arXiv:2601.08812v1 [math.AT] 13 Jan 2026

不稳定合成变形 II：无穷小扩张

WILLIAM BALDERRAMA 和 PIOTR PSTRĄGO WSKI

摘要。本文是系列论文的第二篇，旨在从 Malcev 理论的角度研究不稳定合成变形：这类理论是某些 ∞范畴代数理论$\mathcal{P}$，具有良好性质的 ∞模型范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$。本文证明，Malcev 理论及其模型都具有良好的变形理论，从而推广了环与模的经典变形理论。

作为我们的主要例子，我们证明，Malcev 理论 $\mathcal{P}$ 的 Postnikov 塔是一个平方零扩张塔，并且所有这些结构在转到模型的 ∞范畴时都得以保留。这使我们能够控制 ∞范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}}{}_{n+r}{}^{\mathcal{P}}$与 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}}{}_{n}{}^{\mathcal{P}}$ 之间的差异（其中 $r \leq n$），并构成我们研究不稳定合成同伦论时所采用的“ τ的余纤维”形式体系的基础。作为应用，我们由此推导出沿着塔$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \cdots \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$的提升模空间的一系列新的 Blanc–Dwyer–Goerss 风格分解。

目录

1. 引言 2
1.1. Malcev 理论的螺旋塔 1.2. 模空间问题的应用 1.3. Malcev 理论的无穷小扩张 1.4. 初等修饰子与螺旋系统 3 5 8

2. ∞-范畴的修改 10
2.1. 富化的 ∞-范畴理论 2.2. ∞-范畴的修改 2.3. 修改的极限 2.4. Malcev 理论的修改 2.5. 初等修饰子 11 12 14 16 18

3. Postnikov 分解再探 3.1. 空间的 Postnikov 方块 3.2. ∞-范畴的 Postnikov 方块 3.3. Postnikov 修饰子是初等的 3.4. 螺旋系统 4. Malcev 理论的无穷小扩张 4.1. 弱拉回定理 4.2. 导出 Postnikov 方块 4.3. 截断且连通的态射 4.4. 马尔采夫理论模型的拼接 5. Malcev 理论的螺旋系统 5.1. 同调怀特海德定理 5.2. 初等修饰子的路径分支 5.3. 螺旋塔的收敛性 6. 变形理论 6.1. 环空间上范畴 20 22 22 29 30 32 34 35 36 39 43 45 46 47 53 54 54

6.2. ∞-范畴的线性扩张 6.3. 理论上的自然系统 6.4. Malcev 理论的线性扩张 61 6.5. 分解提升的模空间 62 56 59

参考文献 64

1. 引言

这是开发不稳定综合变形理论的系列论文中的第二篇：即对不稳定同伦理论进行变形，并将谱序列和障碍理论范畴化。我们请读者参阅 [BP，第 1 节。2]以全面了解这一项目。在 [BP], 中，我们定义并研究了经典泛代数 ∞的 -范畴化和无穷化推广，即*Malcev* 理论， [Smi76、BB04], 对 [Bal25], 中给出的一个更早的此类推广进行了完善，并发展了其 ∞-范畴的模型的高阶泛代数。

正如经典理论和模型推广了环与模， ∞-范畴理论和模型推广了连通环谱与连通模：对任意连通环谱 A ，都有一个 Malcev 理论 $\mathcal{L}_0(A)$ ，满足 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{L}_0(A)} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_A^{\geq 0}$ 。其关键区别在于，在高阶泛代数中，这一推广足够稳健，能够编码非连通和非稳定同伦理论的变形，包括稳定 ∞-范畴的某些滤过变形 [BP，第 9 节。2] ，以及能够编码经典 Blanc–Dwyer–Goerss [BDG04]理论推广的变形；该理论研究同伦论中的模问题，此前已在 [Pst23, Bal25] 中进行探索。

本文进一步推进了理论与连通环谱之间的类比。我们的目标是说明，Malcev 理论及其模型具有范畴化的变形理论，将环与模的经典变形理论加以推广。这一理论构成了一种不稳定的“余纤维 τ”形式体系的基础，该体系对于研究合成变形至关重要。这一形式体系是近年来在认识球面的稳定同伦群方面取得诸多突破的重要组成部分 [BIX24、LWX24、BX25], ，而本文提出的形式体系则是以不稳定领域中的类似应用为目标构建的。

基本思路如下。Malcev 理论 $\mathcal{P}$ 作为一个 ∞-范畴，具有一个*Postnikov* 塔

$$\mathcal{P} \to \cdots \to \mathrm{h}_{n+1}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_n\mathcal{P} \to \cdots \to \mathrm{h}\mathcal{P},$$

它本身也是由 Malcev 理论构成的塔。转到 ∞-模型范畴后，这会导出我们称为 $\mathcal{P}$ 的螺旋塔，或 *Goerss–Hopkins* 塔：

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \cdots \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_{n+1}\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}} \to \cdots \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}.$$

我们证明， $\mathcal{P}$ 的螺旋塔可以补全为笛卡尔螺旋方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_{n+1}\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}} & \xrightarrow{k_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{k}_{n,1}^{n+1}\mathcal{P}} \end{array}, \tag{1.0.1}$$

由 $\mathcal{P}$ 对应的范畴论 *Postnikov* 方块 所诱导。理论 $\mathrm{k}_n^{n+1}{}_{,1}\mathcal{P}$ 作为相应 k-不变量的目标，在精确意义上是同伦范畴 $\mathrm{h}\mathcal{P}$ 上的 $\mathbb{Z}$-线性 对象，而这些方块将 $\mathcal{P}$ 的螺旋塔实现为由本质代数层构成的线性扩张 （或平方零扩张）塔。因此， $\mathcal{P}$ 的螺旋塔将 ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 实现为 $\mathcal{M}$ odel$_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$ 的无穷小变形；这与 Postnikov 塔将连通环谱 A 实现为其第 0 阶同伦环 $\pi_0 A \simeq A_{\leq 0}$ 的无穷小变形的方式相同。

我们将会说明，这些方块及其变体既能复现环与模的经典变形理论，也为在同伦论中构造模空间与映射空间的分解提供了极其灵活的框架。本引言余下部分的目标，是更详细地介绍这一点以及我们的主要定理。

1.1. Malcev 理论的螺旋塔

Malcev 理论的 Postnikov 方块是一个更一般的范畴构造的特例，其灵感来自 Dwyer–Kan–Smith 的经典工作 [DKS86] 关于单纯范畴的 Postnikov 塔，以及 Harpaz–Nuiten–Prasma 的较新工作 [HNP20] 关于 ∞-范畴的 Postnikov 塔。任何 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 都具有一个由同伦 n-范畴构成的塔

$$\mathcal{C} \to \cdots \to \mathrm{h}_{n+1}\mathcal{C} \to \mathrm{h}_n\mathcal{C} \to \cdots \to \mathrm{h}\mathcal{C}.$$

在 §2 中，我们研究这一构造的以下推广。设 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$是一个对有限积封闭的子范畴，并设 $F\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是一个保有限积的函子。

定义 1.1.1（非正式）。设 $\mathcal{C}$ 是一个映射空间取值于 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$中的 ∞-范畴。沿着 F 对 $\mathcal{C}$ 进行修改 $\mathcal{C}$ 沿着 F 是一个新的 ∞-范畴 $\mathcal{C}_F$，非正式地说，它与 $\mathcal{C}$具有相同的对象，但映射空间由以下公式给出

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(a,b) := F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b)).$$

复合由 $\mathcal{C}$ 中的复合诱导，利用了 F 保持积这一事实。

上述定义并不形式化，我们将在定义 2.2.1 中使用 Gepner–Haugseng 所发展的富化 ∞-范畴理论 [GH15]将其形式化：简言之， $\mathcal{C}$ 是一个 ∞富化于 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$，的 $\mathcal{C}_F$ -范畴，而 F则是沿着。实际上，构造的细节很少需要用到，而在命题 2.2.5 中，我们会对上述非形式化描述给出一个更精确的表述，足以满足大多数用途。

例 1.1.2. 若 $\tau_{<n}\colon \mathcal{S}\mathrm{pc} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$是 Postnikov $(n-1)$-截断，则$\mathcal{C}_{\tau_{<n}} \simeq \mathrm{h}_n\mathcal{C}$。也就是说，同伦 n-范畴是按定义 1.1.1所述的一种修改。

经典 Postnikov 理论断言，若 X 是一个空间，则其截断 $X_{\le n} \to X_{<n}$ 由一个 k-不变量分类：粗略地说，就是$\mathrm{H}^{n+1}(X_{<n};\pi_n X)$中的一个类，其中上同调群可能取局部系数。我们将在§3中重新审视并拓展这一经典理论，证明对于任意 $X_{<n+r} \to X_{<n}$，截断 $1 \le r < n$由线性数据分类；并且当 $r = n$时，只要 X的同伦群中的某些怀特海德积消失，便有。经典理论是当时得到的特殊情形。沿着这些构造修改 Malcev 理论，可得以下结果。

定理 1.1.3（§3.2）。设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，并固定整数 $1 \le r \le n < \infty$。那么截断

$$\tau_{(n+r,n)}\colon \mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_n\mathcal{P}$$

是 ∞-范畴的线性扩张，具体而言：存在一个谱对象

$$\mathrm{k}^{\bullet}_{n,r}\mathcal{P} \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{S}\mathrm{p}(\mathcal{M}\mathrm{alc}_{/\mathrm{h}_r\mathcal{P}})),$$

它位于 $\mathrm{h}_r\mathcal{P}$ 上的 ∞-范畴中，且关于球谱的截断 $\mathbf{S}_{<r}$ 是线性的，并配有笛卡尔 Postnikov 方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P} & \xrightarrow{\tau_{(n+r,r)}} & \mathrm{h}_r\mathcal{P} \\ {\scriptstyle \tau_{(n+r,n)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathrm{h}_n\mathcal{P} & \xrightarrow{k} & \mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{P} \end{array}.$$

这里，映射 k 可以视为一个适当的上同调类，用来分类 $\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}$ 作为∞-范畴，其底为$\mathrm{h}_n\mathcal{P}$，参见 例 1.1.5 和 注 6.2.8。

例 1.1.4。设 A 是一个连通环谱。若 $1 \leq r \leq n < \infty$，则已知 $A_{<n+r}$ 是由 $A_{<n}$ 和 $A_{<r}$-双模 $A_{[n,n+r)} = \tau_{<n+r}\tau_{\geq n}A$构成的平方零扩张。对于$r = 1$，这一结论以不同形式见于 Kriz、Basterra、Lazarev 和 Dugger–Shipley 的工作 [Bas99、Laz01、DS06], ，一般情形则由 Lurie 在 [Lura 推论 7.4.1 中证明。27][1]。

Malcev 理论定理 1.1.3的 Postnikov 方块是这些结果的非阿贝尔推广。特别地，在将连通环谱嵌入单排序 Malcev 理论的情形下 $\mathcal{L}_0(-)$ ，我们有

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{h}_{n+r}\mathcal{L}_0(A) & \longrightarrow & \mathrm{h}_r\mathcal{L}_0(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{h}_n\mathcal{L}_0(A) & \longrightarrow & \mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{L}_0(A) \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_0(A_{<n+r}) & \longrightarrow & \mathcal{L}_0(A_{<r}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}_0(A_{<n}) & \longrightarrow & \mathcal{L}_0(A_{<r} \oplus \Sigma A_{[n,n+r)}). \end{array}$$

