S}\mathrm{pc} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{\mathbf{F}_p} : \Omega^\infty.$$

这种构造的优点在于，可以直接根据定义轻易辨认其特殊纤维及其与不稳定 Adams 谱序列的关系。此外，将 $\mathcal{S}$pc 替换为 $\mathcal{S}$p，便可得到$\mathbf{F}_p$-合成谱的 ∞-范畴（的 Postnikov 完备化），从而使稳定变形与不稳定变形直接兼容。

1.1. 项目概要

本系列包含三篇论文，旨在发展不稳定变形理论，内容如下：

(I) 马尔采夫理论 - 本文。本文发展了 ∞-范畴背景下无穷代数理论的一般理论：马尔采夫条件、模型 ∞-范畴的性质与刻画、导出函子和（余）单子。**(II)** 无穷小扩张 - [BPa]。本文发展了马尔采夫理论及其模型的非阿贝尔变形理论。马尔采夫理论的 Postnikov 塔被构造为平方零扩张塔，并且在转到模型 ∞-范畴时保持不变，由此得到马尔采夫理论的 螺旋塔，亦即 Goerss–Hopkins 塔。这提供了一种不稳定的“余纤维 τ”形式体系，其中包括关于对象提升和态射提升的障碍理论。**(III)** 螺旋塔的自然性 - [BPb]。本文在 $(\infty,2)$-范畴意义下确立了马尔采夫理论的螺旋塔的自然性。马尔采夫理论的螺旋塔结构在许多 $(\infty,2)$-范畴构造下封闭，由此得到变形余单子上的余代数的螺旋塔，例如合成空间的情形。

这三篇论文建立了不稳定变形的一般抽象理论。其研究动机源于合成空间等具体例子，但理论的适用范围更广。我们采用直接代数方法，其优势在于能够轻松构造具有指定特殊纤维的新变形，并将一类灵活性极高的谱序列和障碍理论范畴化。

在另一项独立研究中，我们计划聚焦于合成空间这一具体情形，进行更详细的研究。特别是，Bachmann 和 Hopkins 即将开展的关于动机 Wilson 空间猜想的工作，使我们能够将 ∞-范畴中的 $\mathbb{C}$-动机空间与我们的 ∞-范畴中的偶 MU-合成空间联系起来，从而扩展 [GIKR22、Pst23a] 中稳定情形下的比较。

1.2. 结果概要

在本论文中 [Law63], Lawvere 通过一种范畴化方法研究普适代数，这种方法基于如今称为 *Lawvere* 理论的概念。经典 Lawvere 理论是一个普通范畴 $\mathcal{T}$，它具有有限余积，并由单个对象在这些余积下生成。相应的经典模型范畴由预层范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ 构成，其中的对象是保持有限积的集合值预层；也就是说，它们将 $\mathcal{T}$ 中的有限余积映为集合的有限积。这些结构编码

可描述为一个集合及其上满足全称量化关系的各种 n 元运算的代数结构。本研究主要关注 Lawvere 理论的以下自然推广：

定义 1.2.1 (3.1.2)。 一个（多排序、无穷元代数）理论 $\mathcal{P}$ 是一个 ∞-范畴，它具有所有小余积，并且由一个小对象集在小余积和收缩下生成。[1] 理论 ∞的 模型 的 $\mathcal{P}$ -范畴是保持所有小积的预层全子范畴

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$$

保持所有小积的预层。

任何经典 Lawvere 理论 $\mathcal{T}$ 都可以通过附加无穷余积扩展为上述意义下的理论；其对应的 ∞-模型范畴于是等价于 经典模型范畴的动画化 ，其中的经典模型范畴对应于 $\mathcal{T}$ (定理 4.3.3）。无穷元语境更加灵活，因为它允许编码具有无限多个输入的运算的代数结构。这类理论的典型例子是完备模理论，其动机应用包括与 $K(n)$-局部同伦论相关的变形。

介于 Lawvere 理论与 定义 1.2.1之间，对于每个正则基数 κ ，都可以将（多排序） κ元理论 定义为一个由小集合中的对象在 ∞-小余积下生成的 κ-范畴。任何 κ元理论都可以通过添加其余的小余积（定义 1.2.1 ）扩充为例 3.5.9意义下的理论。我们证明，这不会影响相应的 ∞模型范畴（定理 3.5.10），并且通过这种过程得到的理论恰好是那些其 ∞模型范畴可呈现的理论（推论 3.5.11）。因此，定义 1.2.1实质上涵盖了无穷代数理论的所有合理定义。

经典地，离散 Lawvere 理论 $\mathcal{T}$ 的离散模型范畴可等同于其在滤过余极限和自反余等化子下的 1-范畴自由余完备化。其动画化，即 ∞-范畴 $\mathcal{T}$的取值于空间的模型，便是其在滤过余极限和几何实现下的 ∞-范畴自由余完备化 [Lur09，§5.5。8]。另一方面，如果$\mathcal{P}$ 是一般的无穷理论，那么包含 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 未必在几何实现下封闭，因为无限积未必保留几何实现，因此 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 未必是 $\mathcal{P}$的自由几何实现余完备化。

在处理无穷元理论时遇到的这一微妙问题，最早由 Quillen 在其关于代数结构同伦理论的著作中隐约指出 [Qui67]。经典的解决方法是注意到，无限积 确实保持 Kan 复形的几何实现。因此，自然会考虑这样的理论：其单纯模型总是取值于 Kan 复形。这些恰好就是*Malcev* 理论。这里给出最适合我们用途的定义，关于这些概念的历史讨论，请参阅 §1.3 。

定义 1.2.2 (2.2.1)。 设 $\mathcal{C}$ 为一个具有有限积的 ∞-范畴。对象 上的马尔采夫运算 $X \in \mathcal{C}$ 是一个三元运算

$$t\colon X \times X \times X \to X,$$

以及一组选定的两个同伦，用来填充这些三角形

(1.2.3)
$$\begin{array}{ccccc} X \times X & \xrightarrow{X\times\Delta} & X \times X \times X & \xleftarrow{\Delta\times X} & X \times X \\ & {\scriptstyle \pi_1}\searrow & \downarrow{\scriptstyle t} & \swarrow{\scriptstyle \pi_2} & \\ & & X & & \end{array} .$$

例如，任意群 G 都具有马尔采夫运算 $t(g、\ h、\ k) = gh^{-1}k$。由于下述定理，马尔采夫运算在单纯分解理论中占有特殊地位。

[1]在正文中，我们还会考虑预理论，它们不一定由一个小集合的对象生成。为求简洁，引言中我们只讨论理论。

定理 1.2.4 （2.4.2）。设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，且具有有限积。对于对象 $X \in \mathcal{C}$，以下条件等价：

(1) X 在定义 1.2.2 的意义下具有马尔采夫运算定义 1.2.2；(2) X 是处处 *Kan*：对于任意保持有限积的函子

$$F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$$

取值于单纯空间，$F(X)$ 满足 Kan 条件（定义 2.1.9）。

鉴于它在所有 ∞-范畴中的特殊地位，我们很自然地会考虑空间的 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$ 中处处 Kan 的对象。根据上述定理，这些对象恰好是具有马尔采夫运算的空间。这一重要的空间类有如下更内在的定义。

定义 1.2.5 (2.2.9)。我们称空间 $X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 为超简单的，对于所有带基点连通空间 A 和 B 以及任意映射 $A \vee B \to X$，存在一条虚线箭头使图表

$$\begin{array}{ccc} A \vee B & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ A \times B & & \end{array}$$

交换。

下面将这类空间与由 定理 1.2.4刻画的空间联系起来：

定理 1.2.6 (2.2.13)。对于空间 $X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}$，以下条件等价：

(1) X 是普遍 Kan；(2) X 是超简单的；(3) X 的每个路径连通分支都具有 H-空间的结构。

在 A 和 B 均取为 定义 1.2.5中的正维球面时，可以看出，若 X是超简单的，那么 $\pi_*(X, x)$ 在每个基点 $x \in X$处的怀特海德积均消失。因此，超简单空间是怀特海德积消失空间的一个自然子类，而后者本身又是逐分量简单空间的一个自然子类。我们关于 Kan 条件的刻画表明，超简单空间类具有良好的闭包性质，例如在取映射空间时仍封闭，见 命题 2.4.5；怀特海德积消失空间类则不具有这些性质 [LS10，例 6。6]。

回到我们关于理论的讨论，定理 1.2.4 启发了以下定义 .

定义 1.2.7 (4.1.1)。若理论 $\mathcal{P}$ 满足以下等价条件之一，则称其为 *Malcev* 理论：

(1) 每个单纯模型

$$X_\bullet\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

都满足 Kan 条件，即对每个 $P \in \mathcal{P}$，$X_\bullet(P)$ 都满足 Kan 条件。

(2) $\mathcal{P}$ 中的每个对象都具有一个余 Malcev 运算，即在 $\mathcal{P}^{\mathrm{op}}$ 中的一个 Malcev 运算。

理论的模型的自由分解的一般理论（定理 3.4.2），以及满足 Kan 条件的单纯空间的几何实现被无限积保留这一事实（命题 2.1.14），给出了以下关于 Malcev 理论的模型 ∞-范畴的刻画。

定理 1.2.8 (4.2.1, 4.2.3)。设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。那么，∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的模型构成一个完备且余完备的范畴，而 Yoneda 嵌入 $\nu\colon \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$刻画为 $\mathcal{P}$ 在几何实现下的自由余完备化。

这一结果赋予 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 一个泛性质，并印证了我们的直觉： $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$充当了一个 ∞-范畴，其中包含由 $\mathcal{P}$的对象给出的“形式单纯分解”。反过来，也可以将 $\mathcal{P}$ 的自由几何实现余完备化视为更基础的概念；在这种情况下， 定理 1.2.8 便以保积预层的形式，为这一余完备化提供了具体描述。

我们强调，Malcev 条件的用途不仅在于为无穷元设定中的 ∞-模型范畴提供一个泛性质。在我们对不稳定合成变形的整个发展过程中，它都发挥着基础性作用。

该定义的一个特别有用的推论是，在 ∞-Malcev 理论的模型范畴中，几何实现与沿有效满射的拉回交换，参见 推论 4.1.8。由于每个模型都可以写成可表对象的几何实现，这使我们能够将许多论证或构造归约到自由对象的情形。这一极其稳健的技术在我们后续对无穷小扩张的研究中被反复使用 [BPa]。另一个推论是，对于 Malcev 理论，Yoneda 嵌入的像中的对象具有以下有用性质：

定义 1.2.9 (5.2.1)。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，并且其 admits 几何实现。若对象 $P \in \mathcal{C}$ 满足 强投射，则称其为强投射对象：如果对于每个单纯对象 $X_\bullet$ 在 $\mathcal{C}$中，单纯空间 映射$_{\mathcal{C}}(P,\ X_\bullet)$ 是 映射$_{\mathcal{C}}(P,\ |X_\bullet|)$的超覆盖。

据我们所知，Lurie 首次在 [Lur11，定义 4.2 中考察了这一性质。1]请注意，由于超覆盖特别是一个余极限图，强投射对象在 [Lur09，定义 5.5.8 的通常意义下也是投射对象。18]下面的结果用这些术语给出了马尔采夫理论的 ∞-模型范畴的内在刻画。

Th定理 1.2.10 (5.2.7)。设 $\mathcal{D}$ 是一个余完备的 ∞-范畴。那么以下条件等价 :

(1) $\mathcal{D}$ 是强投射生成的：存在一个小集合 $\{P_i\}$，由 $\mathcal{D}$ 中的强投射对象组成，使得映射 map$_{\mathcal{D}}(P_i, -)$ 联合检测等价；(2) 存在一个马尔采夫理论 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$。

在这种情况下，可以取 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ 为强投射对象构成的全子范畴 .

我们还证明了按照 定义 1.2.1 意义下的一般理论的变体，其中投射性的假设需要稍作弱化；对于加性理论，经典投射性与强投射性是等价的，见 定理 5.1.10和 命题 5.3.5。

理论之间态射的一个自然概念是 同态 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$，即保持余积的函子。利用定理 1.2.8，如果 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是 Malcev 理论，那么左 Kan 延拓确定了同态之间的一个等价 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 以及左伴随$f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 之间的 ∞-模型范畴，并保持可表对象。然而，对于许多目的而言，这两个条件都过于严格：许多有用的构造既不保持所有余极限，也不保持自由对象的子范畴。例如，在各种 $\mathbf{E}_k$-模范畴上，自由对称代数或自由 ∞-函子就是这样的例子。这一点，加上模型的泛性质，促成了下面的结果。

定义 1.2.11 (6.1.1). 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是 Malcev 理论。导出函子 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 是以下等价数据之一：

(1) 任意函子 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$；(2) 保几何实现函子 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}$
odel$_{\mathcal{Q}}$。

从这个意义上说，导出函子是经典同调代数中的左导出函子（例 6.1.4）的一种推广。它们总是右正合的，这既是指它们保持几何实现，也是指它们保持态射的连通性（命题 6.2.1）。另一方面，它们很少是左正合的，也就是说，很少保持有限极限，也很少保持态射的截断性。在 §6.3中，我们引入弱左

正合函子的概念：这是一种保持沿有效满射作拉回的导出函子。许多有用的例子都满足这一条件，例如加性理论之间的左伴随导出函子，见命题 6.3.3。

与任意马尔采夫理论 $\mathcal{P}$ 相关联的是由其同伦 n-范畴 $\mathrm{h}_n\mathcal{P}$给出的马尔采夫理论塔。转到相关的 ∞-模型范畴后，我们得到所谓的螺旋塔，或 Goerss–Hopkins 塔， $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \cdots \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{h_2\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{h\mathcal{P}}. \tag{1.2.12}$$

在下文中 [BPa], 我们将表明，该塔在不精确的意义下是 ∞-范畴的方形图零扩张塔，为连通环谱上的连通模的变形理论提供了一种自然的非阿贝尔类比，并为 [BDG04、GH04、GH05、PV22] 中 Blanc–Dwyer–Goerss 和 Goerss–Hopkins 障碍理论的各种变体提供范畴化。

现在我们讨论马尔采夫理论与变形之间的联系。上述塔使我们能够将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 视为本质代数 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$的变形，这与连通环谱 A 是其第 0 个同伦环$A_{\leq 0} = \pi_0 A$的变形的情形相同。在合成同伦论的通常语言中， $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$ 是$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$的特殊纤维。

在这种一般性层次上，并不存在正在变形的一般纤维。此外，定理 1.2.10 的刻画表明，对于一个 ∞-范畴而言，若要与 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 等价，其中对应于某个 Malcev 理论 $\mathcal{P}$ ，这是一个非常严格的条件；例如，非零的稳定 ∞-范畴绝不可能具有这种形式（推论 5.3.3）。为涵盖更多种类的 ∞-范畴，我们采用下面这个稍加细化的概念。

定义 1.2.13 (7.1.1，7.1.2)。若 Malcev 理论 $\mathcal{P}$ 允许取*loop* 理论，即允许张量乘以 S^1，则称其为 $P \in \mathcal{P}$; 也就是说，对于所有 $S^1 \otimes P =$ ，常值余极限$_{S^1} P$ 存在于 $\mathcal{P}$中。其-范畴的环模型构成 $\mathcal{P}$ 的全子范畴

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

由满足以下条件的那些模型 X 张成：对于所有 $P \in \mathcal{P}$，典范比较映射 $X(S^1 \otimes P) \to X(P)^{S^1}$ 都是等价。

这个定义是对 [Bal25] 中考虑的相应概念的略微推广（参见备注 7.1.3）。 [Pst23b、Bal25] 的关键见解是:

（1）许多自然出现的 ∞范畴 $\mathcal{D}$ （例如：谱、模、$\mathbf{E}_k$环、带基点连通空间）都可以自然地写成如下形式

$$\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}},$$

也就是说，作为适当环理论 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ 的环模型的 ∞ 范畴。

（2）由所有模型构成的 ∞ 范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可以解释为一种 ∞ 范畴论变形，其中 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{D}$ 是一般纤维。特别地， $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 是由所有模型构成的 ∞ 范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的局部化（对 $\mathcal{P}$ 施加一个较弱的大小条件即可）。

请注意，环理论 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ 可能有许多不等价的选择，使得 $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$成立。这样的选择可以视为为 $\mathcal{D}$选择自由对象或探测对象。不同的选择可能导致 $\mathcal{D}$截然不同的变形，进而得到收敛到同一结果的不同谱序列和障碍群；其中一种可能比另一种更适合特定用途。我们在注 7.2.5中给出一个阐释性例子。

原则上，以这种方式得到的变形有一个局限：它们完全受制于由选定的一类“自由对象”所构成的单纯分解理论。因此，从（1.2.12）的螺旋塔导出的谱序列和障碍理论，本质上只能是那些能够用余可表示不变量（例如同伦群）表述的理论。这排除了例如经典亚当斯谱序列，因为它的E_2页是用$\mathbf{F}_p$-同调表述的，而它并不是谱上的余可表示函子。

一般而言，若 ER 是一个$\mathbf{E}_1$-环谱，那么基于 R的谱 X 的亚当斯谱序列，可以看作是将 R_*X 的投射分解与沿伴随 $\mathcal{S}\mathrm{p} \rightleftarrows \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$的下降结合起来。因此，非正式地说，我们缺少的、用于编码沿 R-同调的合成变形的要素就是下降。

在 [Pst23a中，PP21], 这些问题通过格罗滕迪克拓扑来编码所需的下降，从而得到解决。在本文中，我们则直接处理与这一伴随相关的余单子。这样做的优点是能够轻松推广到不稳定语境，例如合成空间，并且能给出特殊纤维可立即识别的变形。

设 $\mathcal{P}$ 是一个环理论。给定一个自函子 $f\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$，其复合

$$\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{f} \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \xhookrightarrow{\nu} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \ ,$$

其中第一个箭头是受限 Yoneda 嵌入，最后一个箭头是自然包含，由此确定一个导出函子 $D(f)$: $\mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{P}$。我们证明，这一构造在以下意义下与复合相容。

定理 1.2.14 (7.3.6)。 构造 $f \mapsto D(f)$ 可细化为一个松单oidal右伴随

$$\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}) \to \mathrm{end}_!(\mathcal{P}),$$

其中 $\mathrm{end}_!(\mathcal{P}) \simeq \mathrm{End}^{\sigma}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$ 是导出函子的 ∞-范畴 $\mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{P}$，即保持几何实现的 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的自函子。

如果 m 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$上的一个单子，那么这就意味着 $D(m)$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$上的一个单子。事实上，情况甚至更加广泛：正如我们在§8.2中所解释的，马尔采夫理论和环理论在非正式意义下“对单子封闭”，完全绕开了定理 1.2.14。特别地， $D(m)$ 的代数的 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}^{D(m)}$ 可以直接构造为环理论模型的 ∞-范畴；该环理论是 $D(m)$： $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathrm{Alg}^{D(m)}$ 到 $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的限制的本质像。在良好情形下，Alg_m 等价于其 ∞-范畴的环模型。

定理 1.2.14 的主要用途是，它使我们也能够处理 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 上的余单子。一般而言，如果 c 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$上的一个余单子，那么 $D(c)$ 未必是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$上的余单子；但如果松结构映射 $D(c)^{\circ n} \to D(c^{\circ n})$ 是等价，则它确实是余单子；我们称这类余单子为可导出的。在定理 7.4.4 中，我们证明松函子 D 还与这些 ∞-范畴的自同态的典范作用相容。利用这一点，我们证明：如果 c 是一个可导出余单子，那么（在 $\mathcal{P}$ 上满足一个次要的大小条件的情况下）存在一个一般纤维函子

$$\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \to \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}),$$

以及一类“稳定 c-驯化”的环模型，其中存在一个包含

$$\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega,\mathrm{sct}}_{\mathcal{P}}) \hookrightarrow \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$$

可将其视为合成类比函子。在该系列的第三篇论文 [BPb], 中，我们证明，Malcev 理论的螺旋塔的构造在导出函子意义下具有精确意义上的松函子性。这为变形$\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$ of$\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c$提供了螺旋塔，并伴有“余纤维 of τ”形式体系、谱序列和障碍理论。

在本文最后一节，我们给出一些可以利用我们的形式体系构造的变形示例。具体而言，我们讨论：

(§9.2) 滤子模。若 R 是一个 $\mathbf{E}_1$-环谱，我们将 $\mathcal{L}(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 记作由 R 在悬挂、去悬挂和直和下生成的全子范畴。这是定义 1.2.13 意义下的一个环理论，并且在命题 9.2.6 中我们证明

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R, \qquad \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\tau_{\geq \star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}).$$

因此，Malcev 理论 $\mathcal{L}(R)$ 编码了基于 R 的怀特黑德塔的 R-模的滤变形。

(§9.4) 合成谱。上述例子给出了一种使用 Malcev 理论编码R-模变形的自然方式。如上所述，为了向下得到谱，我们对余单子 $R \otimes_{\mathbf{S}} -$ （与伴随 $\mathcal{S}\mathrm{p} \rightleftarrows \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$. 相关联）进行变形。

我们证明，若要实现这一点所需的可导性条件均得以满足，例如，当 R_*R 作为右侧 R_*-模是平坦的时。形变余单子的余代数 ∞-范畴是一种连通合成谱的变体，依构造将 R-亚当斯谱序列范畴化，其特殊纤维由完备导出 ∞-范畴给出，该范畴的对象是R_*R-余模。我们在定理 9.4.11中证明，若 R 是 Adams 型，那么我们的构造便能复原 [Pst23a]的连通合成谱的 Postnikov 完备化。

（§9.5）合成空间。受前一个例子的启发，我们在定义 9.5.10 中定义如下对象： ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R$ ，其对象为 R-合成空间，它是以下余单子的余代数 ∞-范畴：该余单子作用于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\tau_{\geq \star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}})$ ，并对伴随所关联的余单子进行形变。

$$R \otimes_{\mathbf{S}} \Sigma^\infty_+(-) : \mathcal{S}\mathrm{pc} \rightleftarrows \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R : \Omega^\infty.$$

在命题 9.5.9中，我们证明了：如果$R_*\Omega^{\infty-n}R$ 作为左 R_*-模对所有 $n \in \mathbb{Z}$均为投射的，则必要的可导性条件得以满足。例如，当R_* 是一个域，或当 $R =$MU时，这一条件成立。

按照构造， ∞-范畴 R的 R-合成空间将不稳定 [BCM78中的BT00]-亚当斯谱序列范畴化了。我们的温和性条件是其中所需假设的变体，用于以不稳定余代数的形式良好地描述 E_2-页。

（§9.6）合成 $\mathcal{O}$-代数。如果 R （为简便起见）是一个$\mathbf{E}_\infty$-环，而 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-幺半群，那么通过对与该伴随相关的余单子进行变形

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}} \rightleftarrows \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R)$$

我们同样得到一个 ∞-范畴的 R-合成 $\mathcal{O}$-代数。这里，当 R_*R 在 R_*上平坦时，所需的可导性假设成立；特殊纤维是一个由 R_*-代数组成的代数范畴，并带有相容的 R_*R-余模结构和幂运算。

取 $R = \mathbf{F}_p$ 和 $\mathcal{O} = \mathbf{E}_k$，这将 Senger 未发表的工作中提出的、用于描述 $\mathbf{E}_k$-环之间映射的 Goerss–Hopkins 谱序列的一个版本范畴化了 [Law19，§4]。因此，我们的工作推动了 Lawson 提出的问题的解决 [Law20，问题 1.9：1] 在各种广泛的语境中，为 $\mathbf{E}_k$-代数之间的映射建立障碍理论。

利用无穷元理论，我们得以完成这一构造的变体；它同样为 ∞-范畴 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{K(n)})$ 中的 $K(n)$-局部$\mathbf{E}_\infty$-环提供变形，并将用于描述 $K(1)$-局部 $\mathbf{E}_\infty$-环之间映射的 Goerss–Hopkins 谱序列范畴化并加以推广 [GH05，定理 2.4。14]此外，它还为 Lawson 的一个猜想提供了一种解答 [Law20，猜想 1.6。6]。

我们指出，Raksit 即将发表的工作中也出现了若干与本文探讨的思路相关的想法 [Rak]。该文给出的构造之一称为能量化，它将一个具有适当函子、且函子取值于分次谱的 ∞-范畴关联到一个导出 ∞-范畴；后者通过明确写出环理论的一个变体，并考察其对应的环模型 ∞-范畴而得到。Raksit 证明，将该构造应用于同伦群集中在偶数次数的谱 ∞-范畴，会产生（非连通的）偶数MU-基合成谱。这提供了另一种运用高阶泛代数技术构造合成谱变体的方法，与上文讨论的 §9.4彼此独立。

我们注意到，这两种方法的侧重点不同。在本文中，环理论编码了这样一些变形：其 ∞-环模型范畴能够还原若干相关的既有对象，而其非环模型则提供了有用的连通变形。在 [Rak], 关注的是

将非连通变形（例如导出环理论）构造为该背景下环模型类比物的 ∞-范畴。

1.3. Malcev 条件简史

尽管我们给出的 ∞-范畴 Malcev 理论的精确定义是新的，但其一般思想由来已久。初次接触时，这一概念或许显得晦涩难懂，因此本节将回顾它的一些历史。最后，我们还会提出几个有关一般理论行为的问题，这些理论不一定满足 Malcev 条件。

马尔采夫运算最初由 Мальцев [Mal54], 提出。Malcev 的名字也有多种音译形式，如 Malcev、Mal'cev、Mal'tsev 和 Maltsev。他用现代语言证明：如果 $\mathcal{C}$ 是某个代数理论的模型范畴，那么在 $\mathcal{C}$ 中，内部等价关系的复合可交换，当且仅当该理论具有马尔采夫运算。在 [Fin60], Findlay 证明，这意味着 $\mathcal{C}$ 中的每个内部自反关系都是内部等价关系；反向结论则由 Shafaat [Sha74]证明。这些条件及其推广此后在普适代数领域得到了广泛研究；教科书式的介绍可参见 [BB04、Bou17]。

装备了马尔采夫运算的集合被 Lambek 命名为群集 [Lam55, Lam92]。堆是装备了马尔采夫运算的集合 t ，其满足如下意义下的结合律：$t(a,b,t(c,d,e)) = t(t(a,b,c)\ d,e)$。如果 G 是一个群，那么 $t(x,y,z) = xy^{-1}z$ 确定一个堆；反过来，每个堆 G 连同指定元素 $e \in G$ 确定一个群，其二元运算为 $x \cdot y = t(x,e,y)$，单位元为 e。因此，堆是群的无基点或仿射推广。堆最早由 Wagner 引入 [Vag53], ，其历史还可以进一步追溯到 Prüfer 的工作 [Prü24]。关于更深入的历史讨论，参见 [HL17, 第 3] 节。

在 [BGvO71中，第 3], Barr 未加证明地指出，在正合范畴中，每个单纯对象满足 Kan 条件，当且仅当每个内部自反关系都是等价关系。证明例如见 Carboni–Kelly–Pedicchio 的工作 [CKP93，定理 4。2]在 [JP02], 中，Jibladze–Pirashvili 直接证明了以下事实：在代数理论的模型范畴中，每个单纯对象满足 Kan 条件，当且仅当该理论包含一个马尔采夫运算。他们还证明，在这种情况下，每个单纯对象的满射都是 Kan 纤维化，从而推广了关于单纯群的经典定理 [Qui67，II.3.8 命题 1]。

Moore 的一个经典结果是 [Moo55]群范畴中的每个单纯对象都是 Kan 复形；上述结果将这一结论推广到了 1 群胚范畴中的单纯对象，也就是说，推广到了赋有马尔采夫运算的单纯集。一个 *loop* 是一个集合 G ，其上赋有一个幺元二元运算，且两个剪切映射

$$G \times G \to G \times G, \qquad (x,y) \mapsto (x,xy) \quad (x,y) \mapsto (xy,x)$$

都是双射。因此，连通 H空间在同伦意义下可视为一个 loop，而 loop 理论是 Malcev 的，参见 例 2.2.6。在 [Kla01], Klaus 证明，连通 H空间的最小单纯集合模型继承了严格单纯loop的结构。 定理 1.2.6表明，每个具有马尔采夫运算的空间都等价于 H-空间的不交并。综合这些结果可知，每个具有马尔采夫运算的空间都等价于一个赋有马尔采夫运算的单纯集的几何实现。

Malcev 理论在同伦论中的隐式应用至少可以追溯到 Quillen[Qui67，II.4。2]在其介绍模型范畴的开创性著作中，Quillen 在某个普通范畴的单纯对象范畴上构造了一个闭模型结构 $\mathcal{D}$ ，并对 $\mathcal{D}$ 作出了一些假设。这些假设本质上要求 $\mathcal{D}$ 是经典有限型理论或某种可能的无穷型 Malcev理论的模型范畴。从这一角度看，Malcev 理论构成了非紧生成情形下动画化类比物的自然基础；更多信息请参见 §4.3 。

在 [Lur11，推论 4.2。7], [Lurb，推论 A.5.6。4], Lurie 证明了 Moore 定理的一个完全同伦论推广，说明 ∞类群状

$\mathbf{E}_1$-空间总是满足 Kan 条件。证明中使用了完全相干的 $\mathbf{E}_1$-结构，以便应用类群状 $\mathbf{E}_1$-空间与带基点连通空间之间的等价。定理 1.2.4，其证明受到 Bousfield 和 Friedlander 关于单纯空间 π_*-条件的研究启发 [BF78，附录 B]，指出，这种完全相干性并非必要：任何仅仅承认马尔采夫运算的单纯空间都已满足 Kan 条件。

在 [Lur11 的定义 4.2.9]，中，Lurie 引入了底层的概念。用我们的术语来说，底层是一种理论 $\mathcal{P}$，按照定义 1.2.1 的无穷范畴意义，其所有对象都具有余群结构（即具有 $\mathcal{P}^{\mathrm{op}}$ 中类群状 E_1-对象的结构）。这一假设用于保证：若 $P \in \mathcal{P}$，则相应的自由对象 $\nu P \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是强投射的（定义 1.2.9），从而可将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 视为 $\mathcal{P}$ 在几何实现 [下的自由余完备化（15]Lur11，命题 4.2.）。Brantner 也在 [Bra17] 中利用底层，来处理在 $K(n)$-局部同伦论中出现的一些非紧生成 ∞-范畴。

Lurie 的底层概念的一种临时推广，以“马尔采夫理论”之名在 [Bal25], 中被引入，其中严格余群条件被严格 coherd 条件所取代。这一条件比本研究中考虑的条件更严格；尽管如此，我们对马尔采夫理论的处理与该文仍有一些重合。在这些情况下，若我们能够给出简短一些或更好的证明，就会选择这样做。

正如我们在 §5.2 中所解释的，一个理论 $\mathcal{P}$ 具有这样的性质：每个可表对象在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中强投射，当且仅当该理论 $\mathcal{P}$ 在 定义 1.2.7 的意义下是 Malcev 的。因此，我们在此考察的 Malcev 理论可视为底层的一种最大推广。这种推广的优点是具有良好的闭包性质，例如对切片和某些拉回封闭，见引理 4.1.5。此外，理论 $\mathcal{P}$ 在我们的意义下是 Malcev 的，当且仅当其同伦范畴 $\mathrm{h}\mathcal{P}$ 在经典意义下是 Malcev 的；这一条件在实践中很容易验证。

我们这一系列工作从两个基本上相互独立的方面运用 Malcev 条件。在本文中，它主要用于处理考察无穷理论的模型 ∞-范畴时出现的问题。在后续论文中，它则作为一项关键技术假设，用于发展可行的变形理论。Malcev 条件有助于在普适代数中开展变形理论，这一观点可追溯至 Smith 的工作 [Smi76，第 6]章；类似的技术假设也见于关于分解模型结构的研究 [DKS93，Bou03], 这些研究构成了现代合成变形理论的历史前身。

问题 1.3.1. 当然，也存在不满足 Malcev 条件的理论。在有限元情形中，这些理论已得到相当充分的理解，其基础由 Lurie 关于非阿贝尔导出范畴的研究奠定 [Lur09, §5.5.8]。缺少 Malcev 条件时，处理无穷元理论及其模型要微妙得多。我们将这一普遍情形下可发展的部分高阶泛代数单独列出，尤其见 §3 和 §8.1；不过在此先提出几个本书尚未解决的开放问题：

> (1) 设 $\mathcal{P}$ 是一个理论。$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是否具有所有小余极限？ (2) 设 S 是一个集合，且 $\mathcal{P}$ 是由一族对象 $\{P_s : s \in S\}$ 在余积和收缩下生成的理论。$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 在 $\mathcal{S}\mathrm{pc}/S$ 上是否具有单子性？ (3) 设 $\mathcal{C}$ 是一个在空间 S 上对 $\mathcal{S}\mathrm{pc}/S$ 具有单子性的 ∞-范畴。$\mathcal{C}$ 是否具有所有小余极限？

所有这些在经典情形下都能得到肯定的回答：如果 $\mathcal{P}$ 是一个由一族对象 $\{P_s$ 在余积和收缩下生成的理论 $s \in S\}$：那么范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit}$ （ $\mathcal{P}$ 的集合值模型）显然是 $\mathcal{S}\mathrm{et}/S$ 上的单子范畴（比较命题 8.1.3的证明），并且每个这样的范畴都具有所有小余极限 [Lin69，命题 4]之后的例子）。在满足 Malcev 条件，或满足某些有界性或可呈性的条件时，这些问题也能够得到解决。

一个不满足这些假设的无穷理论的典型例子是紧豪斯多夫空间理论：如果 $\mathcal{P}$ 是由任意集合的斯通–切赫紧化所张成的紧豪斯多夫空间的满子范畴，那么经典结果表明，范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit}$（$\mathcal{P}$ 的集合值模型）等价于紧豪斯多夫空间范畴。例如，我们不知道 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$（$\mathcal{P}$ 的取值于空间的模型）是否具有所有小余极限。

除此之外，我们还提出以下问题。

问题 1.3.2. 由以下对象构成的 $\mathcal{T}\mathrm{hry}$ 全子范畴是否在小极限下封闭？这里的对象由有界理论类张成（见 §3.5）。

1.4. 约定

默认所有 ∞-范畴都是局部小的，但以下情况除外：∞-范畴被定义为极大大的 ∞-范畴 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 的大 ∞- 范畴的子范畴，或被定义为局部小 ∞- 范畴 $\mathcal{C}$ 的 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 的子范畴。

给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 表示由那些小的 预层张成的全子范畴；也就是说，这些预层可以写成可表预层的小余极限。当 $\mathcal{C}$ 是局部小的时，这也是一个局部小的 ∞-范畴，尽管 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 未必是局部小的。如果 $\mathcal{C}$ 是小的，那么 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$。

2. 单纯对象与马尔采夫运算

本文所考虑的理论模型的 ∞-范畴，可以视为形式单纯分解的 ∞-范畴。为此，我们需要一些单纯空间理论。本节的主要目标是研究单纯空间的 Kan 纤维化与马尔采夫运算之间的相互作用。

我们首先在 §2.1 回顾单纯空间的 Kan 纤维化的定义及其一些基本性质，然后在 §2.2 回顾 ∞- 范畴中马尔采夫运算的定义，并确立其若干基本性质。我们将指出空间及空间映射上的马尔采夫运算的一些有用刻画和性质，供后文使用。

接着，我们在本节 §2.3给出主要技术定理：任何带有马尔采夫运算的单纯空间有效满射都是 Kan 纤维化。利用这一点，我们在 §2.4给出 ∞-范畴中带有马尔采夫运算的对象的若干替代刻画和闭包性质。

2.1. Kan 纤维化

定义 2.1.1。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴。给定一个单纯对象 $X_\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$ 和单纯空间 $\Lambda \in \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$，考虑定义在 $\mathcal{C}$ 上的预层

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})}(\Lambda, \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(-, X_\bullet)) \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}.$$

当其存在时，余张量 $X_\bullet[\Lambda]$ 是该预层的表示对象。也就是说，它是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，并带有等价

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(Y, X_\bullet[\Lambda]) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})}(\Lambda, \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(Y, X_\bullet)),$$

关于 $Y \in \mathcal{C}$ 自然。

例 2.1.2. 若 $X_\bullet$ 是单纯对象，则

$$X_\bullet[\Delta^n] = X_n, \qquad X_\bullet[\Lambda^2_1] = \lim \left(X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \right).$$

例 2.1.3. 若 $X_\bullet$ 和 Λ 是单纯空间，则

$$X_\bullet[\Lambda] = \mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{pc})}(\Lambda, X_\bullet).$$

因此，可以将余张量视为映射空间构造的一般化。

注 2.1.4。从定义显然可知，余张量的构造关于第二个变量是连续的，并将第一个变量中的余极限映射为 $\mathcal{C}$ 中的极限。

注 2.1.5。结合 例 2.1.2 的第一部分与 注 2.1.4的第二部分，我们看到，如果 $\mathcal{C}$ 具有有限极限，那么对于任意单纯对象 $X_\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$以及任意具有有限多个非退化单形的单纯集 Λ， 都存在。

定义 2.1.6 ([Lur09，§6.2。3])。设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，且具有拉回。若一个态射 $f\colon X \to Y$是一个有效满射，如果其切赫神经

$$Y \longleftarrow X \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow}\; X \times_Y X \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow}\; X \times_Y X \times_Y X \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow}\; \cdots$$

是 $\mathcal{C}$ 中的一个余极限图。

例 2.1.7。空间的映射 $f\colon X \to Y$是有效满射，当且仅当它诱导出满射 $\pi_0 X \to \pi_0 Y$于路径连通分支上 [Lur09，命题 7.2.1。14]。

例 2.1.8。任何 $f\colon X \to Y$具有截面的态射都是有效满射[Lur09，推论 6.2.3。12]。

定义 2.1.9。设 $\mathcal{C}$ 为具有有限极限的 ∞-范畴。我们称

(1) $\mathcal{C}$ 中的单纯对象的映射 $X_\bullet \to Y_\bullet$ 是*Kan* 纤维化，如果

$$X_\bullet[\Delta^n] \to Y_\bullet[\Delta^n] \times_{Y_\bullet[\Lambda^n_i]} X_\bullet[\Lambda^n_i]$$

对于所有 $0 \le i \le n$，都是有效满射；

(2) 单纯对象 $X_\bullet$ 满足 *Kan* 条件，如果 $X_\bullet \to *$ 是 Kan 纤维化；也就是说，如果对于所有 $0 \le i \le n$， $X_\bullet[\Delta^n] \to X_\bullet[\Lambda^n_i]$ 都是有效满射。

例 2.1.10。设 $f\colon X \to Y$ 是带有限极限的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射。那么， f 的切赫神经 $\check{C}(f)$ 满足 Kan 条件。事实上，映射

$$\check{C}(f)[\Delta^n] \to \check{C}(f)[\Lambda^n_i]$$

对于所有 $0 \le i \le n$，它都是等价；参见 [Lur09，§6.1。2]。

Ex例 2.1.11。设 $K \in \mathcal{C}$ 是一个视为常值单纯对象的对象。那么，
ma映射 $f\colon X_\bullet \to K$ 是 Kan 纤维化，当且仅当 $X_\bullet$ 满足 Kan 条件。

注 2.1.12。在单纯集的语境中，定义 2.1.9 是经典的。Seymour 曾为单纯拓扑空间考察过类似的概念 [Sey80] 。单纯空间层的 Kan 纤维化（即 ∞-群胚）后来由 Henriques 在 [Hen08，定义 2 中引入。3], 关于 ∞-topos 中单纯对象理论的详尽论述，见 Lurie 的著作 [Lurb，第 A 节。5]。

我们主要关注这样的情形： $\mathcal{C}$ 中 Kan 纤维化的理论可以归约为单纯空间的 Kan 纤维化理论。

注 2.1.13. 回想一下，单纯对象 $X_\bullet$ 称为超覆盖，如果

$$X_\bullet[\Delta^n] \to X_\bullet[\partial\Delta^n]$$

对所有 $n \ge 0$都是有效满射。根据 [Lurb，推论 A.5.6。4], 一个单纯对象 $X_\bullet$在一个 ∞-topos 中 $\mathcal{X}$ 满足 Kan 条件，当且仅当它是其几何实现的超覆盖 $|X_\bullet|$ （即是切片范畴 $\mathcal{X}_{/|X_\bullet|}$中的超覆盖）。

Kan 条件对我们很有用，因为它保证了几何实现与极限之间的相容性：例如，按照 Rezk 的定义，每个 Kan 纤维化都是实现纤维化 [Rez]。具体来说，我们将用到以下结果。

命题 2.1.14. 几何实现与 Kan 条件的相互作用如下：

(1) 假设给定一个小族 $\{X_\bullet(i) : i \in I\}$ 的单纯空间。若每个 $X_\bullet(i)$ 都满足 Kan 条件，则典范映射

$$|\prod_{i\in I} X_\bullet(i)| \to \prod_{i\in I} |X_\bullet(i)|$$

是一个等价。

(2) 假设给定一个笛卡尔方形图

$$\begin{array}{ccc} X'_\bullet & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y'_\bullet & \longrightarrow & Y_\bullet \end{array}$$

由单纯空间构成。若 f 是 Kan 纤维化，则典范映射

$$|X'_\bullet| \to |Y'_\bullet| \times_{|Y_\bullet|} |X_\bullet|$$

是一个等价。

证明。(1) 由于 $X_\bullet(i)$ 满足 Kan 条件，因此它是 $|X_\bullet(i)|$ 的一个超覆盖，依据 [Lurb，推论 A.5.6.4]。根据例 2.1.7，空间的有效满射在所有小积下封闭。因此，$\prod_{i\in I} X_\bullet(i)$ 是 $\prod_{i\in I} |X_\bullet(i)|$ 的一个超覆盖。于是$|\prod_{i\in I} X_\bullet(i)| \simeq \prod_{i\in I} |X_\bullet(i)|$，如所述。

(2) 这是 [Lurb，定理 A.5.4。1]。 □

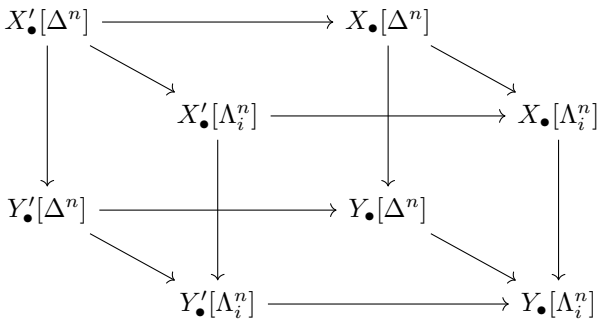
我们还记录以下结果，以备后用。

引理 2.1.15。 考虑一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} X'_\bullet & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y'_\bullet & \xrightarrow{g} & Y_\bullet \end{array}$$

单纯空间的方形图。若 f 是 Kan 纤维化，则 f' 也是；若 g 是有效满射，则反向结论也成立。

证明。 这些假设为我们提供了一个立方体



其中前面和后面是笛卡尔的。容易推出，如果 $X_\bullet[\Delta^n] \to Y_\bullet[\Delta^n] \times_{Y_\bullet[\Lambda^n_i]} X_\bullet[\Lambda^n_i]$ 是有效满射，那么 $X'_\bullet[\Delta^n] \to Y'_\bullet[\Delta^n] \times_{Y'_\bullet[\Lambda^n_i]} X'_\bullet[\Lambda^n_i]$ 也是；而如果 $Y'_\bullet[\Delta^n] \to Y_\bullet[\Delta^n]$ 是有效满射，则反之亦然。□

2.2. 马尔采夫运算

本节余下部分的目标是发展马尔采夫运算 在 ∞- 范畴中的理论。本小节的主要目标是引入这些运算，并在空间的 ∞-范畴中研究它们。特别是，在 定理 2.2.13 中，我们根据超简单这一性质刻画了允许存在马尔采夫运算的空间（超简单 (定义 2.2.9)，它是对逐分量简单空间这一概念的自然强化。

定义 2.2.1. 对象 X 在一个 ∞-范畴上的马尔采夫运算是一个三元运算

$$t\colon X \times X \times X \to X,$$

并附带两个用于填充三角形的同伦

$$\begin{array}{ccccc} X \times X & \xrightarrow{X\times\Delta} & X \times X \times X & \xleftarrow{\Delta\times X} & X \times X \\ & {\scriptstyle\pi_1}\searrow & \downarrow{\scriptstyle t} & \swarrow{\scriptstyle\pi_2} & \\ & & X & & \end{array} \tag{2.2.2}$$

一个 H群集对象是配备了马尔采夫运算的对象。

注 2.2.3. 在方程中，定义 2.2.1中的两个同伦可以写成

$$t(a,a,b) \simeq b \qquad \text{and} \qquad t(a,b,b) \simeq a.$$

注 2.2.4. 我们要求，马尔采夫运算的数据包括指定的同伦，用以填充（2.2.2）中的两个三角形，从而恰当地表述某些构造关于马尔采夫运算的自然性。然而，这两个三角形无须满足任何进一步的相容条件。因此，一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$中的对象 存在马尔采夫运算，当且仅当它存在一个在同伦意义下的马尔采夫运算；也就是说，它在同伦范畴 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ 中的像存在马尔采夫运算。

注 2.2.5. 我们有时（特别是在 例 2.2.6 和 例 2.2.7中）会宽松地使用术语，称映射 t: $X \times X \times X \to X$ 是一个马尔采夫运算，如果存在一种同伦的选取，使其成为马尔采夫运算；也就是说，如果（2.2.2）在同伦意义下交换。

例 2.2.6. 设 X 是一个类群状 H-空间对象，即一个带基点对象，并配备了一个含幺乘积 m，其剪切映射

$$s := (X \times m) \circ (\Delta \times X)\colon X \times X \to X \times X \times X \to X \times X$$

是一个等价。通过图表追踪可得

$$t := m \circ (X \times (\pi_2 \circ s^{-1}))\colon X \times X \times X \to X \times X \times X \to X \times X \to X$$

是一个马尔采夫运算。若 m 是结合的，即 X 是同伦范畴 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ 中的一个群对象，那么这个马尔采夫运算可用方程 $t(a,\ b,\ c) = a \cdot b^{-1} \cdot c.$ 表示

例 2.2.7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限和终对象 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 的 ∞-范畴。给定一个对象 $A \in \mathcal{C}$ 和映射 $x,\ y$: $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \to A$，存在相应的路径对象

$$\Omega_{x,y}A = \lim\left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{x} A \xleftarrow{y} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}\right).$$

给定映射 $x,\ y,\ z$: $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \to A$，存在路径复合映射和路径求逆映射

$$\Omega_{x,y}A \times \Omega_{y,z}A \to \Omega_{x,z}A, \qquad \Omega_{x,y}A \to \Omega_{y,x}A,$$

以及复合映射

$$\Omega_{x,y}A \times \Omega_{x,y}A \times \Omega_{x,y}A \to \Omega_{x,y}A \times \Omega_{y,x}A \times \Omega_{x,y}A \to \Omega_{x,y}A,$$

非正式地由以下内容给出

$$(f,g,h) \mapsto f \circ g^{-1} \circ h,$$

是 $\Omega_{x,\ y}A$ 上的马尔采夫运算。

例 2.2.8。 将 例 2.2.7 特化到 $\mathcal{C}=\mathcal{X}$ 是一个 ∞-拓扑且 $A=\mathrm{B}G$属于某个群对象 G的情形，我们得知每个主 G-丛 $p\colon E\to X$ 都在切片范畴 $\mathcal{X}/X$中具有马尔采夫运算。例如，对于 n，每个 $n\geq 2$ -gerbe 以及每个阿贝尔1-gerbe 都具有自然的马尔采夫运算。

更一般地，可以证明，每个 n-连通且 $(2n-2)$-截断对象，在一个 ∞-拓扑中都具有自然的马尔采夫运算。据我们所知，Vokřínek [Vr13、Vr14] 首次提出了这一观察的一个版本。

本小节接下来的目标，是确立在空间的 ∞-范畴中具有马尔采夫运算的对象和态射的一些性质。我们先给出这些空间的一个初等刻画。

定义 2.2.9。 称空间 $X\in\mathcal{S}\mathrm{pc}$ 为超简单，如果对于所有带基点连通空间A 和 B，映射

$$\mathrm{map}(A\times B,X)\to\mathrm{map}(A\vee B,X),$$

沿包含 $A\vee B\to A\times B$ 限制后是一个有效满射。

注 2.2.10。 回忆一下，若 X 是一个空间， $x\in X$, $a\in\pi_n(X,x)$ 和 $b\in\pi_r(X,x)$，则怀特海德积 $[a,b]\in\pi_{n+r-1}(X,x)$ 定义为图表中的顶端水平复合

$$\begin{array}{ccccc} S^{n+r-1} & \xrightarrow{w} & S^n\vee S^r & \xrightarrow{a\vee b} & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ * & \longrightarrow & S^n\times S^r & & \end{array},$$

其中 w 是 $S^n\times S^r$的标准胞腔结构的顶端附着映射，其定义使得该方形图是余笛卡尔的。由此可知，对于所有 $a\in\pi_n(X,x)$ 和 $a\in\pi_r(X,x)$， $[a,b]=0$ 成立，当且仅当

$$\mathrm{map}_*(S^n\times S^r,X)\to\mathrm{map}_*(S^n\vee S^r,X)$$

是一个有效满射，因此，对于所有基点 $x\in X$ 以及 $a\in\pi_n(X,x)$ 和 $b\in\pi_r(X,x)$， $[a,b]=0$ 成立，当且仅当

$$\mathrm{map}(S^n\times S^r,X)\to\mathrm{map}(S^n\vee S^r,X)$$

是一个有效满射。因此，超简单空间构成了怀特海德积消失的那些空间的一个自然子类 [本身也是具有简单道路分支的空间的一个自然子类。不过请注意，我们不要求超简单空间是连通的。

正如下文将要看到的，超简单空间在许多方面都比怀特海德积消失的空间或逐分量简单空间表现得更好。例如，如果 X 是超简单的，那么余张量 X^K 对于任意空间 K也都是超简单的；而相应地，若仅假设 X 具有怀特海德积消失，则此结论不成立 [LS10，例 6。6]。

引理 2.2.11。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积且余积在有限积下分配的 ∞-范畴。若 $\{X_i:\ i\in I\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中一组允许马尔采夫运算的对象，则$\coprod_{i\in I}X_i$ 允许马尔采夫运算。

证明。 我们构造一个马尔采夫运算

$$t\colon(\coprod_{i\in I}X_i)^{\times 3}\to\coprod_{i\in I}X_i$$

手动完成。由于余积对积具有分配性，我们可以将其识别为

$$(\coprod_{i\in I}X_i)^{\times 3}\simeq\coprod_{(i,j,k)\in I^3}X_i\times X_j\times X_k.$$

因此，只需指定映射

$$t_{i,j,k}\colon X_i \times X_j \times X_k \to X_l$$

对每个三元组 i，j，$k \in I$，其中 $l \in I$ 是依赖于该三元组的某个元素。我们分情况说明这一点。如果 $i = j = k$，那么

$$t_{i,i,i}\colon X_i \times X_i \times X_i \to X_i$$

是 X_i 上的任意马尔采夫运算。如果 $i = j \neq k$，那么

$$t_{i,i,k} = \pi_3\colon X_i \times X_i \times X_k \to X_k$$

是投影。如果 $i \neq j = k$，那么

$$t_{i,k,k} = \pi_1\colon X_i \times X_k \times X_k \to X_i$$

是投影。如果 $i \neq j$ 且 $j \neq k$，那么 $t_{i,\ j,\ k}$ 可以是任意值，例如投影

$$t_{i,j,k} = \pi_2\colon X_i \times X_j \times X_k \to X_j.$$

简单计算可知，这定义了 $\coprod_{i\in I} X_i$ 上的一个马尔采夫运算。 □

警告 2.2.12。引理 2.2.11例如可推出，若 X 和 Y 是 H-空间中的群胚，则 $X \coprod Y$以自然方式具有 H-群胚的结构。不过请注意，除非 $X \coprod Y$或 Y 为空，否则 $X \coprod Y$并非 X 与 Y 在 ∞-范畴中的余积 H-群胚。

定理 2.2.13。给定一个空间 X，以下条件等价：

(1) X 具有马尔采夫运算。(2) X 的每个路径连通分支都具有 H-空间的结构。(3) 设 A 和 B 是带基点连通空间。那么映射

$$\mathrm{map}(A \times B, X) \to \mathrm{map}(A \vee B, X),$$

沿包含 $A \vee B \to A \times B$限制后，具有一个截面。

(4) X 是超简单的。

此外，在 (1)⇒(3) 中，截面的选取可以关于 X上的马尔采夫运算的选取而自然地进行。

证明。(1)⇒(2)。根据假设，X 具有马尔采夫运算

$$t\colon X \times X \times X \to X.$$

显然，空间 X 上的三元运算 t 是马尔采夫运算，当且仅当其伴随

$$\hat{t}\colon X \to \mathrm{map}(X \times X, X), \qquad \hat{t}(x)(a,b) = t(a,x,b)$$

将每个点 $x \in X$ 映射到基点空间（X, x）上的一个含幺乘积。如果 $a, b \in X$ 与 x处于同一个路径连通分支中，那么路径 $a \sim x$ 和 $b \sim x$ 的选取会诱导出同伦

$$t(a,x,b) \sim t(x,x,x) \simeq x,$$

因此，这个含幺乘积限制在 x 的路径连通分支上，使其具有H-空间的结构。

(2)⇒(1)。根据 引理 2.2.11，只需证明连通的 H-空间具有马尔采夫运算。连通的 H-空间是类群状的，因此由 例 2.2.6即可得证。

(2)⇒(3)。一个截面由以下复合给出

s：映射($A \vee B$，X) $\to$映射(A，X)$\times X \times$映射(B，X) $\to$映射($A \times B$，$X \times X \times X$) $\to$映射($A \times B$，X) 发送映射

$$f \vee g\colon A \vee B \to X$$

对于该映射

$$s(f \vee g)\colon A \times B \to X, \qquad s(f \vee g)(a,b) = t(f(a), f(*) = g(*), g(b)).$$

由于每个具有截面的态射都是有效满射，(3)⇒(4) 成立。

(4)⇒(2). 不失一般性，设 X 连通，并须证明 X 具有 H-空间的结构。 X 上的 H-空间结构恰好是折叠映射 $X \vee X \to X$ 经由 $X \vee X \to X \times X$ 的一个提升；取 $A = B = X$ 即可得到该提升。□

现在我们记录一些关于超简单空间和 H-群胚态射的补充事实，后文将会用到。或许最有用的一般事实如下。对于空间 A 和点 $a \in A$，用 $A_a \subset A$ 表示 a 的路径连通分支。

命题 2.2.14。设 $f\colon X \to Y$ 是 H-群胚的一个映射，并假设其底层空间映射配有截面 $s\colon Y \to X$。那么 f 在以下意义下局部可分裂：给定 $x \in X$，若记

$$F := \{f(x)\} \times_Y X$$

为 $f(x)$ 上的纤维，并令 $i\colon F_x \to X_x$ 表示 x 的路径连通分支的包含，则

$$F_x \times Y_{f(x)} \to X_x, \qquad (x', y) \mapsto t(i(x'), x, s(y))$$

是一个等价。

证明。对于 $x \in X$，定义

$$s_x\colon Y \to X, \qquad s_x(y) = t(x, sf(x), s(y)).$$

As

$$f(s_x(y)) = f(t(x, sf(x), s(y)) \sim t(f(x), fsf(x), fs(y)) \sim t(f(x), f(x), y) \sim y,$$

我们看到， s_x 再次是 f的一个截面。由于

$$s_x(f(x)) = t(x, sf(x), sf(x)) \sim x,$$

我们看到， s_x 定义了 f 到 $X_x \to Y_{f(x)}$的限制的一个截面。因此，我们将问题归结为如下情形： $f\colon X \to Y$ 是连通 H- 空间之间的一个态射，且带有截面 s。此时，该映射就是通常的等价

$$F \times Y \to X, \qquad (x', y) \mapsto x' \cdot s(y). \qquad \square$$

推论 2.2.15。考虑一个笛卡尔方形图

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \sigma & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

的空间。假设 f 是 H-群胚的一个映射，且其底层空间映射带有截面 $s\colon Y \to X$。

(1) 设 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是一个包含 σ 且对子对象封闭的全子范畴。若 $F\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 保持余积和有限积，则 $F(\sigma)$ 是笛卡尔的。(2) 特别地，对所有 n， σ 在经过 n-截断后仍然是笛卡尔的。(3) $(f', g')\colon X' \to Y' \times X$ 存在一个收缩，它关于在 f 上选择马尔采夫运算以及截面 s 是自然的。 $Y' \times X$ 上相应的幂等元可描述为

$$(y', x) \mapsto (y', t(x, sf(x), sg(y')))$$

(4) 若 g 存在一个收缩，则 g' 也存在一个收缩，它关于在 f 上选择马尔采夫运算、截面 s 以及 g 的收缩 r 是自然的。 X 上相应的幂等元可描述为

$$x \mapsto t(x, sf(x), sgrf(x)).$$

此外，所得映射

$$X \to X' \times_{Y'} Y$$

是一个等价。

证明。 根据 命题 2.2.14，这样的方形图等价于以下形式的方形图的不交并

$$\begin{array}{ccc} F \times Y' & \xrightarrow{F\times g} & F \times Y \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} .$$

显然，对任意保积函子应用后，这个方形图仍然是笛卡尔的，从而得到 (1,2)。对于 (3)，映射

$$Y' \times F \to Y' \times Y \times F$$

存在一个将 Y 投影出去的收缩；对于 (4)，若 g 存在一个收缩 r，则 $F \times g$ 存在收缩 $F \times r$，此时

$$F \times Y \to (F \times Y') \times_{Y'} Y$$

如所述，是一个等价。追溯 命题 2.2.14 的证明，可得这些收缩的相应公式。 □

例 2.2.16。 设 (A, a) 是一个带基点空间，(X, x) 是一个带基点超简单空间。那么

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 \operatorname{map}_*(A, X) & \longrightarrow & \pi_0 \operatorname{map}(A, X) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\mapsto f(a)} \\ \{x\} & \longrightarrow & \pi_0 X \end{array}$$

是笛卡尔的。

例 2.2.17。 设 X 是一个超简单空间。对于任意带基点连通空间 A 和 B，存在一个笛卡尔方形图

$$\begin{array}{ccc} X^{A\wedge B} & \longrightarrow & X^{A\times B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X^{A\vee B} \end{array} .$$

由于 $A \vee B$ 带有基点， $X \to X^{A\vee B}$ 配备了一个收缩。由于 X 是超简单的， $X^{A\times B} \to X^{A\vee B}$ 有一个截面，因此 推论 2.2.15 蕴含存在一个等价

$$X^{A\times B} \simeq X^{A\vee(A\wedge B)\vee B}.$$

在 X 上选择一个马尔采夫运算，根据 $X^{A\times B} \to X^{A\vee B}$ 定理 2.2.13，即可选择 $X^{A\times B} \to X^{A\vee B}$ 的一个截面；在这种情况下， $X^{A\wedge B} \to X^{A\times B}$ 的相应收缩将映射 $f\colon\ A\times B \to X$ 映射为

$$\tilde{f}\colon A \wedge B \to X, \qquad \tilde{f}(a \wedge b) = t(f(a,b), t(f(a,*), f(*,*), f(*,b)), f(*,*)).$$

当 t 是与 X 上具有单位 $*$ 的 H-群结构相关联的马尔采夫运算时，该公式化简为熟悉的构造 $a \wedge b \mapsto f(a,\ b) \cdot (f(a,\ *) \cdot f(*,\ b))^{-1}$。

2.3. 与 Kan 条件的相互作用

现在我们希望证明以下定理：

定理 2.3.1。 设 $f\colon\ X_\bullet \to Y_\bullet$ 是单纯 H-群胚的一个有效满射；换言之，它是单纯空间的一个有效满射，并且在箭头 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}},\ \mathcal{S}\mathrm{pc})$[1]中允许一个马尔采夫运算。那么 f 是一个 Kan 纤维化。

我们对 定理 2.3.1 的证明受 Bousfield 和 Friedlander 关于单纯空间的研究 [BF78，附录 B]启发。我们需要一些预备知识。

定义 2.3.2。设 T 是一个有限线性序， $S \subset T$ 是其子集。于是

$$\Lambda^T_S \subset \Delta^T$$

定义为与某个顶点 $s \in S$ 相对的那些面的并。

例 2.3.3。我们有

$$\Lambda^T_{\{t\}} \simeq \Delta^{T\setminus\{t\}}, \qquad \Lambda^{[n]}_{[n]\setminus\{i\}} \simeq \Lambda^n_i.$$

引理 2.3.4。设 T 是一个有限线性序， $S \subset T$ 是其子集。假设给定某个 $s' \in T \setminus S$ 的 $S' = S \cup \{s'\}$。则方形图

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{T\setminus\{s'\}}_S & \longrightarrow & \Lambda^T_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{T\setminus\{s'\}} & \longrightarrow & \Lambda^T_{S'} \end{array}$$

是笛卡尔且余笛卡尔的。

证明。 根据定义， $\Lambda^T_{S'} \subset \Delta^T$ 可通过添加与s'相对的面得到 $\Lambda^T_S \subset \Delta^T$，该面由 $\Delta^{T\setminus\{s'\}} \subset \Delta^T$实现。因此，引理归结为以下观察： $\Delta^{T\setminus\{s'\}} \cap \Lambda^T_S = \Lambda^{T\setminus\{s'\}}_S$ 由 $\Delta^{T\setminus\{s'\}}$ 中那些包含在 Δ^T中与某个 $s \in S$相对的面内的面组成。□

引理 2.3.5。 单纯空间 $X_\bullet$ 满足 Kan 条件，当且仅当对于每个有限线性序 T 及其每个非空真子集 $S \subsetneq T$，映射

$$X_\bullet[\Delta^T] \to X_\bullet[\Delta^T_S]$$

是有效满射。

证明。 由于 $\Delta^{[n]}_{[n]\setminus\{i\}} \simeq \Lambda^n_i$，显然，如果这些映射都是有效满射，那么 $X_\bullet$ 就满足 Kan 条件。

对于逆向推论，我们对 $|T|$向上归纳，并在固定 $|T|$的情况下对 $|S|$向下归纳。对于基例 $|T| = 2$，必有 $|S| = |T| - 1$。一般而言，若 $|S| = |T| - 1$，则 $X_\bullet[\Delta^T] \to X_\bullet[\Lambda^T_S]$同构于某个 $0 \le i \le n$对应的 $X_\bullet[\Delta^n] \to X_\bullet[\Lambda^n_i]$ ；由于 $X_\bullet$满足 Kan 条件，这就是一个有效满射。这就为 S 和 T都确立了基例。

对于归纳步骤，只需证明：若对于某个 $s' \in T \setminus S$，有 $S' = S \cup \{s'\} \subsetneq T$，那么 $X_\bullet[\Lambda^T_{S'}] \to X_\bullet[\Lambda^T_S]$ 是一个有效满射。考虑如下笛卡尔方形图

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet[\Lambda^T_{S'}] & \longrightarrow & X_\bullet[\Delta^{T\setminus\{s'\}}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\bullet[\Lambda^T_S] & \longrightarrow & X_\bullet[\Lambda^{T\setminus\{s'\}}_S] \end{array}.$$

根据归纳假设，右侧竖直映射是一个有效满射，因此左侧竖直映射也是如此。□

命题 2.3.6。 以下断言对所有 $k \ge 0$ 均成立：

($*_k$) 对于每个单纯形 H-群集 $X_\bullet$、有限线性序 T 和基数为 k 的子集 $S \subsetneq T$，映射 $X_\bullet[\Delta^T] \to X_\bullet[\Lambda^T_S]$ 都存在一个截面。($*'_k$) 对于每个单纯形 H-群集 $X_\bullet$、有限线性序 T 和基数为 k 的 $S \subset T$，映射 $\pi_0(X_\bullet[\Lambda^T_S]) \to (\pi_0 X_\bullet)[\Lambda^T_S]$ 是双射。

证明。 我们将证明 $(*_{k-1}$ 和 $*'_{k-1})\ \Rightarrow (*'_k)$，以及 $(*'_k)\ \Rightarrow (*_k)$。等价$\Lambda^T_{\{i\}} \simeq \Delta^{T\setminus\{i\}}$ 意味着 $(*'_1)$ 总是成立，因此这说明两个陈述对所有 $k \geq 1$ 都成立。

$(*_{k-1}$ 和 $*'_{k-1}) \Rightarrow (*'_k)$。设 $|S'| = k$ 并将 $S' = S\cup\{s'\} \subsetneq T$ 写作某个 $s' \in T\setminus S$。考虑笛卡尔方形图

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet[\Lambda^T_{S'}] & \longrightarrow & X_\bullet[\Delta^{T\setminus\{s'\}}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\bullet[\Lambda^T_S] & \longrightarrow & X_\bullet[\Lambda^{T\setminus\{s'\}}_S] \end{array}.$$

根据 $(*_{k-1})$，右侧的竖直映射有一个截面。根据推论 2.2.15，因此，该方形图在取路径连通分支后仍为笛卡尔方形图。结合 $(*'_{k-1})$，可得

$$\begin{aligned} \pi_0(X_\bullet[\Lambda^T_{S'}]) &\cong \pi_0(X_\bullet[\Lambda^T_S]) \times_{\pi_0(X_\bullet[\Lambda^{T\setminus\{s'\}}_S])} \pi_0 X_\bullet[\Delta^{T\setminus\{s'\}}_S] \\ &\cong (\pi_0 X_\bullet)[\Lambda^T_S] \times_{(\pi_0 X_\bullet)[\Lambda^{T\setminus\{s'\}}_S]} (\pi_0 X_\bullet)[\Delta^{T\setminus\{s'\}}_S] \cong (\pi_0 X_\bullet)[\Lambda^T_{S'}]. \end{aligned}$$

这就证明了 $(*'_k)$。

$(*'_k) \Rightarrow (*_k)$。设 T 是一个有限线性序，且 $S \subsetneq T$ 是一个基数为 k的子集，因此我们要证明 $X_\bullet[\Delta^T] \to X_\bullet[\Delta^T_S]$ 有一个截面。由于 $X_\bullet$ 是一个单纯 H-群集，故对于任意空间 A，π_0 映射$(A, X_\bullet)$ 是一个单纯群集，因此根据 §1.3，它是一个 Kan 复形。特别地，复合映射

$$\pi_0 \operatorname{map}(A, X_\bullet[\Delta^T]) \to \pi_0 \operatorname{map}(A, X_\bullet[\Delta^T_S]) \to (\pi_0 \operatorname{map}(A, X_\bullet))[\Delta^T_S]$$

是一个满射。由于 $\operatorname{map}(A,\ X_\bullet)$ 是一个单纯形 H-群集，$(*'_k)$ 蕴含

$$\pi_0 \operatorname{map}(A, X_\bullet[\Delta^T_S]) \to (\pi_0 \operatorname{map}(A, X_\bullet))[\Delta^T_S]$$

是一个双射，因此

$$\operatorname{map}(A, X_\bullet[\Delta^T]) \to \operatorname{map}(A, X_\bullet[\Delta^T_S])$$

is 一个有效满射。由于 A 是任意的，我们可以取 $A = X_\bullet[\Delta^T_S]$，从而推出 t $X_\bullet[\Delta^T] \to X_\bullet[\Delta^T_S]$ 有一个截面。□

现在我们可以给出以下结果。

*Pro*的 定理 *2.3.1*。 根据 引理 2.1.15，在必要时沿自身作拉回后，我们可以 f sup假设 f 有截面。要证明 f 是 Kan 纤维化，我们必须证明

$$X_\bullet[\Delta^n] \to Y_\bullet[\Delta^n] \times_{Y_\bullet[\Lambda^n_i]} X_\bullet[\Lambda^n_i]$$

对所有 $0 \leq i \leq n$都是有效满射。由于 $X_\bullet \to Y_\bullet$ 有截面，$X_\bullet[\Lambda^n_i] \to Y_\bullet[\Lambda^n_i]$也有截面。因此，推论 2.2.15 表明

$$\pi_0\left(Y_\bullet[\Delta^n] \times_{Y_\bullet[\Lambda^n_i]} X_\bullet[\Lambda^n_i]\right) \to \pi_0(Y_\bullet[\Delta^n]) \times_{\pi_0(Y_\bullet[\Lambda^n_i])} \pi_0(X_\bullet[\Lambda^n_i])$$

是双射。根据 命题 2.3.6，映射

$$\pi_0(Z_\bullet[\Lambda^n_i]) \to (\pi_0 Z_\bullet)[\Lambda^n_i]$$

对任意单纯形 H-群集 $Z_\bullet$ 都是双射。将其应用于 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$，结合上述结果即可证明

$$\pi_0\left(Y_\bullet[\Delta^n] \times_{Y_\bullet[\Lambda^n_i]} X_\bullet[\Lambda^n_i]\right) \to (\pi_0 Y_\bullet)[\Delta^n] \times_{(\pi_0 Y_\bullet)[\Lambda^n_i]} (\pi_0 X_\bullet)[\Lambda^n_i]$$

是一个双射。因此，$X_\bullet \to Y_\bullet$ 是 Kan 纤维化，当且仅当 $\pi_0 X_\bullet \to \pi_0 Y_\bullet$ 是 Kan 纤维化；这是经典结果（参见 §1.3）。□

2.4. 处处 Kan 对象

在本小节中，我们将准确表述并证明：具有马尔采夫运算是保证一个单纯空间满足 Kan 条件的最弱代数条件。

定义 2.4.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积的 ∞-范畴。若对象 $X \in \mathcal{C}$ 满足以下条件，则称其为*普遍 Kan*：

$(*)$ 对于每个保有限积函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$，单纯空间$F(X)$ 都满足 Kan 条件

定理 2.4.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积的 ∞-范畴。给定 $X \in \mathcal{C}$，以下条件等价：

(1) X 是普遍 Kan 的。(2) 对每个保有限积函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et})$，单纯集$F(X)$ 都满足 Kan 条件。(3) 对每个余单纯对象 $K^\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta, \mathcal{C})$，单纯空间映射$\mathcal{C}(K^\bullet, X)$ 都满足 Kan 条件。(4) 令 $S^1_\bullet = \Delta^1/\partial\Delta^1$ 表示单纯圆。则单纯集 $\pi_0 \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X^{S^1_\bullet}, X)$ 关于 $\Lambda^2_1 \subset \Delta^2$ 满足角填充条件。(5) X 具有马尔采夫运算。(6) 对每个保有限积函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})^{[1]}$,，若 $F(X)$ 是有效满射，则它是 Kan 纤维化。

证明。 (1)⇒(2 和 3)。显然。(2)⇒(4)。显然。(3)⇒(4)。一般而言，若 $Z_\bullet$ 是一个单纯空间，则

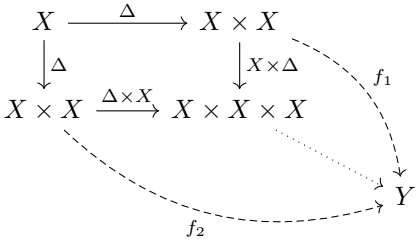
$$\pi_0(Z_\bullet[\Lambda^2_1]) \to (\pi_0 Z_\bullet)[\Lambda^2_1]$$

是一个有效满射。特别地，若 $Z_\bullet$ 满足 Kan 条件，则 $\pi_0 Z_\bullet$ 满足关于 $\Lambda^2_1 \subset \Delta^2$的角填充条件。因此，取 $Z_\bullet$ =映射$\mathcal{C}(X^{S^1_\bullet}, X)$，(3) 蕴含 (4)。

(4)⇒(5)。这一论证归功于 Jibladze–Pirashvili [JP02]。根据假设，

$$\pi_0 \,\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X^{S^1_\bullet}, X)[\Delta^2] \to (\pi_0 \,\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X^{S^1_\bullet}, X))[\Lambda^2_1]$$

是一个有效满射。一般而言，$(\pi_0$ 映射$\mathcal{C}(X^{S^1_\bullet}, Y))[\Lambda^2_1]$ 的一个点由两个映射f_1，f_2组成：$X \times X \to Y$，它们使得



中的外层图表在未指定的同伦意义下交换。到 π_0 映射$\mathcal{C}(X^{S^1_\bullet}, Y)[\Delta^2]$ 的一个提升由映射 $X \times X \times X \to Y$ 给出，它使外层三角形在未指定的同伦意义下交换。取 $Y = X$为投影 $f_i = \pi_i$，这样的提升恰好是 X上的马尔采夫运算。

(5)⇒(6). 若 X 具有马尔采夫运算，且 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\Delta, \mathcal{S}\mathrm{pc})^{[1]}$ 保持有限积，则 $F(X)$ 具有单纯群胚之间映射的结构。因此，若 $F(X)$ 是有效满射，则根据定理 2.3.1，它是 Kan 纤维化。

(6)⇒(1). 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 是一个保持有限积的函子。若 $F(X) = \emptyset$，则 $F(X)$ 满足 Kan 条件。否则，$F(X) \to *$ 是有效满射，而唯一的自然变换 $F \to *$ 确定了一个保持有限积的函子 $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$[1]。由此可知，$F(X) \to *$ 是 Kan 纤维化，因此 $F(X)$ 满足 Kan 条件。□

推论 2.4.3. 空间 X 是普遍 Kan 的，当且仅当它是超简单的。

证明. 结合 定理 2.4.2和 定理 2.2.13。 □

例 2.4.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个加法的 ∞-范畴。那么其中的每个对象 $\mathcal{C}$ 都是普遍 Kan 的。

处处 Kan 对象具有若干良好的闭包性质。

命题 2.4.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积的 ∞-范畴。

(1) 若 $\{X_i \in \mathcal{C} : i \in I\}$ 处处 Kan，且 $\mathcal{C}$ 中存在积 $\prod_{i\in I} X_i$，则它处处 Kan。(2) 设 $\mathcal{C}$ 中有一个态射 $f\colon X \to Y$，且它有一个截面。若 X 处处 Kan，则 f 作为 $\mathcal{C}^{[1]}$ 中的对象处处 Kan。(3) 若 $X \in \mathcal{C}$ 处处 Kan，且 Y 是 X 的收缩，则 Y 处处 Kan。(4) 假设 $X \in \mathrm{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ 处处 Kan。若 $\lim X \in \mathcal{C}$ 存在，则它处处 Kan。(5) 若 $\mathcal{C}$ 存在余积，且余积与积可分配，并且 $\mathcal{C}$ 中的 $\{X_i : i \in I\}$ 是一组处处 Kan 对象，则余积 $\coprod_{i\in I} X_i$ 处处 Kan。(6) 若 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持有限积，且 $X \in \mathcal{C}$ 处处 Kan，则 $F(X)$ 处处 Kan。(7) 若 $X \in \mathcal{C}$ 处处 Kan，且 K 是一个空间，使得余张量 X^K 存在，则它处处 Kan。(8) 若 $X \in \mathcal{C}$，则 X 处处 Kan，当且仅当它在 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ 中的像处处 Kan。(9) 给定 $\mathcal{C}$ 中的一个映射 $f\colon Y \to X$，对象 X 作为 $\mathcal{C}$ 中的对象处处 Kan，当且仅当它作为 $\mathcal{C}_{Y/}$ 中的对象处处 Kan。(10) 假设给定一个笛卡尔方形图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{C} \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{D}' & \xrightarrow{g} & \mathcal{D} \end{array}$$

具有有限积的 ∞-范畴以及保持有限积的函子。若 f 是满的，则对象 $X' \in \mathcal{C}'$ 是普遍 Kan 的，当且仅当 $g'(X') \in \mathcal{C}$ 和 $f'(X') \in \mathcal{D}'$ 都是普遍 Kan 的。

(11) 假设给定一族 $\{\mathcal{C}_i : i \in I\}$ 个具有有限积的 ∞-范畴。对象 $\{X_i : i \in I\} \in \prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 是普遍 Kan 的，当且仅当对所有 $i \in I$，$X_i \in \mathcal{C}_i$ 都是普遍 Kan 的。

证明。(1) 这是因为满足 Kan 条件的单纯空间在取积下封闭。

(2) 设 $s\colon Y \to X$ 是一个截面，因此 $f \circ s = \mathrm{id}_Y$。若 $t\colon X \times X \times X \to X$ 是 X 上的一个马尔采夫运算，则复合映射

$$f \circ t \circ (s \times s \times s)\colon Y \times Y \times Y \to X \times X \times X \to X \to Y$$

是一个与 f 相容的 Y 上的马尔采夫运算。因此，f 具有马尔采夫运算，故为普遍 Kan。

(3) 这是因为满足 Kan 条件的单纯空间在收缩下封闭。

(4) 如果 $X \in \mathrm{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ 是普遍 Kan 的，那么它具有一个马尔采夫运算。如果 $\lim X$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在，那么 $\lim(X^3) \to (\lim X)^3$ 是一个等价，因此 X 上的马尔采夫运算会在 $\lim X$ 上诱导出一个马尔采夫运算，这意味着 $\lim X$ 是普遍 Kan 的。

(5) 这由 定理 2.4.2 和 引理 2.2.11 得出。(6) 这由 定理 2.4.2 得出，因为如果 $X \in \mathcal{C}$ 具有马尔采夫运算，且 F 保积，那么 $F(X)$ 具有马尔采夫运算。(7) 由于对角函子 $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})$ 保持有限积，这由 (3) 和 (5) 得出。(8) 这由 定理 2.4.2 得出，因为 $X \in \mathcal{C}$ 具有马尔采夫运算当且仅当$\tau(X) \in \mathrm{h}\mathcal{C}$ 具有马尔采夫运算。

(9) 由于遗忘函子 $\mathcal{C}_{Y/} \to \mathcal{C}$ 保持有限积，由 (5) 可知，如果 X 在 $\mathcal{C}_{Y/}$ 中是普遍 Kan 的，那么它在 $\mathcal{C}$ 中也是普遍 Kan 的。反过来，假设 X 在 $\mathcal{C}$中是普遍 Kan 的。根据 定理 2.4.2，只需证明：若 $K^\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta, \mathcal{C}_{Y/})$ 是一个余单纯对象，那么 映射$_{\mathcal{C}_{Y/}}(K^\bullet, X)$ 满足 Kan 条件。这个单纯空间处于一个笛卡尔方形图中：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}_{\mathcal{C}_{Y/}}(K^\bullet, X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(K^\bullet, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{f\} & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{array}.$$

由于从满足 Kan 条件的单纯空间到常值单纯空间的每个映射都是 Kan 纤维化，因此由 引理 2.1.15 可知，映射$_{\mathcal{C}_{Y/}}(K^\bullet, X) \to \{f\}$ 是 Kan 纤维化，这意味着 映射$_{\mathcal{C}_{Y/}}(K^\bullet, X)$ 满足 Kan 条件，正如所声称的那样。

(10) 基本上，同 (9) 相同的论证也适用。由于 g' 和 f' 保持有限积，若 $X' \in \mathcal{C}'$ 是普遍 Kan，则由 (5) 可知 $g'(X')$ 和 $f'(X')$ 都是普遍 Kan。反过来，假设给定 $X' \in \mathcal{C}'$，使得 $g'(X')$ 和 $f'(X')$ 都是普遍 Kan。由定理 2.4.2，只需证明：若 $K^\bullet \in \mathcal{C}'$ 是一个余单纯对象，则 map$_{\mathcal{C}'}(K^\bullet, X)$ 满足 Kan 条件。这个单纯空间位于如下形式的一个笛卡尔方形图中

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}_{\mathcal{C}'}(K^\bullet, X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(g'(K^\bullet), g'(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle f'_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \mathrm{map}_{\mathcal{D}'}(f'(K^\bullet), f'(X)) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(fg'(K^\bullet), fg'(X)) \end{array}.$$

由于 f 是满的且 X 是普遍 Kan，f_* 是单纯空间之间的有效满射，并且具有马尔采夫运算，因此根据定理 2.3.1，它是一个 Kan 纤维化。根据引理 2.1.15，可知 f'_*是一个 Kan 纤维化。由于 $f'(X)$是普遍 Kan，映射$_{\mathcal{D}'}(f'(K^\bullet)\ f'(X))$满足 Kan 条件，因此映射$_{\mathcal{C}'}(K^\bullet, X)$ 也满足 Kan 条件，正如所需。

(11) 由于

$$\mathrm{map}_{\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i}(\{Y_i : i \in I\}, \{X_i : i \in I\}) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{map}_{\mathcal{C}_i}(Y_i, X_i),$$

this 满足 Kan 条件的单纯空间在积下封闭，因此 □

我们还记录以下结果以备后用。

引理 2.4.6。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积的 ∞-范畴，$X \in \mathcal{C}$ 是一个 H-群集对象。设给定带基点连通空间 A 和 B，且余张量 $X^{A\times B}$ 在 $\mathcal{C}$中存在。则存在一个等价

$$X^{A\times B} \simeq X^{A\vee(A\wedge B)\vee B}.$$

In 特别地，如果 $X \in \mathcal{C}$ 是普遍 Kan，且 $X^{A\times B}$ 在 $\mathcal{C}$中存在，那么 $X^{A\vee(A\wedge B)\vee B}$ 在 $\mathcal{C}$中存在 .