例 1.1.5。对于 $n = r = 1$，定理 1.1.3 给出了如下形式的一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{h}_2\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathrm{h}\mathcal{P} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathrm{h}\mathcal{P} & \xrightarrow{k} & \mathrm{k}^2_{1,1}\mathcal{P} \end{array} .$$

函子 k 是投影 $\mathrm{k}_{21,\ 1}\mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$的一个截面，因此由以下对象中的一个元素分类：*Baues–Wirsching* 上同调 [BW85]

$$\kappa \in \mathrm{H}^3(\mathrm{h}\mathcal{P}; \Pi_1\mathcal{P})$$

$\mathrm{h}\mathcal{P}$ 的上同调，其系数取自自然系统 $\Pi_1\mathcal{P}$：由 $\to \mathcal{A}\mathrm{b}$ 给出的阿贝尔群 Tw(h$\mathcal{P}$) b y

$$(\Pi_1\mathcal{P})(\phi\colon \nu_1 P \to \nu_1 Q) = \pi_1(\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P, Q), \phi).$$

类 κ 是理论 的一个普适（三元）*Toda* 括号 $\mathcal{P}$。有关进一步讨论，请参阅[BD89，BJ02，Sag08] 。

定理 1.1.3表明，Malcev 理论具有良好的 Postnikov 理论。不过，我们最终感兴趣的并非 Malcev 理论本身，而是它们的 ∞-模型范畴；一般而言，Malcev 理论的笛卡尔方形在转到 ∞-模型范畴时未必得以保留。下面这个高度非形式化的结果表明，在 Postnikov 情形下不会出现这些问题：

定理 1.1.6。Malcev 理论 $\mathcal{P}$的范畴论 Postnikov 塔上的所有结构，在转到 ∞-模型范畴时都会得以保留。特别地，对于所有 $1 \leq r \leq n < \infty$， $\mathcal{P}$ 的 Postnikov 方会导出一个笛卡尔螺旋方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}} & \xrightarrow{\tau_{(n+r,r)!}} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}} \\ {\scriptstyle \tau_{(n+r,n)!}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0_!} \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}} & \xrightarrow{k_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{P}} \end{array} \tag{1.1.7}$$

将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}}$ 实现为由一个对象对 $\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}$ 作出的线性扩张

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{k}^{n+\bullet}_{n,r}\mathcal{P}} \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}}),$$

其自身带有$\mathbf{S}_{<r}$-模结构，该结构继承自 $\mathrm{k}^{\bullet}_{n,\ r}\mathcal{P}$上的模结构。

上述陈述并不严谨，旨在让读者了解本研究中可以找到哪类结果。我们将在引言后文中将其表述得更精确：Malcev 理论的螺旋方块 $\mathcal{P}$ 是更一般的 Malcev 理论无穷小

[1]更确切地说，Lurie 证明，环谱的 n-小扩张是平方零的。由于对于任意 $1 \leq r \leq n$， $A_{<n+r} \to A_{<n}$ 都是 n-小的，结论便随之得出。

扩张的特例，我们将在 §1.3中加以描述；并将在 $\mathcal{P}$ §1.4中说明我们所认为的Postnikov 塔的“全部结构”。

在此之前，为了进一步说明我们结果的意义，我们给出一些例子和应用 .

Ex例 1.1.8。 设 A 是一个连通环谱。那么定理 1.1.6 结合 Ex例 1.1.4断言比较映射

$$\mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_A^{\geq 0} \to \lim_{n\to\infty} \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{A_{<n}}^{\geq 0}$$

是一个等价，并且这些方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{A_{<n+r}}^{\geq 0} & \longrightarrow & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{A_{<r}}^{\geq 0} \\ \downarrow{\scriptstyle A_{<n}\otimes_{A_{<n+r}}(-)} & & \downarrow \\ \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{A_{<n}}^{\geq 0} & \longrightarrow & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{A_{<r}\oplus\Sigma A_{[n,n+r)}}^{\geq 0} \end{array}$$

是笛卡尔的。这给出了连通 ∞-范畴的构造，其中包含 A-模，并恢复了 Lurie 定理的一个特例 [Lurb，定理 16.2.0。2]。事实上，我们的结果足以恢复一般情形，见下文例 1.3.3 。

例 1.1.9。 设 R 为一个离散交换环。固定 $k \geq 2$，令 $\mathcal{P} \subset \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_k}(\mathrm{Mod}_R^{\geq 0})$ 为由满足以下条件的对象构成的全子范畴：这些对象是 $\mathbf{E}_k$-代数，定义在 R 上，并且在某个集合上自由。于是存在等价

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_k}(\mathrm{Mod}_R^{\geq 0}), \qquad \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}} \simeq \mathrm{CAlg}_R^{\Delta},$$

其中，CAlg_R^{Δ} 是 ∞-范畴，即动画交换 R-代数的范畴。因此，螺旋塔

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \cdots \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}} \qquad = \qquad \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_k}(\mathrm{Mod}_R^{\geq 0}) \to \cdots \to \mathrm{CAlg}_R^{\Delta}$$

在谱代数（基于 $\mathbf{E}_k$-环）与导出代数（基于动画环）之间进行插值，并且定理 1.1.6精确地说明了连通谱代数可以被视为导出代数的无穷小扩张。

1.2. 模空间问题的应用

Malcev 理论的螺旋塔导出了同伦论中一种极其灵活的模空间分解理论。在最基本的层面上，它具有如下形式。

定理 1.2.1 (6.5.6)。 设 $\mathcal{P}$ 为一个 Malcev 理论。固定 $\Lambda \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}$，并令

$$\mathcal{M}(\Lambda) \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{core}}$$

是由满足 $\tau_! X \simeq \Lambda$ 的那些 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 所跨成的全子空间。则存在一个分解

$$\mathcal{M}(\Lambda) \simeq \lim_{r\leq n\to\infty} \mathcal{M}_n(\Lambda),$$

其各层嵌入笛卡尔方块中

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n+r}(\Lambda) & \longrightarrow & B\mathrm{Aut}(\Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0_!} \\ \mathcal{M}_n(\Lambda) & \xrightarrow{k_!} & \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}/\Lambda}(\Lambda, B_\Lambda^{n+2}\Lambda_{S^n})_{\mathrm{hAut}(\Lambda)}. \end{array}$$

此处将 $\Lambda_{S^n} \in$ 模$^{\geq 0}\,\mathbf{S}_{<r}((\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}})_{/\Lambda})$ 定义为与几何实现相容，并满足 $(\nu_r P)_{S^n} \simeq \tau_{<r}((\nu P)^{S^n})$（适用于 $P \in \mathcal{P}$）；其 $\mathbf{S}_{<r}$-模结构唯一地延拓了 S^n上的$\mathbf{E}_n$-余群结构。

如果 $r = 1$，那么 Λ 通常可以与经典代数中的一个对象相对应，而 X 则与其实现相对应；也就是说，它是一个同伦论对象，其代数不变量等价于 Λ。通过这种方式，定理 1.2.1给出了 Λ 的实现模空间的一个分解。我们将通过一些例子来说明这一点，之后再讨论上述结果如何显著改进了当前的研究水平。

例 1.2.2. 取 $r = 1$， ∞-范畴 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$ 等价于 Quillen 的模型范畴 [Qui67] 的底层 ∞-范畴；该范畴由 $\mathrm{h}\mathcal{P}$ [Bal25 的单纯集合值模型构成，见命题 2.2.2], 。映射空间 $\mathrm{map}^{\mathrm{h}\mathcal{P}/\Lambda}(\Lambda, B^{n+2}_{\Lambda}\Lambda_{S^n})$ 编码了 Λ 的经典 Quillen 上同调，其系数取自 $\Lambda_{S^n} \in \mathrm{Mod}^{\geq 0}_{\mathbb{Z}}$ $((\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}})/\Lambda)$:

$$\pi_0 \operatorname{map}_{\mathrm{h}\mathcal{P}/\Lambda}(\Lambda, B^{n+2}_{\Lambda}\Lambda_{S^n})_{\mathrm{hAut}(\Lambda)} = \mathrm{H}^{n+2}_{\mathrm{h}\mathcal{P}/\Lambda}(\Lambda, \Lambda_{S^n})_{/\pi_0 \mathrm{Aut}(\Lambda)}.$$

在此背景下，定理 1.2.1 提供了一种障碍理论，用于实现 $\mathcal{M}(\Lambda)$中的一个点，即 $\mathcal{P}$ 的一个模型的提升 Λ；障碍存在于这些 Quillen 上同调群中，而对于 $r > 1$，则有高阶代数类比。

例 1.2.3. 设 A 是一个连通环谱。取 $\mathcal{P} = \mathcal{L}_0(A)$ 为连通 A-模理论，定理 1.2.1 为 $M \in \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_{A_{<n}}$ 提供一个障碍类

$$k_!(M) \in \pi_0 \operatorname{map}_{A_{<n}}(M, \Sigma^{n+2} A_{[n,n+r)} \otimes_{A_{<n}} M) = \mathrm{Ext}^{n+2}_{A_{<n}}(M, A_{[n,n+r)} \otimes_{A_{<n}} M)$$

要找到一个模 $\widetilde{M} \in \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_{A_{<n+r}}$，它以如下意义提升 M： $A_{<n} \otimes_{A_{<n+r}} \widetilde{M} = M$。

一个特别重要的情形是 $\mathcal{P}$ 为环路理论；也就是说，它是一种 Malcev 理论，允许由 S^1 [BP, §7] 给出的张量。如果 $\Lambda \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\heartsuit}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$ 是离散模型，那么 $\mathcal{M}_n(\Lambda)$ 是 Λ 的潜在 n 阶段空间，其意义见 [Pst23, Bal25], ，这是对 Blanc–Dwyer– Goerss [BDG04, 定义 9.1], 中经典定义的推广；而 $\mathcal{M}(\Lambda)$ 是满足 $\pi_0 X \simeq \Lambda$ 的环路模型 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\Omega}_{\mathcal{P}}$ 空间。因此，针对 $r = 1$ 的定理 1.2.1 特化为对其中所讨论的 Λ 实现空间分解的一种变体。

我们注意到 定理 1.2.1以三种主要方式推广了先前的工作 [Pst23， Bal25]如上所述:

（1）无需假设 $\Lambda \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$ 是离散的；（2）无需假设 $\mathcal{P}$ 是环路理论；
（3）它将 $\mathcal{M}_{n+r}(\Lambda) \to \mathcal{M}_n(\Lambda)$ 归类为关于 $1 \leq r \leq n$ 的线性信息。

非正式地说， [Pst23、Bal25]中的发展适用于“经典对象”（即环路模型），而当前工作则适用于更一般的“合成对象”（即任意模型）。向 $r > 1$ 的进一步扩展是全新的，并且是不稳定合成变形理论中的一个关键结构：它对应于余纤维 $C(\tau^r)$ 的不稳定类比上所具有的额外稳定结构，详见本小节末尾的讨论。

我们强调，移除假设（1）、（2）并非形式上的处理，而是要求对 [Pst23、Bal25]中相对直接的构造采取完全不同的方法。非正式地说，以前已知的构造是 内部地 在 ∞-范畴的模型中进行的，并在那里产生适当的笛卡尔方块；而我们当前论文中的策略则是从外部开展工作；也就是说，在 ∞-范畴层面构造所需的 Postnikov 方。

关于模空间的陈述只需通过限制即可得出。定理 1.1.6 的笛卡尔方块诱导出底层 ∞-群胚的笛卡尔方块，而定理 1.2.1则可通过限制到位于 Λ 上的路径分支得出。更准确地说，

$$\mathcal{M}_1(\Lambda) = B\mathrm{Aut}(\Lambda) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{M}_n(\Lambda) = \mathcal{M}_1(\Lambda) \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}},$$