证明。 根据 例 2.2.17，对每个 $Y \in \mathcal{C}$ 都有一个自然等价

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(Y, X^{A\times B}) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(Y, X)^{A\times B} \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(Y, X)^{A\vee(A\wedge B)\vee B},$$

因此， $X^{A\times B} \simeq X^{A\vee(A\wedge B)\vee B}$ 如前所述。 □

3. 无穷代数理论

现在我们将注意力转向无穷代数理论及其模型的研究。本节确立了一些可对一般（即非 Malcev）理论证明的基本结果。我们在 §3.1–3.3. 中给出定义，并确立一些基本性质和构造。

将无穷理论朴素地定义为带余积的（局部小） ∞-范畴，并不适用于某些目的。在最自然的情况下，我们采用这一一般性，将此类 ∞-范畴称为预理论；但在其他情况下，我们要求理论由一个小对象集合生成。这样便可以建立一套合理的自由分解理论，我们将在 §3.4. 中确立这套理论。

在 §3.5 中，我们将这些一般的无穷理论与正则基数 κ 所对应的 κ-元理论这一概念联系起来。正如我们将要说明的，每个 κ-元理论都可以补全为一个具有相同模型的一般理论；而如果 $\mathcal{P}$ 是一个理论，那么 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可呈现，当且仅当它以这种方式由某个 κ 得到。特别地，我们所考虑的理论和模型，严格推广了更为熟悉的有限元理论及其非阿贝尔导出范畴（通过取 $\kappa = \omega$ 得到）。

3.1. 理论及其模型

定义 3.1.1。我们称

(1) 预理论 是一个（局部小） ∞-范畴 $\mathcal{P}$，且具有小余积；(2) 预理论之间的同态 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是保持小余积的函子 .

我们在上述定义中使用形容词预，主要是出于技术原因；实际上，我们希望处理满足以下自然小性条件的预理论：

定义 3.1.2。理论是满足以下附加条件的预理论 $\mathcal{P}$：

(∗) 存在一个小集合 $\{P_s\colon s \in S\}$ 个对象，它们在余积和收缩下生成 $\mathcal{P}$。此时，我们称 $\{P_s\colon s \in S\}$ 是 $\mathcal{P}$ 的生成元集（或类型集），并将它生成的全子范畴 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ 称为 $\mathcal{P}$ 的生成子范畴。

注 3.1.3. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是一个本质满的预理论同态。若 $\mathcal{P}$ 是一个理论，则 $\mathcal{Q}$ 也是一个理论。事实上， $\mathcal{P}$ 的任意生成元集在 $\mathcal{Q}$ 中的像构成一个生成元集。

预理论及其同态构成一个（非常大的） ∞-范畴 $\mathcal{T}\mathrm{hry}$，它是 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 的一个非全子范畴。我们注意到以下结果。

命题 3.1.4 ([Lur09，推论 5.3.6。10])。 ∞-范畴 $\mathcal{T}\mathrm{hry}$ 具有所有小极限，且这些极限由遗忘函子保留，该函子 $\mathcal{T}\mathrm{hry} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 取值于局部小 ∞-范畴。 □

在本小节余下部分固定一个预理论 $\mathcal{P}$。至少有两种合理的定义可以刻画 ∞-范畴，即 $\mathcal{P}$ 的模型范畴。我们将在下文 §3.4 中证明，当 $\mathcal{P}$ 是一个理论时，这两种定义一致。

定义 3.1.5。 ∞的非有界模型范畴是 $\mathcal{P}$ 的全子范畴

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$$

关于 $\mathcal{P}$ 上的保积预层，即函子 $X\colon \mathcal{P}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 的 ∞-范畴，其中典范映射

$$X(\coprod_{i\in I} P_i) \to \prod_{i\in I} X(P_i)$$

对于任意对象集合 $\{P_i\colon\ \mathcal{P}\text{ 中的 }i\in I\}$，都是等价。

对于一般的预理论 $\mathcal{P}$，∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$ 可能不是局部小的。出于这一原因及其他原因，我们还考虑以下子范畴：

定义 3.1.6。∞-范畴 $\mathcal{P}$ 的模型是如下全子范畴

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}=\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}\times_{\mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{pc})}\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})\subset\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$$

由那些底层预层是小的非有界模型所张成，也就是说，这些预层可以写成可表预层的小余极限。

无论哪种情况，我们都记

$$\nu\colon\mathcal{P}\to\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}\subset\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$$

为受限 Yoneda 嵌入。

命题 3.1.7. 全子范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}\subset\mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 在以下操作下封闭：

(1) 小极限；(2) 满足逐层 Kan 条件的单纯对象的几何实现，即单纯空间 $X_\bullet$ 对于所有 $X_\bullet(P)$ 都满足 Kan 条件 $P\in\mathcal{P}$；(3) 按照 $X_\bullet$ 的定义 4.7.2 所述逐层分裂的单纯对象的几何实现[Lura。2]。

证明。(1) 由于极限与极限可交换，任意非有界模型图表的逐点极限仍是一个 $\mathcal{P}$ 非有界模型。

(2) 固定一个单纯对象 $X_\bullet\in\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}},\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}})$，使得 $X_\bullet(P)\in\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 对所有 $P\in\mathcal{P}$ 都满足 Kan 条件。令 $|X_\bullet|$ 表示在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 中逐层取 $X_\bullet$ 的几何实现。我们必须证明 $|X_\bullet|$ 仍是一个模型。换言之，我们必须证明，若 $\{P_i\colon i\in I\}$ 是 $\mathcal{P}$中的一组对象，则自然映射

$$|X_\bullet|(\coprod_{i\in I}P_i)\to\prod_{i\in I}|X_\bullet|(P_i)$$

是一个等价。由于 $X_\bullet$ 是一个单纯模型，该映射可分解为

$$|X_\bullet|(\coprod_{i\in I}P_i)=|X_\bullet(\coprod_{i\in I}P_i)|\simeq|\prod_{i\in I}X_\bullet(P_i)|\to\prod_{i\in I}|X_\bullet(P_i)|=\prod_{i\in I}|X_\bullet|(P_i),$$

其中，第一个和最后一个等式只是展开了 $|X_\bullet|$的定义。因此，我们归结为验证映射

$$|\prod_{i\in I}X_\bullet(P_i)|\to\prod_{i\in I}|X_\bullet(P_i)|$$

是一个等价。根据 命题 2.1.14，在以下假设下该结论成立：$X_\bullet(P_i)$ 对所有 $i\in I$ 都满足 Kan 条件。

(3) 按照 (2) 中的论证，只需改为证明：如果 $\{X_\bullet(i)\colon\ i\in I\}$ 是一个分裂单纯空间的集合，那么映射

$$|\prod_{i\in I}X_\bullet(i)|\to\prod_{i\in I}|X_\bullet(i)|$$

$\widetilde{\ }$ 是一个等价。事实上，如果我们选择每个 $X_\bullet(i)\in\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 到对象 $X_\bullet(i)\in\widetilde{\mathrm{Fun}}(\Delta^{\mathrm{op}}_{-\infty},\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 的提升，那么 $\prod_{i\in I}X_\bullet(i)$ 提升到 $\prod_{i\in I}X_\bullet(i)$，这意味着

$$|\prod_{i\in I}X_\bullet(i)|\simeq\prod_{i\in I}\widetilde{X}_{-1}(i)\simeq\prod_{i\in I}|X_\bullet(i)|$$

如所述。 □

推论 3.1.8。单纯对象 $X_\bullet$ 在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$中满足 Kan 条件，当且仅当它逐层满足 Kan 条件。

证明。 正如我们在例 2.1.10中所观察到的，切赫神经满足 Kan 条件，因此 命题 3.1.7 表明 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 在切赫神经的几何实现下封闭。特别地，态射 $X \to Y$ 在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}}$中是有效满射，当且仅当$X(P) \to Y(P)$ 对所有 $P \in \mathcal{P}$都是有效满射。断言得证。 □

推论 3.1.9。 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是预理论的一个同态。那么沿着 f 的限制定义了一个函子

$$f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}}$$

该函子保留所有小极限，以及满足 Kan 条件或逐层分裂的单纯对象的所有几何实现。如果 f 是本质满的，那么 f^* 是保守的。□

3.2. 理论的构造

我们简要介绍预理论的两个良好的闭包性质。

命题 3.2.1。 设 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个非有界模型。那么 ∞-范畴

$$\mathcal{P}_{/X} = \mathcal{P} \times_{\mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})} \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})_{/X}$$

X 的元素又构成一个预理论，并且存在自然等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}_{/X}} \simeq (\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}})_{/X}.$$

若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是一个模型，则这限制为一个等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_{/X}} \simeq (\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/X}.$$

证明。 切片范畴 $\mathcal{P}_{/X}$ 拥有所有小余积，且这些余积由遗忘函子$\mathcal{P}_{/X} \to \mathcal{P}$创建。通过非直化，存在一个等价

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{P}, \mathcal{S}\mathrm{pc})_{/X} \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{P}_{/X}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$$

~将映射 $Y \to X$ 对应到预层 Y，该预层定义在 $\mathcal{P}_{/X}$ 上，具体为

$$\widetilde{Y}(\alpha\colon P \to X) = Y(P) \times_{X(P)} \{\alpha\}.$$

若 X 是小的，则这限制为小预层范畴之间的等价。在假设 X 保持积的条件下，我们看到 $Y\colon \mathcal{P}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 保持积，当且仅当 $Y\colon (\mathcal{P}_{/X})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 保持积，因此这进一步限制为所声称的等价 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}_{/X}} \simeq (\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}})_{/X}$，并且当 X 是小的时，也限制为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{P}_{/X}} \simeq (\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/X}$。□

给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，记 $\mathcal{C}^\sharp$ 为 $\mathcal{C}$ 的幂等完备化。

命题 3.2.2。 设 $\mathcal{P}$ 是一个预理论。那么幂等完备化 $\mathcal{P}^\sharp$ 仍是一个预理论，且沿包含 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^\sharp$ 的限制诱导出等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{P}^\sharp}, \qquad \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}^\sharp}.$$

证明。显然， $\mathcal{P}^\sharp$ 仍然是一个预理论。根据 [Lur09，命题 5.1.4，9], 沿包含 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^\sharp$ 的限制定义了一个等价 $\mathrm{Fun}((\mathcal{P}^\sharp)^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$，并且很容易看出，这一等价限制为非有界模型全子范畴之间的等价。由于行走幂等元是小的，Yoneda 嵌入 $\nu\colon \mathcal{P}^\sharp \to \mathrm{Fun}((\mathcal{P}^\sharp)^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 的值落在小预层的全子范畴 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 中，因此它进一步限制为模型全子范畴之间的等价。□

3.3. 高阶像分解

普通泛代数中的一项基本运算是构造 像分解：代数对象之间的任意同态 $f\colon X \to Y$ 都可规范地分解为一个有效满射 $X \to \operatorname{im} f$，后接一个单态射 $\operatorname{im} f \to Y$。本节致力于研究这一构造在高阶泛代数中的对应形式。

定义 3.3.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限的 ∞-范畴。若 $X \to Y$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，则称其为

(1) 若 (-2)-截断，则它是一个等价；(2) 若对于某个 $n \geq -2$，$(n+1)$-截断，则对角函子 $X \to X \times_Y X$ 是 n-截断。

若对象 $X \in \mathcal{C}$ 是 n-截断，则 $X \to *$ 是 n-截断。

De义 3.3.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限的 ∞-范畴。若态射 $X \to Y$，则称其为 e

(1) (-1)-连通 当它是任意态射时。(2) $(n+1)$-连通 对于某个 $n \geq -1$，当它是一个有效满射（定义 2.1.6）且对角函子 $X \to X \times_Y X$ 是 n-连通时。

对于空间的 ∞-范畴，n-截断态射和 n-连通态射恰好是经典同伦论中的 n-截断映射和 n-连通映射，参见 [Lur09，第 6 节。5]。由此可得以下结论。

命题 3.3.3。 在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$ 中，态射 $X \to Y$ 是 n-连通的（分别是 n-截断的），当且仅当对于所有 $P \in \mathcal{P}$，$X(P) \to Y(P)$ 都是空间的 n-连通映射（分别是 n-截断映射）。

证明。 由于空间映射的切赫神经是满足 Kan 条件的单纯空间，命题 3.1.7 表明，可以逐层检验定义 3.3.1 和 定义 3.3.2 中的条件。 □

推论 3.3.4. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是一个预理论的同态。那么

$$f^* \colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\mathrm{nb}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$$

它保留 n-连通态射和 n-截断态射。若 f 是本质满的，则 f^* 反映n-连通态射和 n-截断态射。□

命题 3.3.3 导出所需的高阶像分解。

命题 3.3.5. 在 $(n+1)$-连通态射和 n-截断态射在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$上构成一个分解系统（参见 [Lur09，定义 5.2.8。8]），其分解逐层构造。

证明。 众所周知，在 $(n+1)$-连通态射和 n-截断态射在 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$上构成一个分解系统，例如参见 [Lur09，例 5.2.8。16], 进一步可知，它们在任意预层范畴上构成一个分解系统，且分解逐层构造。由于纤维逐点截断保留无限积，因此这个逐层构造的分解系统在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 下保留全子范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$。 □

例 3.3.6. 取 $n = -1$，$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$ 中的每个态射 $f\colon X \to Y$ 都唯一地分解为一个有效满射 $X \to \operatorname{im} f$，后接一个单态射 $\operatorname{im} f \to Y$。这个分解可以显式构造如下：

$$\operatorname{im} f = \operatorname{colim}\left(Y \longleftarrow X \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow} X \times_Y X \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow} X \times_Y X \times_Y X \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow} \cdots \right)$$

不过就是 f 的切赫神经的几何实现。

3.4. 自由分解的存在性

区分理论与预理论的主要特征在于 自由分解 的存在。 .

引理 3.4.1. 设 $\mathcal{P}$ 为一个预理论。以下各项等价：

(1) 包含 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$是一个等价；(2) 对于每个 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$，存在一个有效满射 $\nu P \to X$，其中某个 $P \in \mathcal{P}$；(3) 每个 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$都拥有一个自由单纯分解：存在一个等价

$$X \simeq |\nu P_\bullet|$$

对于某个单纯对象 $P_\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{P})$，使得 $\nu P_\bullet$ 满足 Kan 条件。

证明。 (1)⇒(2)：我们必须证明，如果 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，那么存在某个 $P \in \mathcal{P}$ 以及一个有效满射 $\nu P \to X$。由于 X 的底层预层是小的，因此存在一个小集合 $\{P_s : s \in S\}$，它由 $\mathcal{P}$ 的对象组成，并且存在一个预层的有效满射 $\coprod_{s\in S} \nu P_s \to X$。由于$X$ 是一个模型，此映射可分解为

$$\coprod_{s\in S} \nu P_s \to \nu \coprod_{s\in S} P_s \to X.$$

因此， $\nu \coprod_{s\in S} P_s \to X$ 是一个有效满射，所以我们可以取 $P = \coprod_{s\in S} P_s$。

(2)⇒(3)：对于有限元理论，这一点见于 [Lur09，引理 5.5.8 的证明。13], 这里也适用相同的证明。

(3)⇒(1)：这是显然的，因为可表对象的几何实现特别是可表对象的一个小 1
coli集。□

定理 3.4.2。 设 $\mathcal{P}$ 是一个理论。那么 引理 3.4.1中的三个等价性质均成立。

证明。 我们验证（2）。设 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ 是一个小生成子范畴。由于空间的有效满射在积和收缩下保持不变，对于映射 $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$，它是有效满射，当且仅当对所有 $P \in \mathcal{P}_0$， $f(P)\colon X(P) \to Y(P)$ 是有效满射。由于 $\mathcal{P}_0$ 本质小，且 X 取值于小空间，切片范畴 $(\mathcal{P}_0)_{/X}$ 是本质小的。通过为 $((\mathcal{P}_0)_{/X})^{\mathrm{core}}$ 的每个路径连通分支选取代表元，我们得到一个对象小族 $\{P_i \in \mathcal{P}_0 : i \in I\}$ 以及一个映射

$$\coprod_{i\in I} \nu P_i \to X$$

它在 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}_0)$ 中限制为一个有效满射。现在，这会经由一个$\nu \coprod_{i\in I} P_i \to X$ 的模型映射分解；该映射限制到 $\mathcal{P}_0$ 后是有效满射，因此它本身也是有效满射。□

推论 3.4.3. 对于任意理论 $\mathcal{P}$， ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 存在所有小极限。

证明. 由于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$，这可由 命题 3.1.7推出。 □

推论 3.4.4. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是理论之间的一个同态。沿着 f 的限制定义了一个函子

$$f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

它会保持所有小极限，以及满足 Kan 条件或逐层分裂的单纯对象的所有几何实现。若 f 本质满，则 f^* 是保守的。

证明。 由于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$，由 推论 3.1.9可得。 □

3.5. 有界理论与可呈性

自然界中出现的理论往往由较少量的数据生成。

定义 3.5.1. 设 κ 为一个正则基数。κ元理论 是一个小的 ∞-范畴 $\mathcal{P}_\kappa$，它具有 κ-小余积。∞-范畴模型 的 $\mathcal{P}_\kappa$ 是预层的全子范畴

$$\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa) \subset \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}_\kappa)$$

X: $\mathcal{P}^{\mathrm{op}}_\kappa \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$，其中的预层保持 κ-小积。

前几节的观察结果可推广为 κ-元理论的变体，此处不再赘述。

例 3.5.2. ω-元理论就是有限元理论。对于有限元理论 $\mathcal{C}$，我们简记为

$$\mathcal{P}\mathrm{sh}_\Sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}\mathrm{sh}^\omega_\Sigma(\mathcal{C}).$$

这个 ∞-范畴通常称为非阿贝尔导出范畴或动画化，即 $\mathcal{C}$，并见 [Lur09第 5.5 节。8]。

警告 3.5.3。设 κ 为正则基数，且 $\mathcal{P}_\kappa$ 为一个 κ-元理论。那么，对于任意正则基数 $\lambda \leq \kappa$，$\mathcal{P}_\kappa$ 也是一个λ-元理论，但当 $\kappa \neq \lambda$时， ∞-范畴 $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 与 $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\lambda_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 几乎从不等价。

命题 3.5.4。设 $\mathcal{P}_\kappa$ 为一个 κ-元理论。那么， $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 是$\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}_\kappa)$ 的一个 κ-可达局部化。特别地，$\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 是可呈现的。

证明。由于 κ-滤过余极限保持 κ-小积，我们看到包含 $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}_\kappa)$ 保持 κ-滤过余极限。按构造，这个包含将 $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 实现为由以下对象构成的全子范畴：这些对象相对于任意 κ-小集合 $\{P_i : i \in I\}$，其中对象属于 $\mathcal{P}_\kappa$，且关于 $\coprod_{i\in I} \nu P_i \to \nu \coprod_{i\in I} P_i$ 局部。由于 $\mathcal{P}_\kappa$ 是小的，这构成了一个小的态射集合，因此 $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 是 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}_\kappa)$ 的一个局部化 [Lur09，命题 5.5.4.15]。□

对于每个正则基数 κ，分别采用不同的 κ-元理论概念并不方便。现在我们将说明，如何将不同 κ 下的 κ-元理论统一嵌入一般无穷元理论的框架中。

定义 3.5.5. 设 κ 是一个正则基数。若存在一个本质小的全子范畴 $\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$ 满足以下条件，我们就称理论 $\mathcal{P}$ 是 κ-有界 的：

(1) $\mathcal{P}$ 的每个对象都是 $\mathcal{P}_\kappa$ 中对象的小余积的收缩；(2) $\mathcal{P}_\kappa$ 在 $\mathcal{P}$ 中对 κ-小余积封闭；

(3) 对每个 $P \in \mathcal{P}_\kappa$ 以及每个对象集合 $\{P_i : 若 \ i \in I\}$ 属于 $\mathcal{P}$，则典范映射 $\mathrm{colim}_{F\subset I, |F|<\kappa} \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, \coprod_{i\in F} P_i) \to \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, \coprod_{i\in I} P_i)$ 是一个等价。

在这种情况下， $\mathcal{P}_\kappa$ 是一个 κ元理论，而我们称 $\mathcal{P}$ 是由 κ元理论 $\mathcal{P}_\kappa$生成的 .

定义 3.5.6。 有界理论是指对某个 κ而言为 κ有界的理论。

这种定义至少在某种形式上可以追溯到 Wraith [Wra70，第 13]页。

警告 3.5.7。 设 $\mathcal{P}$ 是一个理论，且 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ 是一个按定义 3.1.2 意义上的生成子范畴，并且对 κ小余积封闭。那么 $\mathcal{P}_0$ 是一个 κ元理论，但 $\mathcal{P}$ 未必由 κ元理论 $\mathcal{P}_0$ 按定义 3.5.5 的意义生成，因为条件 (3) 可能不成立。

例 3.5.8. 并非所有有趣的理论都是有界的。例如，令 $\mathcal{P}$ 为紧豪斯多夫拓扑空间的 1-范畴中由集合的 Stone– Čech 紧化所张成的全子范畴。经典结果表明， $\mathcal{P}$的集合值模型范畴就是紧豪斯多夫拓扑空间范畴，但理论 $\mathcal{P}$ 并非有界。

例 3.5.9. 令 $\mathcal{P}_\kappa$ 为一个 κ元理论。根据 命题 3.5.4，若 $P \in \mathcal{P}$ 则 $\nu P \in \mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$是 κ-紧对象。因此， $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 中由以下对象在余积下生成的全子范畴νP 针对 $P \in \mathcal{P}_\kappa$ 构成一个 κ-有界理论，由 $\mathcal{P}_\kappa$生成。

这里的主要观察是，例 3.5.9 涵盖了所有有界理论。

定理 3.5.10. 假设 $\mathcal{P}$ 由 κ-元理论 $\mathcal{P}_\kappa$生成。那么沿着$\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$ 的限制定义了一个等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa).$$

证明。 根据 命题 3.2.2，我们可以将 $\mathcal{P}$ 替换为由 $\mathcal{P}_\kappa$在余积下生成的全子范畴，因此可以假设 $\mathcal{P}$ 中的每个对象都是 $\mathcal{P}_\kappa$中对象的余积。显然，沿着 $\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$ 的限制定义了一个函子

$$R\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa).$$

首先我们断言，复合

$$R\nu\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$$

保持余积。由于 $\mathcal{P}$ 由 $\mathcal{P}_\kappa$生成，要证明 $R\nu$ 保持余积，只需证明 $R\nu$ 保持 $\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$中对象集合的余积。设 $\{P_i : i \in I\}$ 是 $\mathcal{P}_\kappa$中的一组对象。 κ的小子集构成的偏序集是 I-滤过的，因此，由于 $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa) \subset \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}_\kappa)$ 在 κ-滤过余极限下封闭（根据 命题 3.5.4），我们推得

$$R\nu \coprod_{i\in I} P_i \simeq R\nu \operatorname*{colim}_{F\subset I,\,|F|<\kappa} \coprod_{i\in F} P_i \simeq \operatorname*{colim}_{F\subset I,\,|F|<\kappa} R\nu \coprod_{i\in F} P_i \simeq \operatorname*{colim}_{F\subset I,\,|F|<\kappa} \coprod_{i\in F} R\nu P_i \simeq \coprod_{i\in I} R\nu P_i.$$

这里，第二个等价使用了（3）中的定义 3.5.5。

接下来我们声称， $R\nu$ 是全忠实的。由于 $R\nu$ 保持余积且 $\mathcal{P}_\kappa$ 生成 $\mathcal{P}$，只需证明：若 $Q \in \mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$ 且 $P \in \mathcal{P}$，则

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Q, P) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}_\kappa}(R\nu Q, R\nu P).$$

根据 R的定义，这显然成立。

由于复合函子 $\mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 保持余积，存在一个受限的 Yoneda em嵌入

$$G\colon \mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa) \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}.$$

我们声称 $R \dashv G$。只需证明：若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，则存在一个自然等价

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X, G(-)) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}_\kappa}(RX, -).$$

若 $X = \nu P$ 对于某个 $P \in \mathcal{P}$，那么根据 G的定义，这两个函子相同。一般而言，根据定理 3.4.2，我们可以选取一个分解 $X \simeq |\nu P_\bullet|$，使其与 $P_n \in \mathcal{P}$满足逐层 Kan 条件。容易看出 R 保留满足逐层 Kan 条件的单纯对象的几何实现，因为这些几何实现无论在$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 还是 $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\sigma(\mathcal{P}_\kappa)$中都是逐层计算的，因此

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X, G(-)) \simeq \mathrm{Tot}\,\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(\nu P_\bullet, G(-)) \simeq \mathrm{Tot}\,\mathrm{map}_{\mathcal{P}_\kappa}(R\nu P_\bullet, -) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}_\kappa}(RX, -)$$

按需进行。

若 $Y \in \mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$，则余单位 $RGY \to Y$ 显然是一个等价。因此$R \dashv G$ 将 $\mathcal{P}\mathrm{sh}^\kappa_\Sigma(\mathcal{P}_\kappa)$ 实现为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的余局部化；要使其成为伴随等价，只需 R 是保守的。根据假设 $\mathcal{P}$ 由$\mathcal{P}_\kappa$生成，这一点显然成立。□

推论 3.5.11. 理论 $\mathcal{P}$ 有界，当且仅当 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可呈现。

证明。定理 3.5.10 和命题 3.5.4 一起推出：若 $\mathcal{P}$ 有界，则 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可呈现。反过来，设给定一个理论 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可呈现。给定集合 $\{P_s : s \in S\}$，它是 $\mathcal{P}$ 的一组生成元，则存在一个正则基数 κ，使得对于所有 $s \in S$，$\nu P_s \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 都是 κ-紧对象。若 $\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$ 是由 $\{P_s : s \in S\}$ 在κ-小积下生成的全子范畴，则可知对于所有 $P \in \mathcal{P}_\kappa$，$\nu P \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 都是 κ- 紧对象。因此，根据定义 3.5.5 的意义，$\mathcal{P}$ 由 κ- 元理论 $\mathcal{P}_\kappa$ 生成，这意味着 $\mathcal{P}$ 有界。□

警告 3.5.12. 虽然条件 $\mathcal{P}$ 有界可保证 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是可表示的，但 并非必然 $\mathcal{P}$ 本身是一个可及范畴。然而，要求 $\mathcal{P}$ 可及既不合理，也没有实际用处。例如，如果 $\mathcal{P}$ 是自由阿贝尔群的普通范畴，那么 $\mathcal{P}$ 的可及性独立于通常的集合论公理 [MP89，§5。5]。

4. Malcev 理论

现在我们开始研究 Malcev 理论，并以此前各节建立的框架为基础。我们在 §4.1 给出定义并确立基本性质，随后在 §4.2 确立基本结果： ∞-范畴中的 Malcev 理论模型，是其在几何实现下的自由余完备化。在 §4.3，我们接着回顾离散理论模型的 ∞-范畴与单纯对象的经典同伦理论之间的联系。

4.1. Malcev 条件

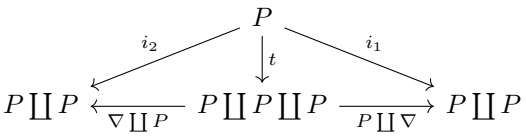
定义 4.1.1. 具有有限余积的 ∞-范畴 $\mathcal{P}$ 是 *Malcev* 的，当且仅当其中每个对象都是余普遍 Kan。也就是说，当每个对象视为对偶范畴 $\mathcal{P}^{\mathrm{op}}$中的对象时，都是普遍 Kan。

由 定义 4.1.1，可以得到 Malcev（预）理论、 κ元 Malcev 理论等概念；它们指的是底层 κ元理论等（预）理论，其底层 ∞-范畴是 Malcev 范畴。

Malcev 预理论及其同态构成一个全子范畴 $\mathcal{M}\mathrm{alc} \subset$ Thry of the ∞- 范畴中所有预理论的子范畴。我们对这个子范畴作一些基本观察。

命题 4.1.2. 设 $\mathcal{P}$ 是一个预理论。以下条件等价：

(1) $\mathcal{P}$ 是 Malcev。(2) 若 $X_\bullet$ 是 $\mathcal{P}$ 中的单纯对象，且 $P \in \mathcal{P}$，则单纯空间映射 $\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, X_\bullet)$ 满足 Kan 条件。(3) $\mathcal{P}$ 的每个单纯模型都满足 Kan 条件。(4) $\mathcal{P}$ 的每个单纯非有界模型都满足逐层 Kan 条件。(5) 每个 $P \in \mathcal{P}$ 都存在余 Malcev 运算。换言之，对每个 $P \in \mathcal{P}$，都存在某个映射 $t\colon P \to P \coprod P \coprod P$，使得图表



在同伦意义下交换。

此外，若 $\mathcal{P}$ 由对象 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$的某个子类通过余积和收缩生成，那么在 (2–5) 中，只需检查对象 $P \in \mathcal{P}_0$是否满足给定条件。

证明。这些结论由定理 2.4.2得出。 □

例 4.1.3。设 $\mathcal{P}$ 是一个预理论。若 $\mathcal{P}$ 是加法的，则它是 Malcev。

例 4.1.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有小积的 ∞-范畴，且 $\mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}$ 是由处处 Kan 对象构成的全子范畴。那么 $\mathcal{C}_h^{\mathrm{op}}$ 是一个（可能是平凡的）Malcev 预理论。

我们记录 Malcev 条件的一些闭包性质。

引理 4.1.5。 设 $\mathcal{P}$ 是一个预理论。

(1) $\mathcal{P}$ 是 Malcev，当且仅当其同伦范畴 $\mathrm{h}\mathcal{P}$ 是 Malcev。(2) 若 $\mathcal{P}$ 是一个 1-范畴，则 $\mathcal{P}$ 满足 定义 4.1.1 中的 Malcev 条件，当且仅当它在经典意义上是 Malcev（参见 §1.3）。(3) 设 $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ 是一个本质满同态。若 $\mathcal{Q}$ 是 Malcev，则 $\mathcal{P}$ 是 Malcev。(4) 若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$，则切片范畴 $\mathcal{P}_{/X}$ 是 Malcev。

证明。 (1) 这由 命题 2.4.5(8) 得出。

(2) 这由 命题 4.1.2 以及 §1.3的讨论得出。(3) 这由 命题 4.1.2(5) 得出。(4) 这由 命题 2.4.5(9) 得出。 □

一般而言，似乎没有理由认为 Malcev 预理论与同态构成的小图表的极限仍然是 Malcev。不过，我们有如下结果。

命题 4.1.6. Malcev 预理论具有以下闭包性质：

(1) 设给定一个预理论小族 $\{\mathcal{P}(i) : i \in I\}$。若每个 $\mathcal{P}(i)$ 都是 Malcev，则其积 $\prod_{i\in I} \mathcal{P}(i)$ 是 Malcev。(2) 设给定一个笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{Q}' & \xrightarrow{g} & \mathcal{Q} \end{array}$$

由预理论和同态构成。若 f 是满的，且 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}'$ 是 Malcev，则 $\mathcal{P}'$ 是 Malcev。

证明。 这些结论可由以下结果的对偶形式推出：命题 2.4.5(10,11)。 □

给定一个 Malcev 预理论 $\mathcal{P}$，考虑 ∞-范畴

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$$

由 $\mathcal{P}$ 引入于定义 3.1.5 和定义 3.1.6的模型。研究这些范畴时，与非 Malcev 情形的关键区别最终归结为以下内容。

命题 4.1.7。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 预理论。那么，满子范畴

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$$

在几何实现下封闭。

证明。 由于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$对任何由 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$所保持的小余极限均封闭，因此只需证明 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 在几何实现下封闭。根据命题 4.1.2， $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$中的每个单纯对象都满足逐层 Kan 条件，因此由命题 3.1.7(2) 即得。□

这带来了若干令人欣喜的推论。

推论 4.1.8。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 预理论。

(1) 假设给定 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$ 中单纯对象的小族 $\{X_\bullet(i) : i \in I\}$。 n

$$|\prod_{i\in I} X_\bullet(i)| \to \prod_{i\in I} |X_\bullet(i)|$$

是一个等价。

(2) 假设给定一个笛卡尔方形图

$$\begin{array}{ccc} X'_\bullet & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y'_\bullet & \longrightarrow & Y_\bullet \end{array}$$

中的单纯对象 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$。如果 f 是有效满射，那么

$$|X'_\bullet| \to |Y'_\bullet| \times_{|Y_\bullet|} |X_\bullet|$$

是一个等价。

证明。 由于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$ 中的极限和几何实现都是逐层计算的，因此只需在任意 $P \in \mathcal{P}$上进行求值以验证这些断言。由于 $\mathcal{P}$ 是 Malcev，每个 $X_\bullet(i)(P)$ 都满足 Kan 条件，并且映射 $X_\bullet(P) \to Y_\bullet(P)$ 是 Kan 纤维化，因此该推论由命题 2.1.14得出。 □

推论 4.1.9。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 预理论。则 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$ 中的几何实现具有强泛性质。换言之，比较映射

$$(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}})_{/|X_\bullet|} \to \mathrm{Tot}\left((\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}})_{/X_\bullet}\right),$$

是一个 ∞-范畴的等价。

证明。 由下降可知，比较映射

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})_{/|X_\bullet|} \to \mathrm{Tot}\left(\mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})_{/X_\bullet}\right)$$

是一个等价。该函子将态射 $Y \to |X_\bullet|$ 映到由相容族 $\{Y \times_{|X_\bullet|} X_n \to X_n\}$表示的全化对象，其逆函子则将相容族 $\{Y_\bullet \to X_\bullet\}$ 映到其几何实现 $|Y_\bullet| \to |X_\bullet|$。这两个函子都保持非有界模型的满子范畴，因此该等价限制到所声称的范畴。□

4.2. 马尔采夫理论的模型作为余完备化

Malcev 预理论的模型的 ∞-范畴在范畴论意义下性质相当良好。首先，有如下结论。

引理 4.2.1. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 预理论。

(1) 包含 $i\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})$ 存在左伴随。(2) $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})$ 是包含可表对象且对几何实现封闭的最小满子范畴。(3) ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 存在所有小余极限。

证明。 (1) 为使包含 $i\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})$ 存在左伴随，我们必须证明，若$X \in \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})$，则

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})}(X, i(-))\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

是余表示的。若 $X \in \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})$ 是一个小预层，则根据定义， X 是可表对象的小余极限。由余极限的 Bousfield–Kan 公式可知， X 可表示为如下形式： $X \simeq \mathrm{colim}_{n\in\Delta^{\mathrm{op}}} \coprod_{i\in I_n} \nu(P_{n,\,i})$, 其中 I_n 是一些集合，$P_{n,\,i} \in \mathcal{P}$是一些对象，因此

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})}(X, i(-)) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})}(\operatorname*{colim}_{n\in\Delta^{\mathrm{op}}} \nu(\coprod_{i\in I_n} P_{n,i}), i(-)).$$

由于 $\mathrm{colim}_{n\in\Delta^{\mathrm{op}}} \nu(\coprod_{i\in I_n} P_{n,\,i}) \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 由 命题 4.1.7可知，因此 i 如所述存在左伴随。

(2) (1) 的证明给出了一种显式方法，将 $\mathcal{P}$ 的每个模型写成可表对象的几何实现。或者，至少在 $\mathcal{P}$ 是一个理论时，(2) 可由 定理 3.4.2 推出，因为 Malcev 条件保证每个单纯模型都满足逐层 Kan 条件。

(3) 这由 (1) 得出，因为 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})$存在所有小余极限。 □

Co论 4.2.2. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。那么 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 存在所有小极限和余极限 .