结论由图表追踪得出，而这一过程最终确认了

$$\mathcal{M}_1(\Lambda) \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{P}} \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{h}\mathcal{P}/\Lambda}(\Lambda, B^{n+2}_{\Lambda}\Lambda_{S^n})_{\mathrm{hAut}(\Lambda)}.$$

通过定理 1.1.6的一般范畴变形理论所采用的外部方法进一步扩展了这一点：

(4) 它给出了 ∞-范畴的分解，而非仅仅是空间的分解；(5) 它以一种对 $\mathcal{P}$ 自然的方式构造分解。

特别是，不将研究对象限制在底层的 ∞-群胚， $\mathcal{P}$ 的螺旋方形使我们能够获取有关 $\mathrm{Model}_{\mathcal{P}}$ 的信息，其中涉及对象之间的不可逆态射，例如推导出关于 图表 模型的实现空间的类似分解（定理 6.5.5）。作为一个较简单的例子，通过分析 $\mathcal{P}$的螺旋方形中的映射空间，我们得到以下结果：

定理 1.2.4 (4.2.10, 6.5.3)。 固定 X， $Y \in \mathrm{Model}_{\mathcal{P}}$。那么存在一个分解

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Y,X) \simeq \lim_{n\to\infty} \mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X)$$

映射空间的分解，其各层构成笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}_{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}}(\tau_{(n+r)!}Y, \tau_{(n+r)!}X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\tau_{r!}Y, \tau_{r!}X) \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ \mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X) & \xrightarrow{k_!} & \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\tau_{r!}Y, B^{n+1}_{\tau_{r!}X}\tau_{r!}X_{S^n}) \end{array}$$

对于 $1 \le r \le n < \infty$。

实际上，这个极限分解会产生一个不稳定谱序列，用于计算映射空间映射$_{\mathcal{P}}(X,Y)$的同伦群；而笛卡尔方形则使我们能够用代数术语识别其第二页，并处理谱序列边缘处出现的微分。在非常特殊的情形下，若 $\mathcal{P}$ 是环路理论， X 和Y 是环路模型，并且 $r = 1$，则定理 1.2.4 的若干版本已在 [Bal25第 4.4、5 节中讨论。3]如其中所示，这些分解能够恢复多种经典谱序列，包括万有系数谱序列和 Goerss–Hopkins 型谱序列。

在合成理论中，定理 1.2.4 发挥着 τ-Bockstein 塔的作用，并将其扩展到不稳定情形。具体而言，给定 X， $Y \in \mathrm{Model}_{\mathcal{P}}$ 以及一个映射 $f\colon \tau_{n!}Y \to \tau_{n!}X$，可以如下定义合成同伦群：映射$_{\mathcal{P}}(Y,X)$：

(1) 若 $w \le n$ 和 $s = 0$，或 $w + r \le n$ 和 $s \ge 0$，则

$$\pi_{s,w}(\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Y,X)/(\tau^r), f) = \pi_s\left(\{\tau_{w!}f\} \underset{\mathrm{map}_{\mathrm{h}_w\mathcal{P}}(\tau_{w!}Y,\tau_{w!}X)}{\times} \mathrm{map}_{\mathrm{h}_{w+r}\mathcal{P}}(\tau_{(w+r)!}Y, \tau_{(w+r)!}X)\right);$$

(2) 若 $r \le \min(n,\ w)$ 且 $s \in \mathbb{Z}$，则

$$\pi_{s,w}(\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Y,X)/(\tau^r), f) = \pi_0\,\mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}/\tau_{r!}X}(\tau_{r!}Y, B^{w+s}_{\tau_{r!}X}\tau_{r!}X_{S^w}).$$

这两个定义在重叠部分上一致。因此，例如，

$$f \in \pi_0\,\mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X) = \pi_{0,0}(\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Y,X)/(\tau^n), f),$$

并将 定理 1.2.4 限制到其在 $\tau_{(n,r)!}f$ 上的纤维，会得到一个障碍

$$k_!(f) \in \pi_0\,\mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}/\tau_{r!}X}(\tau_{r!}Y, B^{n+1}_{\tau_{r!}X}\tau_{r!}X_{S^n}) = \pi_{-1,n}(\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Y,X)/(\tau^r), f)$$

要寻找 f 到 映射$^{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}}(\tau_{(n+r)!}Y$， $\tau_{(n+r)!}X)$的提升。经过更多工作，可以将这一障碍理论扩展为一种不稳定谱序列，其意义有所扩展，微分信息在一定范围内延伸至负茎，例如 Bousfield 的工作[Bou89]中所示。详情将另文发表。

我们强调这样一个令人震惊的事实：不稳定类比的余纤维 $C(\tau^r)$ 具有负的权重为 $w \ge r$ 的同伦群，并且这些群能够包含有用的信息。这似乎是不稳定合成同伦论的一个至关重要且令人意外的特征。它以一种不可或缺的方式利用了 定理 1.1.6 中关于 $r \ge 1$ 的螺旋方形的存在性。

1.3. Malcev 理论的无穷小扩张

我们将 定理 1.1.6中出现的 Malcev 理论的螺旋方形作为以下更一般的拼接定理的一个特例得到:

定理 1.3.1 (4.4.4)**.** 考虑 Malcev 理论及同态构成的一个笛卡尔方形，以及相应的 ∞-模型范畴方形:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}' & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{Q}' & \xrightarrow{g} & \mathcal{Q} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}'} & \longrightarrow & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \\ \downarrow{\scriptstyle f'_!} & & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}'} & \xrightarrow{g_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \end{array} .$$

假设 f 是满的， f' 是本质满的，并且满足以下条件中的至少一个:

(1) $f_!$ 反映连通性，即 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的态射 α 是 n-连通的，当且仅当 $f_!\alpha$ 是；(2) g 是满的；(3) $\mathcal{P}$、 $\mathcal{Q}$和 $\mathcal{Q}'$ 是加性的。

于是， ∞-模型范畴构成的方形也是笛卡尔方形。

给定一个如下定理 1.3.1 所示的 Malcev 理论的 f 满 f' 笛卡尔方形，容易证明由此诱导的函子

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}'} \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}'}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$$

是全忠实的，并且有一个右伴随（见定理 4.1.5）。因此，要证明定理 1.3.1 ，就必须证明这个右伴随是保守的。我们通过仔细分析 Malcev 理论之间同态和导出函子的连通性性质来证明这一点。我们的分析必不可少地运用了所列出的附加条件；我们不知道这些条件在多大程度上可以省略，但它们在所有值得关注的例子中都成立。

例 1.3.2. 定理 1.1.3 中出现的零截面 $0\colon \mathrm{h}_r\mathcal{P} \to \mathrm{k}_{n,r}^{n+1}\ \mathcal{P}$ 是满的，且其导出函子反映连通性，因为它有一个截面。因此， $\mathcal{P}$ 在 定理 1.1.6中给出的螺旋方形是笛卡尔方形这一事实，是定理 1.3.1的一个特例。

例 1.3.3. 考虑连通环谱的一个笛卡尔方形，以及与之相关的连通模的 ∞ 范畴方形:

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{A'}^{\geq 0} & \longrightarrow & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{A}^{\geq 0} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B\otimes_A(-)} \\ \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{B'}^{\geq 0} & \longrightarrow & \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_{B}^{\geq 0} \end{array} .$$

在这种情况下，定理 1.3.1 表明，只要 ∞-范畴方形是笛卡尔的， ϕ就会诱导满射 $\pi_0 A \to \pi_0 B$，从而得到 [Lurb，定理 16.2.0。2]从这个意义上说，我们的结果可视为 Lurie 结果的一种非阿贝尔推广。

符合例 1.3.3且具有重要意义的一类连通环谱的笛卡尔方形，平方零扩张。平方零扩张的经典理论可非阿贝尔地推广为理论的线性扩张； Jibladze–Pirashvili 在经典 Lawvere 理论的框架下研究了这一问题 [DP91，JP05]。§1.2 中描述的模空间分解，源自一套更一般的 Malcev 理论线性扩张变形理论；我们将在 §6中建立并在此说明。

为统一术语，我们回顾一下 Harpaz–Nuiten–Prasma 在 [HNP18]中证明了

$$\mathcal{S}\mathrm{p}((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Tw}(\mathcal{C}), \mathcal{S}\mathrm{p})$$

对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，其中 Tw($\mathcal{C}$) 是 $\mathcal{C}$ 的扭箭范畴。我们将函子D: Tw($\mathcal{C}$) $\to \mathcal{S}\mathrm{p}$ 称为 $\mathcal{C}$ 上的谱的自然系统。

定义 1.3.4 (6.2.6)。设 D 是一个取值于 R-模的自然系统，定义在一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 上，并且$p\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是一个 ∞上的 $\mathcal{C}$-范畴。函子 $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ 称为由 $\mathcal{B}$经 D 线性扩张，如果我们指定了一个如下形式的、在 ∞之上的 $\mathcal{C}$ -范畴的笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{t} & \mathcal{C} & & \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & \searrow & \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{k} & \mathcal{D}^2 & \xrightarrow{q} & \mathcal{C} \\ & \searrow^{p} & & & \end{array} .$$

上述概念严格推广了连通环谱的平方零扩张 ra:

例 1.3.5. 设 A 是一个连通 $\mathbf{E}_1$-环谱。根据 [Lura，定理 7.3.4，18], $\mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S}\mathrm{p})_{/A}$ 中的谱对象等价于 A-双模。连通的 A-双模可以由保积函子 $\mathcal{L}_0(A \otimes_{\mathbf{S}} A^{\mathrm{op}}) \to \mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0}$ 编码，据此我们可以定义以下自然系统 I 于 $\mathcal{L}_0(A)$ 上:

$$\mathrm{Tw}(\mathcal{L}_0(A)) \longrightarrow \mathcal{L}_0(A)^{\mathrm{op}} \times \mathcal{L}_0(A) \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{L}_0(A) \times \mathcal{L}_0(A^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\otimes_{\mathbf{S}}} \mathcal{L}_0(A \otimes_{\mathbf{S}} A^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{I} \mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0} .$$

这由 $\mathcal{L}_0(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S}\mathrm{p}) \to \mathcal{M}\mathrm{alc}_{/\mathcal{L}_0(\mathbf{S})}$ [BP，注记 9.14] 和˜命题 6.4.1 可知，Malcev 理论 $\mathcal{L}_0(A)$ 的线性扩张 I 与 $\mathbf{E}$-环 A 的平方零扩张 I一一对应。

例 1.3.6. 用上述语言来说，定理 1.1.3 恰好断言：若 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，则对所有 $1 \leq r \leq n$ 截断

$$\tau_{(n+r,n)}\colon \mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_n\mathcal{P}$$

is a 由某个自然系统 $\mathrm{Tw}(\mathrm{h}_r\mathcal{P}) \to \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}_{<r}(\mathcal{S}\mathrm{p})$ 给出的线性扩张。取 $r = 1$ fo r sim为简便起见，这个自然系统可以具体描述为

$$(\phi\colon \nu_1 Q \to \nu_1 P) \mapsto \Sigma^n \pi_n(\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Q, P), \phi),$$

这里我们将 π_n 与其对应的 Eilenberg-MacLane 谱等同。注意，由于 Malcev 条件的结果，即使 $n = 1$ ，这个群也自动是阿贝尔群。

上述两个例子都具有额外性质：给定的笛卡尔方形是由 Malcev 理论及理论同态构成的图表。一般的线性扩张并不具备这一性质，这归结为以下额外性质。

定义 1.3.7 (6.3.2)。设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。一个定义在 笛卡尔系统 上的连通谱 $\mathcal{P}$ 是一个函子

$$D\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{P}) \to \mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0}$$

具有如下性质：对所有 $P \in \mathcal{P}$，复合映射

$$(\nu P)_D\colon \mathcal{P}^{\mathrm{op}}_{/P} \to \mathrm{Tw}(\mathcal{P}) \to \mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0} \to \mathcal{S}\mathrm{pc} \tag{1.3.8}$$

定义理论 $\mathcal{P}_{/P}$ 的一个模型；也就是说，将余积映射为积。

在命题 6.4.1中，我们证明，这一条件保证 $\mathcal{P}$ 通过 D得到的每个线性扩张仍是一个 Malcev 理论。给定 Malcev 理论 $\mathcal{P}$上的一个笛卡尔系统 D ，对于每个 $\Lambda \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ ，都可以构造一个对象 $\Lambda_D \in \mathcal{S}\mathrm{p}^{\geq 0}((\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/\Lambda})$；当 1.3.8 中的 $\Lambda = \nu P$ 可表时，该构造推广了式（。

用这些术语来说，定理 1.1.6 是下面这个更一般结果的特例；该结果明确描述了 Malcev 理论的线性扩张如何在∞-模型范畴之间诱导出线性扩张:

定理 1.3.9 (6.4.4)。设 $f\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ 是由笛卡尔系统 D 的连通谱对 Malcev 理论作出的线性扩张。那么 $f_!\colon \mathcal{M}$模型$_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}$模型$_{\mathcal{P}}$ 是由形如 ∞的自然系统对 $D_!(\phi\colon \Gamma \to \Lambda) =$映射$_{/\Lambda}(\Gamma, B^{\bullet}_{\Lambda}\Lambda_D)$ 所作的线性扩张。

正如我们在 §6.2中所解释的，对于沿着 ∞-范畴的线性扩张提升对象，存在一种一般的障碍理论，见 定理 6.2.14。定理 1.2.1 中模空间的分解，是利用与模型 ∞-范畴相关的线性扩张作为这一更一般结论的推论得到的$\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_n\mathcal{P}$。

1.4. 初等修饰子与螺旋系统

在定理 1.1.6中，我们断言关于Malcev 理论的范畴论 Postnikov 塔的 $\mathcal{P}$ 所有 ∞-模型范畴都保留了这种结构。现在，我们将通过引入一种 Postnikov 塔概念的新形式化方式，来准确说明“所有”的含义。我们称之为螺旋系统；它不仅涵盖塔本身，也涵盖各种相关的笛卡尔方形及其自然性。

回想一下，Malcev 理论的映射空间属于 $\mathcal{S}\mathrm{ps} \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$这一超简单空间 [BP的全子范畴，定义 2.2。9], 这是对白头积消失的空间类的一种自然细化。

定义 1.4.1 (2.5.2)。 记 $\mathcal{S}\mathrm{ph} \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 为由 S^1 在积、楔和及强积（相对于任意基点）下生成的全子范畴。初等修饰子的类是全子范畴

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \subset \mathrm{End}(\mathcal{S}\mathrm{ps})$$

of e由修饰子在几何实现下生成的超简单空间自同态
的
形式为 $\mathrm{map}(T, -)$, 其中 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$。

因此，例如， n-迭代自由环路空间 $L^n(-) \simeq \mathrm{map}(S^1 \times \cdots \times S^1, -)$ 是一个初等修饰子。更重要的是，在 §3.3中，我们证明，超简单空间的 Postnikov 理论中出现的所有函子都可以构造为初等修饰子，其中包括 Postnikov 截断以及函子性 k-不变量的目标。

初等修饰子这一类应被视为“类似 Postnikov 截断”的函子类的一种自然扩展；这种扩展很方便，因为它本质上是由函子 $\mathrm{map}(S^1, -)$ 通过归纳构造而成的。若 X 是一个超简单空间，则求值 $F \mapsto F(X)$ 定义了一个函子

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

可以将其视为编码了 X 的 Postnikov 塔及其所有额外结构。这引出了以下定义。

定义 1.4.2 (3.4.1)。 在 中的收敛螺旋系统 ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 是一个函子

$$H \colon \mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathcal{D}$$

它沿逐层有效满射保持逐层拉回，并且满足$H(\mathrm{id}) \simeq \varprojlim H(\tau_{<n})$。

螺旋系统 H 是塔的一种高度结构化的细化

$$H(\mathrm{id}) \to \cdots \to H(\tau_{\leq n}) \to H(\tau_{<n}) \to \cdots H(\tau_{\leq 0})$$

除了塔本身之外，它还编码了以下数据：

(1) 笛卡尔方块，它们将 $H(\tau_{<n+r}) \to H(\tau_{<n})$ 表示为由指定对象给出的平方零（或线性）扩张 $\mathrm{Mod}^{\mathbf{s}}_{<r}(\mathcal{D}_{/H(\tau_{<r})})$，对每个 $1 \leq r \leq n$ 都如此；(2) 随着 n 和 r 变化，这些对象之间的各种相容性。

定理 定理 1.1.6 的精确改述如下：

定理 1.4.3 (5.3.1)。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。那么函子

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty, \qquad F \mapsto \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_F}$$

是一个由 ∞-范畴构成的收敛螺旋系统。

换句话说，上述关联在以下意义上是收敛的：

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}},$$

并且它将初等修饰子的某些笛卡尔方形映射为笛卡尔方形 ∞-范畴。为证明后者，我们应用定理 1.3.1 的判据，并结合以下一个高度非形式化的结果；它可以被视为适用于马尔采夫理论模型的同调怀特海德定理的一个版本：

定理 1.4.4 (5.1.1)。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。对于初等修饰子之间的任意自然变换 $\alpha\colon F \to G$，其诱导的导出函子

$$\pi_{\alpha!}\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_F} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_G}$$

reflect保持连通性：态射 f 在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_F}$ 中是 n-连通的，当且仅当 $\pi_{\alpha!}f$ 是 n-连通的 .

随后利用定理 5.3.1证明收敛性。为证明定理 1.4.4，我们证明具有良好闭包性质的一类同态 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$，其中 $f_!$ 反映连通性：粗略地说，若 f 是满的，则 f 的任意拉回仍会反映连通性（见命题 5.1.3）。结合 $\mathcal{P}$ 的 Postnikov 塔，我们便可将证明 $\tau\colon \mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$保持连通性，归结为证明零截面 $0 : \mathrm{h}\mathcal{P} \to \mathrm{k}_n^{n+1}{}_{,\,1}\,\mathcal{P}$ 保持连通性；这显然成立，因为它是一个截面。

一般情形则可通过详细考察 $\tau_{\leq 0}F$ 对于初等修饰子 F的结构得出。这里的论证颇为精细，占据了整个 §5.2。简言之，我们利用了如下事实：在$\mathcal{S}\mathrm{ph}$ 中的空间具有特别良好的胞腔结构，映射到任意超简单空间后，这些结构都会变得平凡。

要理解上述结果为何可视为经典同调怀特海德定理的非阿贝尔版本，请注意，定理 1.4.4 特别蕴含导出截断

$$\tau_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$$

反映连通性，因此是保守的。若 $\mathcal{P}$ 是空间中类群状$\mathbf{E}_2$-代数的理论，那么 $\mathrm{h}\mathcal{P}$ 就是阿贝尔群的理论，并且在 Boardman-Vogt-May 等价下

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \mathrm{Alg}^{\mathrm{grp}}_{\mathbf{E}_2}(\mathcal{S}\mathrm{pc}) \simeq \mathcal{S}\mathrm{pc}^{\geq 2}_{*}$$

导出截断可识别为约化整链的一个移位

$$\Sigma^{-2}\widetilde{C}_\bullet(-;\mathbb{Z})\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}^{\geq 2}_{*} \to \mathrm{Mod}^{\geq 0}_{\mathbb{Z}}.$$

$\widetilde{C}_\bullet(-;\mathbb{Z})$ 反映连通性这一事实是怀特海德的经典结果 [怀49]。定理 1.4.4 的陈述将这一经典结果推广为关于 Malcev 理论的一般原理。

2. Modifications of ∞-categories

假设 $F\colon \mathcal{S}\mathrm{pc} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是一个保持有限积的空间自函子。给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们可以如下非正式地构造一个新的 ∞-范畴 $\mathcal{C}_F$：$\mathcal{C}_F$ 的对象与 $\mathcal{C}$ 的对象相同，但 $\mathcal{C}_F$ 的映射空间定义为

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(a,b) := F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b)),$$

复合由以下交换图确定

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(b,c)\times\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(a,b) & \simeq & F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(b,c))\times F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(b,a)) & \simeq & F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(b,c)\times\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b)) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(a,c) & & \xrightarrow{\quad\simeq\quad} & & F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,c)),
\end{array}$$

其中，右侧的竖直箭头由 $\mathcal{C}$ 中的复合诱导。我们将 $\mathcal{C}_F$ 称为沿着 F 对 $\mathcal{C}$ 的修改。

例 2.0.1. 沿第 $(n-1)$ 个 Postnikov 截断进行修改

$$\tau_{<n}\colon \mathcal{S}\mathrm{pc} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

其效果是转向同伦 n-范畴；也就是说，我们有

$$\mathcal{C}_{\tau_{<n}} \simeq \mathrm{h}_n\mathcal{C}.$$

沿用上述例子，对于任意修饰子 F，赋值 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_F$ 可视为一种推广形式的转向同伦范畴的过程。本节的目标是对这一构造进行细致的形式化，并研究其性质。

在 [GH15], Gepner–Haugseng 提出了一套关于富 ∞-范畴的理论。该理论具有自洽性：∞-范畴等价于 ∞在 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$ 及其笛卡尔幺半结构中富化的 $F\colon \mathcal{S}\mathrm{pc} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$，给定一个保积函子 $\mathcal{C}_F$，修改可以形式化地定义为通过 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$-富化的 ∞-范畴，它由沿着 $\mathcal{C}$改变 F的富化得到。我们将在 §2.1 中回顾富 -范畴理论中所需的内容，从而能在 定义 2.2.1 中给出这一定义。

实际上，构造的具体细节很少需要用到。我们在命题中对上述非正式描述进行了形式化：$\mathcal{C}_F$ 在 命题 2.2.5 ，这已足以满足大多数用途。在建立了这些基本性质后，我们将在 §2.3 研究构造 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_F$ 相对于 F中的极限和余极限的表现，并在 §2.4 开始研究 Malcev 理论的修改。尤其是，在 §2.5 我们将引入一类修饰子，即初等修饰子，它们将在我们研究 Malcev 理论的 Postnikov 塔和螺旋塔时发挥重要作用。

注 2.0.2 （前人工作）。 构造 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_F$ 的一种形式最初由 Dwyer–Kan–Smith 在具有固定对象集合 [DKS86],的单纯范畴背景下形式化，并用于构造单纯范畴的 Postnikov 塔，其中包括 k-不变量。

近来，Harpaz–Nuiten–Prasma [HNP20]也和我们一样，运用富化 ∞-范畴理论，构造并研究一个 (∞, n)-范畴的 Postnikov 塔。