证明。 引理 4.2.1 表明 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 具有所有小余极限。进一步假设$\mathcal{P}$ 是一个理论，则由 推论 3.4.3 可知 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 具有所有小极限。 □

引理 4.2.1.(2) 可改述为：若 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 预理论，则 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$是通过向 $\mathcal{P}$自由添加几何实现得到的。这导出了 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的如下泛性质：

定理 4.2.3。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 预理论， $\mathcal{D}$ 是一个具有几何实现的 ∞-范畴。

(1) 任意函子 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ 沿 $\nu\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的逐点左 Kan 延拓都存在。特别地，沿 ν 的左 Kan 延拓与限制构成一个伴随

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}, \mathcal{D}).$$

(2) 上述伴随限制后，在任意函子 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$与保几何实现的函子 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{D}$ 之间给出一个等价。(3) 设给定一个函子 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ ，它是全忠实的，且其像落在 $\mathcal{D}$的投射对象全子范畴中。则 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{D}$ 是全忠实的。(4) 保几何实现函子 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{D}$ 保所有小余极限，当且仅当 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ 保所有小余积。特别地，若 $\mathcal{D}$ 具有所有小余极限，则上述伴随限制后，在保余积的函子 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ 与保所有小余极限的函子 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{D}$ 之间给出一个等价。

证明。 (1, 2) 这些结论由 引理 4.2.1(2) 和 [Lur09，注 5.3.5。9]。(3) 我们必须验证，若 X， $Y \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，则映射

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X, Y) \to \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(f_!X, f_!Y)$$

是一个等价。由于 $f_!$ 保留几何实现，通过用可表对象分解 X ，我们不妨假设 $X = \nu P$对某个 $P \in \mathcal{P}$成立，因此 $f_!X \simeq fP$。由于根据假设， fP是投射的，通过用可表对象分解 Y ，我们不妨假设 $Y = \nu P'$ 对某个$P' \in \mathcal{P}$成立。现在我们要证明

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, P') \to \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(fP, fP')$$

是一个等价，因为根据假设， f 是全忠实的。

(4) 由于 $\nu\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 保留余积，若 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ 是一个函子，且 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{D}$ 保留余极限，则 f 保留余积。反过来，由于所有余极限都可以由几何实现和余积构造出来，只需证明若 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ 保留余积，则 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{D}$也保留余积。若 $\{X_i : i \in I\}$ 是 $\mathcal{P}$ 中的一组对象，且我们选取分解$X_i \simeq |\nu(P_{\bullet, i})|$，则

$$\coprod_{i\in I} X_i \simeq \coprod_{i\in I} |\nu(P_{\bullet,i})| \simeq |\coprod_{i\in I} \nu(P_{\bullet,i})| \simeq |\nu(\coprod_{i\in I} P_{\bullet,i})|,$$

so t这是由事实得出的：根据 (2) 的保证， $f_!$ 必然保留几何实现 -tio值。 □

我们还注意到以下结果。

命题 4.2.4. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论， $\mathcal{D}$ 是一个具有所有小余极限的 ∞-范畴，并设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ 是一个保持余积的函子。

(1) 诱导出的保余极限函子 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{D}$ 存在一个右伴随，定义如下：

$$f^*\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}, \qquad (f^*D)(P) = \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(f(P), D).$$

(2) f^*保留几何实现，当且仅当对所有 $P \in \mathcal{P}$， $f(P) \in \mathcal{D}$ 是投射的。

(3) $f_! \dashv f^*$ 是伴随等价，当且仅当满足以下条件：(a) f 是全忠实的；(b) 对所有 $P \in \mathcal{P}$，$f(P) \in \mathcal{D}$ 是投射的；(c) f^* 是保守的。

证明。 (1) f保持余积的条件确保：若 $D \in \mathcal{D}$，则 $f^*D\colon \mathcal{P}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 保持余积。由于 $\mathcal{P}$ 是一个理论，因此 f^*D 是 $\mathcal{P}$的一个模型。这个对象满足

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(\nu P, f^*D) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(fP, D) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(f_!\nu P, D)$$

for $P \in \mathcal{P}$ 依定义成立；又由于两边都与 P 中的几何实现相容，这
im意味着

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X, f^*D) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(f_!X, D)$$

对所有 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$均成立。因此 $f_! \dashv f^*$，如所求。

(2) 显然。

(3) 如果 f 是全忠实的，且其值落在 $\mathcal{D}$的投射对象全子范畴中，那么 $f_!$ 根据 定理 4.2.3(4) 是全忠实的，因此当且仅当其右伴随f^* 是保守的时，它是等价，这正如所声称的那样。 □

4.3. 离散理论与动画化

Malcev 条件在经典普适代数中已十分成熟；参见 §1.3。例如，任何由具有额外结构的群构成的代数簇，都可作为某个 Malcev 理论的集合值模型范畴出现。我们引入一些记号，以便更方便地讨论这些范畴。

定义 4.3.1。 给定一个理论 $\mathcal{P}$，我们记作

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

表示 0-截断对象的全子范畴。

注 4.3.2。 对于任意理论 $\mathcal{P}$，沿同态 $\tau\colon \mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 的限制给出一个等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}^{\heartsuit}.$$

特别是，在本小节中，将讨论范围限制为 $\mathcal{P}$ 是离散理论（即一个 1-范畴）的情形，并不会造成任何损失。

在 [Qui67, II.4.2], 中，Quillen 在$\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$ 上构造了一个闭模型结构，其中的对象是取值于一个1-范畴 $\mathcal{D}$ 中的单纯对象，前提是 $\mathcal{D}$满足某些假设；这些假设实质上相当于要求 $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}$ odel$_{\mathcal{P}}^{\heartsuit}$ 所对应的 $\mathcal{P}$ 理论要么是 ω-有界的，要么是 ***Malcev*** 理论。在这两种情形下，弱等价和纤维化都逐级定义。在这些假设下，我们有如下对 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$的刻画。

定理 4.3.3. 设 $\mathcal{P}$ 是离散理论，并假设 $\mathcal{P}$ 要么是 ω-有界的，要么是 Malcev 理论。那么，几何实现

$$|-|\colon \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit}) \subset \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

是一个局部化，它将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 实现为 Quillen 在 $\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit})$ 上的模型结构的底层 ∞-范畴。

证明。 注意，在 ω-有界的情形下，我们可以将给定函子实现为逐级几何实现函子

$$|-|\colon \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega}, \mathcal{S}\mathrm{et})) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega}).$$

这里的定理实质上可追溯至 Badzioch 的工作 [Bad02] 以及 Bergner 的工作 [Ber06], , 参见[Lur09，命题 5.5.9。2]实质上，同样的证明也适用于 Malcev 情形，例如参见 [Bal25，命题 2.2。2]□

因此，如果 $\mathcal{P}$ 是一个离散的 ω-有界理论或 Malcev 理论，那么 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 就是一个熟悉的“代数”∞-范畴。

例 4.3.4. 设 $\mathcal{P}$ 是一个离散加性马尔采夫理论。那么 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit}$ 是一个余完备阿贝尔范畴，且具有足够多的射影对象；而 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 等价于其连通导出 ∞-范畴。

例 4.3.5. 设 k 是一个交换环，且 $\mathcal{P}$ 是多项式 k-代数的范畴（变量数可以是无限的）。那么 $\mathcal{M}$ odel$_{\mathcal{P}}$ 等价于单纯交换 k-代数范畴在弱等价处的局部化；也就是说，等价于 k之上的动态环 ∞-范畴。

5. 识别原理

到目前为止，我们一直在研究形如 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的 ∞-范畴，其中$\mathcal{P}$是一个理论。在此背景下，理论 $\mathcal{P}$ 的选择是 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$上的附加结构，类似于环的表示的选择。

本节的目标是对以下形式的 ∞-范畴给出内在刻画： $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ ，其中 $\mathcal{P}$属于不同类型，并说明它们以何种意义具有规范表示。我们将在§5.1讨论一般理论，在§5.2讨论马尔采夫理论，最后在§5.3讨论加性理论。

5.1. 弱投射生成 ∞-范畴

回顾一下， ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 的对象 P 被称为<style id='4'>投射 对象，如果映射 map$_{\mathcal{D}}(P,-)$ 保持几何实现。为了刻画理论的模型范畴，我们将考虑这一概念的以下自然弱化。

定义 5.1.1。 设 $\mathcal{D}$ 是一个具有有限极限的 ∞-范畴，并且具有满足 Kan 条件的单纯对象的几何实现。若 $P \in \mathcal{D}$ 满足

$$\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P,-)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

保持满足 Kan 条件的单纯对象的几何实现。

例 5.1.2。 空间 $X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是弱投射的，当且仅当它等价于一个集合；而它是投射的，当且仅当它等价于一个有限集合。

命题 5.1.3。 设 $\mathcal{P}$ 是一个理论。则幂等完备化 $\mathcal{P}^{\sharp}$ 可识别为由弱投射模型张成的 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的全子范畴。

证明。 根据 命题 3.1.7，若 $P \in \mathcal{P}$那么 $\nu P \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是弱投射的。由于弱投射对象在收缩下封闭，因此 $\mathcal{P}^{\sharp} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的所有对象都是弱投射的。

反过来，假设 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是投射的。根据 定理 3.4.2，我们可以写成 $X \simeq |\nu P_{\bullet}|$ ，其中 $P_{\bullet} \in \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{P})$ 满足 $\nu P_{\bullet}$ Kan 条件。由于 X 是弱投射的，因此

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X,X) \simeq |\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X, \nu P_{\bullet})|.$$

因此， X 的恒等映射可经由 νP_n 分解，其中某个 $n \geq 0$满足这一点，这意味着 X 是 νP_n的收缩，因而属于 $\mathcal{P}^{\sharp} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$。□

推论 5.1.4。 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 为理论。那么，存在一个等价 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$，当且仅当存在一个等价 $\mathcal{P}^{\sharp} \simeq \mathcal{Q}^{\sharp}$；也就是说，当且仅当 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 在幂等完备化意义下等价。□

我们还有以下有界变体。

命题 5.1.5。 假设 $\mathcal{P}$ 由一个 κ元理论 $\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$生成。那么幂等完备化 $\mathcal{P}_\kappa^\natural$ 可识别为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}$ 中 κ-紧对象的弱投射对象所构成的全子范畴。

证明。 根据 命题 5.1.3 中的相同推理， $\mathcal{P}_\kappa^\natural$ 的每个对象都是 κ-紧对象且在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}$ 中弱投射。反过来，假设 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}$ 是 κ-紧对象且弱投射。由 命题 5.1.3 可知 $X \in \mathcal{P}^\natural$。由于 $\mathcal{P}$ 由 $\mathcal{P}_\kappa$生成，因此存在一个对象集合 $\{P_i : i \in I\}$，它们属于 $\mathcal{P}_\kappa$，且 X 是 $\coprod_{i\in I} P_i$的一个收缩。由于 X 是κ-紧对象，我们有

$$\mathrm{map}_\mathcal{P}(X, \coprod_{i\in I} P_i) \simeq \operatorname*{colim}_{F\subset I,\,|F|<\kappa} \mathrm{map}_\mathcal{P}(X, \coprod_{i\in F} P_i),$$

因此， X 是某个 κ-小集合 F对应的 $\coprod_{i\in F} P_i$ 的收缩。由于 $\mathcal{P}_\kappa$ 对 κ-小积封闭，我们有 $\coprod_{i\in F} P_i \in \mathcal{P}_\kappa$，因此 $X \in \mathcal{P}_\kappa^\natural$。 □

现在我们可以刻画形如 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}$ 、由理论 $\mathcal{P}$ 给出的 ∞-范畴。

定义 5.1.6。 给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{D}$，若对象类 $\{P_s : s \in S\}$ of objects of $\mathcal{D}$ 能检测等价，则称其满足以下条件：

(∗) 当且仅当对所有 $s \in S$，映射 $f : X \to Y$ in $\mathcal{D}$ is an equivalence provided $\mathrm{map}_\mathcal{D}(P_s, X) \to \mathrm{map}_\mathcal{D}(P_s, Y)$ 是等价时，态射 $f : X \to Y$ 才是等价。

注 5.1.7。 设 $\{P_s : s \in S\}$ 是一个 ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 中的对象类，并设 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{D}$ 是由该类生成的全子范畴。那么，当且仅当受限 Yoneda 嵌入 $\mathcal{D} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{P}_0^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 是保守的， $\{P_s : s \in S\}$ 才能检测等价。

定义 5.1.8。 设 $\mathcal{D}$ 是一个 ∞-范畴，它具有有限极限、弱投射对象的小余积，以及满足 Kan 条件的单纯对象的几何实现。若 $\mathcal{D}$ 满足以下条件，则称其为弱投射生成：

• 存在一个集合 $\{P_s : s \in S\}$，由 $\mathcal{D}$ 中的弱投射对象组成，并能检测等价。在这种情况下，我们称 $\{P_s : s \in S\}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一组弱投射生成元。

引理 5.1.9. 设 $\mathcal{D}$ 是一个 ∞-范畴，它具有有限极限以及满足 Kan 条件的单纯对象的几何实现。设 $P \in \mathcal{P}$ 是一个弱投射对象。

(1) 如果 f 是 $\mathcal{D}$ 中的有效满射，那么 $\mathrm{map}_\mathcal{D}(P, f)$ 是空间之间的有效满射。(2) 如果单纯对象 $X_\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$ 满足 Kan 条件，那么单纯空间 $\mathrm{map}_\mathcal{D}(P, X_\bullet)$ 满足 Kan 条件。

如果 $\{P_s : s \in S\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中一组能检测等价的弱投射对象，那么

(3) $\mathcal{D}$ 中的态射 f 是有效满射，当且仅当对所有 $s \in S$，$\mathrm{map}_\mathcal{D}(P_s, f)$ 都是空间之间的有效满射。(4) 单纯对象 $X_\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$ 满足 Kan 条件，当且仅当对所有 $s \in S$，单纯空间 $\mathrm{map}_\mathcal{D}(P_s, X_\bullet)$ 满足 Kan 条件。

证明。 （1）由于 P 是弱投射的，特别是，映射 $\mathcal{D}(P, –)$ 保持切赫神经的几何实现。由于映射 $\mathcal{D}(P, –)$ 总是保持 $\mathcal{D}$ 中存在的任意极限，因此映射 $\mathcal{D}(P, –)$ 保持切赫神经的构造，从而保持有效满射。

（2）若 $X_\bullet \in \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$，则根据构造

$$\mathrm{map}_\mathcal{D}(P, X_\bullet[\Lambda]) \simeq \mathrm{map}_\mathcal{D}(P, X_\bullet)[\Lambda]$$

对于任意单纯空间 Λ，若 $X_\bullet[\Lambda]$ 存在于 $\mathcal{D}$中。由 (1) 可知，若 $X_\bullet[\Delta^n] \to X_\bullet[\Lambda^n_i]$是有效满射，则映射 $\mathrm{map}_\mathcal{D}(P, X_\bullet)[\Delta^n] \to \mathrm{map}_\mathcal{D}(P, X_\bullet)[\Lambda^n_i]$ 也是有效满射。

(3,4) 我们只证明 (3)，因为 (4) 可按 (2) 的证明方式推出。设 f 是$\mathcal{D}$ 中的一个态射，且对于所有 $s \in S$，映射 $\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P_s, f)$ 都是有效满射。与 (1) 的证明一样，这意味着

$$\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P_s, \check{C}(f)) \to \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P_s, Y)$$

对所有 $s \in S$ 都是一个余极限图。由于 P_s 是弱投射的，这意味着

$$\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P_s, |\check{C}(f)|) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P_s, Y)$$

对所有 $s \in S$ 均成立。因此，$|\check{C}(f)| \simeq Y$，且 f 是一个有效满射。 □

定理 5.1.10。设 $\mathcal{D}$ 是一个 ∞-范畴。当且仅当 $\mathcal{D}$ 是弱投射生成的时，存在一个等价 $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，对应于某个理论 $\mathcal{P}$。

证明。我们已经证明，若 $\mathcal{P}$ 是一个理论，则 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是弱投射生成的。因此，反过来设 $\mathcal{D}$ 是一个弱投射生成的 ∞- 范畴。令 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ 为由一组弱投射生成元在余积和收缩下生成的全子范畴。则 $\mathcal{P}$ 是一个理论，并且存在一个受限 Yoneda 嵌入

$$\nu \colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}.$$

我们断言 ν 是一个等价。

假设 $\mathcal{P}$由一组针对 $\mathcal{D}$ 的弱投射生成元生成，这意味着 ν 是保守的。因此，只需证明 ν 有一个全忠实左伴随 L。为证明 ν 有一个左伴随 L，我们必须验证，若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，则

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X, \nu(-)) \colon \mathcal{D} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

是余表示的；LX 于是是一个余表示对象。根据定理 3.4.2，我们可以选取一个分解 $X \simeq |\nu P_\bullet|$，使得 $\nu P_\bullet$ 满足 Kan 条件。由此可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X, \nu(-)) &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(|\nu P_\bullet|, \nu(-)) \\
&\simeq \mathrm{Tot}\, \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(\nu P_\bullet, \nu(-)) \\
&\simeq \mathrm{Tot}\, \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P_\bullet, -) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(|P_\bullet|, -),
\end{aligned}$$

这说明 $LX = |P_\bullet|$ 是所需的余表示对象。为证明 L 是全忠实的，固定X，$Y \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，并选取如上所述的分解 $X \simeq |\nu P_\bullet|$ 和 $Y \simeq |\nu Q_\bullet|$。由于每个 $P_n \in \mathcal{D}$ 都是弱投射的，我们可以计算

$$\begin{aligned}
\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(LX, LY) &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(|P_\bullet|, |Q_\bullet|) \\
&\simeq \lim_{n \in \Delta} \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P_n, |Q_\bullet|) \\
&\simeq \lim_{n \in \Delta} \operatorname*{colim}_{m \in \Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P_n, Q_m) \\
&\simeq \lim_{n \in \Delta} \operatorname*{colim}_{m \in \Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(\nu P_n, \nu Q_m) \\
&\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(|\nu P_\bullet|, |\nu Q_\bullet|) = \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(X, Y),
\end{aligned}$$

这就证明了 L 如所述是全忠实的。 □

例 5.1.11。设 $\mathcal{C}$ 是一个小型 ∞-范畴。那么，可表对象构成预层范畴 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C})$的一组弱投射生成元。因此，若将由可表对象在余积下生成的全子范畴记作 $\mathcal{C}^{\amalg} \subset \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C})$，则

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{C}^{\amalg}} \simeq \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}).$$

这体现了这样一个事实：$\mathcal{C}^{\amalg}$ 等价于关于小余积的 $\mathcal{C}$ 自由余完备化。

5.2. 强投射生成的 ∞-范畴

在上一节中，我们根据经典投射性概念的一种弱化形式，刻画了形如 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 、对应于某个理论 $\mathcal{P}$ 的 ∞-范畴。在本节中，我们将在 $\mathcal{P}$ 为 Malcev 的情形下证明类似的结果；在此情形中，我们将采用以下投射性的强化形式：

定义 5.2.1。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有小余极限的 ∞-范畴。若对于 $\mathcal{C}$ 中的每个单纯对象 $X_\bullet$，单纯空间映射 $\mathfrak{C}(P, X_\bullet)$ 是映射 $\mathfrak{C}(P, |X_\bullet|)$ 的超覆盖，则称对象 $P \in \mathcal{C}$ 为强投射。

例 5.2.2。设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。则 $\nu P \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 对于 $P \in \mathcal{P}$ 是强投射的。

引理 5.2.3。设 $\mathcal{C}$ 是一个余完备的 ∞-范畴。则对象 $P \in \mathcal{C}$ 是强投射的，当且仅当它既是投射的又是余普遍 Kan 的。

证明。首先假设 P 是强投射的。设 $X_\bullet$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个单纯对象。由于映射 $\mathfrak{C}(P, X_\bullet)$ 是映射 $\mathfrak{C}(P, |X_\bullet|)$ 的超覆盖，特别地，|映射 $\mathfrak{C}(P, X_\bullet)| \simeq$ 映射 $\mathfrak{C}(P, |X_\bullet|)$，因此 P 是投射的。由 [Lurb，推论 A.5.6，4]，映射 $\mathfrak{C}(P, X_\bullet)$ 满足 Kan 条件。由于 $X_\bullet$ 是任意的，根据定理 2.4.2.(3)，可知 P 是余普遍 Kan 的。

接下来设 P 是投射的且余普遍 Kan。令 $X_\bullet$ 为$\mathcal{C}$中的一个单纯对象。由于 P 是余普遍 Kan，根据 [Lurb，推论 A.5.6，4] 可知，映射$\mathfrak{C}(P, X_\bullet)$ 是 |映射$\mathfrak{C}(P, X_\bullet)$|的一个超覆盖。由于 P是投射的，|映射$\mathfrak{C}(P, X_\bullet)| \simeq$ 映射$\mathfrak{C}(P, |X_\bullet|)$。因此，映射$\mathfrak{C}(P, X_\bullet)$ 是映射$\mathfrak{C}(P, |X_\bullet|)$的一个超覆盖，从而 P是强投射的。□

命题 5.2.4。设 $\mathcal{P}$ 为一个 Malcev 理论。对于 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，以下各项等价：

(1) X 是一个可表对象的收缩；(

2) X 是强投射的；(3) X 是投射

的；(4) X 是弱投射的。

特别地，幂等完备化 $\mathcal{P}^\natural$ 可被视为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$的由投射对象张成的全子范畴，其中所有对象都是强投射的。

证明。(1)⇒(2)：由 命题 4.1.7，若 $P \in \mathcal{P}$，则 $\nu P \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是投射的。Malcev 条件意味着，当将 νP 视为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{op}}$ 中的一个对象时，它是普遍 Kan 的。由于这两个条件在收缩下封闭，由 引理 5.2.3可知，若 X 是某个可表对象的收缩，则 X 是强投射的。

蕴含关系 (2)⇒(3)⇒(4)显然，而 (4)⇒(1)由 引理 4.2.1 通过相同的 e arg论证可得，如 命题 5.1.3的证明中所示。□

我们还有以下有界变体。

命题 5.2.5。设 $\mathcal{P}$ 为一个由 κ-元理论 $\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$生成的 κ-有界 Malcev 理论。则幂等完备化 $\mathcal{P}_\kappa^\natural$ 可识别为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$中由 κ-紧投射对象构成的全子范畴。

证明。 这由 命题 5.2.4 和 命题 5.1.5得出。□

现在我们给出马尔采夫理论的模型范畴的刻画。

De定义 5.2.6。设 $\mathcal{D}$ 为一个余完备 ∞-范畴。我们称 $\mathcal{D}$ 为强投射 y gen生成的，如果它满足以下条件：

(∗) 存在一个集合 $\{P_s : s \in S\}$ 中的强投射对象，它们能够检测等价-关系。

在这种情况下，我们称 $\{P_s : s \in S\}$ 是 $\mathcal{D}$的投射生成元集合。

定理 5.2.7。 设 $\mathcal{D}$ 是一个余完备的 ∞-范畴。那么，当且仅当 $\mathcal{D}$ 是强投射生成的时，存在一个等价 $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，其中 Malcev 理论 $\mathcal{P}$ 满足某个条件。

证明。 我们已经证明，如果 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，那么 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是投射生成的，其强投射生成元集合可取为 $\mathcal{P}$ 的任意生成元集合。

反之，设 $\mathcal{D}$ 是一个强投射生成的 ∞-范畴。令 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{D}$ 为由 $\mathcal{D}$ 的一组强投射生成元生成的全子范畴，并令 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ 为由 $\mathcal{P}_0$ 在余积下生成的全子范畴。显然，$\mathcal{P}$ 是一个理论，而 $\mathcal{P}_0$ 由强投射对象组成这一条件，根据 引理 5.2.3 确保 $\mathcal{P}$ 是 Malcev 理论。现在，命题 4.2.4 应用于包含 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$，意味着受限 Yoneda 嵌入定义了一个等价 $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$。 □

5.3. 加性情形

我们可以将上述讨论进一步专门化到所考虑的 Malcev 理论是加法的情形。

定义 5.3.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个余完备的预稳定的 ∞-范畴（参见 [Lurb，附录 C]）。我们称 $\mathcal{D}$ 是投射生成的，如果存在一个投射对象集合 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{C}$ 满足以下条件：

(∗) 若 $X \in \mathcal{D}$，则 $X \simeq 0$ 当且仅当 $\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, X) \simeq *$ 对所有 $P \in \mathcal{P}_0$都成立。

在这种情况下，我们称 $\mathcal{P}_0$ 是 $\mathcal{D}$的投射生成元集合。

我们先比较投射生成这一概念与先前的概念。

引理 5.3.2. 设 $\mathcal{D}$ 是一个加法的 ∞-范畴。若 $P \in \mathcal{D}$ 是投射的，则

$$\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, \Sigma X) \simeq B\,\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, X)$$

对于任何容许悬架的 $X \in \mathcal{D}$，

证明。 如果悬架 ΣX存在，则可将其写为几何实现

$$\Sigma X \simeq \mathrm{colim}\left(0 \leftleftarrows X \Lleftarrow X \oplus X \Lleftarrow \cdots \right).$$

如果 $P \in \mathcal{D}$ 是投射的，那么可得

$$\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, \Sigma X) \simeq \mathrm{colim}\left(* \leftleftarrows \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, X) \Lleftarrow \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, X) \times \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, X) \Lleftarrow \cdots \right).$$

This 是映射$_{\mathcal{D}}(P, X)$的巴分解，因此 $\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, \Sigma X) \simeq B\,\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, X)$，如所声称。 □

以下推论值得注意。

推论 5.3.3。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。若 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 稳定，则 $\mathcal{P}$ 是终端理论。

证明。 由于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 稳定，因此它是加法的。若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 且 $P \in \mathcal{P}$，那么反复应用 引理 5.3.2可得

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, X) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, \Sigma^n \Omega^n X) \simeq B^n \Omega^n\,\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, X) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, X)_{\geq n}$$

对所有 $n \geq 0$ 均成立。因此，映射$_{\mathcal{P}}(P, X) \simeq *$。由于 X 是任意的，这意味着 $\mathcal{P}$ 是终端理论。□

引理 5.3.4。 设 $\mathcal{D}$ 是一个预稳定的 ∞-范畴。那么 $\mathcal{D}$ 是投射生成的，当且仅当它按照 定义 5.2.6 的意义是强投射生成的。

证明。 显然，若 $\mathcal{D}$ 是强投射生成的，则它是投射生成的。反过来，假设 $\mathcal{D}$ 是投射生成的，且 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{D}$ 是一组投射生成元。由于 $\mathcal{D}$是加法的，因此 $\mathcal{P}_0$ 的对象都是强投射的。因此，我们必须验证：若 $f\colon X \to Y$是 $\mathcal{D}$ 中的一个映射，且对于所有$P \in \mathcal{P}_0$，映射$\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P,\ X) \to$ 映射$\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P,\ Y)$ 是等价，那么事实上 f 也是等价。

由于 $\mathcal{D}$ 是预稳定的， $\Sigma\colon\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 是全忠实的，因此只需证明 Σf 是一个等价。若 $P \in \mathcal{P}_0$，那么根据引理 5.3.2，$\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, \Sigma X) \simeq B\,\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, X)$，我们得到：如果 $f\colon\ X \to Y$诱导等价 $\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, X) \to \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, Y)$，那么 $\Sigma f\colon\ \Sigma X \to \Sigma Y$诱导等价 $\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, \Sigma X) \to \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(P, \Sigma Y)$。态射 $\Sigma f\colon\ \Sigma X \to \Sigma Y$位于一个双笛卡尔方块中

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma f\,\cdot} \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma Y \end{array}$$

由于此方形图是余笛卡尔的，要证明 Σf 是一个等价，只需证明 $Z \simeq 0$。由于此方形图是笛卡尔的，我们看到，如果 $\mathrm{map}(P, \Sigma X) \to \mathrm{map}(P, \Sigma Y)$ 是一个等价，那么 $\mathrm{map}(P, Z) \simeq 0$。如果这对所有 $P \in \mathcal{P}_0$都成立，那么根据 $\mathcal{P}_0$ 是 $\mathcal{D}$的投射生成元集合这一假设， $Z \simeq 0$ ，从而完成证明。□

Pr命题 5.3.5. 设 $\mathcal{D}$ 是一个 ∞-范畴。那么， $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是加性马尔可夫理论 if a当且仅当 $\mathcal{D}$ 是一个投射生成的预稳定 ∞-范畴。此外，在这种情况下，

(1) 可以取 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ 为投射对象的全子范畴；(2) $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 嵌入其稳定化 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathcal{P}}$，后者可识别为保积函子 $\mathcal{P}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{p}$ 的全子范畴。

$$\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathcal{P}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{p})$$

证明. 关于如下断言： $\mathcal{P}$ 若是加性马尔可夫理论，则 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是一个预稳定的 ∞-范畴，其稳定化为$\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathcal{P}}$ ，如上所述；对于有限元理论，这一结果见 [Lurb，命题 C.1.5.7 和注 C.1.5。9]，同一证明在此处也适用。反向结论可由定理 5.2.7 与引理 5.3.4结合得出。 □

例 5.3.6. 设 R 是一个连通的 $\mathbf{E}_1$-环谱，并令 $\mathcal{F}_0(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 为由直和在 R 下生成的全子范畴。那么， $\mathcal{F}_0(R)$ 是一个 ω-有界的 Malcev 理论，且受限 Yoneda 嵌入

$$\nu\colon \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{F}_0(R)}$$

在 ∞-范畴与 ∞-范畴之间定义了一个等价：前者是连通 R-模的范畴，后者是 $\mathcal{F}_0(R)$ 的模型范畴。

例 5.3.7。 设 R 是一个连通的 $\mathbf{E}_1$-环谱，并假设 $\pi_0 R$ 不含无限 p-可除元素。令 $\mathcal{F}_0^p(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 为由形如 $(R^{\oplus I})_p^{\wedge}$ 的对象生成的全子范畴，其中 I 是某个集合。则 $\mathcal{F}_0^p(R)$ 是一个 $\aleph_1$-有界 Malcev，它通常不是 ω-有界的，而受限 Yoneda 嵌入

$$\nu\colon \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0, \mathrm{Cpl}(p)} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{F}_0^p(R)}$$

在 ∞-范畴与 ∞-范畴之间定义了一个等价：前者是 p-完备连通 R-模的范畴，后者是 $\mathcal{F}_0^p(R)$ 的模型范畴。

注 5.3.8. 设 $\mathcal{P}_\omega$ 是一个有限型加法理论。则存在一个等价

$$\mathrm{Fun}^R(\mathcal{P}\mathrm{sh}_\Sigma(\mathcal{P}_\omega)^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc}) \simeq \mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{P}_\omega, \mathcal{S}\mathrm{pc}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{P}\mathrm{sh}_\Sigma(\mathcal{P}_\omega^{\mathrm{op}}),$$

其中 Fun^R 和 $\mathrm{Fun}^\times$ 分别表示保极限函子和保持有限积的函子。特别地，每个紧对象投射生成的预稳定 ∞-范畴，作为可呈现的 ∞-范畴都是可对偶的。

6. 导出函子

回顾 §4.3，如果 $\mathcal{P}$ 是一个离散 Malcev 理论，那么 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 等价于由 $\mathcal{P}$构成的单纯集合值模型的经典同伦论，或者说，等价于对 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit}$ 进行动画化。由此，$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 成为开展同伦代数研究的便利环境。

本节中，我们将介绍并开始研究 Malcev 理论之间的导出函子，它是经典同伦代数中左导出函子的一种自然推广。我们将在 §6.1 作一些基本观察，并在 §6.2研究导出函子的正合性性质。正如我们将要说明的，导出函子很少是左正合的；在 §6.3 中，我们将介绍并研究更一般的弱左正合性质，而许多更具意义的例子都满足这一性质。

6.1. 基本定义

在定理 4.2.3中，我们注意到，∞-范畴由一个 Malcev 理论的模型在几何实现下自由生成。这启发了下面的定义。

De定义 6.1.1. 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是 Malcev 预理论。一个导出函子 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 要么是 o f the 以下等价的数据之一：

(1) 任意函子 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$；(2) 保几何实现函子 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}$ odel$_{\mathcal{Q}}$。

W我们记作

$$\mathrm{fun}_!(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{P},\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}},\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}})$$

导出函子的全子范畴。

例 6.1.2. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是 Malcev 预理论的一个同态。沿着 $\nu\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 对 $\nu \circ f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 作左 Kan 延拓，定义了一个函子

$$f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$$

它由定理 4.2.3可知保留所有余极限。这将同态 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 与满足以下条件的导出函子子类 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 对应起来：保留余积且满足 $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{Q}$。

例 6.1.3. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是 Malcev 理论之间的同态。那么，限制定义了一个右伴随

$$f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

to $f_!$ 根据命题 4.2.4，它保留几何实现，因此可以被视为 e reg为导出函子 $\mathcal{Q} \nrightarrow \mathcal{P}$。

按定义 6.1.1 定义的导出函子是同调代数中左导出函子的一种推广。

例 6.1.4. 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有足够多投射对象的余完备阿贝尔范畴。根据定理 4.3.3，若 $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ 是投射对象构成的全子范畴，则 $\mathcal{P}$ 构成一个 Malcev 理论，其中 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是连通导出 ∞-范畴 $\mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ 的 $\mathcal{A}$。给定另一个 $\mathcal{B}$ 具有足够多投射对象的阿贝尔范畴，以及一个函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，复合函子

$$f\colon \mathcal{P} \subset \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{B})$$

因此确定了一个全导出函子

$$f_!\colon \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{B}).$$

复合函子

$$\mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\Sigma^n} \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \xrightarrow{f_!} \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\pi_q} \mathcal{B}$$

同构于 q阶导出函子 F，类型为 n 按照 Dold–Puppe 的定义 [DP61]。如果 F是加法的，那么这就是（$q-n$）阶左导出函子 F按照 Cartan–Eilenberg 的定义，也就是通常同调代数意义下的函子。

命题 6.1.5. 设 $f\colon \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 是马尔采夫预理论的一个导出函子，并记$f_!\colon \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{Q})$ 为 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{Q})$ 沿 $\nu\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P})$ 的左 Kan 延拓。则下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{f_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{f_!} & \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{Q}) \end{array}.$$

证明. 先考虑上方的方形图。根据 引理 4.2.1.(2)，左 Kan 延拓 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 通过几何实现延拓 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$。由于几何实现由 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{Q})$ 根据 命题 4.1.7. □ 保持，故交换性成立。

推论 6.1.6. 将一个马尔采夫理论 $\mathcal{P}$ 对应到其 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 模型的赋值，对于理论之间的任意函子都是函子性的。更准确地说，令 $\mathcal{M}\mathrm{alc}' \subset \widehat{\mathcal{C}\mathrm{at}}_\infty$ 表示以马尔采夫理论为对象的满 子范畴。则该赋值

$$\mathcal{P} \mapsto \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

构成.....的子函子

$$\mathcal{P}\mathrm{sh}(-)\colon \mathcal{M}\mathrm{alc}' \subset \widehat{\mathcal{C}\mathrm{at}}_\infty \to \widehat{\mathcal{C}\mathrm{at}}_\infty.$$

证明。 这是 命题 6.1.5 在 $f\colon \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 是满足 $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{Q}$ 的导出函子时得到的特殊情形。 □

我们注意到，有一种普适的方式，可以用导出函子来逼近任意函子 :

命题 6.1.7。 设 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 是 Malcev 预理论。那么包含映射

$$\mathrm{fun}_!(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}})$$

从由导出函子张成的全子范畴

$$\mathrm{der}\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}) \to \mathrm{fun}_!(\mathcal{P}, \mathcal{Q}).$$

证明。 在等价 $\mathrm{fun}_!(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{P}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}})$ 下，上述包含映射可识别为沿 $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的左 Kan 延拓，其右伴随由限制给出。 □

注 6.1.8。 具体而言，若 $f\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 是任意函子，则 $\mathrm{der}(f)\colon \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 是与复合 $f \circ \nu\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 相关联的导出函子。

Re注 6.1.9。 在自同态的特殊情形下，子范畴 $\mathrm{end}_!(\mathcal{P}) \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$ of 导出自函子在复合下封闭。因此，右伴随

$$\mathrm{der}\colon \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \to \mathrm{end}_!(\mathcal{P})$$

的命题 6.1.7相对于复合是松幺半的 [Lura，推论 7.3.2。7] .