2.1. 富化 ∞-范畴理论

我们先回顾一些关于富化 ∞-范畴的相关定义，只需涵盖定义我们所需的富化变换函子所必需的内容。

回顾 2.1.1 ([GH15，第 4]节)。 设 $\mathcal{V}$ 是一个幺半 ∞-范畴。

(1) 每个空间 O 都关联一个非对称的 O $\times$O-着色 ∞-树状运算体 $\mathcal{O}_{\mathsf{O}}$。非正式地说，一个代数 $A \in$Alg$_{\mathcal{O}_{\mathsf{O}}}(\mathcal{V})$ 由一个函子构成

$$A\colon \mathsf{O} \times \mathsf{O} \to \mathcal{V},$$

以及复合态射

$$A(b,c) \otimes A(a,b) \to A(a,c)$$

其中的单位和结合律都满足适当条件。

(2) 指派 O $\mapsto$Alg$_{\mathcal{O}_{\mathsf{O}}}$ 对 O 具有逆变函子性。其对应的笛卡尔展开

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

是范畴 $\mathcal{V}$代数的 ∞-范畴。非正式地说，一个范畴化的 $\mathcal{V}$-代数是一个二元组 C $=$ (Ob(C)，映射C)，由一个对象空间 Ob(C) 和一个 $\mathcal{O}_{\mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$-代数映射C组成。

例 2.1.2. 若 $\mathcal{V} = \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 配备其笛卡尔幺半结构，则：

(1) 给定一个空间 O， $\mathcal{O}_{\mathsf{O}}$-代数的 ∞-范畴 Alg$_{\mathcal{O}_{\mathsf{O}}}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 等价于 Segal 空间的 ∞-范畴

$$\mathsf{C}_\bullet\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

连同一个等价 $\mathsf{C}_0 \simeq \mathsf{O}$ [GH15，推论 4.4。4]。

(2) 范畴性的 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$-代数的 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 等价于 Segal 空间的 ∞-范畴。

根据 [AF18], Segal 空间$\mathsf{C}_\bullet$ 等价于带标记的 ∞-范畴：∞-范畴 $\mathcal{C}$ 配备了一个本质满射$\mathsf{O} \to \mathcal{C}$，其中$\mathsf{O}$ 是一个 ∞-群胚。在此等价下，$\mathcal{C}$ 是$\mathsf{C}_\bullet$ 的 Rezk 完备化，且$\mathsf{O} = \mathsf{C}_0$。特别地，$\mathcal{O}_\mathsf{O}$-代数等价于由 ∞标记的O-范畴。

正如这个例子所示，范畴式 $\mathcal{V}$-代数并不等同于 $\mathcal{V}$-富集 ∞-范畴，但可以将其视为具有固定对象空间的 $\mathcal{V}$-富集 ∞-范畴。要得到$\mathcal{V}$-富集 ∞-范畴，必须施加一个额外的完备性条件。

回顾 2.1.3。设 $\mathcal{V}$ 是一个幺半 ∞-范畴。

(1) 范畴式 $\mathcal{V}$-代数 C 中的一个等价是一个映射 $E^1 \to \mathsf{C}$，其中 E^1 是范畴式 $\mathcal{V}$-代数，它有两个对象，并且在 $\mathcal{V}$ [GH15，定义的幺半单位上为常值 5.1.8]。我们将 $\iota_1\mathsf{C} = \text{映射}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V})}(E^1, \mathsf{C})$ 表示 C 中的等价空间。

(2) 若一个范畴 $\mathcal{V}$-代数 $\mathsf{C} = (\mathrm{Ob}(\mathsf{C}), \text{映射}_\mathsf{C})$ 满足规范映射***Rezk* 完备**，则称其为

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \to \iota_1\mathsf{C}$$

是一个等价 [GH15，定义 5.2.2，推论 5.2。10]。

(3) 一个 $\mathcal{V}$-富化 ∞-范畴 是一个 Rezk 完备的范畴 $\mathcal{V}$-代数。其包含映射到全子范畴

$$\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{V}) \hookrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V})$$

由 $\mathcal{V}$-富集的 ∞-范畴所张成的子范畴存在一个左伴随

$$L_{\mathrm{Rezk}} \colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{V}),$$

我们称之为 ***Rezk* 完备化** [GH15，第 5 节。6]。

(4) Rezk 完备化将 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{V})$ 实现为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V})$ 在满足以下条件的范畴性 $\mathcal{V}$-代数映射 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 处的局部化：

- 全忠实：对于所有 $a,\ b \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$，$\mathrm{map}_\mathsf{C}(a,\ b) \to \mathrm{map}_\mathsf{D}(f(a)\ f(b))$ 是一个等价；
- 本质满：若将 $\pi_0\mathsf{C}$ 定义为源映射和目标映射 $\pi_0\iota_1\mathsf{C} \rightrightarrows \pi_0\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 的余等化子，则 $\pi_0\mathsf{C} \to \pi_0\mathsf{D}$ 是一个满射。

特别地，若 C 是任意范畴性 $\mathcal{V}$-代数，则完备化映射 $\mathsf{C} \to L_{\mathrm{Rezk}}\mathsf{C}$ 是全忠实且本质满的。

例 2.1.4. 正如 例 2.1.2 中所讨论的，∞-范畴$\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 范畴 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$-代数等价于 ∞-范畴的 Segal 空间。在此等价下，范畴 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$-代数在 回顾 2.1.3 所述意义下是 Rezk 完备的，当且仅当它在 Rezk [Rez01] 意义下是完备 Segal 空间。特别地，$\mathcal{S}\mathrm{pc}$-富化的 ∞-范畴是 ∞-范畴的一个模型。

更一般地，若 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是任意一个对有限积封闭的全子范畴，则 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$-富化的 ∞-范畴可视为 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 中由那些映射空间都属于 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$ 的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 所张成的全子范畴。

回顾 2.1.5. 范畴 $\mathcal{V}$-代数的构造关于 $\mathcal{V}$ 具有函子性，这由 [GH15，引理 4.3 得出。9]。更具体地，给定一个弱幺半函子 $F\colon \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$:

(1) 对于任意空间 O，都存在一个自然函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}_\mathsf{O}}(F)\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}_\mathsf{O}}(\mathcal{V}_1) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}_\mathsf{O}}(\mathcal{V}_2)$$

非正式地说，它由与 F 的后复合给出。

(2) 随着 O 的变化，这些对象组装成一个函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V}_1) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V}_2).$$

(3) 函子 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)$ 不保留 Rezk 完备对象，但与 Rezk 完备化相容，也就是说存在唯一的函子

$$\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(F) = L_{\mathrm{Rezk}} \circ \mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)$$

使图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)} & \mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathcal{V}_2) \\ \downarrow{\scriptstyle L_{\mathrm{Rezk}}} & & \downarrow{\scriptstyle L_{\mathrm{Rezk}}} \\ \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(F)} & \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{V}_2) \end{array}$$

可交换。这是因为 Rezk 完备化可以等同于对本质满且全忠实函子进行局部化，而这些函子在$\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)$ 下保持不变，参见 [GH15，引理 5.7。5]。

定义 2.1.6。 给定一个弱幺半函子 $F\colon \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$，我们将其称为

$$\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(F)\colon \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{V}_2)$$

为富化变换沿着 F。

2.2. ∞-范畴的修改

设 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是一个对有限积封闭的子范畴，并设 $F\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是一个保有限积的函子。固定一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，其映射空间属于 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$，因此可将其视为一个 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$-富集的 ∞-范畴。

定义 2.2.1。 沿 $\mathcal{C}$ 的修改，沿着 F 得到的 ∞-范畴

$$\mathcal{C}_F := \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(F)(\mathcal{C})$$

是通过改变 $\mathcal{C}$ 沿着 F 进行富集得到的，如定义 2.1.6所述。

注 2.2.2。 修改构造显然关于 F 自然，并组装成一个函子

$$\mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0, \mathcal{S}\mathrm{pc}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0), \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)$$

其中 $\mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0, \mathcal{S}\mathrm{pc}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 是函子 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 的全子范畴，其中的函子保有限积。

我们的下一个目标是确立修改的一些性质；在大多数情况下，这些性质使我们能够在处理修改后的范畴时避开构造中特定的技术细节。

引理 2.2.3. 令 $i\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \hookrightarrow \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 表示包含映射。于是存在唯一的自然变换 $i \to F$，其在对象 $X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}_0$ 上的取值为比较映射

$$X \simeq \operatorname*{colim}_X \mathrm{pt} \simeq \operatorname*{colim}_X F(\mathrm{pt}) \to F(\operatorname*{colim}_X \mathrm{pt}) \simeq F(X).$$

证明。 此引理只要求 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 包含终对象，即单点空间 pt，并且 F 保持它。由于 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$ 包含终对象，包含映射 $i\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \hookrightarrow \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 可识别为沿 $\{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \mathcal{S}\mathrm{pc}_0$ 对 $\{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 的左 Kan 延拓。因此

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0, \mathcal{S}\mathrm{pc})}(i, F) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\{\mathrm{pt}\}, \mathcal{S}\mathrm{pc})}(i|_{\{\mathrm{pt}\}}, F|_{\{\mathrm{pt}\}}) \simeq F(\mathrm{pt}) \simeq \mathrm{pt}$$

如前所述，最后一个等价用到了 F 保持终对象这一事实。沿着这一对应关系追踪，即可得到唯一变换 $i \to F$ 的上述描述。□

构造 2.2.4. 对于任意具有取值于 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$，的映射空间的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们记

$$\pi_F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_F$$

由识别 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_i$ 和唯一自然变换 $i \to F$所确定的函子。

在大多数情况下，以下命题足以处理 $\mathcal{C}_F$。

命题 2.2.5。 设 $\mathcal{C}$ 是一个映射空间取值于 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$的 ∞-范畴。

(1) 函子 $\pi_F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_F$ 是本质满的；(2) 对任意 $a, b \in \mathcal{C}$，我们可以将其识别为

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(\pi_F(a), \pi_F(b)) \simeq F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a, b)),$$

并且 π_F: 映射$_{\mathcal{C}}(a,\ b) \to$映射$_{\mathcal{C}_F}(\pi_F(a)\ \pi_F(b)) \simeq F$(映射$_{\mathcal{C}}(a,\ b)$) 是引理 2.2.3 的比较映射引理 2.2.3。

证明。 根据定义， $\mathcal{C}_F$ 是通过复合构造的

$$\mathcal{C}_F = L_{\mathrm{Rezk}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C})),$$

且 π_F 分解为若干映射的复合

$$L \circ \pi'_F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C}) \to L_{\mathrm{Rezk}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C}))$$

的范畴 $\mathcal{S}$pc-代数。对于 π'_F， π_F 的所述性质显然成立： $\mathcal{C} \to$ Alg$_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C})$: 范畴 $\mathcal{S}$pc-代数 Alg$_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C})$ 的构造旨在满足 Ob(Alg$_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C})$) $=$Ob($\mathcal{C}$) 以及 map$_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)}(\mathcal{C})(a, b) = F$(map$_{\mathcal{C}}(a, b)$)；而自然变换 $\mathcal{C} \to$Alg$_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C})$ 的构造，则使其通过引理 2.2.3 给出的自然映射作用于映射空间。由于 Rezk 完备化映射 L: Alg$_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C}) \to L_{\mathrm{Rezk}}$(Alg$_{\mathcal{C}\mathrm{at}}(F)(\mathcal{C})$) 是全忠实且本质满的，因此这些性质对 π_F也成立。□

推论 2.2.6。 若 $\tau_{<n}$: $\mathcal{S}$pc $\to \mathcal{S}$pc 是 Postnikov 截断，则

$$\pi_{\tau_{<n}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\tau_{<n}}$$

实现

$$\mathcal{C}_{\tau_{<n}} \simeq \mathrm{h}_n\mathcal{C}$$

为 $\mathcal{C}$ 的同伦 n-范畴。 □

推论 2.2.7。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，并考虑左 Kan 延拓与限制伴随

$$\pi_{F!} : \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}_F) : \pi_F^*.$$

复合

$$\pi_F^*\pi_{F!}\colon \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C})$$

是唯一一个延拓以下对象的保持余极限函子

$$F \circ y\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}), \qquad c \mapsto F(\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(-, c)).$$

证明。 若 f: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是任意函子，则

$$f^*f_!\colon \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C})$$

是唯一一个延拓.....的保持余极限函子

$$c \mapsto \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(f(-), f(c)).$$

Th推论由识别映射$_{\mathcal{C}_F}(\pi_F(-)\ \pi_F(c)) \simeq F$(映射$_{\mathcal{C}}(-,\ c)$) 得出。 □

Ex例 2.2.8. 设对于固定空间 T， $F(X) =$映射$(T,\ X)$。如果 $\mathcal{C}$ 允许常值 coli在 T 上索引的余极限，那么

$$\pi_F^*\pi_{F!}\colon \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{C})$$

等价于与常值 T-余极限函子的前合成

$$T \otimes (-)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

2.3. 修改的极限

设 $\mathcal{Spc}_0 \subset \mathcal{Spc}$ 是一个如前所述对有限积封闭的子范畴。有限积保持函子的全子范畴 $\mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{Spc}_0, \mathcal{Spc}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{Spc}_0, \mathcal{Spc})$ 对所有小极限封闭。现在我们来分析修改函子在多大程度上

$$\mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{Spc}_0, \mathcal{Spc}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{Cat}_\infty(\mathcal{Spc}_0), \mathcal{Cat}_\infty)$$

保持这些性质。换言之，我们研究构造 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_F$ 在多大程度上保持 F 中的极限（不要与 $\mathcal{C}$中的极限混淆）。我们从以下命题开始。

命题 2.3.1. 固定一个图表 $F_\bullet \colon \mathcal{J} \to \mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{Spc}_0, \mathcal{Spc})$。那么比较映

$$p \colon \mathcal{C}_{\lim F_\bullet} \to \lim \mathcal{C}_{F_\bullet}$$

总是全忠实的。

证明。 对于每个 $j \in \mathcal{J}$，都有一个图表

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C} & & \\ & \swarrow^{\pi_{\lim F_\bullet}} & \downarrow{\scriptstyle \pi} & \searrow^{\pi_{F_j}} & \\ \mathcal{C}_{\lim F_\bullet} & \xrightarrow{p} & \lim \mathcal{C}_{F_\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{F_j} \end{array} .$$

给定 $a,\ b \in \mathcal{C}$，由于范畴极限中的映射空间是逐点计算的，我们可以将其识别为

$$\begin{aligned} \mathrm{map}_{\mathcal{C}_{\lim F_\bullet}}(\pi_{\lim F_\bullet}(a), \pi_{\lim F_\bullet}(b)) &\simeq \lim F_\bullet(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b)) \\ &\simeq \lim \mathrm{map}_{\mathcal{C}_{F_\bullet}}(\pi_{F_\bullet}(a), \pi_{F_\bullet}(b)) \simeq \mathrm{map}_{\lim \mathcal{C}_{F_\bullet}}(\pi(a), \pi(b)). \end{aligned}$$

由于 $\pi_{\lim F_\bullet}$ 本质满，因此

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}_{\lim F_\bullet}}(a,b) \simeq \mathrm{map}_{\lim \mathcal{C}_{F_\bullet}}(p(a), p(b))$$

对任意 $a,\ b \in \mathcal{C}_{\lim F_\bullet}$，这就证明了 p 总是全忠实的。 □

要确定 $p \colon \mathcal{C}_{\lim F_\bullet} \to \lim \mathcal{C}_{F_\bullet}$ 何时本质满，从而构成等价，则更为微妙。

例 2.3.2。 若 $i \colon \mathcal{Spc}_0 \hookrightarrow \mathcal{Spc}$ 是包含映射，且 T 是一个空间，那么与常值图表 $T \to \mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{Spc}_0, \mathcal{Spc})$ 相关联的比较函子 i 具有如下形式

$$\mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)} \simeq \mathcal{C}_{\lim_T i} \to \lim_T \mathcal{C}_i \simeq \mathcal{C}^T.$$

这个函子是全忠实的，并将 $\mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)}$ 实现为由常值函子 $T \to \mathcal{C}$张成的 $\mathcal{C}^T$ 的全子范畴。特别地，它通常不是本质满的。

确定 p 是否本质满的困难，至少部分源于这样一个事实：一般而言，似乎没有简便的方法来描述极大子群胚 $(\mathcal{C}_F)^{\mathrm{core}} \subset \mathcal{C}_F$。我们的下一个目标是找出对 F 的一些限制条件，使得能够很好地识别这个空间。

在本小节余下部分，我们假设 $\mathcal{Spc}_0 \subset \mathcal{Spc}$ 对子对象封闭，即若 $X \coprod Y \in \mathcal{Spc}_0$，则 $X \in \mathcal{Spc}_0$。这保证了若 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{Spc}_0$，中富化，则 $\mathcal{C}^{\mathrm{core}} \subset \mathcal{C}$ 也如此。作为一个 ∞-范畴，$\mathcal{C}$ 是一个 ∞-群胚，当且仅当剪切映射

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b) \times \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b) \to \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b) \times \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,a), \qquad (f,g) \mapsto (f, gf)$$

都是等价，因此我们看到修改会保持 ∞-群胚。特别是，修改包含映射 $\mathcal{C}^{\mathrm{core}} \to \mathcal{C}$ 会得到一个函子 $(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})_F \to \mathcal{C}_F$，它经过 $\mathcal{C}_F$ 的极大子群胚，从而证明存在一个比较映射

$$(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})_F \to \mathcal{C}_F^{\mathrm{core}}.$$

这个映射并不总是等价，但对于我们最感兴趣的修改函子 F，它将是等价。

命题 2.3.3。设 $F \in$ 函子$^{\times}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0, \mathcal{S}\mathrm{pc})$。

(1) 若 F 保持余积，则存在唯一的自然变换 $F \to \tau_{\leq 0}$。(2) 若存在自然变换 $F \to \tau_{\leq 0}$，则映射 $\pi_F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}_F$ 诱导出一个双射 $\tau_{\leq 0}(\mathcal{C}^{\mathrm{core}}) \cong \tau_{\leq 0}(\mathcal{C}_F^{\mathrm{core}})$。(3) 假设存在自然变换 $F \to \tau_{\leq 0}$，且 $\tau_{\leq 0}F \to \tau_{\leq 0}$ 具有函子 $\mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0, \mathcal{S}\mathrm{pc})_{/\tau_{\leq 0}}$ 中群对象的结构。那么关联的函子 $p\colon\ \mathcal{C}_F \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的。(4) 若 F 保持余积，且 (1) 保证存在的自然变换 $\mathcal{C}_F \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的，则 $(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})_F \simeq \mathcal{C}_F^{\mathrm{core}}$。

证明。(1) 事实上，这并不要求 F 保持积。由于 F 保持余积，且 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 关于子对象封闭，因此 F 由其在 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$ 中连通空间的全子范畴 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0^{\mathrm{cn}} \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}_0$ 上的限制条件确定。由于 $\tau_{\leq 0}\colon\ \mathcal{S}\mathrm{pc}_0^{\mathrm{cn}} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 是终端函子，因此存在唯一的自然变换 $F \to \tau_{\leq 0}$。

(2) 给定一个自然变换 $F \to \pi_0$，我们得到一个分解

$$\mathcal{C} \to \mathcal{C}_F \to \mathrm{h}\mathcal{C},$$

从而得到一个截面

$$\tau_{\leq 0}\mathcal{C}^{\mathrm{core}} \to \tau_{\leq 0}\mathcal{C}_F^{\mathrm{core}} \to \tau_{\leq 0}\mathrm{h}\mathcal{C}^{\mathrm{core}} \cong \tau_{\leq 0}\mathcal{C}^{\mathrm{core}},$$

这意味着 π_F 诱导出一个单射 $\tau_{\leq 0}\mathcal{C}^{\mathrm{core}} \to \tau_{\leq 0}\mathcal{C}_F^{\mathrm{core}}$。由于 π_F 是本质满的，它也必为满射，因此是一个双射。

(3) 根据我们的假设，对每个 $a,\ b \in \mathcal{C}$，都存在一个群丛

$$\begin{array}{c} \pi_0 F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b)) \\ {\scriptstyle \pi_F}\uparrow\downarrow{\scriptstyle p} \\ \pi_0 \,\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b) \end{array}$$

。固定一个 $f \in F$(映射$_{\mathcal{C}}(a,b)$)，使得 $p(f)$ 是一个等价。我们必须证明 f 是一个等价。由于 $p(f)$ 是一个等价，我们可以找到 $p(f)^{-1} \in \pi_0$ 映射$_{\mathcal{C}}(b,a)$，从而得到$g = \pi_F(p(f)^{-1}) \circ f \in \pi_0 F$(映射$_{\mathcal{C}}(a,a)$)，满足 $p(g) = \mathrm{id}_a$。根据 Eckmann–Hilton 论证，$\pi_0 F$(映射$_{\mathcal{C}}(a,a)$) $\to \pi_0$ 映射$_{\mathcal{C}}(a,a)$ 的核上由复合产生的幺半群结构，与由 $\pi_0 F$ 在 π_0 上的群运算产生的群结构一致。特别地，该核在复合运算下构成一个群，因此我们可以构造

$$h = (\pi_F(p(f)^{-1}) \circ f)^{-1} \circ \pi_F(p(f)^{-1}) \in \pi_0 F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(b,a)),$$

满足 $h \circ f = \mathrm{id}_{\pi_F(a)}$。同样的论证表明，$f$ 有一个右逆，因此如所述可逆。

(4) 由于 F 保持余积，下面的方形

$$\begin{array}{ccc} F(\mathrm{iso}_{\mathcal{C}}(a,b)) & \longrightarrow & F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \pi_0 \,\mathrm{iso}_{\mathcal{C}}(a,b) & \longrightarrow & \pi_0 \,\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b) \end{array}$$

是笛卡尔的。因此，只需证明将 F(iso$_{\mathcal{C}}(a,\ b)$) 替换为 iso$^{\mathcal{C}_F}(a,\ b)$ 后，该方格仍是笛卡尔的。由于 iso$^{\mathcal{C}_F}(a,\ b) \to F$(map$_{\mathcal{C}}(a,\ b)$) 是路径分支的包含，这等价于断言：如果 $f \in F$(iso$_{\mathcal{C}}(a,\ b)$) 和 $p(f)$ 可逆，那么 f可逆；换言之，即 $\mathcal{C}_F \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的。□

Pr命题 2.3.4。 固定一个图表 $F_\bullet\colon \mathcal{J}\to \mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0,\ \mathcal{S}\mathrm{pc})$，满足以下条件 :

(1) $\mathcal{J}$ 是连通的；(2) 对所有 $j\in\mathcal{J}$，比较映射 $(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})_{F_j}\to \mathcal{C}_{F_j}^{\mathrm{core}}$ 是等价；(3) 函子 π_{F_j}: $\mathcal{C}\to\mathcal{C}_{F_j}$ 对所有 $j\in\mathcal{J}$ 诱导一个双射 $\pi_0\mathcal{C}^{\mathrm{core}}\cong\pi_0\mathcal{C}_{F_j}^{\mathrm{core}}$；(4) 对任意环空间 $X\in\mathcal{S}\mathrm{pc}_0$，比较映射 $B\lim F_\bullet X\to\lim BF_\bullet X$ 是等价。这包括以下情形：(a) $F_\bullet$ 是一个塔 $F_0\leftarrow F_1\leftarrow F_2\leftarrow\cdots$，且 $\pi_0F_\bullet$ 最终为常值；(b) $F_\bullet$ 是一个跨度 $F_0\to F_1\leftarrow F_2$，且 $\pi_0F_0\to\pi_0F_1$ 是满射。