6.2. 左正合性与右正合性

根据定义，如果 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 是一个导出函子，那么

$$f_! \colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$$

保几何实现。从这个意义上说，可以将导出函子视为右正合的。它们还满足以下右正合性性质。

命题 6.2.1. 设 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 是一个导出函子。那么，对于所有 $-1 \leq n \leq \infty$， $f_!$ 都会保 n-连通态射。

证明。 根据 命题 6.1.5，导出函子 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 是由左伴随 $f_!\colon \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{Q})$限制得到的。根据 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的连通性是逐点条件（见 命题 3.3.3），因此我们只需证明以下推广形式： [Lur09，命题 6.5.1.16.(4)]:

- 设 $L\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是 ∞-拓扑斯之间的保余极限函子。那么，对于所有 $n \geq 0$， L 都会保 n-连通态射。

由于 n-连通态射和 $(n-1)$-截断态射在任意 ∞-topos[上构成一个分解系统（Lur09，例 5.2.8），16], 只需证明：若 f 是 $\mathcal{X}$ 中的 n-连通态射，则$Lf \perp g$ 对于所有 $(n-1)$-截断态射 g， $\mathcal{Y}$。记 R 为 L 的右伴随。那么 $Lf \perp g$ 当且仅当 $f \perp Rg$ [（ Lur09，注 5.2.8 ）。7], 因此，只需证明 R 保持 $(n-1)$- 截断态射；这是成立的，因为 R 保持极限（ Lur09，命题 5.5.6 ）。 [16]。□

另一方面，我们有如下结果。

定义 6.2.2. 若导出函子 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 满足 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 保持有限极限，则称其为左正合 。

左正合性是对导出函子极为严格的条件。

例 6.2.3。 令 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}\mathrm{p}$ 为由球谱的余积张成的全子范畴。则与截断 $\tau\colon \mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 相关联的导出函子可识别为基变换函子

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbf{S}} -\colon \mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\geq 0}.$$

由于 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\geq 0}$ 中的极限由在 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$中取相应极限所得对象的连通覆盖给出，我们可以计算

$$0 = \lim(0 \to \mathbb{Z} \leftarrow 0) \neq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbf{S}} \lim(0 \to \mathbf{S} \leftarrow 0) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbf{S}} \Omega \mathbf{S}_{\geq 1}$$

在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathbb{Z}}^{\geq 0}$ 中。特别地， $\tau_!$ 不是左正合的。

左正合性足以保证存在 命题 6.2.1 的对应结论。

命题 6.2.4。 如果 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 是左正合的，那么 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 对所有 $-2 \leq n \leq \infty$ 都保持 n-截断态射。

证明。 这直接由 n-截断态射的定义得出，参见 定义3.3.1。 □

6.3. 弱左正合性

尽管正合性对导出函子而言是一个非常严格的条件，但高阶普适代数中出现的许多导出函子最终都满足以下较弱的正合性条件。

De定义 6.3.1。 导出函子 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 是弱左正合的，当且仅当对于每个笛卡尔方 e

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中，其中 α 是一个有效满射，比较映射

$$f_!(X') \to f_!(Y') \times_{f_!(Y)} f_!(X)$$

是一个等价。

例如，我们有如下结论。

引理 6.3.2。 设有一个方形图

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

在预稳定的 ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 中，并假设 α 在 $\mathcal{D}^{\heartsuit}$ 中诱导一个满射 $\pi_0 X \to \pi_0 Y$。那么，该方形图是笛卡尔的，当且仅当它是余笛卡尔的。特别地，若 $\mathcal{D}$ 是投射生成的，且 α 是有效满射，则上述结论成立。

证明。 这是 Mayer–Vietoris 序列的一个简单推论。 □

命题 6.3.3. 设 $f\colon \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 是加性马尔采夫理论之间一个保余极限的导出函子。那么 f 弱左正合。

*Pro*证明。 由于 $f_!$ 保持余极限和有效满射，这可由 引理 6.3.2 得出。 □

另一方面，在非阿贝尔情形中，导出函子可能很快就不再是弱左正合的。

例 6.3.4. 对于 $k \geq 0$，令 $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}_*$ 表示由 k 维球谱在余积下生成的全子范畴。这显然是一个 ω-有界理论，当且仅当 $k \geq 1$ 时是马尔采夫理论。由于 S^k 是 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{\geq k}$ 的弱投射生成元，定理 5.1.10 意味着

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{G}_k} \simeq \mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{\geq k}.$$

若 $k \leq 1$，则 $\mathcal{G}_k$ 是离散理论；当$k = 0$ 时，它等价于经典的基点集理论；当 $k = 1$时，它等价于经典的群理论。若 $k \geq 2$，则 Hurewicz 定理意味着同伦范畴 $\mathrm{h}(\mathcal{G}_k)$ 可识别为自由阿贝尔群范畴。在这种情况下，与截断 $\tau\colon \mathcal{G}_k \to \mathrm{h}(\mathcal{G}_k)$ 相关联的导出函子可识别为函子

$$\Sigma^{-k}\widetilde{C}_\bullet(-;\mathbb{Z})\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{\geq k} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\geq 0}$$

去悬挂整数链，它不保积。由于对于任意 $X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{\geq k}$，$X \to \mathrm{pt}$ 都是有效满射，因此可得 τ 不是弱左正合的。

例 6.3.5。 设 $\mathcal{P}$是 定义 7.1.1意义下的环理论；也就是说，是一个具有 S^1-张量的 Malcev 理论。接下来 [BPa], 我们将证明态射

$$\tau\colon \mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$$

投影到 $\mathcal{P}$ 的同伦范畴是弱左正合的。也就是说，例 6.3.4 中观察到的现象不会出现在环理论的情形中。

我们以证明导出函子弱左正合的一个自然判据，并考察此类函子的一些一般闭包性质，来结束本节。

命题 6.3.6. 设 $f\colon \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 是一个导出函子。要使 f 弱左正合，只需假设 $f_!$ 保持可表对象跨度的拉回

$$\nu Q' \to \nu Q \xleftarrow{\alpha} \nu P$$

其中 α 具有一个截面。

证明。 为了证明 f 是弱左正合的，我们必须证明 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 保留如下形式的笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

其中 α 是一个有效满射。取 Y的一个自由分解 $Y \simeq |\nu Q_\bullet|$ ，并考虑图表

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/Y} & \longrightarrow & \mathrm{Tot}\left((\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/\nu Q_\bullet}\right) \\ \downarrow{\scriptstyle f_!} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tot}\, f_!} \\ (\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}})_{/f_!Y} & \longrightarrow & \mathrm{Tot}\left((\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/f_!\nu Q_\bullet}\right) \end{array}$$

的 ∞-范畴。所要证明的是，左侧的竖直态射保留某些积。根据 推论 4.1.9，水平态射是等价，因为 $f_!Y \simeq |f_!\nu Q_\bullet|$。由于右侧全化中的极限是逐层计算的，并且由于这些函子

$$(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/Y} \to (\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/\nu Q_n}, \qquad (X \to Y) \mapsto (\nu Q_n \times_Y X \to \nu Q_n)$$

将 Y 上的有效满射映至 νQ_n上的有效满射，因此我们可以将问题归结为 $Y \simeq \nu Q$ 可表的情形。

取一个自由分解 $X \simeq |\nu P_\bullet|$。特别地，每个 $\nu P_n \to X$ 都是有效满射，因此复合映射 $\nu P_n \to X \to Y$ 也是有效满射。由几何实现的泛性质，映射

$$|Y' \times_Y \nu P_\bullet| \to Y' \times_Y X, \qquad |f_!Y' \times_{f_!Y} f_!\nu P_\bullet| \to f_!Y' \times_{f_!Y} f_!X$$

都是等价，因此可将问题归约到 $X \simeq \nu P$ 可表的情形。同理，可将问题归约到 $Y' \simeq \nu Q'$ 可表的情形。

最后注意到，可表函子之间的每个有效满射都有一个截面。□

命题 6.3.7。 考虑导出函子 $f\colon \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 和 $g\colon \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{R}$。

(1) 假设 f 和 g 弱左正合，则 $g \circ f$ 弱左正合。(2) 假设 g 和 $g \circ f$ 弱左正合，且 $g_!$ 保守，则 f 弱左正合。(3) 假设 f 和 $g \circ f$ 弱左正合，且 f 是由本质满同态 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 导出的，则 g 弱左正合。

证明。 (1, 2) 固定一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \tag{6.3.8}$$

在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中，存在一个 α 有效满射。于是比较映射

$$(gf)_!(X') \to (gf)_!(Y') \times_{(gf)_!(Y)} (gf)_!(X)$$

分解为以下复合

$$g_!f_!(X') \to g_!(f_!(Y') \times_{f_!(Y)} f_!(X)) \to g_!f_!(Y') \times_{g_!f_!(Y)} g_!f_!(X).$$

根据命题 6.2.1， $f_!$ 保有效满射，因此，由于 g 是弱左正合，第二个映射是等价。对于 (1)，若 f 是弱左正合，则第一个态射是等价，因此复合也是等价，这就证明了 $g \circ f$ 是弱左正合。对于 (2)，若$g \circ f$ 是弱左正合，则复合是等价，因此第一个映射也是等价。由于 $g_!$是保守的，这意味着 $f_!(X') \to f_!(Y') \times_{f_!(Y)} f_!(X)$ 是等价，因此 f 是弱左正合。

(3) 固定一个如下所示的笛卡尔方形图 公式 (6.3.8)。正如我们将在 §8 中进一步详细讨论的，由单子性定理可轻易得出， $f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是一个单子伴随的遗忘函子。特别地，任意模型 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 都可以写成其巴分解的几何实现：

$$X \simeq |(f_!f^*)^{\bullet+1}X|.$$

这是函子性的 X，因此笛卡尔方形图公式 (6.3.8) 等价于其巴分解的几何实现，其形式为

$$\begin{array}{ccc} (f_!f^*)^{\bullet+1}X' & \longrightarrow & (f_!f^*)^{\bullet+1}X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f_!f^*)^{\bullet+1}\alpha} \\ (f_!f^*)^{\bullet+1}Y' & \longrightarrow & (f_!f^*)^{\bullet+1}Y \end{array}.$$

由于 $f_!$ 和 f^* 都保持连通性， $f_!$ 是弱左正合这一假设意味着该单纯对象方形图逐层为笛卡尔方形图。由于 $g \circ f \simeq h$ 是弱左正合的，且每个 $(f_!f^*)^{\bullet+1}\alpha$ 都是有效满射，因此方形图

$$\begin{array}{ccc} g_!(f_!f^*)^{\bullet+1}X' & \longrightarrow & g_!(f_!f^*)^{\bullet+1}X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_!(f_!f^*)^{\bullet+1}\alpha} \\ g_!(f_!f^*)^{\bullet+1}Y' & \longrightarrow & g_!(f_!f^*)^{\bullet+1}Y \end{array}$$

在 $\mathcal{M}$模型$_{\mathcal{R}}$ 中逐层为笛卡尔方形图。由于 $g_!(f_!f^*)^{\bullet+1}\alpha$ 是有效满射，根据推论 4.1.8 ，取几何实现后它仍然是笛卡尔方形图。由于 $g_!$ 保持几何实现，这就证明了

$$g_!X' \to g_!X \times_{g_!Y'} g_!Y$$

这是一个等价，因此如所声称的， g 是弱左正合的。 □

7. 环理论与环模型

在定理 5.1.10中，我们刻画了 ∞-范畴：恰好那些可以写成 ∞-范畴的 Malcev 理论的模型的范畴，正是弱投射生成的范畴。然而，许多自然出现的 ∞-范畴，例如任意非零稳定 ∞-范畴，都不满足这一条件。在本节中，我们引入更精细的环理论概念，对于这种理论，我们可以讨论 $\mathcal{M}$模型$^{\Omega}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{M}$模型$_{\mathcal{P}}$ 的子范畴，即环模型。

这一概念的优点在于，许多其他的 ∞-范畴，例如谱及其代数的 ∞-范畴，都可以在适当选择环理论 $\mathcal{P}$后写成 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 的形式。在这种情况下，较大的 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 提供了一种有用的变形，其中 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 可以视为一般纤维 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}_\circ}$。

我们在 §7.1 中介绍该理论的基础，并在 §7.2 中描述一种实用的变体。在 §7.3 中，我们讨论如何将定义在环模型子范畴上的函子扩展到整个∞-模型范畴，并在 §7.4 中研究该扩张过程相对于自函子复合的行为

。最后，在 §7.5 中，我们将这些结果用于研究何时可以将环模型 ∞-范畴上的余单子导出为完整 ∞-模型范畴上的余单子。

7.1. 什么是环理论?

回顾一下，若 $X \in \mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴的对象，且 $T \in \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是一个空间，那么 张量$T \otimes X \in \mathcal{C}$（如果存在）就是常值图表 $T \to \mathcal{C}$ 在 X 上的余极限，其特征是存在一个自然等价映射$\mathcal{C}(T \otimes X, -) \simeq$ 映射$_{\mathcal{S}\mathrm{pc}}(T,$ 映射$_{\mathcal{C}}(X, -))$.

定义 7.1.1. 如果一个马尔采夫理论 $\mathcal{P}$ 承认由 S^1 给出的张量，那么它就是一个环理论 。环理论之间的环同态 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是一个保留由 S^1 给出的张量的同态。

De义 7.1.2. 环理论 $\mathcal{P}$ 的模型 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 若对每个 $P \in \mathcal{P}$ ，the 典范比较映射

$$X(S^1 \otimes P) \to X(P)^{S^1}$$

是一个等价。我们记

$$\nu\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

为由环模型张成的全子范畴。

备注 7.1.3. 此处提出的环理论概念，是对先前在 [Bal25]和 [Pst23b]中研究的概念的推广。 下面的命题 7.1.8 表明，对于幂等完备的环理论，定义 7.1.1 与 [Bal25，定义 3.11]之间唯一的区别在于我们对 Malcev 理论采用了更灵活的定义，参见 §1.3。

例 7.1.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个余完备稳定的 ∞范畴，且 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$ 是由一小集合对象在余积和悬挂下生成的全子范畴。那么 $\mathcal{P}$ 是一个环理论，其中 $S^1 \otimes P \simeq P \oplus \Sigma P$对应于 $P \in \mathcal{P}$。

例 7.1.5. 设 $\mathcal{P}$ 是一个离散 Malcev 理论。那么 $\mathcal{P}$ 是一个环理论，其中

$$S^1 \otimes P \simeq P$$

对所有 $P \in \mathcal{P}$。 $\mathcal{P}$ 的 loop 模型的 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 可以识别为 $\mathcal{P}$的集合值模型的普通范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\heartsuit}_{\mathcal{P}}$ 。

例 7.1.6。 如果 $\mathcal{P}$ 是一个 loop 理论，那么它的幂等完备化 $\mathcal{P}^{\natural}$也是如此，并且如 命题 3.2.2 所示，沿包含 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^{\natural}$ 作限制会诱导一个等价 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}^{\natural}}$。

由于 7.1.6，通常可以毫无顾虑地假设 loop 理论是幂等完备的。以下结果带来了特别便利之处。

定义 7.1.7。 记 $\mathcal{S}\mathrm{ph} \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 为由 S^1 在积、楔和及 smash 积（相对于任意基点）下生成的全子范畴。

特别地， $\mathcal{S}\mathrm{ph}$ 包含所有与有限个正维球谱的有限楔和之有限积等价的空间。

命题 7.1.8. 设 $\mathcal{P}$ 是一个幂等完备的环理论。那么

(1) $\mathcal{P}$ 对所有 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$ 都允许张量。(2) 如果 $T_1, T_2 \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，那么对于每个 $P \in \mathcal{P}$ ，都存在一个（非典范的）等价。

$$(T_1 \times T_2) \otimes P \simeq (T_1 \vee T_1 \wedge T_2 \vee T_2) \otimes P$$

在 $\mathcal{P}$ 中。特别地，若 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，则 $T \otimes P$是 $(S^1)^n \otimes P$的（非典范）收缩，其中某个 $n \geq 0$】【。

（3）如果 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$，那么比较映射

$$X(T \otimes P) \to X(P)^T$$

是 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$ 的等价形式。

证明。 (1) 令 $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 表示满足 $\mathcal{P}$ 可对 $T \in \mathcal{T}$取张量的连通空间类。我们必须证明 $\mathcal{S}\mathrm{ph} \subset \mathcal{T}$。由于 $S^1 \in \mathcal{T}$ 按构造可知，只需证明 $\mathcal{T}$ 在积、楔和 smash 积下是封闭的。事实上，如果 T_1, $T_2 \in \mathcal{T}$，则 $T_1 \times T_2 \in \mathcal{T}$ 通过公式

$$(T_1 \times T_2) \otimes P \simeq T_1 \otimes (T_2 \otimes P).$$

应用 引理 2.4.6 于 $\mathcal{P}^{\mathrm{op}}$，我们得知，若 $P \in \mathcal{P}$ 则存在一个（非典范的）等价

$$(T_1 \times T_2) \otimes P \simeq (T_1 \vee (T_1 \wedge T_2) \vee T_2) \otimes P;$$

特别地， $\mathcal{P}$ 可由 $T_1 \vee (T_1 \wedge T_2) \vee T_2$张量。由于 $\mathcal{P}$ 是幂等完备的， $\mathcal{T}$也是如此。由于$T_1 \vee T_2$和 $T_1 \wedge T_2$是 $T_1 \vee(T_1 \wedge T_2) \vee T_2$的收缩，因此 $\mathcal{P}$可由 $T_1 \vee T_2$和 $T_1 \wedge T_2$ 张量，正如所声称的那样。

(2) 与 (1) 一样，这可由引理 2.4.6得出。

(3) 由 (2) 可知，若 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，则比较映射 $X(T \otimes P) \to X(P)^T$ 是某个 $T = (S^1)^n$ 的比较映射的收缩，其中 $n \geq 0$，因此我们可以归结到 $T = (S^1)^n$的情形。若 $n = 1$，则这是假设 X 是一个环模型，因此只需证明，对于使 $X(T \otimes P) \to X(P)^T$为等价的 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$这一类，在有限积下封闭。事实上，设给定 T_1， $T_2 \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，使得比较映射

$$X(T_1 \otimes P) \to X(P)^{T_1}, \qquad X(T_2 \otimes P) \to X(P)^{T_2}.$$

由此可知　t 顶部的比较映射填入.....　方形图

$$\begin{array}{ccccc} X((T_1 \times T_2) \otimes P) & & \longrightarrow & & X(P)^{T_1 \times T_2} \\ \downarrow \simeq & & & & \simeq \uparrow \\ X(T_1 \otimes (T_2 \otimes P)) & \longrightarrow & X(T_2 \otimes P)^{T_1} & \longrightarrow & (X(P)^{T_2})^{T_1} \end{array}$$

是一个等价，如所需。 □

下面这个变体也很有用。

命题 7.1.9. 设 $\mathcal{P}$ 是一个幂等完备的带基点的马尔采夫理论，并假设 $\mathcal{P}$ 的对象具有类群状 H-余乘法。那么，当且仅当 $\mathcal{P}$ 具有悬挂时，它是一个环理论；在这种情况下， $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$是一个环模型，当且仅当对所有 $P \in \mathcal{P}^{\natural}$， $X(\Sigma P) \to \Omega X(P)$ 是一个等价。

证明。 证明与命题 7.1.8的证明基本相同，只需使用对象H上的类群状余乘法 $P \in \mathcal{P}$ 来实现 $S^1 \otimes P \simeq \Sigma P \coprod P$。 □

从这里开始，loop 理论及其模型可以像 [Bal25]中那样加以发展。例如，以下对 $\mathcal{P}$ 的 loop 模型的另一种刻画常常很有用。

命题 7.1.10。 令 $\mathcal{P}$ 为一个 loop 理论。则下列方形图可交换且为笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} & \rightarrowtail & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \\ \downarrow \pi_0 & & \downarrow \tau_! \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}^{\heartsuit} & \rightarrowtail & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}} \end{array}.$$

换句话说，模型 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是 loop 模型，当且仅当 $\tau_! X$ 是离散的。此外，对于任意 loop 模型 X，截断 τ_n: $\mathcal{P} \to \mathrm{h}_n\mathcal{P}$ 满足 $\tau_{n!} X \simeq X_{<n}$。

证明。 与 [Bal25中的推论 3.2.2、定理 5.4 相同的证明1]适用。 □

我们还有如下结论。

命题 7.1.11. 设 $\mathcal{P}$ 是一个环理论。

(1) $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 对所有小极限，以及逐层分裂的单纯对象的几何实现封闭。(2) 设 κ 为一个正则基数，并假设 $\mathcal{P}$ 由一个 κ元理论 $\mathcal{P}_{\kappa} \subset \mathcal{P}$生成。(a) $\mathcal{P}_{\kappa} \subset \mathcal{P}$ 对由 S^1作的张量封闭。(b) 定理 3.5.10 的等价 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}^{\kappa}(\mathcal{P}_{\kappa})$ 限制为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 与以下 ∞范畴之间的等价：在 $\mathcal{P}_{\kappa}$ 上保持 κ-小积和 S^1-余张量的预层 X 。(3) 特别地，若 $\mathcal{P}$ 是一个有界环理论，则 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的可达局部化，因此是一个可呈现的 ∞范畴。

证明。 这些证明是对普通理论相应命题证明的直接变体，因此我们省略细节。□

警告 7.1.12。 给定一个有界环理论 $\mathcal{P}$，我们没有局部化的显式公式

$$L\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega},$$

除了一些特殊情形外，详见 命题 7.1.14和 命题 7.2.6。因此，如果 $\mathcal{P}$ 是任意一个非有界环理论，那么我们不知道 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$是否是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$的局部化，或者等价地， $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 是否存在所有小余极限。

最后，我们注意到，任何 Malcev 理论都可以以一种自然的方式完备化为环理论。

定义 7.1.13。 Malcev 理论 $\mathcal{P}$ 的环完备化 是由以下对象生成的全子范畴

$$\mathcal{P}_{\Sigma} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

在 $\mathcal{P}$ 下对余积及由 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}_{*}$ 作张量所生成。

命题 7.1.14。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。那么，受限 Yoneda 嵌入

$$\nu\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_{\Sigma}}$$

是一个全忠实右伴随，其左伴随由沿同态$\mathcal{P} \to \mathcal{P}_{\Sigma}$的限制给出。 ν 的本质像由 $\mathcal{P}_{\Sigma}$的环模型张成；也就是说， ν 诱导出一个等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_{\Sigma}}^{\Omega}.$$

证明。 与 [Bal25定理 3.31] 中的证明相同， □

例 7.1.15。 令 $\mathcal{G}$ 表示群理论，并将$\mathcal{G}$ 的模型范畴 ∞范畴与带基点连通空间的 ∞范畴等同。若 $X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}_{*}^{\geq 1}$且 T 是任意空间，则

$$T \otimes X \simeq T_{+} \wedge X.$$

由此可知， $\mathcal{G}_{\Sigma}$ 的 $\mathcal{G}$ 环完备化等价于 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_{*}^{\geq 1}$的全子范畴，该子范畴由正维球面的楔和张成。这是经典的环理论例子，可追溯至 Blanc、Dwyer、Goerss、Kan 和 Stover 关于 Π-代数 [Sto90、DK89、BDG04], 的研究，并在 ∞范畴论框架下作了诠释，见 [Pst23b]。

7.2. 变体：去环理论

下面这个环理论的对偶变体对于建立稳定 ∞-范畴的模型也很方便。

定义 7.2.1。稳定解环理论是一个 Malcev 理论 $\mathcal{P}$ ，它是有基点的，允许取环，并且 $\Omega\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 保持余积。稳定解环理论 $\mathcal{P}$ 的去环模型所构成的 ∞-范畴是以下全子范畴

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

由那些模型 X 构成，其比较映射

$$X(P) \to \Omega X(\Omega P)$$

对所有 $P \in \mathcal{P}$ 都是等价。

下面说明，稳定去环理论是 稳定环理论在 [Bal25] 中的推广。

命题 7.2.2。设 $\mathcal{P}$ 是一个稳定去环理论。

(1) $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 是一个稳定的 ∞-范畴。(2) $\nu\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的值落在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 中，当且仅当 $\Omega\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 是全忠实的。在这种情况下，$\mathcal{P}$ 是一个加法的 ∞-范畴。(3) 假设 $\Omega\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 是一个等价。那么 $\mathcal{P}$ 是一个稳定环理论，也就是说，$\mathcal{P}$ 具有悬挂，且 $\Sigma\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 是一个等价。此外，$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}^{\mathrm{o}}}^{\Omega}$。

证明。(1) 显然，$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 对小极限封闭。特别地，$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 具有有限极限，并由 Lura 的推论 1.4.2 可知，若 $\Omega\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 是一个等价，则 27] 稳定。对于 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，记 $X_{\Omega} = X \circ \Omega = \Omega^{*}X$ 为将 X 与 Ω 前合成。Ω 保持余积的条件确保 X_{Ω} 仍是 $\mathcal{P}$ 的一个模型，并且根据定义，$X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 当且仅当典范映射

$$X \to \Omega X_{\Omega}$$

是一个等价。这表明 $(-)_{\Omega}$ 定义了 Ω 在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 上的本质逆，证明了 Ω 如所述定义了 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 的一个自同构。

(2) 根据定义，$\nu(Q) \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 当且仅当，对所有 $P \in \mathcal{P}$，映射

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, Q) \to \Omega\,\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(\Omega P, Q) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(\Omega P, \Omega Q)$$

是一个等价。对于所有 $Q \in \mathcal{P}$，这成立当且仅当 Ω 是全忠实的。由 (1) 可知，$\nu\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 将 $\mathcal{P}$ 实现为一个稳定 ∞-范畴的全子范畴，且该子范畴对余积封闭，因此是加法的。

(3) 由于 $\Omega\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 是一个等价，因此存在一个逆，必定由 $\Sigma\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 给出。由 (2) 可知 $\mathcal{P}$ 是加法的，因此若 $P \in \mathcal{P}$，则 $S^{1} \otimes P \simeq P \oplus \Sigma P \in \mathcal{P}$，这意味着$\mathcal{P}$ 是一个环理论。根据命题 7.1.9，可知 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 由满足以下条件的模型组成 X：

$$X(\Sigma P) \to \Omega X(P)$$

对所有 $P \in \mathcal{P}$ 都是等价，而 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 由满足以下条件的那些模型组成

$$X(P) \to \Omega X(\Omega P)$$

对所有 $P \in \mathcal{P}$ 都是等价。由于 $\Sigma \dashv \Omega$ 是 $\mathcal{P}$ 的逆自同构，这些条件彼此等价。□

由此可得以下变体：[Bal25，定理 3.3。3]。

命题 7.2.3。设 $\mathcal{D}$ 是一个稳定的 ∞-范畴，且具有小余极限；设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ 是一个对余积和去悬挂封闭的全子范畴，并由一个小子范畴 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ 在余积和收缩下生成。

(1) 受限 Yoneda 嵌入

$$\nu\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

限制到由 $\mathcal{P}$ 生成的厚子范畴后是全忠实的。

(2) 假设 $\mathcal{P}_0$ 是 $\mathcal{D}$ 的生成元集，也就是说，如果 $X \in \mathcal{D}$，那么当且仅当对于所有 $P \in \mathcal{P}_0$，映射 $\mathcal{D}(P,\ X) \simeq *$。那么在以下任一情形下，$\nu$ 限制为等价 $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$：

(a) $\mathcal{P}_0$ 的每个对象都是 $\mathcal{D}$ 中的紧对象；(b) 存在一个固定有限图表 $\mathcal{J}$，使得 $\mathcal{D}$ 的每个对象都等价于某个 $\mathcal{J}$-指标对象图表的余极限的收缩，其中这些对象属于 $\mathcal{P}$。

证明。 与 [Bal25中定理 3.3 的相同证明3] 适用。 □

注 7.2.4。 命题 7.2.3.(2) 的判据并不精确：存在等价$\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$，其具有 $\mathcal{P}$ 不满足所给任一假设的稳定解环理论。

注 7.2.5。 我们注意到，命题 7.2.3 表明，不同于普通理论及其 ∞-模型范畴， ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 表示为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 或$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 的形式，在本质上取决于所选择的解环理论或环理论 $\mathcal{P}$。

例如，令 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{Cpl}(p)} \subset \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ 为 p-完备 $\mathbb{Z}$-模的全子范畴，并令 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \subset \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{Cpl}(p)}$ 分别为由 $\mathbb{Z}_p^{\wedge}$ 和 $\mathbb{Z}/(p)$在余积、悬挂和去悬挂下生成的全子范畴。于是， $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是满足以下条件的（解）环理论

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma} \simeq \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{Cpl}(p)} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Sigma} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega},$$

但理论 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 截然不同：例如， $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 是紧生成的，而$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 则不是。通俗地说， $\mathcal{P}$ 记录的是一个 p-完备 $\mathbb{Z}$-模的同伦群，而$\mathcal{Q}$ 记录的则是模 p 的同伦群以及剩余的 Bockstein 信息。

与环理论一样，对于有界解环理论，我们还可以进一步说明一些情况。

命题 7.2.6。 设 $\mathcal{P}$ 是一个有界解环理论。

(1) $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$的一个可达局部化。特别地， $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 是可呈现的（但其可达性秩可能高于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$）。（2）设 $\mathcal{P}$ 由一个关于 κ元的理论 $\mathcal{P}_{\kappa} \subset \mathcal{P}$ 生成，且该理论在 Ω 下封闭。（a） $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 等价于由函子 X组成的 ∞-范畴： $\mathcal{P}_{\kappa} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$；这些函子保持$\kappa$-小积，并且对于 $P \in \mathcal{P}$， $X(P) \to \Omega X(\Omega P)$ 是一个等价。（b）如果 $\kappa = \omega$，则局部化 L: $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 由 for $P \in \mathcal{P}_{\omega}$ 决定。

$$(LX)(P) = \operatorname*{colim}_n \Omega^n X(\Omega^n P)$$

证明。 (1) 选择一个正则基数 κ 以及一个生成 $\mathcal{P}_{\kappa}$ 的 κ-元理论 $\mathcal{P}_{\kappa} \subset \mathcal{P}$ 。令$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ 为由 $\mathcal{P}_{\kappa}$ 在环下生成的全子范畴。由于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可呈现且$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 很小，存在一个正则基数 $\lambda \geq \kappa$，使得 $\mathcal{P}_0$ 中的所有对象都是λ-紧对象（相对于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$）。令 $\mathcal{P}_{\lambda} \subset \mathcal{P}$ 为由 $\mathcal{P}_0$ 在 λ-小余积下生成的全子范畴。由于 Ω 保持余积，我们看到 $\mathcal{P}_{\lambda}$ 仍在 Ω 下封闭，并且 $\mathcal{P}$ 由 λ-元理论 $\mathcal{P}_{\lambda}$生成。

根据定理 3.5.10，受限 Yoneda 嵌入将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}^{\lambda}(\mathcal{P}_{\lambda})$ 实现为 $\mathcal{P}_{\lambda}$ 上保持 λ-小积的预层所构成的全子范畴。容易看出， $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Sigma}$ 等价于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中满足以下条件的全子范畴：对所有 $P \in \mathcal{P}_{\lambda}$， $X(P) \to \Omega X(\Omega P)$ 是一个等价。这是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中相对于态射集合 $\{\Sigma\nu\Omega P \to \nu P : P \in \mathcal{P}_{\lambda}\}$ 局部的对象所构成的子范畴，因此构成 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$的一个可呈局部化。

(2a) 是定理 3.5.10的直接推论，论证与上文相同。

(2b) 用 $\mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega}) \subset \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega})$ 表示在 (2a) 意义下的去环模型构成的全子范畴。给定 $X \in \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega})$，定义 $LX \in \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega})$ 如下：

$$(LX)(P) = \operatorname*{colim}_n \Omega^n X(\Omega^n P).$$

由于滤过余极限保持有限积，因此这确实属于 $\mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega})$。我们必须证明$LX \in \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega})$，并且若 $X \in \mathcal{P}\mathrm{sh}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{P}_{\omega})$，那么显然的映射 $X \to LX$ 是一个等价。

为证明 $LX \in \mathcal{P}\mathrm{sh}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{P}_\omega)$，我们对 $P \in \mathcal{P}_\omega$ 进行计算，得到

$$(LX)(P) \simeq \operatorname*{colim}_n \Omega^n X(\Omega^n P) \simeq \operatorname*{colim}_n \Omega^{n+1} X(\Omega^{n+1} P) \simeq \Omega \operatorname*{colim}_n \Omega^n X(\Omega^{n+1} P) \simeq \Omega(LX)(\Omega P),$$

因为滤过余极限与 Ω 交换。反过来，如果 $X \in \mathcal{P}\mathrm{sh}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{P}_\omega)$，那么对于所有 $P \in \mathcal{P}$ 塔 $\{\Omega^n X(\Omega^n P) : n \geq 0\}$ 都等价于 $X(P)$ 上的常值塔，因此 $X \to LX$ 是一个等价。□

7.3. 函子性与环模型

给定一个环理论 $\mathcal{P}$，∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可以看作一个 ∞-范畴，其中的对象是由给定的自由对象 $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 选择对 $\mathcal{P}$ 的环模型作出的“形式分解”。本节将描述 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 如何在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 中具有函子性，反之亦然。

为了联系这两者，我们使用包含函子 $\nu_{\mathcal{P}} \colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 及其左伴随 $L_{\mathcal{P}} \colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$；根据 命题 7.1.11，当 $\mathcal{P}$ 有界时，左伴随存在。主要的初等构造可以在这一一般性层面上建立，因此我们先在此进行构造：

构造 7.3.1。设

$$L_1 \colon \mathcal{C}_1 \rightleftarrows \mathcal{D}_1 : R_1, \qquad L_2 \colon \mathcal{C}_2 \rightleftarrows \mathcal{D}_2 : R_2.$$

为 ∞-范畴之间的伴随。

(1) 函子 $f \colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ 的上共轭 是复合函子

$$f^{L \dashv R} := L_2 \circ f \circ R_1 \colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2;$$

(2) 函子 $s \colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ 的下共轭 是复合函子

$$s_{L \dashv R} := R_2 \circ s \circ L_1 \colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2.$$

伴随 $L_i \dashv R_i$ 的单位诱导出一个自然变换

$$\eta = \eta_2 f \eta_1 \colon f \to (f^{L \dashv R})_{L \dashv R} = R_2 L_2 f R_1 L_1,$$

而余单位诱导出一个自然变换

$$\epsilon = \epsilon_2 s \epsilon_1 \colon (s_{L \dashv R})^{L \dashv R} = L_2 R_2 s L_1 R_1 \to s.$$

命题 7.3.2. 自然变换 η 和 ϵ 属于构造 7.3.1，它们是一个伴随的单位和余单位

$$(-)^{L \dashv R} \colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) : (-)_{L \dashv R}$$

证明。（余）单位的三角恒等式由 $L_1 \dashv R_1$ 和 $L_2 \dashv R_2$ 的三角恒等式推出 . □

我们主要关注 $L_1 = L_2$ 和 $R_1 = R_2$ 的情形。共轭构造与复合相容，具体如下：

构造 7.3.3. 设 $L \dashv R \colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ 是一个伴随。那么余单位给出一个自然变换

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}^{L \dashv R} = LR \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}},$$

而单位则对任意一对函子 f, $g \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 给出一个自然变换

$$(f \circ g)^{L \dashv R} = L f g R \to L f R L g R = f^{L \dashv R} \circ g^{L \dashv R}$$

在 [BCN25，引理 3。10], Brantner–Campos–Nuiten 证明，这些自然变换可扩展为上共轭函子的余松幺结构

$$(-)^{L \dashv R} \colon \mathrm{End}(\mathcal{C}) \to \mathrm{End}(\mathcal{D}).$$

对偶地，下共轭

$$(-)_{L \dashv R} \colon \mathrm{End}(\mathcal{D}) \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$$

是典范的松幺半。

注 7.3.4. 假设 $L \dashv R$ 是一个局部化；也就是说，单位 $LR \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 是一个等价。于是，根据显式描述可知，典范映射

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}^{L\dashv R} \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

and

$$(s \circ t)_{L\dashv R} \to s_{L\dashv R} \circ t_{L\dashv R}$$

是自然等价。当 $L \dashv R$ 是余局部化时，也有对偶的陈述；也就是说，$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to RL$ 是一个等价。

现在，我们将讨论限定在有界环理论的情形，并考虑局部化伴随$L_{\mathcal{P}}$： $\mathcal{M}$模型$_{\mathcal{P}} \rightleftarrows \mathcal{M}$模型$_{\mathcal{P}}^{\Omega}$： $\nu_{\mathcal{P}}$的 命题 7.1.11。为使讨论保持在导出函子的范畴内，我们对构造略作调整。

定义 7.3.5。 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是有界环理论。诱导导出函子构造 $s \mapsto D(s)$ 是以下复合

$$D\colon \ \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}) \xrightarrow{(-)_{L\dashv\nu}} \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{\mathrm{der}} \mathrm{fun}_!(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

由构造 7.3.1 的下共轭以及命题 6.1.7 的导出函子包含的右伴随组成。对偶地，环模型之间的诱导函子构造$f \mapsto E(f)$ 由以下复合给出

$$E\colon \ \mathrm{fun}_!(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{(-)^{L\dashv i}} \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega})$$

作为伴随的复合，这两个函子构成一个伴随 $E \dashv D$。

注 7.3.6。 对于自同态的情形， $E\colon \mathbf{end}_!(\mathcal{P}) \to \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})$ 由构造 7.3.3 和注 6.1.9 结合可知，具有典范的余松弛幺半结构。对偶地，其右伴随 D具有典范的松幺半结构。

注 7.3.7。 若 $\mathcal{P}$， $\mathcal{Q}$ 是有界环理论，且 $s\colon \mathcal{M}\mathbf{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \to \mathcal{M}\mathbf{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}$ 是一个函子，则

$$D(s)\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$$

可以具体描述为与复合函子相伴的导出函子

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \xrightarrow{s} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega} \xrightarrow{\nu_{\mathcal{Q}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \ .$$

这关键地用到了 Yoneda 嵌入的像包含在环模型的子范畴这一事实。反过来，若 $f\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 是一个导出函子，则

$$E(f)\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}$$

可以具体描述为复合

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \xrightarrow{\nu_{\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{f_!} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{L_{\mathcal{Q}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega} \ .$$

注记 7.3.8。 利用 注 7.3.7 可以定义 D 而无需假设 $\mathcal{P}$ 或 $\mathcal{Q}$ 有界。同样，展开这一构造可知，要定义 E 只需包含 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 存在一个左伴随，例如 $\mathcal{Q}$ 有界即可。

例 7.3.9. 假设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是离散 Malcev 理论。那么 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是环理论，而注 7.3.7表明，诱导出的导出函子构造 D 在定义 7.3.5中等价于构造

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\heartsuit}) \to \mathrm{fun}_!(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}})$$

将普通函子 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\heartsuit} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\heartsuit}$ 映射为其全导出函子 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$，这是经典同伦代数意义下的 [Qui67，第一节。4]。