那么 $p\colon \mathcal{C}_{\lim F_\bullet}\to\lim\mathcal{C}_{F_\bullet}$ 是等价，并且对于任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}^{\mathrm{core}}_{\lim F_\bullet}\simeq(\mathcal{C}_{\lim F_\bullet})^{\mathrm{core}}$。

证明。 只需证明对于任意 $\mathcal{C}$，p 是等价，因为这样

$$(\mathcal{C}_{\lim F_\bullet})^{\mathrm{core}}\simeq(\lim\mathcal{C}_{F_\bullet})^{\mathrm{core}}\simeq\lim((\mathcal{C}_{F_\bullet})^{\mathrm{core}})\simeq\lim((\mathcal{C}^{\mathrm{core}})_{F_\bullet})\simeq(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})_{\lim F_\bullet}.$$

根据 命题 2.3.1，要证明 p 是等价，只需证明 p 是本质满。为此，只需证明复合映射

$$\mathcal{C}^{\mathrm{core}}_{\lim F_\bullet}\to(\mathcal{C}_{\lim F_\bullet})^{\mathrm{core}}\to(\lim\mathcal{C}_{F_\bullet})^{\mathrm{core}}\simeq\lim(\mathcal{C}_{F_\bullet})^{\mathrm{core}}\simeq\lim(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})_{F_\bullet}$$

是等价的，也就是说，我们归结为 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-群胚的情形。选取$\mathcal{C}^{\mathrm{core}}\to\pi_0\mathcal{C}^{\mathrm{core}}$的一个截面后，我们可以将此映射识别为

$$\coprod_{x\in\pi_0\mathcal{C}^{\mathrm{core}}}B\lim F_\bullet\,\mathrm{aut}_{\mathcal{C}}(x)\to\lim\coprod_{x\in\pi_0\mathcal{C}^{\mathrm{core}}}BF_\bullet\,\mathrm{aut}_{\mathcal{C}}(x).$$

由于 $\mathcal{J}$ 是连通的，我们可以将其识别为

$$\lim\coprod_{x\in\pi_0\mathcal{C}^{\mathrm{core}}}BF_\bullet\,\mathrm{aut}_{\mathcal{C}}(x)\simeq\coprod_{x\in\pi_0\mathcal{C}^{\mathrm{core}}}\lim BF_\bullet\,\mathrm{aut}_{\mathcal{C}}(x),$$

因此，只需证明若 $x\in\mathcal{C}$，则映射

$$B\lim F_\bullet\,\mathrm{aut}_{\mathcal{C}}(x)\to\lim BF_\bullet\,\mathrm{aut}_{\mathcal{C}}(x),$$

is e本质满。假设 $\lim BF_\bullet\,\mathrm{aut}_{\mathcal{C}}(x)$ 连通，则此结论成立。□

最后，我们记录 $\mathcal{C}$ 的修改如何与极限和余极限相容 $\mathcal{C}$.

引理 2.3.5。 固定一个图表 $\mathcal{J}$，并假设 $F\in\mathrm{Fun}^{\times}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0,\ \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 保持 $\mathcal{J}$-形极限。那么 $\pi_F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}_F$ 保持所有 $\mathcal{J}$-形极限和余极限。

*Pro*因为。 由于 $(\mathcal{C}_F)^{\mathrm{op}}\simeq(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})_F$，只需证明 π_F 保持所有 $\mathcal{J}$-形余极限 .
Giv对于一个 $a_\bullet\colon\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ 中存在余极限的图表，我们可以计算

$$\begin{aligned}\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(\pi_F(\mathrm{colim}\,a_\bullet),\pi_F(b))&\simeq F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}\,a_\bullet,b))\simeq F(\lim\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a_\bullet,b))\\&\simeq\lim F(\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a_\bullet,b))\simeq\lim\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(\pi_F(a_\bullet),\pi_F(b))\end{aligned}$$

对任意 $b\in\mathcal{C}$。由于 π_F 本质满，因此可得

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(\pi_F(\mathrm{colim}\,a_\bullet),c)\simeq\lim\mathrm{map}_{\mathcal{C}_F}(\pi_F(a_\bullet),c)$$

对所有 $c\in\mathcal{C}_F$，这将 π_F(colim $a_\bullet$) 实现为图表 $\pi_F(a_\bullet)$ 的一个余极限。 □

2.4. Malcev 理论的修改

现在，我们进一步将上述讨论专门化到 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0=\mathcal{S}\mathrm{ps}$ 是 ∞超简单空间的 [BP，定义 2.2 中引入。9]的情形。根据 [BP，定理 2.4.2、推论 2.4，3], 超简单空间的全子范畴 $\mathcal{S}\mathrm{ps}\subset\mathcal{S}\mathrm{pc}$ 在积、余积和收缩下封闭，并且具有这样的性质：每个有限积保持函子 $F\colon\mathcal{S}\mathrm{ps}\to\mathcal{S}\mathrm{pc}$都限制为 $\mathcal{S}$ ps的一个自函子。由此引出以下定义。

定义 2.4.1。 ∞修饰子的范畴是全子范畴

$$\mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps}) \subset \mathrm{End}(\mathcal{S}\mathrm{ps})$$

由保留所有小乘积的 $\mathcal{S}\mathrm{ps}$ 自函子所张成。

例 2.4.2. 设 T 是任意空间。那么

$$\mathrm{map}(T, -) \colon \mathcal{S}\mathrm{ps} \to \mathcal{S}\mathrm{ps}$$

是一个修饰子。

例 2.4.3. 对于所有 $n \geq -2$, n-截断函子

$$\tau_{\leq n} \colon \mathcal{S}\mathrm{ps} \to \mathcal{S}\mathrm{ps}$$

是一个修饰子。

例 2.4.4. 设 $\mathcal{U}$ 是集合上的一个非主超滤子。那么，超幂函子

$$\prod_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{S}\mathrm{ps} \to \mathcal{S}\mathrm{ps}$$

保有限积，但不保无限乘积，因此 不是 符合定义 2.4.1意义下的修饰子。

每个 Malcev 理论都富集于超简单空间。为了使下述结论成立，我们要求修饰子保所有小乘积。

命题 2.4.5. 设 $F \in \mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})$ 为一个修饰子。

(1) 若 $\mathcal{P}$ 是 Malcev 理论，则 $\mathcal{P}_F$ 是 Malcev 理论。(2) 若 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是 Malcev 理论的同态，则 $f_F\colon \mathcal{P}_F \to \mathcal{Q}_F$ 是 Malcev 理论的同态。

换言之，修改定义了一个函子

$$\mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps}) \to \mathrm{End}(\mathcal{M}\mathrm{alc}).$$

证明。 (1) 根据 命题 2.2.5 和 引理 2.3.5，函子 $\pi_F\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}_F$ 保余积且本质满，因此由 [BP，引理 4.1.5.(3)] 可知 $\mathcal{P}_F$ 仍是一个 Malcev 理论。

(2) 固定一个同态 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$。我们必须证明 $f_F\colon \mathcal{P}_F \to \mathcal{Q}_F$ 保余积。给定 $\mathcal{P}_F$ 中的一组对象 $\{P_i\colon i \in I\}$，对每个 $i \in I$，我们可以写作 $P_i = \pi_F(P_i')$，其中 $P_i' \in \mathcal{P}$，此时

$$\begin{aligned} f_F(\coprod_{i\in I} P_i) &\simeq f_F(\coprod_{i\in I} \pi_F P_i') \simeq f_F\pi_F(\coprod_{i\in I} P_i') \\ &\simeq \pi_F f(\coprod_{i\in I} P_i') \simeq \coprod_{i\in I} \pi_F f(P_i') \simeq \coprod_{i\in I} f_F(P_i) \end{aligned}$$

根据引理 2.3.5。 □

注 2.4.6。 设 κ 是一个正则基数。若 $F \in \mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})$ 满足以下条件，则称其为 κ-连续：

- 设 $\mathcal{J}$ 是一个 κ-滤过 ∞-范畴，并假设 $X \in \mathrm{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{S}\mathrm{pc})$ 存在一个 Malcev 运算。那么比较映射 $\mathrm{colim}_{j\in\mathcal{J}} F(X_j) \to F(\mathrm{colim}_{j\in\mathcal{J}} X_j)$ 是一个等价。

若 F 是 κ-连续的，且 $\mathcal{P}$ 是 κ按 [BP定义 3.5 意义下的 -有界 Malcev 理论，5],那么很容易看出， $\mathcal{P}_F$ 仍然是一个 κ-有界 Malcev 理论。

2.5. 初等修饰子

现在我们将一类性质特别良好的修饰子单独列出。

引理 2.5.1. 全子范畴

$$\mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps}) \subset \mathrm{End}(\mathcal{S}\mathrm{ps})$$

在几何实现下封闭。

证明。 $\mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})$ 可识别为 Malcev 预理论 ∞ 的非有界模型 $(\mathcal{S}\mathrm{ps})^{\mathrm{op}}$，因此由 [BP，命题 4.1 得证。7]。 □

如 [BP，定义 7.17], 所述，我们记作

$$\mathcal{S}\mathrm{ph} \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

由 S^1 在有限积、楔和与强积下生成的全子范畴（关于任意基点）。

定义 2.5.2。 ∞-范畴初等修饰子 是最小的全子范畴

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \subset \mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})$$

它在几何实现下闭合，并且包含对于 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$ 的 $\mathrm{map}(T, -)$。

警告 2.5.3。 n-球面 S^n 并非 超简单，除非 $n \in \{0, 1, 3, 7\}$。特别是，

$$\mathrm{map}(T, -) \colon \mathcal{S}\mathrm{ps} \to \mathcal{S}\mathrm{ps}$$

对于 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，它很少是余可表函子。

在 §3.3中，我们将证明，初等修饰子类包含与 Postnikov 塔理论相关的所有修饰子。这里记录初等修饰子的一些一般性质。

命题 2.5.4. 设 F 为初等修饰子。

(1) 若 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，则 $X \mapsto F(X^T)$ 是初等的。(2) F 保留余积。特别地，存在唯一的自然变换 $F \to \tau_{\leq 0}$。(3) F 是 ω-连续的（见注 2.4.6）。(4) 对任意 $\mathcal{C} \in \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{S}\mathrm{ps})$，投影 $\mathcal{C}_F \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的，且比较映射 $(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})_F \to \mathcal{C}_F^{\mathrm{core}}$是等价。 (5) 修改函子

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathrm{End}(\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{S}\mathrm{ps})), \qquad F \mapsto (\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_F)$$

保留沿逐层有效满射的逐层拉回。

证明。 (1) 考虑满足 $X \mapsto F(X^T)$ 为初等对象的修饰子 F 所构成的类。若 $F(X) = \mathrm{map}(S, X)$ 对于 $S \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，则

$$F(X^T) \simeq \mathrm{map}(T \times S, X)$$

是初等的，因此我们必须证明这个类在几何实现下封闭。若 $F_\bullet$ 是修饰子范畴中的一个单纯对象，则

$$|F_\bullet(X^T)| \simeq |F_\bullet|(X^T),$$

因此这显然成立。

(2,3) 由于这些性质在修饰子的几何实现下保持不变，因此只需证明若 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$ 则 $\mathrm{map}(T, -)$ 保持余积且是 ω-连续的。这是因为 T是紧致且连通的。自然变换 $F \to \tau_{\leq 0}$ 的存在性和唯一性由 命题 2.3.3.(1) 得出。