与左导出函子的经典理论一样，从一个函子到其关联导出函子的自然变换是典范的。此概念将在 §7.5 中发挥重要作用，因此我们在此记录相关概念。

构造 7.3.10。设 $f\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}$ 是一个函子，且 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$。则伴随的余单位 $E \dashv D$ 给出一个典范映射

$$L_{\mathcal{Q}}(D(f)(\nu_{\mathcal{P}}X)) \simeq E(D(f))(X) \to f(X),$$

它是映射 $D(f)(\nu_{\mathcal{P}}X) \to \nu_{\mathcal{Q}}(f(X))$ 的伴随。

定义 7.3.11。我们将 $D(f)(\nu_{\mathcal{P}}X) \to \nu_{\mathcal{Q}}(f(X))$ 称为 构造 7.3.10 的 典范比较映射。我们称 X 是 f-*tame* 的，如果此比较映射是一个等价。

注记 7.3.12。设 $f\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}$ 是一个函子，且余单位 $E(D(f)) \to f$ 是一个等价。则典范比较映射 $D(f)(\nu_{\mathcal{P}}X) \to \nu_{\mathcal{Q}}(f(X))$ 等价于单位 $D(f)(X) \to \nu_{\mathcal{Q}}L_{\mathcal{Q}}D(f)(X)$，因此 X 是 f-tame 当且仅当 $D(f)(X)$ 是一个环模型。

注记 7.3.13. 若 X 是一个环模型，且 $\nu_{\mathcal{P}}X \simeq |\nu_{\mathcal{P}}P_{\bullet}|$ 是其底层模型的一个由可表对象构成的单纯分解，那么定义 7.3.11 中的比较映射可具体识别为以下复合

$$D(f)(\nu_{\mathcal{P}}X) \simeq D(f)(|\nu_{\mathcal{P}}P_{\bullet}|) \simeq |D(f)(\nu_{\mathcal{P}}P_{\bullet})| \simeq |\nu_{\mathcal{Q}}(fP_{\bullet})| \to \nu_{\mathcal{Q}}(f(|P_{\bullet}|)) \simeq \nu_{\mathcal{Q}}(f(X)),$$

其中，中间的箭头是余极限比较映射。我们这个略显抽象的构造确保该映射关于 X 自然，并且不依赖于所选的分解。

例 7.3.14. 任意 $P \in \mathcal{P} \subset \mathcal{M}$模型$_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 对于任意函子 f-驯服 f。这可由注记 7.3.13中给出的显式描述得出。

我们在此记录以下结果，以备后用。

引理 7.3.15. 设 $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ 是有界环理论，并设 $f\colon \mathcal{M}$模型$_{\mathcal{P}}^{\Omega} \to \mathcal{M}$模型$_{\mathcal{Q}}^{\Omega}$ 是一个保持小余极限的函子。那么 $D(f)$ 保持将 $L_{\mathcal{P}}$-等价映为 $L_{\mathcal{Q}}$-等价。

证明。我们必须证明：若 $X \to Y$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的一个映射，且它所诱导的映射 $L_{\mathcal{P}}X \to L_{\mathcal{P}}Y$ 是等价，那么 $L_{\mathcal{Q}}D(f)(X) \to L_{\mathcal{Q}}D(f)(Y)$ 也是等价。根据定义， $L_{\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 到由相对于映射 $S^1 \otimes \nu_{\mathcal{P}}P \to \nu_{\mathcal{P}}(S^1 \otimes P)$（其中 $P \in \mathcal{P}$）局部的对象组成的全子范畴的可呈局部化。定理 4.2.3 的判据保证复合函子 $L_{\mathcal{P}} \circ D(f)$保余极限，因此只需证明当 $P \in \mathcal{P}$ 时，比较映射

$$L_{\mathcal{Q}}D(f)(S^1 \otimes \nu_{\mathcal{P}}P) \to L_{\mathcal{Q}}D(f)(\nu_{\mathcal{P}}(S^1 \otimes P))$$

是等价。事实上，由于 f 和 $L_{\mathcal{Q}}D(f)$都保 S^1-张量，我们有

$$L_{\mathcal{Q}}D(f)(S^1 \otimes \nu_{\mathcal{P}}P) \simeq S^1 \otimes L_{\mathcal{Q}}D(f)(\nu_{\mathcal{P}}P) \simeq S^1 \otimes f(P) \simeq f(S^1 \otimes P) \simeq L_{\mathcal{Q}}D(f)(\nu_{\mathcal{P}}(S^1 \otimes P))$$

证毕。 □

一般而言，伴随 $E \dashv D$ 既不是局部化，也不是余局部化。现在我们给出一些有用的判据，以确定其（余）单位何时为等价；换言之，确定何时可以从环模型所关联的导出函子恢复环模型之间的函子，反之又何时可以从环模型上的关联函子导出导出函子。

引理 7.3.16。设 $\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$ 为有界环理论。对于函子 $f\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}$，以下各项等价：

（1）伴随的 $E(D(f)) \to f$ 余单位映射定义 7.3.5 是一个等价；（2） f 保留那些被包含 $\nu_{\mathcal{P}}\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \hookrightarrow \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$的余极限图表的几何实现。

证明。 展开构造可知， $E(D(f))$ 可以识别为复合映射

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \xrightarrow{\nu_{\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{f_!} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{L_{\mathcal{Q}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega},$$

其中 $f_! = D(f)\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 是与从 f 到 $\mathcal{P}$ 的限制相关联的导出函子。由于 $f_!$ 和 $L_{\mathcal{Q}}$ 保留所有几何实现，因此 $E(D(f))$ 总是保留由包含 $\nu_{\mathcal{P}}\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 所保留的那些余极限图表的几何实现，这意味着 (1)⇒(2)。

反过来，假设 f 保留由 $\nu_{\mathcal{P}}$ 所保留的那些余极限图表的几何实现。根据上文，同样的结论也适用于 $E(D(f))$。给定 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$，我们可以选取其底层模型的一个分解 $\nu_{\mathcal{P}} X \simeq |\nu_{\mathcal{P}} P_\bullet|$；由于 $L_{\mathcal{P}}$ 是局部化，因此 $X \simeq |P_\bullet|$ 将 X 实现为可表对象的几何实现，而该几何实现由 $\nu_{\mathcal{P}}$ 保留。因此，要证明 $E(D(f))(X) \to f(X)$ 是一个等价，我们可以归约到 $X = \nu P$ 对某个 $P \in \mathcal{P}$ 成立的情形；正如我们在例 7.3.14 中所观察到的，此时结论显然成立。□

Lem引理 7.3.17. 设 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 是有界环理论。对于一个保持几何实现的函子 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{型}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{型}_{\mathcal{Q}}$，以下条件等价：(1) 单位映射 $f_! \to D(E(f_!))$ 是自然等价；(2) $f_!$ 将可表对象映为环模型。

证明。 由于单位变换的两边都保持几何实现，因此它们相等当且仅当它们在可表对象上相等。由于对 $P \in \mathcal{P}$， $D(E(f_!))(\nu P) \simeq L_{\mathcal{Q}}(f_! \nu(P))$，结论得证。□

环模型之间诱导函子的另一个有用应用，是对赋值 $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{M}\mathrm{型}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 的函子性作出明确描述。

命题 7.3.18. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是环理论的一个环同态。那么沿 f 的限制定义了一个函子

$$f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}.$$

它保留所有小极限，以及逐层分裂单纯对象的所有几何实现。如果 f 是本质满的，那么 f^* 是保守的。如果 $\mathcal{Q}$ 是有界的，那么 f^* 是 $E(f_!)\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}$ 的右伴随。

证明. 若 $X\colon \mathcal{Q}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是一个环模型，由于 f 是一个环同态， $f^* X = X \circ f\colon \mathcal{P}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 也仍是一个环模型。根据命题 7.1.11.(1)，此构造保留所有极限和所有逐层分裂几何实现；显然，当 f 本质满时，此构造是保守的。对于这个伴随关系，注意若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 且 $Y \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{map}_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}}(E(f_!)X, Y) &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}}(L_{\mathcal{Q}} f_! \nu_{\mathcal{P}} X, Y) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}}(f_! \nu_{\mathcal{P}} X, \nu_{\mathcal{Q}} Y) \\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}}(\nu_{\mathcal{P}} X, f^* \nu_{\mathcal{Q}} Y) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\Omega}}(X, f^* Y),\end{aligned}$$

利用 $f_! \dashv f^*$ 给出的伴随关系，见例 6.1.3。 □

7.4. 松单性与作用

在上一节中，我们描述了环模型的 ∞-范畴之间的函子如何诱导模型的 ∞-范畴之间的导出函子，反之亦然。对于自同态，这些构造组合成一个伴随

$$E\colon \mathrm{end}_!(\mathcal{P}) \rightleftarrows \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})\ :D,$$

其中 $\mathrm{end}_!(\mathcal{P}) \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$ 是由保几何实现的函子所张成的全子范畴。本节的目标是证明这是一个幺半伴随，也就是说，右伴随 D 具有典范的松幺半结构，而且这种幺半性在

与这些自同态 ∞-范畴的典范作用相容的精确意义下（定理 7.4.4）。本节的结果将在 §7.5中应用于我们对模型范畴和环模型 ∞范畴中（余）单子与（余）代数之间关系的讨论。

记号 7.4.1。令 $\mathcal{LM}\mathrm{od}^{\otimes}$ 为 ∞-拟 operad，用于编码一对结合代数和一个 [Lura的左模，定义 4.2.1。7]。一个 $\mathcal{LM}\mathrm{od}$-幺半 ∞-范畴是一个余笛卡尔纤维化

$$(\mathcal{A},\mathcal{M})^{\otimes}\to\mathcal{LM}\mathrm{od}^{\otimes}.$$

满足 以下条件： [Lura，命题 2.1.2。12]。这唯一确定了……，反之亦然。 y

(1) 一个幺半 ∞-范畴 $\mathcal{A}$；(2) 一个 ∞-范畴 $\mathcal{M}$；(3) $\mathcal{A}$ 对 $\mathcal{M}$的作用。

回顾7.4.2 （ ∞-拟 operad 的松弛态射）。若 $(\mathcal{A}_1,\mathcal{M}_1)$ 、 $(\mathcal{A}_2,\mathcal{M}_2)$ 是 $\mathcal{LM}$od-幺半∞-范畴，则一个松弛态射 f： $(\mathcal{A}_1,\mathcal{M}_1)\to(\mathcal{A}_2,\mathcal{M}_2)$ 是一个交换图表

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{A}_1,\ \mathcal{M}_1)^{\otimes} & \xrightarrow{\quad f\quad} & (\mathcal{A}_2,\ \mathcal{M}_2)^{\otimes}\\ & \searrow\quad\swarrow & \\ & \mathcal{LM}\mathrm{od}^{\otimes} & \end{array}$$

其中，水平箭头 f 是 ∞-幺半范畴的态射。具体而言， f 确定

(1) 一个松弛幺半函子 $f_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$ ，它来自幺半 ∞-范畴；(2) 一个函子 $f_{\mathcal{M}}$: $\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$；(3) 一个自然变换

$$f_{\mathcal{A}}(a)\cdot f_{\mathcal{M}}(m)\to f_{\mathcal{M}}(a\cdot m)$$

函子 $\mathcal{A}_1\times\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$ 之间的。

这些数据满足多种相容性条件，非正式地说，这些条件表明给定的自然变换与 $f_{\mathcal{A}}$ 的松幺半结构以及 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 在 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 上的作用恰当地相容。

回顾 7.4.3 （ ∞-幺半算子上的代数）。若 p: $(\mathcal{A},\mathcal{M})^{\otimes}\to\mathcal{LM}\mathrm{od}^{\otimes}$ 是一个 $\mathcal{LM}$od-幺半 ∞-范畴，则一个 $\mathcal{LM}$od-代数 是一个截面

$$s\colon\mathcal{LM}\mathrm{od}^{\otimes}\to(\mathcal{A},\mathcal{M})^{\otimes}$$

它将惰性态射映为惰性态射。这样的代数可以视为一对 (a,m)，其中包含一个结合代数 $a\in\mathcal{A}$ 和一个 a-模 $m\in\mathcal{M}$。注意，与 $\mathcal{LM}$od-幺半 ∞-范畴之间的松弛态射复合会保持代数；也就是说，这一对应

$$(\mathcal{A},\mathcal{M})\mapsto\mathrm{Alg}_{\mathcal{LM}\mathrm{od}}(\mathcal{A},\mathcal{M})$$

关于松弛态射是函子性的。

现在我们可以陈述本节的主定理。

定理 7.4.4。函子 D: $\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}})\to\mathrm{End}^{\sigma}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$ 和 ν： $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}\hookrightarrow\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可以提升为一个松函子

$$(D,\nu)\colon(\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}),\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}})\to(\mathrm{end}_!(\mathcal{P}),\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$$

$\mathcal{LM}$od-幺半范畴 ∞的。

本节余下部分将用于证明 定理 7.4.4。由于 D 是两个构造的复合，即 构造 7.3.1 中的共轭构造和一个左 Kan 延拓，我们将分别处理这两者。

构造 7.4.5。 设 $L \dashv R\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ 是一个伴随。在 构造 7.3.3中，我们注意到下共轭构造 $(-)_{L\dashv R} = R \circ - \circ L$ 可以赋予松幺半结构。我们将把这一结果推广为一个松幺半态射

$$((-)_{L\dashv R}, R)\colon (\mathrm{End}(\mathcal{D}), \mathcal{D}) \to (\mathrm{End}(\mathcal{C}), \mathcal{C})$$

$\mathcal{LM}$od-幺半 ∞-范畴的。

为使讨论有据可依，先回顾一下 $(-)_{L\dashv R}$ 上的松幺半结构来自 the 限制函子跨度

$$\mathrm{End}(\mathcal{D}) \xleftarrow{\mathrm{res}_1} \mathrm{End}_{\Delta^1}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathrm{res}_0} \mathrm{End}(\mathcal{C}) \ ,$$

其中 $\mathcal{E} \to \Delta^1$ 是编码 $L \dashv R$的双笛卡尔纤维化，因此 $\mathcal{E} \times_{\Delta^1} \{0\} \simeq \mathcal{C}$， $\mathcal{E} \times_{\Delta^1} \{1\}$。这里 End_{Δ^1} 是 ∞ 上的自同态范畴，且两个函子都是幺半的。幺半结构来自对 [BCN25，引理 3 的证明。10], 的识别，它将 $(-)_{L\dashv R}$ 描述为 res_1，的右伴随与 res_0 的复合。

令 $\mathsf{Sec}(\mathcal{E})$ 表示截面 $s\colon \Delta^1 \to \mathcal{E}$ 的 ∞-范畴。函子 $\mathsf{ev}_1 : \mathsf{Sec}(\mathcal{E}) \to \mathcal{D}$ 由 $\mathsf{ev}_1(s) = s(1)$ 给出，它有一个右伴随，非正式地可表示为

$$d \mapsto (Rd \to d),$$

wh此处 $\mathcal{E}$ 中的箭头对应于余单位 $LRd \to d$。我们可以将 ev_1 识别为拉回

$$\mathrm{Sec}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Fun}_{\Delta^1}(\Delta^1, \mathcal{E}) \xrightarrow{\Delta^0 \times_{\Delta^1} -} \mathrm{Fun}_{\Delta^0}(\Delta^0, \Delta^0 \times_{\Delta^1} \mathcal{E}) \simeq \mathcal{D}$$

沿着 $\mathbf{1}\colon \Delta^0 \to \Delta^1$。 ∞-范畴 $\mathsf{End}_{\Delta^1}(\mathcal{E})$ 作用于 $\mathsf{Sec}(\mathcal{E})$ 上，而上述识别表明 ev_1 是 res_1-线性的。因此我们有一个态射

$$\begin{array}{ccc} (\mathsf{End}(\mathcal{D}),\ \mathcal{D})^{\otimes} & \xleftarrow{\ a_1\ } & (\mathsf{End}_{\Delta^1}(\mathcal{E}),\ \mathsf{Sec}(\mathcal{E}))^{\otimes} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{LM}\mathsf{od}^{\otimes} & \end{array}$$

的 $\mathcal{LM}$od-单幺半 ∞-范畴，如 记号 7.4.1中所述，其中 a_1 可以纤维化地识别为 ∞的笛卡尔积 res_1: $\mathsf{End}_{\Delta^1}(\mathcal{E}) \to \mathrm{End}(\mathcal{D})$ 以及 ev_1 : $\mathsf{Sec}(\mathcal{E}) \to \mathcal{D}$。这是纤维化的左伴随，因此根据 [Lura，推论 7.3.2，7]存在一个右伴随

$$\begin{array}{ccc} (\mathsf{End}(\mathcal{D}),\ \mathcal{D})^{\otimes} & \longrightarrow & (\mathsf{End}_{\Delta^1}(\mathcal{E}),\ \mathsf{Sec}(\mathcal{E}))^{\otimes} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{LM}\mathsf{od}^{\otimes} & \end{array}$$

这此外还是一个 $\mathcal{LM}$od-幺半 ∞-范畴的松弛态射。将其与相应的

$$a_0\colon (\mathrm{End}_{\Delta^1}(\mathcal{E}), \mathrm{Sec}(\mathcal{E}))^{\otimes} \to (\mathrm{End}(\mathcal{C}), \mathcal{C})^{\otimes}$$

由沿 $\mathbf{0}\colon \Delta^0 \to \Delta^1$ 的拉回诱导，得到一个所需形式的松 $\mathcal{LM}$od-幺半态射。

构造 7.4.6。 我们将把右伴随上的松单oidal结构 der 的命题6.1.7 扩展为一个松弛态射

$$(\mathrm{der}, \mathrm{id})\colon (\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \to (\mathrm{end}_!(\mathcal{P}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}).$$

注意，包含

$$\begin{array}{ccc} (\text{结束}_!(\mathcal{P})\ \ \mathcal{M}\text{模型}_{\mathcal{P}})^{\otimes} & \xrightarrow{\ j\ } & (\text{终结}(\mathcal{M}\text{模型}_{\mathcal{P}})\ \ \mathcal{M}\text{模型}_{\mathcal{P}})^{\otimes} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{LM}\text{模}^{\otimes} & \end{array}$$

是一个 $\mathcal{LM}$od-幺半子范畴的包含。纤维化地，它可以视为包含$\mathrm{end}_!(\mathcal{P}) \to \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$ 与恒等映射 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$的积。二者都是右伴随，因此 j 根据 [Lura，推论 7.3.2，admits a right adjoint。7]这就是所需的松弛态射。

定理 7.4.4的证明： 所需的松弛态射是以下复合

$$(\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}) \xrightarrow{((-)_{L\dashv\nu},\nu)} (\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{(\mathrm{der},\mathrm{id})} (\mathrm{end}_!(\mathcal{P}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$$

由 构造 7.4.5 和 构造 7.4.6中的两个松弛态射组成 □

备注 7.4.7。 若 f 是环模型的一个自函子，则偶对 (D, ν) 上的松单oidal结构尤其给出了一个典范态射

$$D(f)(\nu X) \to \nu(f(X)).$$

展开构造后可见，此映射与定义 7.3.11中的典范比较映射一致。因此，定理 7.4.4 可解释为：对于自函子，典范比较映射与复合相容，且这种相容性是相干的。

7.5. 模型与环模型中的（余）代数

在本节中，我们将应用上述结果，描述伴随 $E \dashv D$和 $L \dashv \nu$ 相对于 ∞-范畴中由（余）单子给出的（余）代数的行为。关键的技术结果，定理 7.4.4，已在上一节中确立；本节的目标是具体阐明其推论。更具体地说：

(1) 根据 命题 7.5.2， ν 保持单子上的代数；在某些技术假设下，也保持余单子上的余代数，详见 命题 7.5.11；(2) 根据命题 7.5.13， L 保持余代数；在某些技术假设下，也保持代数，详见 命题 7.5.16。

备注 7.5.1。 尽管为了完整起见，我们在本节中同时考察单子和余单子，但单子、理论与环理论之间的大部分相互作用，都可以通过更直接的方式来探究，而无需使用前一小节中的 ∞-幺半群技术。我们将在 §8.2 中再讨论这一点。

我们从最简单的情形开始。本节中始终固定一个有界环理论 $\mathcal{P}$。

命题 7.5.2. 设 m 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$上的一个单子。那么，可以将 $D(m)$赋予 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 上的单子结构，使得若 X 是一个 m-代数，则 νX 是一个 $D(m)$-代数，也就是说，存在一个虚线箭头填充该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_m(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}) & \dashrightarrow & \mathrm{Alg}_{D(m)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \end{array}.$$

证明。 利用定理 7.4.4 中的松弛态射，将对象转到代数回顾 7.4.3所述，我们得到一个函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{LM}\mathrm{od}}(\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{LM}\mathrm{od}}(\mathrm{End}^{\sigma}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$$

它定义在由单子及其上的代数组成的 ∞-范畴之间。分别取纤维，
分别在 m 和 $D(m)$上取纤维，我们得到陈述中所述的函子。 □

注 7.5.3。 非正式地说，如果 $X \in \mathrm{Alg}_m(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})$，那么 νX 上的 $D(m)$-代数结构由以下复合映射给出

$$D(m(\nu X) \to \nu(mX) \to \nu(X),$$

其中第一个箭头是 定义 7.3.11中的典范比较映射，第二个箭头是 m-代数结构映射 X。

余单子和余代数的情形更为微妙。若 c 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$上的一个余单子，则存在一个跨度

$$D(c) \circ D(c) \to D(c \circ c) \leftarrow D(c),$$

其中右箭头由 c上的余乘法诱导。若左箭头是等价，则可将其转化为一个真正的箭头 $D(c) \to D(c) \circ D(c)$，构成 $D(c)$上余单子结构的第一部分。我们先确定保证该箭头为等价的条件。

Lemma 7.5.4. 设 f 和 g 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$的自函子。则以下条件等价：

(1) 来自 D 的松幺半结构的典范自然变换 $D(g) \circ D(f) \to D(g \circ f)$是等价；(2) 对每个可表对象 $P \in \mathcal{P}$，环模型 $f(P) \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$都是 g-驯顺的；也就是说，典范映射 $D(g)(\nu f(P)) \to \nu(g(f(P))$ 是等价。

证明。 由于两边都保留几何实现，给定的自然变换是等价，当且仅当它在 $P \in \mathcal{P}$ 上是等价。在这种情况下，我们可以将源重写为

$$D(g)(D(f)(\nu P)) \simeq D(g)(\nu f(P))$$

而 注记 7.3.13中给出的显式描述表明，在此识别下，自然变换与典范比较映射重合。□

注记 7.5.5。 在引理 7.5.4的陈述中，我们限定为自函子，因为这是我们赋予其 D 松幺半结构的情形。不过，更一般地，对于环模型之间任意一对可复合的函子，都存在典范自然变换 $D(f \circ g) \to D(f) \circ D(g)$，并且引理 7.5.4 在此情形下同样成立，证明也相同。

例 7.5.6。 由例 7.3.14可知，若 $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$，则 $D(g) \circ D(f) \to D(g \circ f)$ 对于任意自函子 g都是等价。

定义 7.5.7. 如果环模型的自函子 c 可导出的 满足以下两个等价条件之一，我们就称其为可导出的：

(1) $D(c) \circ D(c) \to D(c^2)$ 是一个等价，(2) 对所有可表对象 $P \in \mathcal{P}$， $c(P)$ 都是 c-驯顺的。

例 7.5.8. 设 c 是环模型的一个自函子，并且满足 $c(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$。那么 c 是可导出的。

注 7.5.9. 由于 D 保持恒等函子，结合律表明，如果 c 是可导出的，那么 D 限制为 $\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})$ 中由 c 生成的全幺半子范畴上的强幺半函子；也就是说，对所有 $k,\ l \geq 0$， $D(c^k) \circ D(c^l) \to D(c^{k+l})$ 都是一个等价。特别地，对所有 $k,\ l \geq 0$，$c^k(P)$ 都是 c^l-驯顺的。

由于强幺半群函子保持余代数，因此如果 c 是 loop 模型上的一个余单子，且其底层自函子可导出，那么 $D(c)$将继承余单子的结构。关于余单子上的余代数也有类似讨论：如果 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 是一个 c-余代数，那么在对 X施加适当的温和性条件后， νX 将继承一个 $D(c)$-余代数的结构。由于 c 不一定保持 c-温和对象，此时适当的温和性概念如下。

定义 7.5.10。 令 $c \in \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})$ 为一个自函子。若对所有 $k \geq 0$， $c^k X$ 都是 c-温和的，则称 loop 模型$X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 是稳定地 c-温和的。记作

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega,\mathrm{sct}} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$$

对于稳定地 c-温和的 loop 模型的全子范畴。

根据构造，若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 稳定地 c-温和，则对任意 $k \geq 0$， $c^k(X)$ 也如此；换言之，$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 的自同态 c 保持全子范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega\ \mathrm{sct}}$ 。现在可以陈述如下结论。

Pr命题 7.5.11. 设 c 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}$ 上的一个余单子，其底层自函子是可导出的 .
Then

(1) $D(c) \in \mathrm{end}_!(\mathcal{P})$ 继承了 c 上余单子的结构；(2) 函子 $\nu\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 限制在稳定 c-驯性的环模型上时，可规范地提升，从而给出一个笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega,\mathrm{sct}}) & \dashrightarrow & \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega,\mathrm{sct}} & \xrightarrow{\ \nu\ } & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \end{array} .$$

证明。令 $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1) \subseteq (\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})$ 为由形如 (c^k, X) 的对所张成的满子范畴对，其中 $k \geq 0$ 且 X 是稳定 c-驯性的环模型。这是一个 $\mathcal{LM}$od-幺半子范畴，而注 7.5.9 和稳定驯性假设意味着 (D, ν) 的限制到

$$(D, \nu)\colon (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)^{\otimes} \to (\mathrm{end}_!(\mathcal{P}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})^{\otimes}$$

是（强） $\mathcal{LM}$od-幺半的；也就是说，它保留所有余笛卡尔态射。因此，它在 $(\mathcal{LM}\mathrm{od}^{\otimes})^{\mathrm{op}}$ 上的对偶笛卡尔纤维化之间诱导出一个态射，并保留所有笛卡尔映射。

保持惰性态射的 $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)^{\otimes}$ 对偶纤维化的截面，可以等同于由如下对象对组成的 ∞-范畴：一个底层自函子等价于 c 的余单子，以及一个 c-余代数 X ，其底层环模型是 c-驯顺的。转到固定余单子 c 上的纤维后，便可得到所承诺的全忠实函子

$$\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega,\mathrm{sct}}) \to \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}),$$

从而将 $\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega\ \mathrm{sct}},)$ 实现为 $\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$ 的全子范畴，该子范畴由那些底层模型具有 νX 形式、且对应于稳定地 c- 驯顺的环模型 X 的 $D(c)$- 余代数所张成，正如所声称的那样。□

总而言之，在某些假设下， D 保持单子及其代数，以及余单子及其余代数。其左伴随 E 的情形则完全对偶。

回顾 7.5.12 （对偶笛卡尔纤维化）。 余笛卡尔纤维化的态射

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})^{\otimes} & \longrightarrow & (\mathrm{end}_!(\mathcal{P})\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})^{\otimes} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{LM}\mathrm{od}^{\otimes} & \end{array}$$

的 定理 7.4.4 可以纤维化地识别为 D 和 i，二者都是右伴随。根据 Haugseng-Hebestreit-Linskens-Nuiten [HHLN23，定理 B],逐层取左伴随可组装成一个态射，连接$(\mathcal{LM}\mathrm{od}^{\otimes})^{\mathrm{op}}$，我们可以将其解释为一对上的$oplax$ $\mathcal{LM}$od-幺半结构

$$(E, L)\colon (\mathrm{end}_!(\mathcal{P}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \to (\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}),$$

命题 7.5.13。 设 $c_! \in \mathrm{end}_!(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})$ 是一个余单子。那么 $E(c_!)$ 继承了来自 $c_!$ 的余单子结构，使得存在一条虚线箭头填充图表

$$\begin{array}{ccc} \text{余}\mathcal{A}\text{代数}_{c_!}(\mathcal{M}\text{型}_{\mathcal{P}}) & \dashrightarrow & \text{余}\mathcal{A}\text{代数}_{E(c_!)}(\mathcal{M}\text{型}_{\mathcal{P}}^{\Omega}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}\text{型}_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{L} & \mathcal{M}\text{型}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \end{array}.$$

证明。 从 回顾 7.5.12 的对偶笛卡尔纤维化态射取惰性态射保持截面得到一个函子

$$\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{\mathcal{LM}\mathrm{od}}(\mathrm{end}_!(\mathcal{P}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \to \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{\mathcal{LM}\mathrm{od}}(\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}), \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega})$$

余单子与其上的余代数所构成的对之间的 ∞-范畴。取到 $c_!$ 和 $E(c)$ 上的纤维，便得到所需的 L 的提升。□

和之前一样，单子的情形更加微妙，但我们可以将讨论限制在某些子范畴上，使 (E, L) 在 回顾 7.5.12 中的余松幺结构成为强幺半结构。以下给出两个自然的此类子范畴。

引理 7.5.14. 设 $f_!, g_! \in \mathrm{end}_!(\mathcal{P})$ 为导出自函子，并假设以下至少一项成立：

(1) $f_!$ 保持 L-等价，(2) $g_!$ 保持环模型。

那么，余松结构映射 $E(f_! \circ g_!) \to E(f_!) \circ E(g_!)$ 是一个等价。

证明。 具体而言，此余松结构映射是以下复合映射的伴随

$$f_! \circ g_! \to D(E(f_!)) \circ D(E(g_!)) \to D(E(f_!) \circ E(g_!)),$$

其中第一个箭头由 $E \dashv D$ 的单位诱导，第二个箭头来自 D 上的松单oidal结构。由于 E 是沿伴随 $L \dashv \nu$ 共轭得到的，我们看到余松结构映射可以识别为由单位 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}} \to \nu \circ L$ 诱导的映射 $Lf_!g_!\nu \to Lf_!\nu \circ Lg_!\nu$ 。若 (1) 成立，则由于单位的分量是 L-等价，且这些等价在 $f_!$ 下保持、在 L 下被取逆，因此这是一个自然等价。若 (2) 成立，则 $g_!\nu$ 的取值落在环模型中，而在这些模型上，单位本身已是自然等价。□

对于模型，我们有如下结果。

引理 7.5.15。 设 $f_! \in \mathrm{end}_!(\mathcal{P})$ 是一个保持 L-等价的自函子。那么对于任意模型 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，映射 $L(f_!X) \to E(f_!)(LX)$（其为复合映射的伴随）

$$f_!X \to D(E(f_!))(\nu LX) \to \nu(E(f_!)LX)$$

其中第一个箭头由 $E \circ D$ and $L \dashv \nu$ and 的单位诱导，第二个箭头来自 $(D,\ \nu)$ 上的松幺半结构，是一个等价。

证明。该伴随可以识别为由单位诱导的映射 $Lf_!X \to Lf_!\nu LX$ 诱导自单位$\mathrm{id}_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}} \to \nu \circ L$。然后，结果可按照 引理 7.5.14 的证明以同样方式得到。□

命题 7.5.16。 设 $m_! \in \mathrm{end}_!(\mathcal{P})$ 是一个单子，其底层函子保持 L-等价。那么 $E(m_!)$ 继承余单子结构，使得若 X 是一个 $m_!$-代数，则 LX 是一个 $E(m_!)$-代数，其含义是存在一条虚线箭头填充图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{m_!}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) & \longrightarrow & \mathrm{Alg}_{E(m_!)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{L} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\Omega} \end{array}.$$

证明。 证明与以下命题的证明完全类似：命题 7.5.2。 □

着眼于未来的应用，我们明确记录一些基本准则，用以判断伴随 $E \dashv D$ 是否能限制为适当子范畴之间的幺半等价。

引理 7.5.17。 令 $\mathrm{end}_!^\Omega(\mathcal{P}) \subseteq \mathrm{end}_!(\mathcal{P}) \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P})$ 表示保持环模型的那些导出函子的子范畴。于是限制

$$E\colon \mathrm{end}_!^\Omega(\mathcal{P}) \to \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}^\Omega)$$

是全忠实且强幺半的。

证明。 这两个性质分别由 引理 7.3.17 和 引理 7.5.14 推出。 □

引理 7.5.18。 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}^\Omega)$ 表示由满足下列条件的那些 f 构成的全子范畴

(1) 单位 $E(D(f)) \to f$ 是一个等价；(2) $D(f)$ 保持环模型。

那么， $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}^\Omega)$ 的幺半子范畴，且 D 在其上的限制是一个强幺半函子。

证明。设 $f, g \in \mathcal{C}$。我们首先断言，典范映射 $D(g) \circ D(f) \to D(gf)$ 是一个等价。根据引理 7.5.4，这相当于验证对于所有 $P \in \mathcal{P}$， $D(g)(\nu f(P)) \simeq \nu(g(f(P))$。由于 $D(g)$ 保持环模型， $E(D(g)) \simeq g$ 可通过将其限制到环模型的子范畴来验证，从而证明了这一断言。特别地，这表明 $D(gf)$ 保持环模型。

根据引理 7.5.17，我们有 $E(D(gf)) \simeq E(D(g)D(f)) \simeq E(D(g))E(D(f)) \simeq gf$，这表明 $gf \in \mathcal{C}$，由此可见 $\mathcal{C}$ 是一个幺半子范畴。根据第一段， D 的幺半性随即成立。□

推论 7.5.19. 设 f 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}^\Omega$ 的一个自函子，且 $E(D(f)) \simeq f$ 和 $D(f)$ 保持环模型。那么 f 是可导出的，并且每个环模型都是稳定的 f- 驯服模型。□

8. 理论与单子

理论与单子构成了经典范畴代数的两种主要方法。在经典情形下，它们本质上等价：更确切地说，对于任意集合 S，以下两者之间存在一一对应关系：

(1) 离散的 S-分层理论；也就是说，由一个以 S 为指标、元素为对象的集合 $\{P_s : s \in S\}$ 在余积下生成的局部小范畴；(2) 关于 $\mathcal{S}\mathrm{et}^S$ 的单子范畴。

当 $S = *$ 时，详情请参见，例如 [Wra70，第 6] 节；一般情形在本质上并无不同。正如我们在 问题 1.3.1 中所述，我们不知道这种对应关系是否普遍适用于高阶泛代数。不过，仍有一些有用的结论可言，我们在此记录如下。

8.1. 一般单子性定理

该单子性定理 [Lura，定理 4.7.3.5] 断言，函子 $U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是某个单子伴随的遗忘函子，当且仅当它是右伴随、保守，并且创建 U-分裂的几何实现。在研究理论时，这类函子十分常见，原因如下。

命题 8.1.1。 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是预理论的本质满同态。那么限制

$$f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{Q}^{\mathrm{nb}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_\mathcal{P}^{\mathrm{nb}}$$

是保守的，并创建极限和 f^*-分裂几何实现。

证明。 由于 f 是本质满的， f^*-分裂几何实现属于逐层分裂几何实现，因此这就是 推论 3.1.9。 □

例 8.1.2。 设 $\mathcal{P}$ 是一个生成元集为 $\{P_s$ 的理论： $s \in S\}$。那么

$$U\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}^S, \qquad UX = \{X(P_s) : s \in S\}$$

等价于沿着该本质满同态的限制

$$f\colon \mathcal{S}\mathrm{et}^S \to \mathcal{P}, \qquad \{A_s : s \in S\} \mapsto \coprod_{s\in S} \coprod_{a\in A_s} P_s$$

理论的，因此是保守的，并且创建极限和 U-分裂几何实现 ns.

命题 8.1.1 非常接近于推出 f^* 是一个单子伴随的遗忘函子：唯一缺少的是左伴随的存在性。鉴于 f^* 保极限，人们预期左伴随应当存在。然而，在缺少可呈性等额外假设的情况下，要弥合保极限函子与右伴随之间的差距通常是一件微妙的事情。我们记录下一些可以处理的情形。

命题 8.1.3。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 S-类型理论，其类型为 $\{P_s$ ： $s \in S\}$。那么

$$U\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}^S, \qquad UX = \{X(P_s) : s \in S\}$$

当且仅当满足以下条件时，才是单子性的：

(∗) 对每个 S-指标空间族 $\{A_s$ ： $s \in S\}$ ， $\coprod_{s\in S} A_s \otimes \nu P_s$ 都存在于 $\mathcal{M}$o del$_{\mathcal{P}}$。

特别地，若 $\mathcal{M}$odel$_{\mathcal{P}}$ 是余完备的，则此条件成立，例如 $\mathcal{P}$ 有界或为 Malcev 时。

证明。 根据以上讨论， U 是单子性的，当且仅当它存在一个左伴随 L。而这又当且仅当对于每个由 S 索引的空间族 $\{A_s : s \in S\}$，函子

$$\mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{pc}^S}(\{A_s : s \in S\}, U(-))\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

是余表示的，此时 $L(\{A_s$ ： $s \in S\})$ 就是余表示对象。给定 $X \in \mathcal{M}$odel$_{\mathcal{P}}$，我们可以将其识别为

$$\mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{pc}^S}(\{A_s : s \in S\}, UX) \simeq \prod_{s\in S} \mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{pc}}(A_s, X(P_s)) \simeq \prod_{s\in S} \mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{pc}}(A_s, \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(\nu P_s, X)).$$

因此，若 map$^{\mathcal{S}\mathrm{pc}^S}(\{A_s$： $s \in S\}$， $U(-))$ 可余表示，则它由 $\coprod_{s\in S} A_s \otimes \nu P_s$ 余表示，从而证明了所述刻画。

若 $\mathcal{P}$ 有界或为 Malcev 理论，则 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 由 推论 3.5.11 或引理 4.2.1可得具有所有小余极限，因此特别地，$\coprod_{s\in S} A_s \otimes \nu P_s$ 总可在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$中构造。 □

命题 8.1.4。 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是预理论之间的本质满同态。若 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 有界，或者 $\mathcal{P}$ 是 Malcev 理论，则

$$f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

它是一个单子伴随的遗忘函子。

证明。 至少 $\mathcal{P}$是理论这一条件，是确保 $f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}^{\mathrm{nb}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb}}$限制为函子 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}$ odel$_{\mathcal{P}}$ 所必需的。根据上述讨论， f^* 具有单子性当且仅当它有左伴随。若 $\mathcal{P}$ 是 Malcev 理论，则导出函子 $f_!\colon \mathcal{P} \nrightarrow \mathcal{Q}$ 定义了 f^* 的左伴随

那么，假设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 都是有界的。通过常规论证，我们可以找到一个正则基数κ ，使得 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 由 κ 元理论 $\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}_\kappa \subset \mathcal{Q}$ 生成，且满足 $f(\mathcal{P}_\kappa) \subset \mathcal{Q}_\kappa$。根据 定理 3.5.10，我们便可将 f^* 识别为限制

$$f^*\colon \mathcal{P}\mathrm{sh}_\Sigma^\kappa(\mathcal{Q}_\kappa) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}_\Sigma^\kappa(\mathcal{P}_\kappa).$$

特别是， f^* 是一个保极限的 κ-可达函子，定义在可呈示范畴之间，因此根据伴随函子定理，它有一个左伴随 [Lur09，推论 5.5.2。9]。 □

8.2. Malcev 理论与单子

马尔采夫理论对于保几何实现的单子而言表现得非常良好。特别是在这一背景下，我们有以下命题命题 8.1.4的逆命题：

命题 8.2.1. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，且 T 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$上的一个单子。令 $T\mathcal{P}\subset \mathrm{Alg}_T$ 表示 $\mathcal{P}$的本质像。则 $T\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，并且受限 Yoneda 嵌入

$$\mathrm{Alg}_T \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}}$$

是等价，当且仅当 T 保留几何实现。

证明. 由于复合函子 $\mathcal{P}\to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}\to \mathrm{Alg}_T$ 保留余积，显然 $\mathcal{P}$的本质像是一个 Malcev 理论。记 $t\colon \mathcal{P}\to T\mathcal{P}$为诱导的同态。若 $\mathrm{Alg}_T\to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}}$ 是一个等价，则可将 T 认作与伴随 $t_!\dashv t^*$ 相关联的单子 $t^*t_!$。由于 $t_!$ 和 t^* 保留几何实现，因此 T也保留几何实现。反过来，我们必须证明，若 T 保留几何实现，则 $\mathrm{Alg}_T\simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}}$。

由于遗忘函子 $\mathrm{Alg}_T\to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是保守的，受限的 Yoneda 嵌入 $\mathrm{Alg}_T\to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}}$也是保守的。由于 T 保几何实现， ∞-范畴 Alg_T 存在几何实现，且这些几何实现由遗忘函子 $\mathrm{Alg}_T\to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$创建。特别地，若 $P\in\mathcal{P}$，则 $T\nu P\in \mathrm{Alg}_T$ 是投射的，因此根据 Malcev 条件，它是强投射的。应用定理 4.2.3 可知，包含 $T\mathcal{P}\subset \mathrm{Alg}_T$ 可扩张为一个全忠实且保余极限的函子 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}}\to \mathrm{Alg}_T$，它是某个保守函子的左伴随，因此是一个等价。□

环理论也有相应的结论，最早见于 [Bal25，定理 3.3。7]此处我们从自己的视角给出一个自成一体的论述，先从以下内容开始。

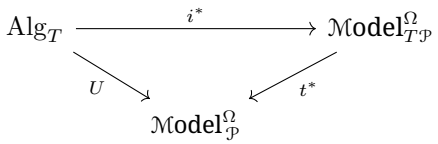
引理 8.2.2。设 $f\colon \mathcal{P}\to \mathcal{Q}$ 是一个有界环理论之间本质满的环同态。那么

$$f^*\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{Q}}\to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$$

是一个单子伴随的遗忘函子。

证明。 根据单子性定理，只需验证 f^* 存在左伴随，并保持 f^*-分裂的单纯对象的几何实现。根据 命题 7.3.18， f^* 存在左伴随，并保持逐层分裂的单纯对象的几何实现。由于 f 是本质满的，所有 f^*-分裂的单纯对象都是逐层分裂的，从而证明了该引理。□

命题 8.2.3。 设 $\mathcal{P}$ 是一个有界环理论， T 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$上的一个可达单子。令 $i\colon T\mathcal{P}\hookrightarrow \mathrm{Alg}_T$表示 $T\colon \mathcal{P}\to \mathrm{Alg}_T$的本质像，并记 $t\colon \mathcal{P}\to T\mathcal{P}$为相应的环同态。则 $T\mathcal{P}$ 是一个有界环理论，且受限 Yoneda 嵌入定义了一个比较映射



当所有复合函子 T^k 保持那些被包含映射 $\nu_{\mathcal{P}}$ 保持的余极限图表的几何实现时，它就是一个等价： $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}\to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$。

证明。我们将适度地滥用记号，用 T 同时表示单子 $T\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}\to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 及其关联的自由函子 $T\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}\to \mathrm{Alg}_T$。由于 $T\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}\to \mathrm{Alg}_T$保余极限， $T\mathcal{P}$是一个环理论。由于 T可达， $T\mathcal{P}$有界。 U和 t^*都是单子伴随的遗忘函子，第一个依据假设，第二个依据引理 8.2.2。根据

命题 7.3.18， t^* 的左伴随由 $E(t_!) = L_{T\mathcal{P}} t_! \nu_{\mathcal{P}}$给出。根据 [Lura，推论 4.7.3。16]， i^* 是等价，当且仅当诱导的自然变换

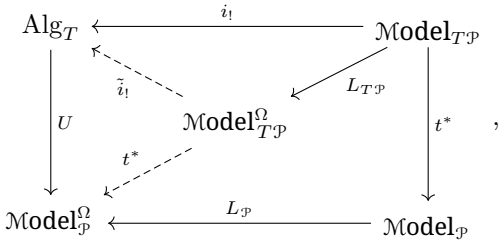
$$t^* E(t_!) \to T$$

自函子 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 是一个等价。我们声称，给定的关于 T 的假设 $t^* E(t_!) \simeq E(D(T))$，由此还可根据 引理 7.3.16 推出 $t^* E(t_!) \simeq T$。

要证明 $t^* E(t_!) \simeq E(D(T))$，首先注意到图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{T\mathcal{P}} & \xrightarrow{\nu_{T\mathcal{P}}} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}} \\ \downarrow{\scriptstyle t^*} & & \downarrow{\scriptstyle t^*} \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\nu_{\mathcal{P}}} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \end{array}$$

右伴随构成的图表显然交换。展开定义后，我们看到，只需证明它的伴随映射（mate）填入图表右下部分后



再次交换。这里，包含 $i\colon T\mathcal{P} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}}$ 保持余积和 S^1-张量，因此唯一地延拓为一个保余极限函子 $i_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}} \to \mathrm{Alg}_T$，它又唯一地经由局部化 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{T\mathcal{P}}$ 分解，从而证明了上方的三角形。外侧的方形图交换，因为按构造，它限制到 $T\mathcal{P} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}}$ 后仍交换，且所有涉及的函子都保持几何实现；因此，由于 $L_{T\mathcal{P}}$ 是一个局部化，只需证明左侧的三角形交换。

证明与引理 7.3.16 类似。左侧的三角形限制到 $T\mathcal{P} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{T\mathcal{P}}$ 后显然交换，并且每个 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{T\mathcal{P}}$ 都有一个逐层分解 $X \simeq |\nu_{T\mathcal{P}} Q_\bullet|$ in $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{T\mathcal{P}}$，其中 $Q_\bullet \in T\mathcal{P}$。由于 t^* 保持逐层几何实现，而 $i_!$ 保持所有 $\tilde{}$ 余极限，只需证明遗忘函子 $U\colon \mathrm{Alg}_T \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 保持 $i_! \nu_{T\mathcal{P}} Q_\bullet = Q_\bullet$ 的几何实现。根据 [Lura，推论 4.2.3，5]，只需验证比较映射 $|T^k U Q_\bullet| \to T^k |U Q_\bullet|$ 对于 $k \geq 0$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的一个等价。这里， $UQ_\bullet = t^* \nu_{T\mathcal{P}} Q_\bullet$ 的几何实现由包含 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 保持，因此这正是我们关于 T 的假设。□

9. 示例

在本节中，我们将举例说明如何使用本文提出的框架建立各种 ∞-范畴。我们将讨论§9.1 中的连通模、§9.2中的滤子模、§ R-代数、§9.3中的合成谱、§9.4中的合成空间、§9.5，以及§$\mathbf{E}_k$-环中的内容。9.6。

9.1. 连通模

给定一个连通的 $\mathbf{E}_1$-环谱 R，记

$$\mathcal{L}_0(R) = \langle \bigoplus R \rangle \subset \mathrm{LMod}_R$$

为由 R 在余积下生成的 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 的全子范畴。这是一种加性马尔可夫理论。给定一个 $\mathbf{E}_1$-环谱之间的同态 $\phi\colon R \to S$，标量扩张函子 $R\otimes_S(-)\colon \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_S$ 将 $\mathcal{L}_0(R)$ 映至 $\mathcal{L}_0(S)$，因此定义了一个函子

$$\mathcal{L}_0\colon \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0}) \to \mathcal{M}\mathrm{alc}.$$

命题 9.1.1。设 R 是一个连通$\mathbf{E}_1$-环。则受限 Yoneda 嵌入

$$\nu\colon \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(R)}$$

定义了 ∞ 范畴中 R 上的连通模与 ∞ 范畴中 $\mathcal{L}_0(R)$ 的模型之间的等价。此外，给定一个连通$\mathbf{E}_1$-环谱的映射 $\phi\colon R \to S$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} & \xrightarrow{S\otimes_R(-)} & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_S^{\geq 0} \\ \simeq\downarrow\nu & & \simeq\downarrow\nu \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(R)} & \xrightarrow{\mathcal{L}_0(\phi)_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(S)} \end{array}$$

自然交换，即 $R\mapsto \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}$ 与 $R\mapsto \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(R)}$ 作为函子相同。

证明。等价 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(R)}$ 由 命题 5.3.5 得出，因为 R 是 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}$ 的投射生成元。由于所有函子都保余极限，要使给定的图表交换，只需使其在限制到子范畴 $\mathcal{L}_0(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}$ 时交换；根据定义，此处确实交换。□

例 9.1.2. 容易看出，∞-范畴 $\mathcal{L}_0(R)$ 是一个 n-范畴，当且仅当 R 是 $(n-1)$-截断的；一般而言，若 $R\in \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0})$，则

$$\mathrm{h}_n\mathcal{L}_0(R) \to \mathcal{L}_0(R_{<n})$$

是一个等价。特别地，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} & \xrightarrow{R_{<n}\otimes_R(-)} & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{R_{<n}}^{\geq 0} \\ \simeq\downarrow\nu & & \simeq\downarrow\nu \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(R)} & \xrightarrow{\tau_{n!}} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{L}_0(R)} \end{array}$$

可交换。

例 9.1.3. 固定 $k\leq\infty$，并令 R 为一个连通的 $\mathbf{E}_{k+1}$-环，因此 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 是一个 $\mathbf{E}_k$-幺半范畴。令

$$\mathcal{L}_0^{\mathbf{E}_k}(R) \subset \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_k}(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0})$$

为由那些 $\mathbf{E}_k$-R-代数张成的全子范畴，这些代数在某个集合上是自由的。根据 命题 8.2.1，受限 Yoneda 嵌入定义了一个等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0^{\mathbf{E}_k}(R)} \simeq \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_k}(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}).$$

在特殊情形 $k=1$ 下，我们还可以将 $h_n\mathcal{L}_0^{\mathbf{E}_1}(R)$ 与 $\simeq \mathcal{L}_0^{\mathbf{E}_1}(R_{<n})$ 识别；对于任意的 $\mathbf{E}_2$-环映射 $R\to S$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0^{\mathbf{E}_1}(R)} & \xrightarrow[\simeq]{\nu} & \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_1}(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}) \\ \downarrow f_! & & \downarrow S\otimes_R(-) \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{L}_0^{\mathbf{E}_1}(S)} & \xrightarrow[\simeq]{\nu} & \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_1}(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_S^{\geq 0}) \end{array}$$

交换。

注 9.1.4。 构造 $\mathcal{L}_0$ 并不会丢失关于环的任何信息，只要我们记住来自球谱的典范映射；也就是说，它诱导出一个完全忠实嵌入

$$\mathrm{Alg}^{\geq 0}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S}\mathrm{p}) \to \mathcal{M}\mathrm{alc}_{\mathcal{L}_0(\mathbf{S})/}.$$

要理解这一点，请注意，取 ∞-模型范畴可得一个等价

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{M}\mathrm{alc}_{\mathcal{L}_0(\mathbf{S})/}}(\mathcal{L}_0(R), \mathcal{L}_0(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pr}^L_{\mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0}/}}(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_R, \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_S),$$

因为任何 $\mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0}$ 下的 ∞-范畴之间保余极限的函子 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_R \to \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_S$ 都会自动将 $\mathcal{L}_0(R)$ 映至 $\mathcal{L}_0(S)$。后一个映射空间可由 $\mathrm{map}_{\mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S}\mathrm{p})}(R, S)$ 识别，参见 [Lur17，命题 7.1.2.6]。

注 9.1.5。 构造 $\mathcal{L}_0(R)$ 以及等价 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_R$ 可推广到各种其他情形，例如等变环谱、完备环谱等。每种情形下的证明都相同，方法是先识别一族投射生成元，然后应用命题 5.3.5。

9.2. 滤子模

在前一个例子中，我们看到，连通环谱上的连通模的 ∞-范畴可以描述为某个 Malcev 理论的模型 ∞-范畴。本节将展示， ∞-范畴代数理论所具备的额外灵活性，使我们也能利用 Malcev 理论自然地编码某些基于滤子模的变形。正是这种识别，最终支撑了用滤子对合成变形进行的各种描述。

记号 9.2.1. 给定一个（可能非连通的）$\mathbf{E}_1$-环谱 R，记

$$\mathcal{L}_0(R), \mathcal{L}(R), \mathcal{L}_+(R), \mathcal{L}_-(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathcal{P}}$$

分别表示由 $\Sigma^n R$ 、 $n = 0$、 $n \in \mathbb{Z}$、 $n \geq 0$ 和 $n \leq 0$ 在余积下生成的满子范畴。这些是加性马尔采夫理论，构成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_0(R) & \longrightarrow & \mathcal{L}_+(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}_-(R) & \longrightarrow & \mathcal{L}(R) \end{array}$$

其对象为理论，态射为全忠实同态。

注意， $\mathcal{L}(R)$ $\mathcal{L}_+(R)$ 是环理论，而 $\mathcal{L}_-(R)$ 按照定义 7.2.1的意义，是稳定解环理论。相应的 (解) 环模型的 ∞-范畴很容易辨认：

命题 9.2.2. 从 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 出发的受限 Yoneda 嵌入给出等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Sigma}_{\mathcal{L}_-(R)}.$$

若 R 连通，则还有

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}_+(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_R \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(R)}.$$

证明。 第一组等价关系由 命题 7.2.3得出，而第二组等价关系由 命题 7.1.14和 命题 9.1.1得出。 □

一般而言，若 $\mathcal{P}$ 是一种环理论，其 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 是某个广为人知的环模型 ∞-范畴，那么所有模型的 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可能会更加特殊，且不存在经典描述。相反， $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 可以视为一种 ∞-范畴变形，其一般纤维由环模型的子范畴给出，而其对象则是由 $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 的对象对环模型进行的“形式分解”。在特殊情形下，

$\mathcal{P}=\mathcal{L}(R)$，这种变形可以用滤化谱给出一种更熟悉的显式描述。关于变形的滤化视角，读者可参阅 [van25，§3]，以获得简明的入门介绍。

记号 9.2.3。我们将 $\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}:=\mathrm{Fun}(\mathbb{Z}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{p})$ 记作滤过谱的 ∞-范畴，并将其对象认作图表

$$\cdots\to X_{q+1}\to X_q\to X_{q-1}\to\cdots.$$

相对于 $+$，在 Day卷积下，这构成一个对称幺半稳定 ∞-范畴。任何滤过谱都有一个典范的次数平移自同态 τ，对应于图表的映射

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots & \longrightarrow & X_{q+1} & \longrightarrow & X_q & \longrightarrow & X_{q-1} & \longrightarrow & \cdots\\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & X_q & \longrightarrow & X_{q-1} & \longrightarrow & X_{q-2} & \longrightarrow & \cdots\end{array}$$

回顾 9.2.4。我们将 $C(\tau^n)$ 记作滤过谱的幺半单位的自同态 τ^n 的余纤维。明确地说，这是滤过谱

$$\cdots\to 0\to\mathbf{S}\to\cdots\to\mathbf{S}\to 0\to\cdots$$

其中有 n 个球谱副本，最终在零度处以 $\mathbf{S}$ 结束。根据 [Lur15，命题 3.2。5],$C(\tau^n)$ 具有一个与从单位出发的典范映射相容的唯一交换代数结构。

回顾 9.2.5（对角 t-结构）。我们将 $\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}$ 视为带有其对角 t-结构的对象，其全子范畴 $\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0}\subset\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}$ 由满足以下条件的滤过谱组成：X 其中 X_q 是 q-连通的。这一 t-结构与对称幺半结构相容，而取怀特黑德塔定义了一个松对称幺半 [Bal25，命题 A.1。2] 且全忠实的 [AP25，定理 A。1]函子

$$\tau_{\geq\star}\colon\mathcal{S}\mathrm{p}\to\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0}\subset\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}},\qquad \tau_{\geq q}(X):=X_{\geq q}.$$

注意，由于 $\tau_{\geq\star}$ 是松幺半的，如果 R 是一个 $\mathbf{E}_1$-环谱，那么 $\tau_{\geq\star}R\in\mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$.

命题 9.2.6。设 R 是一个 $\mathbf{E}_1$-环谱。

(1) 存在一个等价

$$w_!\colon\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)}\simeq\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$$

将 $X\in\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$ 送到一个底层为滤过谱的 $\tau_{\geq\star}R$-模

$$w_!(X)=\{\cdots\to\Sigma^{q+1}X(\Sigma^{q+1}R)\to\Sigma^{q}X(\Sigma^{q}R)\to\Sigma^{q-1}X(\Sigma^{q-1}R)\to\cdots\},$$

其中这些箭头由典范余极限到极限比较映射伴随

$$X(\Sigma(\Sigma^qR))\to\Omega X(\Sigma^qR).$$

(2) 对于 $1\leq n<\infty$，存在等价

$$w_{n!}\colon\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{L}(R)}\simeq\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{C(\tau^n)\otimes\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$$

使得下列图表交换

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} & \xrightarrow[\simeq]{w_!} & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}})\\ \downarrow{\scriptstyle\tau_{n!}} & & \downarrow{\scriptstyle C(\tau^n)\otimes(-)}\\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{L}(R)} & \xrightarrow[\simeq]{w_{n!}} & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{C(\tau^n)\otimes\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})\end{array}.$$

(3) 等价 $w_!$ 将该子范畴

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}(R)} \subseteq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)},$$

环模型中与以下对象所构成的子范畴$\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}})$，这些对象是 τ-周期的，其含义见 [PV22，定义 2。17]；也就是说，满足 τ 是一个1-连通覆盖。

证明。 (1) 根据命题 5.3.5，给出一个等价 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$ 等同于给出一个全忠实函子

$$\mathcal{L}(R) \to \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$$

其本质像由一族投射生成元构成，它们属于 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$。由于 $\tau_{\geq\star}$ 是松幺半的，怀特黑德塔可提升为一个全忠实函子

$$\tau_{\geq\star}\colon \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0}).$$

我们断言，所需的函子由此函子经 $\mathcal{L}(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 限制而得。由于怀特黑德滤过与直和交换，只需证明族$\{\tau_{\geq\star}(\Sigma^q R) : q \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$ 的一组投射生成元。滤过模$\tau_{\geq\star}(\Sigma^q R)$ 是幺半单位的一个移位和悬架，并且满足

$$\mathrm{map}_{\tau_{\geq\bullet}R}(\tau_{\geq\star}(\Sigma^q R), X) \simeq \Omega^{\infty+q} X_q.$$

由于 X 在对角 t-结构中是连通的， X_q 因此 q是 [Lura 命题 1.4.3 所述的 -连通函子，因此该函子保留几何实现。9]. 显然，随着q 变化，这些函子都是保守的，从而证明了 (1)。

(2) 根据 (1) 的证明，我们发现 $\{C(\tau^n) \otimes \tau_{\geq\star}(\Sigma^q R) : q \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{C(\tau^n)\otimes\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$ 的一组投射生成元。这些对象余表示函子

$$X \mapsto \mathrm{fib}(\Omega^{\infty+q} X_q \to \Omega^{\infty+q} X_{q-n}).$$

利用这个公式，我们看到复合

$$\mathcal{L}(R) \xrightarrow{\tau_{\geq *}} \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0}) \xrightarrow{C(\tau^n)\otimes -} \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{C(\tau^n)\otimes\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$$

可唯一地分解为从$\mathrm{h}_n\mathcal{L}(R)$ 到由这些投射生成元在余积下生成的全子范畴的一个等价。这根据命题 5.3.5给出了所述等价；根据构造，该等价适合给定的图表。

(3) 回顾命题 7.1.10 可知， $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$ 是环模型当且仅当 $\tau_! X$是离散的；此外，根据 [PV22，命题 2.16] 可知， $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$ 是 $C(\tau) \otimes X$-周期的当且仅当其离散。这些条件在 (1,2) 的等价下相符，从而得到所述的识别。□

注 9.2.7. 利用 命题 9.2.6，带有 $\varepsilon \in \{-, 0, +\}$ 的 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_\varepsilon(R)}$ 可识别为 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$ 的满子范畴；这些子范畴分别由 $\tau_{\geq\star}(\Sigma^n R)$ 在余极限下生成，对应于 $n \leq 0$、 $n = 0$ 和 $n \geq 0$。

注 9.2.8. 与注 9.1.5一样， 命题 9.2.6 也有许多变体，可以基于怀特黑德塔，为其他稳定的 -范畴提供变形。

当 R 按照 [Pst23a中的定义 313], 为 Adams 型时，我们还可以用 ∞模型的 $\mathcal{L}(R)$ 来描述 ∞范畴 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R$ 中的 R基于的合成谱。这将在第9.4节中使用，届时我们将用 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R$ 来描述 ∞模型范畴。

命题 9.2.9。 设 R 是一个 Adams 型$\mathbf{E}_1$-环谱。则存在唯一的等价

$$\nu_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} \to \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})$$

满足 $\nu_!(P) = \nu(P)$，对于 $P \in \mathcal{L}(R) \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$。

证明。由定理 4.2.3，给定的关于 $\nu_!$ on 可表对象的描述唯一地延拓为一个保余极限函子 $\nu_!$: $\mathcal{M}$ odel$^{\mathcal{L}(R)} \to \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})$，我们需要证明它是一个等价。根据构造，连通合成谱的 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}$ 在余极限下由形如 $\nu(F)$ 的对象生成，其中 F 是有限 R_*-投射谱。因此，连通 $\nu(R)$-模在余极限下由形如

$$\nu(R) \otimes \nu(F) \simeq \nu(R \otimes F),$$

的对象生成，这里我们使用 [Pst23a 引理 4.24] 的等价。由于 F 是有限 R_*-投射谱，$\nu(R\otimes F)$ 是若干个 $\nu(\Sigma^q R)$ 的直和的收缩，其中 $q \in \mathbb{Z}$。由于 ν 在 [Pst23a 中是全忠实的，推论 4.38]，表明，这个生成元集等价于由 $\Sigma^q R$ 生成的全子范畴 $\mathcal{L}^\omega(R) \subset \mathcal{L}(R)$ 的幂等完备化，其中 $q \in \mathbb{Z}$ 表示有限直和。

根据 [Pst23a, 定理 2.8, 引理 4.23], $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}$ 等价于其由形如 $\nu(F)$ 的对象组成的全子范畴上的连通谱预层 ∞-范畴的一个全子范畴，其中对象为 F 有限 R_*-投射的预层，且这些预层将余纤维序列映为纤维序列。张量以 $\nu(R)$ 后，任何这样的余纤维序列都会分裂，这意味着 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})$ 等价于其由 $\nu(\Sigma^q R)$（其中 $q \in \mathbb{Z}$）在有限余积下生成的全子范畴上的可加预层 ∞-范畴。

由上可知，这个全子范畴等价于 $\mathcal{L}^\omega(R)$。应用定理 3.5.10，我们得到

$$\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}) \simeq \mathcal{P}\mathrm{sh}_\Sigma(\mathcal{L}(R)^\omega) \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)}.$$

追溯定义可知，这一系列等价在 ν 可表预层上与.....一致，因此必然与所声称的等价 $\nu_!$ 重合。□

注 9.2.10。 合成类比 $\nu\colon \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})$ 和函子$\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$（它诱导了等价 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$）均在命题 7.2.3 中通过受限 Yoneda 嵌入来定义。由此可知，根据 命题 9.2.9，的两种用法——作为合成类比函子，或作为环模型子范畴的包含——彼此兼容。

注 9.2.11。 结合命题 9.2.6 和 命题 9.2.9，可以用滤过谱来描述$\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}R)$，从而得到对 [GIKR22，注 6，以及13]和 [Pst25，§3中的一种变体。

9.3. 合成 R-代数

在 命题 9.2.6中，我们看到，若 R 是一个 $\mathbf{E}_1$-环谱，则理论 ∞的模型 $\mathcal{L}(R) \subseteq \mathrm{Mod}_R(\mathcal{S}$ p) 在 $\Sigma^q R$ 下由直和生成，且 $q \in \mathbb{Z}$ 与滤过谱 ∞上的连通滤过模范畴 $\tau_{\geq\star}R$等价。采用模型的优点在于，它为这个 ∞范畴提供了清晰的泛性质，并且能够自然推广到非加性情形，例如环谱上的代数。

例 9.3.1. 设 R （为简便起见）是一个$\mathbf{E}_\infty$-环谱，且 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-运算子。我们记作

$$\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R) \subset \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R)$$

由自由 $\mathcal{O}$-代数函子的本质像张成的全子范畴

$$\mathrm{Free}_{\mathcal{O}}\colon \mathcal{L}(R) \subset \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R).$$

那么， $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)$ 是一个 loop 理论，其 ∞-模范畴作用为一种变形，其一般纤维是 R 上 $\mathcal{O}$-代数的 ∞-范畴，并沿同伦群函子进行变形。事实上：

（1）根据 命题 8.2.3和 命题 9.2.2，受限 Yoneda 嵌入确定了一个等价

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R) \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}$$

介于 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R)$ 与由 $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)$ 的环模型组成的 ∞-范畴之间，可将后者视为该变形的一般纤维。

（2）离散模型的子范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\heartsuit}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}$ 是 R-$\mathcal{O}$-代数的同伦群所能取的“最佳”目标；其对象可视为分次集合，并配备一个由同伦群函子各积之间的自然变换所给出的作用

$$\pi_q\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R) \to \mathcal{S}\mathrm{et}.$$

这由 注 4.3.2以及以下事实得出：根据 Yoneda 引理，这类自然变换与同伦范畴 $\mathrm{h}\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)$ 中的映射集合一一对应。 定理 4.3.3进而给出一个等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)} \simeq \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \simeq \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\heartsuit}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)})[\mathrm{W}^{-1}],$$

从而将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}$ （视为该变形的特殊纤维）实现为经典的非阿贝尔导出 ∞-范畴，或称 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\heartsuit}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}$ 的动画化。

有关这些思想的进一步阐述及其应用，请参阅 [Bal23] 。

Rem述 9.3.2. 由命题 8.1.4，伴随 on

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} \rightleftarrows \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}$$

由 Malcev 理论的同态 $\mathrm{Free}_{\mathcal{O}}\colon \mathcal{L}(R) \to \mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)$ 诱导，且具有单子性。展开定义可知，在等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} \simeq \mathrm{Mod}_{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$$

的命题 9.2.6中，相应的单子作用于 $\mathcal{M}$模型$_{\tau_{\geq\star}R}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{\mathrm{fil}}_{\geq 0})$ 是唯一一个保持几何实现的单子，并满足

$$\tau_{\geq\star}(M) \mapsto \tau_{\geq\star}(\mathrm{Free}_{\mathcal{O}}(M))$$

对于 $M \in \mathcal{L}(R) \subseteq \mathrm{Mod}_R$。这是研究 Malcev 理论模型的一项优势，即使最终关注的是取值于滤过谱的不变量：模型 ∞-范畴的泛性质使得单子及更一般的函子能够以非常高效的方式构造。

9.4. 合成谱

令 R 为一个 Adams 型$\mathbf{E}_1$-环谱。在命题 9.2.9中，我们描述了$\nu(R)$-模在（连通）合成谱中作为 Malcev 理论模型的情形 $\mathcal{L}(R)$。有人可能会问，能否对合成谱本身的 ∞-范畴作出这样的描述，而不是描述 $\nu(R)$-模。除非常简单的情形（例如 $R = \mathbf{S}$）外，这种直接描述是不可能的[2]。本节将转而描述以下内容：

（1）在 Postnikov 完备化意义下，合成谱可与 ∞-范畴中的余代数等同，其中余代数是由 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$上的适当余单子给出的；（2）利用 §7.5的工具，可以独立于对 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R$的通常描述构造这个余单子。

[2]要看出这一点，注意若 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是可加的，那么其离散对象构成的全子范畴必定是一个具有足够多投射对象的阿贝尔范畴。另一方面，根据 [Pst23a，命题 4。16] yn 的 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R$ 的心可识别为 R_*R-余模构成的阿贝尔范畴，而该范畴通常没有足够多的投射对象。

综合起来，这给出了合成谱的 ∞-范畴的 Postnikov 完备化的一种新构造，见定理 9.4.11。当前方法的优点是可以直接推广到其他情境，例如构造新的 ∞-范畴，其中包含合成空间和合成 $\mathcal{O}$-代数，详见 §9.5 和 §9.6。

回顾 9.4.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有有限极限的预稳定的 ∞-范畴；也就是说，它是一个 ∞-范畴，可写成如下形式 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 其中 $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ 是稳定 t-范畴上的一种 ∞-结构[Lurb，命题 C.1.2.9]。 的 $\mathcal{A}$ Postnikov 完备化为

$$\mathcal{A}_{\mathrm{cpl}} := \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_{\leq n},$$

其 n-截断对象子范畴沿截断函子的极限。这仍然是$\widehat{\ }$一个预稳定的 ∞-范畴，并且可识别为左完备化 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 中连通对象的子范畴$\widehat{\ }$ $\mathcal{C}$ 的 [Lura，命题 1.2.1.17]。

截断函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\leq n}$ 诱导出一个典范函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathrm{cpl}}$，它是正合的，并且在有界对象子范畴上限制为等价。对于映入 Postnikov 完备的预稳定 ∞-范畴[3]的正合函子而言，此函子是初始的。

本节的主要结果 定理 9.4.11给出了 $(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})_{\mathrm{cpl}}$，即连通 ∞-范畴的 Postnikov 完备化 R-基合成谱的余代数描述。

注 9.4.2. 任何 Postnikov 完备的预稳定 ∞-范畴都特别是分离的；也就是说， t-结构的同伦群能够检测等价。特别地，从 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}$ 到其 Postnikov 完备化的典范函子唯一地经由一个保守函子分解

$$\widehat{\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}} \to (\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})_{\mathrm{cpl}}$$

从 ∞-范畴的超完备合成谱 [Pst23a，§5。1]。请注意，即使这个诱导函子通常也不是等价；这类似于 E-局部谱与 E-幂零完备谱之间的差异。

这些 ∞-范畴相一致的一个显著情形是 R 为 Morava E-理论谱时，正如 [PV22，定理 74]所证明的。因此，在这种情形下，本节的结果给出了超完备合成谱的描述。

构造 9.4.3. 考虑自由—遗忘伴随

$$\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0} \underset{}{\overset{\nu(R)\otimes_{\nu(\mathbf{S})} -}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}) \ .$$

这赋予 $\nu(R) \otimes_{\nu(S)} -$ 作为 $\nu(R)$-模的自函子以余单子结构。此外，该伴随给出一个典范比较函子

$$\phi\colon \mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0} \to \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{\nu(R)\otimes_{\nu(\mathbf{S})} -}(\mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})) \tag{9.4.4}$$

进入关联的 ∞-余代数范畴。

Le引理 9.4.5. (9.4.4) 的目标是一个 Postnikov 完备的预稳定 ∞-范畴， ϕ 是正合的 , and 诱导函子

$$\widehat{\phi}\colon (\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})_{\mathrm{cpl}} \to \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{\nu(R)\otimes_{\nu(\mathbf{S})} -}(\mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}))$$

从 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}$ 的 Postnikov 完备化出发，是一个等价。

证明。 我们首先断言，右正合函子 $\nu(R)\otimes_{\nu(\mathbf{S})} -$ 也是左正合的；请注意，这里有一点需要验证，因为我们是在连通合成谱的预稳定语境中工作。事实上，若 F 是一个有限的 E-投射谱，如 [Pst23a，定义 3. 13]，中所述，那么$\nu(F) \otimes_{\nu(\mathbf{S})} -$ 同时具有左伴随和右伴随，二者由张量运算给出，所用对象为斯潘尼尔–怀特海德

[3]这形式上可由以下事实得出：$(\mathcal{A}_{\mathrm{cpl}})_{\mathrm{cpl}} \simeq \mathcal{A}_{\mathrm{cpl}}$。请注意，这并不意味着 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathrm{cpl}}$ 是 ∞ 范畴的局部化，事实上通常并非如此。

对偶，见 F [Pst23a，引理 3。21], 因此它是正合的。由于 R 是 Adams 型的，我们可以将 $R \simeq \operatorname{colim} R_\alpha$ 写成有限 R-投射谱的滤子余极限，这表明

$$\nu(R) \otimes_{\nu(\mathbf{S})} (-) \simeq \operatorname{colim} \nu(R_\alpha) \otimes_{\nu(\mathbf{S})} (-)$$

is exact，在连通合成谱中，滤过余极限是正合的 [Pst23a，命题 4。16] .

由于 $\nu(R) \otimes_{\nu(\mathbf{S})} -$ 是正合的，因此遗忘函子

$$\mathrm{CoAlg}_{\nu(R)\otimes_{\nu(\mathbf{S})}-}(\mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})) \to \mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})$$

也正合。由于此函子是保守的，且目标 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}) \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$ 是 Postnikov 完备的，因此 $\mathrm{CoAlg}^{\nu(R)\otimes_{\nu(\mathbf{S})}-}(\mathrm{Mod}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}))$ 是 Postnikov 完备的。

比较函子 $\widehat{\phi}$ 是 Postnikov 完备预稳定 ∞-范畴之间的正合函子，因此要证明它是等价，只需证明它在心之间是等价。事实上，利用正合性作归纳可知，它会在所有 $n \geq 0$ 的 n-截断对象子范畴之间诱导等价，而完备性使我们能够取极限。我们有

$$\mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\heartsuit}) \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\heartsuit}_{\mathcal{L}(R)} \simeq \mathrm{Mod}^{\heartsuit}_{R_*},$$

而余单子 $\nu(R) \otimes_{\nu(\mathbf{S})} -$ 在离散对象上限制为 $R_*R \otimes_{R_*} -$。因此，结论由以下等价推出：$\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\heartsuit} \simeq \mathrm{CoAlg}^{R_*R\otimes_{R_*}-}(\mathrm{Mod}^{\heartsuit}_{R_*})$，见 [Pst23a，命题 4。16]。□

记号 9.4.6。 在以下等价$\mathrm{Mod}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}) \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$ 给出的命题 9.2.9中，$\nu(R) \otimes_{\nu(\mathbf{S})} -$ 对应于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$上的一个余单子，我们暂时将其记为

$$c_! \colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)}.$$

注意，我们有以下等价

$$\mathrm{CoAlg}_{c_!}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)}) \simeq \mathrm{CoAlg}_{\nu(R)\otimes_{\nu(\mathbf{S})}-}(\mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})) \simeq (\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})_{\mathrm{cpl}},$$

第一个是 $c_!$ 的定义，第二个则是引理 9.4.5。

本节余下部分将致力于证明，$c_!$ 可以独立于合成谱构造，并可从相应的非合成余单子导出，该余单子定义在 ∞-范畴中的 R-模上。这将得到 Postnikov 完备的合成谱所需的余代数描述，我们将在定理 9.4.11中证明这一点。

记号 9.4.7. 根据 命题 7.2.3，受限 Yoneda 嵌入 $\mathrm{LMod}_R \to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$诱导出一个等价 $\mathrm{LMod}_R \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}(R)}$。下文中，我们将默认把这些$\infty$-范畴视为相同，并将 ν 记作它们各自到 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$的包含。

注意，在等价 $\mathrm{Mod}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}) \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$之下，合成类比函子对应于环模型的包含，参见注 9.2.10，因此我们在两种语境中使用 ν 是一致的。

引理 9.4.8. 余单子的底层函子 $c_!$:

(1) 保持几何实现；(2) 对于 $P \in \mathcal{L}(R)$，由 $\nu(P) \mapsto \nu(R \otimes_{\mathbf{S}} P)$ 给出。

此外，它由这两个性质唯一确定。

证明。 这些性质是对自函子相应性质的重述$\nu(R) \otimes_{\nu(\mathbf{S})} -$，它属于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})$。根据 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$ asa 在 定理 4.2.3 中给出的余完备化泛性质，这些性质唯一确定该函子。□

正如 $R \otimes_{\mathbf{S}} M \simeq (R \otimes_{\mathbf{S}} R) \otimes_R M$对于任意 $M \in \mathrm{LMod}_R$，余单子 $c_!$的底层函子可以看作是与 R-双模 $R \otimes_{\mathbf{S}} R$进行张量运算的导出函子。下面介绍这类函子的一些基本性质。

引理 9.4.9. 设 R 和 S 是 $\mathbf{E}_1$-环，M 是一个 S-R-双模。考虑导出函子

$$D(M\otimes_R -)\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)}\to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(S)}$$

与 M 张量，如 定义 7.3.5所述。于是

(1) $D(M\otimes_R -)$ 将 $L_{\mathcal{L}(R)}$-等价映为 $L_{\mathcal{F}(S)}$-等价；(2) 余单位 $E(D(M\otimes_R -))\to M\otimes_R -$ 是一个等价；(3) 若 $\pi_*(M)$ 作为右 $\pi_*(R)$-模是平坦的，则 $D(M\otimes_R -)$ 保持环模型；(4) 若 $R=S$，则 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 的自函子 $M\otimes_R -$ 按定义 7.5.7 的意义是可导出的，当且仅当对于 $k>0$，$\mathrm{Tor}^k_{R_*}(M_*,M_*)=0$。

证明。(1) 这由 引理 7.3.15 得出，因为 $M\otimes_R -$ 保持余极限。

(2) 这由引理 7.3.16 得出，因为 $M\otimes_R -$ 保余极限。

(3) 根据命题 7.1.10，$D(M\otimes_R -)$保环模型，当且仅当 $\tau_!D(M\otimes R-)(\nu N)$对任意左 R-模 N都是离散的。在将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}\mathcal{L}(R)}$ 和 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}\mathcal{L}(S)}$与分次 ∞连通导出范畴 R_* 和 S_*-模相识别后，我们可以将其识别为

$$\tau_!D(M\otimes_R -)(\nu N)\simeq M_*\otimes_{R_*}N_*$$

作为与 M_* 的导出张量积。若 $\mathrm{Tor}^f_{R_*}(M_*,N_*)=0$ 对 $f\geq 1$ 成立，则它是离散的；若 M_* 作为右 R_*-模是平坦的，这一条件自动满足。

(4) 根据定义，$M\otimes_R -$ 可导出的，当且仅当自然变换

$$D(M\otimes_R -)\circ D(M\otimes_R -)\to D(M\otimes_R M\otimes_R -)$$

导出函子是一个等价。由于两边都与直和和悬挂相容，因此该自然变换是等价，当且仅当它在 νR 上取值为等价。与 (3) 一样，将 $\tau_!$ 应用于该自然变换并在 νR 上取值，即得到映射

$$M_*\otimes_{R_*}M_*\to \mathrm{Tor}^0_{R_*}(M_*,M_*)$$

在 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_{R_*}$ 中，它将导出张量积 $M_*\otimes_{R_*}M_*$ 投射到其 0-截断。显然，当 $\mathrm{Tor}^k_{R_*}(M_*,M_*)=0$ 对 $k>0$成立时，这是一个等价。反之，若这是一个等价，那么命题 7.1.10表明

$$D(M\otimes_R -)\circ D(M\otimes_R -)(\nu R)\to D(M\otimes_R M\otimes_R -)(\nu R)$$

这是一个 loop 模型之间的映射，在 π_0 上诱导出同构，因此它本身也是一个等价。□

命题 9.4.10。 假设 R 是 Adams 型。那么

(1) R-模的自函子 $R\otimes_{\mathbf{S}} -$ 按照 定义 7.5.7 的含义是可导出的，因此 $D(R\otimes_{\mathbf{S}} -)$ 继承了余单子的结构；(2) 存在余单子之间的典范等价 $D(R\otimes_{\mathbf{S}} -)\simeq c_!$。

证明。第一个断言由引理 9.4.9.(4) 得出：若 R 是 Adams 型，则 R_*R 在 R_* 上平坦。由于作为函子，$D(R\otimes_{\mathbf{S}} -)\simeq c_!\simeq D(E(c_!))$，因此，根据引理 7.5.18，要证明它们作为余单子等价，只需证明 $R\otimes_{\mathbf{S}} -\simeq E(c_!)$ 作为 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 上的余单子。根据等价 $\mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_R)\simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)}$，局部化 $L\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)}\to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}(R)}$ 可识别为按 [Pst23a, §4.4] 的意义将 τ 取逆。因此，$E(c_!)$ 是由下述伴随所对应的余单子

$$\mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_R\rightleftarrows \mathrm{Mod}_{\nu(R)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_R)$$

通过将 τ 两侧都取逆得到，这正是所需的余单子 $R\otimes_{\mathbf{S}} -$。 □

综合以上各项，便得到本截面的主定理。

定理 9.4.11。 存在一个 ∞-范畴之间的等价

$$(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})_{\mathrm{cpl}} \simeq \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)})$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0}$ 的 Postnikov 完备化与导出余单子 $D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)$ 的余代数之间。

证明。 由 引理 9.4.5，左侧可以被识别为余单子$\nu(R)\otimes_{\nu(\mathbf{S})}-$的余代数，而后者又可以被识别为 $c_!$ 的 记号 9.4.6中的余代数。于是结果由命题 9.4.10得到。 □

备注 9.4.12。 设 R 是一个同伦环谱，使得 $\mathrm{Tor}_{R_*}^{\geq 0}(R_*R,\ R_*R)=0$。在以下两种情形中的任一种下，都存在一个良好的 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0,\mathrm{cpl}}$，其对象为 R Postnikov 完备的合成谱：

（1） R 是 Adams 型，此时我们可以将 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0,\mathrm{cpl}} := (\mathcal{S}\mathrm{yn}_R^{\geq 0})^{\mathrm{cpl}}$ 定义为 R 的连通 [Pst23a] 的合成谱的 Postnikov 完备化；（2） R 配备有一个 $\mathbf{E}_1$-环结构，此时我们可以定义

$$\mathcal{S}\mathrm{yn}_{R,\mathrm{cpl}}^{\geq 0} := \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)})$$

根据定理 9.4.11，当这两项 ∞假设都成立时，这两个范畴等价。值得注意的是，这些假设与构造 R-同调的 Künneth 谱序列时所需的假设相同 [Ada69，EKMM07]。一个值得探讨的问题是，是否存在关于 R 的某个更弱的共同假设，使我们能够构造一个良好的∞范畴，其中的对象是 R-合成谱。

9.5. 合成空间

给定一个$\mathbf{E}_1$-环谱 R， R-亚当斯谱序列等价于伴随关系 $\mathcal{S}\mathrm{p} \rightleftarrows \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 所对应的下降谱序列，该伴随关系介于谱与 R-模之间。 定理 9.4.11将这一描述范畴化，表明 R-合成谱的 Postnikov 完备化等价于 ∞与该伴随关系相关的导出余单子的余代数范畴。

由非稳定的 R-基 Bendersky–Curtis–Miller 的 Adams 谱序列 [BCM78]以及 Bendersky–Thompson 的 [BT00]再次是某个伴随关系所对应的下降谱序列，不过这次该伴随关系来自

$$R\otimes \Sigma^\infty_+ \dashv \Omega^\infty : \mathcal{S}\mathrm{pc} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_R(\mathcal{S}\mathrm{p}) \tag{9.5.1}$$

在空间与 R-模之间。结合我们的工具，这自然引出一种范畴论变形，用来编码不稳定的 R-亚当斯谱序列，正如本节将要说明的那样。

定义 9.5.2。 设 R 是一个 $\mathbf{E}_1$-环谱。若对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，$(\Omega^\infty\Sigma^n R)$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 都是左 R_*-模中的投射对象，则称 R 具有投射环路空间。

例 9.5.3。 若 R_* 是一个域，则每个谱都有投射（事实上是自由的） R-同调，因此 R 具有自由环空间。

例 9.5.4。 MU 和 BP 都具有投射（事实上是自由的）环路空间，这是 Wilson 的一项基本结果 [Wil73，Wil75]。

注 9.5.5。 任意谱 M 都满足

$$M \simeq \operatorname*{colim}_{n\to\infty} \Sigma^{-n}\Sigma^\infty\Omega^\infty\Sigma^n M.$$

由此可知，若 R 具有投射环路空间，则 R_*R 是投射 R_*-模的滤子余极限，因此是左 R_*-模上的平坦对象。

回顾一下， $\mathcal{L}(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 是由 $\Sigma^n R$ 在余积下生成的全子范畴，其中$n \in \mathbb{Z}$。其幂等完备化 $\mathcal{L}^\natural(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 可识别为投射模的全子范畴。我们将通过受限 Yoneda 嵌入，默认把 $\mathcal{L}^\natural(R)$ 的环模型与 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 等同起来。

命题 9.5.6. 设 R 是一个具有投射环路空间的 $\mathbf{E}_1$-环谱。那么，全子范畴 $\mathcal{L}^\natural(R) \subset \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 在自函子 $R \otimes \Sigma^\infty_+ \Omega^\infty(-)$ 下封闭。

证明。 只需证明，对于满足 $R \otimes \Sigma^\infty \Omega^\infty M$ 作为左 R-模是投射的谱 M，其类在收缩和直和下封闭。显然它在收缩下封闭，因此我们只需考虑直和。

一般而言，函子 $\Sigma^\infty_+ \Omega^\infty$ 保持滤过余极限，并且满足

$$\begin{aligned}\Sigma^\infty_+ \Omega^\infty (M \times N) &\simeq \Sigma^\infty_+ \Omega^\infty M \otimes \Sigma^\infty_+ \Omega^\infty N \\ &\simeq \mathbf{S} \oplus \Sigma^\infty \Omega^\infty M \oplus \Sigma^\infty \Omega^\infty N \oplus \Sigma^\infty \Omega^\infty M \otimes \Sigma^\infty \Omega^\infty N\end{aligned}$$

对于任意两个谱 M 和 N。反复应用这一点可知，若 $\{M_i : i \in I\}$ 是任意一组谱，那么

$$\Sigma^\infty_+ \Omega^\infty (\bigoplus_{i \in I} M_i) \simeq \bigoplus_{\substack{F \subset I \\ \text{finite}}} \bigotimes_{i \in F} \Sigma^\infty \Omega^\infty M_i.$$

由于具有 R-投射同调的谱类在直和和 smash 积下封闭，因此，满足 $\Sigma^\infty_+ \Omega^\infty M$ 具有 R-投射同调的谱 M 的类在直和下封闭。□

在本节余下部分中，我们假设 R 是一个具有投射环路空间的 $\mathbf{E}_1$-环谱。

记号 9.5.7. 我们用 $c := R \otimes \Sigma^\infty_+ \Omega^\infty$ 表示由伴随 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}^\natural(R)}$ （9.5.1）诱导的 comonad。

注释 9.5.8. 根据构造，$\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ 的一个对象由一个 R-模以及伴随 $\mathcal{S}\mathrm{pc} \rightleftarrows \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ 的下降数据组成。特别地，存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \\ & \overset{R[-]}{\nearrow} & \downarrow \\ \mathcal{S}\mathrm{pc} & \xrightarrow[R \otimes \Sigma^\infty_+(-)]{} & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \end{array}$$

且具有如下性质：若 X 和 Y 是空间，则

$$\begin{aligned}\mathrm{map}_c(R[Y], R[X]) &\simeq \mathrm{Tot}\, \mathrm{map}_c(R[Y], (R \otimes \Sigma^\infty_+ \Omega^\infty -)^{\bullet+1} R[X]) \\ &\simeq \mathrm{Tot}\, \mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{pc}}(Y, (\Omega^\infty (R \otimes \Sigma^\infty_+ -))^{\bullet+1} X) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{pc}}(Y, X^\wedge_R),\end{aligned}$$

其中 $X^\wedge_R$ 是 X 的不稳定 R-幂零完备化。

命题 9.5.9. 底层自函子 c 具有以下性质：

(1) c 按照定义 7.5.7是可导出的；也就是说， $D(c) \circ D(c) \simeq D(c^2)$ ，

(2) 余单位自然变换 $E(D(c)) \to c$ 是一个等价。

证明。 第一个断言由命题 9.5.6 和例 7.5.6得到。对于第二个断言，我们应用引理 7.3.16的判据。

设 $M \simeq |M_\bullet|$ 是 ∞-范畴中的 R-模的一个几何实现，并且受限 Yoneda 嵌入 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \hookrightarrow \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$保持该实现。由于 Ω^∞ 在 R-模中由 $R \in \mathcal{L}(R)$余表示，这尤其意味着 $\Omega^\infty M \simeq |\Omega^\infty M_\bullet|$ 作为空间。由此可得

$$R \otimes \Sigma^\infty_+ \Omega^\infty M \simeq |R \otimes \Sigma^\infty_+ \Omega^\infty M_\bullet|,$$

这验证了该判据。 □

定义 9.5.10. An R-合成空间 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^\sharp(R)}$中的 $D(c)$-余代数。我们记作

$$\mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R := \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^\sharp(R)})$$

对于 ∞ 类别的 R-合成空间。

我们现在解释如何将 $\mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R$ 视为一种变形。

例 9.5.11 (一般纤维)。 根据 命题 7.5.13，存在一个一般纤维函子 r

$$L\colon \mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R \to \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R),$$

其中 $\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_c(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ 是 ∞ 类别，详见注释 9.5.8。与映射$_c(R[*], -)$ 复合后，便得到一个实现函子

$$\mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R \to \mathcal{S}\mathrm{pc}.$$

In 在另一个方向上，若 $\mathcal{S}\mathrm{pc}^{R\text{-}\mathrm{proj}} \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是具有投射 R 的空间全子范畴 -homology，那么 命题 7.5.11 给出了一个合成类比函子

$$\nu\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}^{R\text{-}\mathrm{proj}} \to \mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R.$$

例 9.5.12（特殊纤维）。限制到 $\mathcal{L}^\sharp(R)$ 的余单子 c 在其同伦范畴 $\mathrm{h}\mathcal{L}^\sharp(R)$ 上诱导出一个余单子 c_1，它等价于投射分次 R_*-模的范畴 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{R_*}^{\mathrm{proj}}$。根据构造，$\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{c_1}(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{R_*}^{\mathrm{proj}})$ 是底层 R_*-模为投射模的不稳定 R_*R-余代数范畴；进一步讨论见 [BCM78，第 6–8] 节。这个余单子本身也可以扩张，从而在分次 R_*-模的非负导出 ∞-范畴上定义一个余单子 $c_{1!}$

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{L}^\sharp(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{R_*}^{\geq 0}.$$

.....的 ∞-范畴 $c_{1!}$-余代数因此是一个导出 ∞-范畴，其中包含不稳定的 R_*R-余代数。在下文中， [BPb], 我们将说明如何存在一个特殊纤维函子

$$\tau_!\colon \mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R \to \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{c_{1!}}(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{R_*}^{\geq 0}),$$

fact将环视为平方零扩张塔，从而以 -que一种类似于相应稳定塔 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_R \to \cdots \to \mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R)$ 的方式将不稳定 Adams 谱序列范畴化 .

请注意，由于 $\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{c_{1!}}(\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{R_*}^{\geq 0})$ 在 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{R_*}^{\geq 0}$ 上是余单子的（这是由构造得到的），因此可以将其视为一种关于单纯不稳定余代数的同伦论，尽管我们并不清楚它是否（例如）是单纯不稳定余代数范畴上某个模型结构的底层 ∞-范畴。这与先前相关于不稳定 Adams 谱序列的工作中出现的关于余单纯不稳定余代数的同伦理论形成对比 [Bou89、Bla01、Bou03、BRS17]。若能比较这些代数同伦论，将会很有价值。

注 9.5.13. 假设 R 是连通的，并将 $\mathcal{L}^\sharp_+(R) \subset \mathcal{L}^\sharp(R)$ 记作连通对象构成的满子范畴；它本身是一个满足 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}^\sharp_+(R)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}$ 的环理论，这由命题 7.1.14 得出。在这种情况下， $\mathcal{L}^\sharp(R)$ 上的余单子 c 满足 $c(\mathcal{L}^\sharp(R)) \subset \mathcal{L}^\sharp_+(R)$，因此包含 $\mathcal{L}^\sharp_+(R) \subset \mathcal{L}^\sharp(R)$ 可扩张为一个等价

$$\mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R \simeq \mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}_{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^\sharp_+(R)}).$$

这种替代定义具有一些技术上的优势：例如，余单子 c 已经保留了 $\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}$ 上的所有几何实现；根据 命题 7.1.14 可知，实现函子可简单地表示为

$$\mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R}(\nu(*), -)\colon \mathcal{S}\mathrm{yn}\mathcal{S}\mathrm{pc}_R \to \mathcal{S}\mathrm{pc}.$$

此外，只需假设 $R_*\Omega^\infty\Sigma^n R$ 对于 $n \geq 0$ 是一个投射左 R_*-模，就可以定义这个 ∞-范畴 $\mathrm{Co}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{D(c)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^\sharp_+(R)})$，其对象为 R-合成空间。

9.6. 综合 $\mathbf{E}_k$-环

In 在前几节中，我们看到了如何构造 R-合成谱的 ∞-范畴
a 和
空间，通过推导伴随

$$\mathcal{S}\mathrm{p} \rightleftarrows \mathrm{LMod}_R, \qquad \mathcal{S}\mathrm{pc} \rightleftarrows \mathrm{LMod}_R.$$

这种稳健的技术可以应用于各种情形。在本节中，我们重点介绍 R-综合 $\mathcal{O}$-代数 这一例子，其中 ∞-幺半群 $\mathcal{O}$。

为简单起见，设 R 是一个 $\mathbf{E}_\infty$-环谱，且 R_*R 在 R_*上是平坦的，并设 $\mathcal{O}$ 是一个∞-幺半群。在例 9.3.1中，我们描述了一个 loop 理论 $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)$，其 满足

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)} \simeq \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R).$$

我们将使用这一环理论推导自由-遗忘伴随，从而构造一个 ∞-范畴的 R-合成 $\mathcal{O}$-代数

$$R \otimes_{\mathbf{S}} -\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}} \rightleftarrows \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R) :U.$$

为此，我们必须验证 §7.5中讨论的一些技术条件。这些条件来自以下引理。

引理 9.6.1。 在假设 R_*R 在 R_*上平坦的情况下，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)} & \xrightarrow{D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}}} \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} & \xrightarrow{D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} \end{array}$$

交换。

证明。 由于该图表中的所有函子都保持几何实现，要使其交换，我们只需考察其限制到 $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)$ $\subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}$ 上的情形。事实上，如果 $A \in \mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)$，那么根据构造

$$\mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}} \simeq D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)(R\otimes_{\mathbf{S}}-)(\nu_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}A) = \mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}}\,\nu_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}(R\otimes_{\mathbf{S}}A) = \nu_{\mathcal{L}(R)}(R\otimes_{\mathbf{S}}A),$$

然而根据 引理 9.4.9我们有

$$D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)\,\mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}}(\nu_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}(A)) = D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)(\nu_{\mathcal{L}(R)}(A)) \simeq \nu_{\mathcal{L}(R)}(R\otimes_{\mathbf{S}}A),$$

而比较映射将它们识别为同一对象。 □

Pr命题 9.6.2。 $D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)$ 在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}$ 上的自函子具有以下性质。

(1) 它保持环模型的全子范畴；(2) 余单位 $E(D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)) \to R\otimes_{\mathbf{S}}-$ 是一个等价。(3) 它是可导出的，因此继承了余单子的结构。(4) $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R)$ 中的每个对象相对于 $D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)$ 都是稳定驯顺的。

证明。 第一个断言由 引理 9.6.1 得出，因为 $\mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}}$ 反映了成为环模型这一性质；第二个断言由 引理 7.3.16 得出，因为 $R\otimes_{\mathbf{S}}-\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R)$保持几何实现。第三和第四个断言现由 推论 7.5。19 □

定义 9.6.3。 设 R 是一个 $\mathbf{E}_\infty$-环，其中 R_*R 作为 R_*-模是平坦的，并设 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-运算子。 R-合成 $\mathcal{O}$-代数 的 ∞-范畴定义为

$$\mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}) = \mathrm{CoAlg}_{D(R\otimes_{\mathbf{S}}-)}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}).$$

我们注意到，当 $\mathcal{O}$ 是平凡的 ∞-运算子时，上述内容恢复了 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}}$ 的R-合成谱备注 9.4.12。现在我们讨论我们的形式体系如何恢复变形的预期特征。

例 9.6.4 （一般纤维）。 将命题 7.5.13 中构造的一般纤维函子后复合$\mathrm{CoAlg}^{R\otimes\mathbf{S}-}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_R)) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}$ 右伴随，可得到一个实现函子

$$\mathcal{S}\mathrm{yn}_R(\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}\,.$$

例 9.6.5 (特殊纤维)。 简记 $c_! = D(R\otimes_{\mathbf{S}} -)$。正如我们将在 [BPb],中解释的那样，这个余单子以典范方式在特殊纤维 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)}$上诱导出一个余单子 $c_{1!}$。根据构造，$\mathrm{CoAlg}^{c_{1!}}(\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)})$ 是一个合适的导出 ∞-范畴，其中的 R_*R-余模带有相容的 $\mathcal{O}$-R-幂运算。

例如，若 $R = \mathbf{F}_p$ 和 $\mathcal{O} = \mathbf{E}_\infty$，那么其离散对象构成的全子范畴，恰好等价于由分次交换 $\mathbb{F}_p$-代数组成的范畴；这些代数带有对偶 Steenrod 代数的相容余作用以及 Dyer–Lashof 运算的作用，并满足通常的 Cartan公式、不稳定条件和 Nishida关系。

例 9.6.6 (遗忘函子)。 遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}} \to \mathcal{S}\mathrm{p}$ 与余单子 $R\otimes_{\mathbf{S}}-$相交换，而 引理 9.6.1 表明，其诱导的导出函子 $\mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}}\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{L}(R)}$ 同样与导出余单子 $D(R\otimes_{\mathbf{S}} -)$ 相交换。进而转到余代数的 ∞-范畴，便得到一个遗忘函子

$$U\colon \mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}) \to \mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}}.$$

要形式化地写出 U，使用$(\infty, 2)$-范畴的语言会比较方便，因此我们将正式描述推迟到 [BPb]。根据构造，U 适合于一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}) & \longrightarrow & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(R)} \\ \downarrow{\scriptstyle U} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}}} \\ \mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}} & \longrightarrow & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}(R)} \end{array},$$

其中水平箭头遗忘了余代数结构。特别地，由于 $\mathrm{Free}^*_{\mathcal{O}}$ 保留几何实现且是保守的，U也具有同样的性质。

Ex例 9.6.7 (合成类比)。我们注意到，命题 7.5.11 提供了一个合成 c ana类比函子

$$\nu\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}} \to \mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}})$$

谱的合成类比函子的提升。与 U 一同例 9.6.6中的遗忘函子，这构成了一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ \mathcal{S}\mathrm{p} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{S}\mathrm{yn}^{\geq 0}_{R,\mathrm{cpl}} \end{array}.$$

Re注 9.6.8。还可以尝试以其他方式变形 ∞-范畴的 $\mathcal{O}$-代数：

（1）如果 R 是 Adams 型，则可以考虑合成谱中的代数范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R)$。这里，特殊纤维由下式给出

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C\tau}(\mathcal{S}\mathrm{yn}_R)) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Stable}_{R_*R}),$$

在 ∞-范畴中的 $\mathcal{O}$-代数，位于 Hovey 的稳定 ∞-范畴的 E_*E-余模中。粗略地说，这意味着特殊纤维能看到同调上的乘积，但看不到 R-$\mathcal{O}$-幂运算，因此这种变形在某种意义上比定义 9.6.3.中引入的变形结构更少。

(2) 在即将发表的工作中，Devalapurkar-Hahn-Raksit-Senger 引入了一种偶MU-合成$\mathbf{E}_\infty$-环的变体，与 Hahn–Raksit– Wilson 的$\mathbf{E}_\infty$-偶滤过密切相关 [HRW] ，并且应当是动机同伦论中范数环的纯同伦论等价物 [BH21]。这种变形比此处介绍的MU-合成$\mathbf{E}_\infty$-环更加精细。

其他变体也同样可行，例如令 R to 成为一个高度结构化的等变或动机环谱。我们再举一类例子，它充分利用了这样一个事实：我们所有的工具都是针对无穷 理论开发的。

例 9.6.9. 设 Γ 是一个高度为 n 、定义在特征为 p的完美域上的形式群，并令 E_n 表示相应的 Morava E-理论谱，其极大理想为 $\mathfrak{m} \subset \pi_0 E_n$。若 $\mathcal{L}^\wedge_{\mathfrak{m}}(E_n) \subset \mathrm{Mod}_{E_n}^{\mathrm{Cpl}(\mathfrak{m})}$ 是由 $\Sigma^n E_n$ 在直和下生成的全子范畴，其中 $n \in \mathbb{Z}$，则 命题 7.2.3 蕴含

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}^\wedge_{\mathfrak{m}}(E_n)} \simeq \mathrm{Mod}_{E_n}^{\mathrm{Cpl}(\mathfrak{m})}.$$

作为对 定义 9.6.3的一种变体，对伴随所关联的余单子进行变形

$$\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}_{K(n)}) \rightleftarrows \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{E_n}^{\mathrm{Cpl}(\mathfrak{m})})$$

会产生一个 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_{E_n}(\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{K(n)}))$，其对象为合成的 $K(n)$-局部$\mathbf{E}_\infty$-环，且其一般纤维与 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{K(n)})$ 完全等价。

我们在后文 [BPb] 中的工作将表明， $\mathcal{S}\mathrm{yn}_{E_n}(\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{K(n)}))$ 存在一个性质良好的特殊纤维，其中包含 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_{E_n}(\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{K(n)}))$ 内部各种谱序列和障碍理论的障碍群。一般而言， $\mathcal{S}\mathrm{yn}_{E_n}(\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{K(n)}))$ 可视为对 Goerss–Hopkins 最初构造的、用于描述 $K(1)$- 局部 E_∞- 环之间映射的谱序列的一种范畴化扩展 [GH05, Theorem 2.4.14]；当 $n = 1$ 时，这一扩展消除了原文所需的技术性 p-完备假设。

非正式地说， $\mathcal{S}\mathrm{yn}_{E_n}(\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{K(n)}))$ 的特殊纤维是 Rezk [Rez09] 意义下一个由 $\mathfrak{m}$-完备 $\mathbb{T}$-代数构成的导出 ∞-范畴，并配备了与之适当相容且连续的 Morava 稳定子群作用。直观地说，这类对象由 $\mathfrak{m}$-完备的交替 E_*-代数组成，并配备形式群等源的作用；这些形式群是 Γ 的变形（须满足 [Rez09] 的同余判据）。因此，变形 $\mathcal{S}\mathrm{yn}_{E_n}(\mathrm{CAlg}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{K(n)}))$ 为 Lawson 的一个猜想提供了一种答案 [Law20, Conjecture 1.6.6] ，该猜想涉及 E_∞-环之间映射的障碍理论，其中这些环是 $K(n)$-局部的。

通过转而对伴随所关联的余单子进行变形

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{S}\mathrm{p}_{K(n)}) \rightleftarrows \mathrm{Lie}(\mathrm{Mod}_{E_n}^{\mathrm{Cpl}(\mathfrak{m})}),$$

可以得到一个 ∞-范畴，其中的合成 $K(n)$-局部谱李代数；根据 Heuts 的工作 [Heu21] ，它可以解释为一个 ∞合成（非望远镜） v_n-周期空间的范畴。其特殊纤维是一个导出 ∞-范畴，其中包含 Brantner 的 Hecke 李代数 [Bra17] ，并带有与之适当相容且连续的 Morava 稳定子群作用。

参考文献

[Ada69] J. F. Adams，《广义上同调讲义》，《范畴论、同调论及其应用》，III（巴特尔研究所会议，华盛顿州西雅图，1968 年，第三卷），数学讲义，第 99 卷，Springer，柏林—纽约，1969 年，第 1–138 页。MR 251716

[AP25] Toni Annala 和 Piotr Pstrągowski，《关于特征处权重滤过的注记》，arXiv 电子预印本（2025），arXiv:2502.19626。

[Bad02] Bernard Badzioch，同伦论中的代数理论，《数学年刊》 (2 3, 895**1552**002 913 1923968) ( )，第 – 期。MR [Bal23] William Balderrama，幂运算的代数理论，《拓扑学杂志》**16** (2023)，第 4 期，1543–1640（英文）。

[Bal25] ———, 通过代数理论变形同伦理论，2025，第 110496 号论文，76 页。MR 4950976[BB04] Francis Borceux 和 Dominique Bourn，《Mal'cev、原模、同调及半阿贝尔范畴》，《数学及其应用》第 566 卷，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，2004 年。MR 2044291[BCM78] Martin Bendersky、Edward B Curtis 和 Haynes R Miller，广义同调的不稳定 Adams 谱序列，《Topology》17 (1978)，第 3 期，229–248。[BCN25] D. Lukas B. Brantner、Ricardo Campos 和 Joost Nuiten，PD 运算子与显式分割李代数，《美国数学会回忆录》 **315** 2025 1597, +125 5003477 ( )，第 v 期。MR [04] Π
BDG D. Blanc、W. G. Dwyer 和 P. G. Goerss，-代数的实现空间：代数拓扑中的一个模问题，《Topology》43 (2004)，第 4 期，857–892。[Ber06] Julia E. Bergner，多类理论上的代数的刚性化，《代数、几何与拓扑》6 (2006)，1925–1955。MR 2263055 (2007f:18005) [BF78] A. K. Bousfield 和 E. M. Friedlander， Γ-空间、谱和双单纯集的同伦论，《几何应用同伦论》第二卷，会议论文集，埃文斯顿，1977，《数学讲义》658，80-130 (1978)，1978。[BGvO71] Michael Barr、Pierre A. Grillet 和 Donovan H. van Osdol，《正合范畴与层范畴》，《数学讲义》第 236 卷，Springer-Verlag，柏林，1971。MR 3727441[BH21] Tom Bachmann 和 Marc Hoyois，动机同伦论中的范数，《Astérisque》(2021)，第 425 号，ix+207。MR 4288071[Bla01] David Blanc，实现 Steenrod 代数上的余代数，《Topology》40 (2001)，第 5 期，993–1016（英文）。[Bou89] A. K. Bousfield，同伦谱序列与障碍，《以色列数学杂志》66 3, 54 1989 1 104 1017155 ( )，第 - – 期。MR [Bou03] AK Bousfield，模型范畴中的余单纯分解与同伦谱序列，《几何与拓扑》7 (2003)，第 2 期，1001–1053。[Bou17] Dominique Bourn，从群到范畴代数，《数学精要教材》，Birkhäuser/Springer，查姆，2017，《原模范畴与 Mal'tsev 范畴导论》。MR 3674493[BPa] William Balderrama 和 Piotr Pstrągowski，不稳定合成变形 II：无穷小扩张。[BPb] ，不稳定合成变形 III：螺旋塔的自然性。[Bra17] Lukas Brantner，《谱李代数的 Lubin–Tate 理论》，博士论文，哈佛大学，2017，urn-3:HUL.InstRepos:41140243。[BRS17] Georg Biedermann、Georgios Raptis 和 Manfred Stelzer，不稳定余代数的实现空间，《Astérisque》第 393 卷，巴黎：法国数学会 (SMF)，2017（英文）。[BT00] Martin Bendersky 和 Robert D. Thompson，周期同调理论的 Bousfield–Kan 谱序列，《美国数学杂志》122 (2000)，第 3 期，599–635（英文）。[CKP93] A. Carboni、G. M. Kelly 和 M. C. Pedicchio，关于 Mal' tsev 范畴与 Goursat 范畴的一些注记，《应用范畴结构》 **1** 1993 4, 385 421 1268510 ( )，第 – 期。MR [89] Π
DK W. G. Dwyer 和 D. M. Kan，-代数的包络环，《同伦论进展》，纪念 I.M. James 会议论文集，意大利科尔托纳，1988，139, ~~49 60~~ 1989 1989 伦敦数学会讲义系列 - ( )，。[DKS93] W. G. Dwyer、D. M. Kan 和 C. R. Stover，有基点单纯空间的 E^2 模型范畴结构，《纯粹与应用代数杂志》90 (1993)，第 2 期，137–152（英文）。[DP61] Albrecht Dold 和 Dieter Puppe，非加性函子的同调：应用，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》11 (1961)，201–312。MR 150183[EKMM07] Anthony D Elmendorf、Igor Kriz、Michael A Mandell 和 J Peter May，《稳定同伦论中的环、模与代数》，第 47 号，美国数学会，2007。
[60] **3** 1960 131 132 124251
[04]

Fin G. D. Findlay，自反同态关系，《加拿大数学通报》( )，–。MR GH P. G. Goerss 和 M. J. Hopkins，交换环谱的模空间，《结构化环谱》，伦敦数学会讲义系列，第 315 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004 年，第 151–200 页。[GH 05] P. G. Goerss 和 M. J. Hopkins，结构化环谱的模问题，2005。[GIKR22] Bogdan Gheorghe、Daniel C Isaksen、Achim Krause 和 Nicolas Ricka， ℂ-动机模形式，《欧洲数学会杂志》24 (2022)，第 10 期，3597–3628。[Hen08] André Henriques，积分 L_∞-代数，《组合数学》144 (2008)，第 4 期，1017–1045（英文）。[Heu21] Gijs Heuts，李代数与 v_n-周期空间，《数学年刊》 (2) 193 (2021)，第 1 期，223–301（英文）。

[HHLN23] Rune Haugseng、Fabian Hebestreit、Sil Linskens 和 Joost Nuiten，松幺半伴随、双变量纤维化与伴随态射演算，《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）4（2023），第 889–957 页。MR [HL17] Christopher D. Hollings 和 Mark V. Lawson，Wagner 广义堆理论，Springer，查姆，2017。MR 3729305[HRW] Jeremy Hahn、Arpon Raksit 和 Dylan Wilson，交换环谱的拓扑循环同调上的动机滤过，《数学年刊》。[JP02] M. Jibladze 和 T. Pirashvili，关于马尔采夫代数的 Kan 纤维化，《格鲁吉亚数学杂志》9（2002），第 1 期，71–74。MR 1916490[Kla01] Stephan Klaus，关于单纯形环路和 H空间，《拓扑应用》112（2001），第 3 期，337–348。MR 1824167[Lam55] J. Lambek，群与群胚，《美国数学会通报》61（1955），78。[Lam92] ，马尔采夫运算的普遍性，国际代数会议论文集，第 3 部分（新西伯利亚，1989），《当代数学》，第 131 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，1992 年，第 135–146 页。MR 1175879[Law63] F William Lawvere，代数理论的函子语义，《美国国家科学院院刊》50（1963），第 5 期，869–872。[Law19] Tyler Lawson，计算 E_∞ 环谱的障碍群，《同伦论：工具与应用》，《当代数学》，第 729 卷，美国数学会，[普罗维登斯], RI，[2019]©2019，第 179–203 页。MR 3959600[Law20]，E_n-谱与 Dyer-Lashof 运算，《同伦论手册》，佛罗里达州博卡拉顿：CRC 出版社，2020 年，第 793–849 页（英文）。[Lin69] F. E. J. Linton，代数范畴中的余等化子，《三元组与范畴同调论研讨会》（苏黎世联邦理工学院，1966/67），数学讲义，第 80 卷，Springer，柏林—纽约，1969 年，第 75–90 页。MR 244341[LS10] Gregory Lupton 和 Samuel Bruce Smith，函数空间中的怀特海德积：Quillen 模型公式，《日本数学会杂志》 **62** 2010 1, 49 81 2648216，第 – 期。MR Lura Jacob [ ] Lurie，高阶代数，http://www.math.harvard.edu/ lurie/papers/HA.pdf。[Lurb] ，谱代数几何，http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。[Lur09] ，高阶拓扑斯理论，《数学年刊研究》，第 170 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009 年。[Lur11] Jacob Lurie，导出代数几何 VIII：拟凝聚层与 Tannaka 对偶定理，2011 年。[Lur15] ，代数 K 理论中的旋转不变性，https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Waldhaus.pdf，2015 年。[Lur17] ，高阶代数，http://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2017 年。[Mal54] A. I. Mal'cev，代数系统一般理论论，《数学文集》（新系列）35(77)（1954），3–20。MR 65533[Moo55] J. C. Moore，幺半复形的同伦，I，《亨利·卡当研讨班》7（1954–1955），第 2 期，1–8（法文）。[MP89] Michael Makkai 和 Robert Paré，《可达范畴：范畴模型论基础》，《当代数学》，第 104 卷，普罗维登斯，RI：美国数学会，1989 年（英文）。[Por65] G. J. Porter，怀特海德积消失的空间，《牛津季刊数学杂志》（第 2 辑）16（1965），77–84。MR 172292[PP21] Irakli Patchkoria 和 Piotr Pstrągowski，亚当斯谱序列与 Franke 代数性猜想，arXiv 预印本（2021），arXiv:2110.03669。[Prü24] H. Prüfer，阿贝尔群理论 I：基本性质，《数学杂志》20（1924），165–187（德文）。[Pst23a] Piotr Pstrągowski，合成谱与胞腔动机范畴，《数学发明》232（2023），第 2 期，553–681（英文）。[Pst23b] Piotr Pstrągowski，具有指定同伦群的空间模空间，《纯粹与应用代数杂志》227（2023），第 10 期，107409。[Pst25] Piotr Pstrągowski，完美偶模与偶滤过，《欧洲数学会杂志》（2025）。[PV22] Piotr Pstrągowski 和 Paul VanKoughnett，抽象 Goerss-Hopkins 理论，2022 年，第 108098 号论文，51 页。MR 4363589[Qui67] Daniel G. Quillen，同伦代数，《数学讲义》，第 43 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1967 年。MR 223432[Rak] Arpon Raksit，谱代数理论 I：导出范畴，即将出版。

[Rez] Charles Rezk，何时同伦余极限与同伦基变换相容?，http://www.math.uiuc.edu/~rezk/i-hate-the-pi-star-kan-condition.pdf。[Rez09] Charles Rezk，Morava E-理论中幂运算的同余判据，《同调、同伦及应用》 **11** 2009 2, 327–379 2591924，第 – 期。MR Sey R. M. Seymour，单纯空间范畴中的 Kan 纤维化，《基础数学》106（1980），141–152（英文）。[Sha74] Ahmad Shafaat，关于马尔采夫簇的一则注记，《加拿大数学通报》17（1974），第 4 期，609。MR 382125[Smi76] Jonathan D. H. Smith，马尔采夫簇，《数学讲义》，第 554 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1976 432511。MR Sto Christopher R. Stover，高阶同伦群的 van Kampen 谱序列，《拓扑学》29（1990），第 1 期，9–26（英文）。[Vag53] V. V. Vagner，广义堆与广义群理论，《数学文集》（新系列）32/74（1953），545–632。MR 59267[van25] Sven van Nigtevecht，滤过谱与合成谱导论，arXiv 预印本（2025），arXiv:2509.21127。[Vr13] Luká˘ s Vok˘ rínek，计算映射的无基点稳定同伦类的阿贝尔堆，《布尔诺数学档案》 **49** 2013 5, 359–368 3159334，第 – 期。MR Vr 堆与无基点稳定同伦论，《布尔诺数学档案》50（2014），第 5 期，323–332。MR [Wil73] W Stephen Wilson，Brown-Peterson 上同调的 Ω-谱。第一部分，《瑞士数学评论》48（1973），第 1 期，45–55。[Wil75] ，Brown-Peterson 上同调的 Ω-谱，第二部分，《美国数学杂志》97（1975），第 1 期，101–123。[Wra70] G. C. Wraith，代数理论，1969 年秋季讲座。《讲义系列》第 22 号，奥胡斯大学数学研究所，奥胡斯，1970 年。MR 0262334