（4）我们必须证明 $\mathcal{C}_F \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的；第二个结论随即由（2）和命题 2.3.3得出。

首先，我们断言，对于使 $\mathcal{C}_F \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 保守的修饰子 F over $\tau_{\leq 0}$，其类在几何实现下封闭。设 $F_\bullet$ 是 $\mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})$ 中的一个单纯对象，并考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{F_0} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{|F_\bullet|} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{h}\mathcal{C} & \end{array} .$$

由于 $F_0 \to |F_\bullet|$ 是有效满射，$\mathcal{C}_{F_0} \to \mathcal{C}_{|F_\bullet|}$ 是满的。根据假设，$\mathcal{C}_{F_0} \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的，因此 $\mathcal{C}_{|F_\bullet|} \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的。

接下来我们断言，若 T 是任意连通空间，则 $\mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)} \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的。由于 $\mathcal{C} \to \mathrm{h}\mathcal{C}$ 是保守的，只需选取 T 的一个基点，并验证沿此基点的限制定义了一个保守函子 $\mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)} \to \mathcal{C}$。注意，$\mathrm{map}(T, -) \simeq \lim_T \mathrm{id}$ 可以视为以 T 为指标的恒等函子的常值极限。因此，$\mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)} \to \mathcal{C}$ 可分解为

$$\mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)} \simeq \mathcal{C}_{\lim_T \mathrm{id}} \to \lim{}_T\, \mathcal{C}_{\mathrm{id}} \simeq \mathcal{C}^T \to \mathcal{C},$$

其中，第一个可能不可逆的映射是全忠实的，因此根据 命题 2.3.1 可知它是保守的。由于 T 是连通的，$\mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ 是保守的，断言得证。

(5) 现在由命题 2.3.4即可得出。 □

尽管本文的工作并不需要这一点，我们仍记录高阶泛代数背景下初等修饰子的一项额外优良性质。我们需要以下结果。

引理 2.5.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，T 是一个空间。以下条件等价：

(1) $\mathcal{C}$ 存在以 T为指标的常值余极限；(2) $\pi_{\mathrm{map}(T,-)}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)}$ 存在一个左伴随。

在这种情况下，左伴随 L 满足：对于 $X \in \mathcal{C}$，$L\pi_{\mathrm{map}(T,-)}(X) \simeq T \otimes X$。

Proof. 函子 $\pi_{\mathrm{map}(T,-)}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)}$ 存在左伴随 L，当且仅当对于每一个 $X' \in \mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)}$，函子

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)}}(X', \pi_{\mathrm{map}(T,-)}(-))\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

是余可表示的，在这种情况下，LX 是余表示对象。由于$\pi_{\mathrm{map}(T,-)}$ 是本质满的，我们不妨假设对某个 $X \in \mathcal{C}$有 $X' = \pi_{\mathrm{map}(T,-)}X$。根据构造，我们有

$$\mathrm{map}_{\mathcal{C}_{\mathrm{map}(T,-)}}(\pi_{\mathrm{map}(T,-)}X, \pi_{\mathrm{map}(T,-)}(-)) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(X, -)^T,$$

而这余可表示，当且仅当常值余极限 $T \otimes X = \mathrm{colim}_T X$ 存在；在这种情况下，$T \otimes X$ 是余表示对象。这就证明了该引理。□

定理 2.5.6. 设 $\alpha\colon F \to G$ 是初等修饰子之间的自然变换。若$\mathcal{P}$ 是环路理论，则 $\pi_\alpha\colon \mathcal{P}_F \to \mathcal{P}_G$ 是弱左正合的。

证明。 同态 $\pi_\alpha\colon \mathcal{P}_F \to \mathcal{P}_G$ 位于一个交换图中

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \mathcal{P}_F & \xrightarrow{\pi_\alpha} & \mathcal{P}_G \end{array} .$$

由于 π_F 本质满，根据 [BP，命题 6.3.7.(3)] 我们可归约到以下情形： π_α 具有如下形式 π_F： $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_F$ 其中 F是一个初等修饰子。

不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{P}$ 是幂等完备的。特别地，根据 [BP，命题 7.1。8] $\mathcal{P}$ 存在以任意空间 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$为指标的常值余极限。根据引理 2.5.5，这保证了若 $F \simeq \mathrm{map}(T, -)$ 对于某个 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$成立，则 $\pi_{\mathrm{map}(T,-)}$: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_{\mathrm{map}(T,-)}$ 是一个右伴随，因此 $\pi_{\mathrm{map}(T,-)!}$: $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{P}_{\mathrm{map}(T,-)}}$也同样如此。特别地，$\pi_{\mathrm{map}(T,-)!}$ 保持所有极限，因此是弱左正合的。

这使得我们只需证明：若 $F_\bullet$ 是一个单纯修饰子，且每个 π_{F_n}: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_{F_n}$ 都是弱左正合的，则 $\pi_{|F_\bullet|}$: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_{|F_\bullet|}$ 是弱左正合的。取 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$中的一个笛卡尔方形 σ，其中底层余跨至少有一个箭头是有效满射。我们必须证明 $\pi_{|F_\bullet|!}\sigma$ 仍是笛卡尔的。由于 $\pi_{|F_\bullet|}$: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_{|F_\bullet|}$ 是本质满的，只需证明 $\pi^*_{|F_\bullet|}\pi_{|F_\bullet|!}\sigma$ 是笛卡尔的。注意到

$$\pi^*_{|F_\bullet|}\pi_{|F_\bullet|!}\sigma \simeq |\pi^*_{F_\bullet}\pi_{F_\bullet!}\sigma|.$$

由于 π_{F_n}: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_{F_n}$ 是弱左正合的，且 $\pi^*_{F_n}\pi_{F_n!}$ 保有效满射，$\pi^*_{F_\bullet}\pi_{F_\bullet!}$ σ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的笛卡尔方形单纯图表，其底层余跨中至少有一个箭头是有效满射。根据 [BP、推论 4.1.8.(2)]，可知，几何实现 $|\pi^*_{F_\bullet}\pi_{F_\bullet!}$ $\sigma|$ 仍然是笛卡尔的，符合需要。□

3. 重新审视 Postnikov 分解

同伦论中的一个基本构造将空间 X 与其*Postnikov* 塔联系起来

$$X \to \cdots \to X_{\leq n} \to X_{<n} \to \cdots \to X_{\leq 0}.$$

若 X 是单连通的，那么经典 Postnikov 理论告诉我们，此塔中的映射由*Postnikov* 不变量或 k-不变量分类；也就是说，存在纤维列

$$X_{\leq n} \to X_{<n} \xrightarrow{k} K(\pi_n X, n+1)$$

这表明 $X_{\leq n}$ 由某个类 $k \in \mathrm{H}^{n+1}(X_{<n}; \pi_n X)$决定。稍加注意，这一结论可以推广到 X 非单连通的情形：此时将 $\pi_n X$ 视为基本群胚 $X_{\leq 1}$上的群丛，而非一个群。这一经典构造将任意空间表示为由线性数据逐步构建而成，每次处理一个同伦群。

本节的主要目标是重新审视这一经典论述，并将其扩展为描述映射 $X_{<n+r} \to X_{<n}$ 在多大程度上同样由 $r > 1$ 的线性数据分类。由于这些构造关于 X 具有函子性，结合修正理论，便得到相应的 ∞-范畴广义 Postnikov 方块理论。

3.1. 空间的 Postnikov 方块

我们的 Postnikov 理论源自布莱克斯–梅西定理，现回顾如下。

回顾 3.1.1。方的全纤维

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \sigma & \downarrow{\scriptstyle h} \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

带基点空间的.....定义为

$$\mathrm{tFib}(\sigma) = \mathrm{Fib}\left(A \to B \times_D C\right) \simeq \mathrm{Fib}(\mathrm{Fib}(g) \to \mathrm{Fib}(h)) \simeq \mathrm{Fib}(\mathrm{Fib}(f) \to \mathrm{Fib}(k)).$$

定理 3.1.2 (布莱克斯–梅西定理，Brown–Loday [BL87，定理 4.2])。 设 σ 是一个余笛卡尔方形，其带基点连通空间如回顾 3.1.1所示，并满足

$$\pi_i \operatorname{Fib}(f) = 0 \text{ for } 0 \le i \le n, \qquad \pi_i \operatorname{Fib}(g) = 0 \text{ for } 0 \le j \le m.$$

Then

$$\pi_i \operatorname{tFib}(\sigma) = 0 \text{ for } i \le n+m,$$

并且在临界次数， π_{n+m+1}t纤维(σ)由广义怀特海德积的像生成

$$\pi_{n+1} \operatorname{Fib}(f) \times \pi_{m+1} \operatorname{Fib}(g) \to \pi_{n+m+1} \operatorname{tFib}(\sigma).$$

In p特别地， π_i 纤维(f) $\to$ π_i 纤维(h)是一个同构，当 $i \le n+m$ 时是一个满射 f r~~或~~i ~~m~~ $+1$，其核由怀特海德积的像生成

$$\pi_{n+1} \operatorname{Fib}(f) \times \pi_{m+1} \operatorname{Fib}(g) \to \pi_{n+m+1} \operatorname{tFib}(\sigma) \to \pi_{n+m+1} \operatorname{Fib}(g).$$

□

记号 3.1.3. 给定一个空间 X 和正整数 n 及 r，记作 $[\pi_r X, \pi_n X] = 0$ ，如果对每个 $x \in X$，$a \in \pi_r(X,\ x)$、 $b \in \pi_n(X,\ x)$，怀特海德积 $[a,b] \in \pi_{r+n-1}(X,\ x)$ 均为零。

命题 3.1.4. 固定一个空间 X 以及正整数 r 和 n。

(1) 该方形

$$\begin{array}{ccc} X_{<n+r} & \longrightarrow & X_{\le r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{<n} & \longrightarrow & (X_{<n} \cup_{X_{<n+r}} X_{\le r})_{\le n+r} \end{array}$$

总是笛卡尔的。

(2) 该方形

$$\begin{array}{ccc} X_{<n+r} & \longrightarrow & X_{<r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{<n} & \longrightarrow & (X_{<n} \cup_{X_{<n+r}} X_{<r})_{<n+r} \end{array}$$

是笛卡尔的当且仅当 $[\pi_r X, \pi_n X] = 0$。

证明。 通过对每个路径分支分别处理，我们可以不失一般性地假设X 是带基点的且连通的。我们首先证明 (1)。简记 $C = X_{<n} \cup_{X_{<n+r}} X_{\le r}$ 并考虑余笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} X_{<n+r} & \xrightarrow{f} & X_{\le r} \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X_{<n} & \longrightarrow & C \end{array} .$$

写出

$$X_{[n,n+r)} = \operatorname{Fib}(g), \qquad X_{(r,n+r)} = \operatorname{Fib}(f).$$

由 Blakers–Massey 可得

$$\pi_i X_{[n,n+r)} \to \pi_i \operatorname{Fib}(h)$$

对于 $i < n+r$ 是一个同构，因此存在一个长正合列

$$0 \to \pi_{n+r} C \to \pi_{n+r-1} X_{[n,n+r)} \to \pi_{n+r-1} X_{\le r} \to \pi_{n+r-1} C \to \cdots .$$

由于 $r<n$，这分解为若干同构

$$\begin{cases}\pi_{i+1}C\cong\pi_iX & n\le i<n+r,\\ \pi_{i+1}C\cong 0 & r\le i<n,\\ \pi_iC\cong\pi_iX & 0\le i\le r.\end{cases}$$

由此可知，在

$$\begin{array}{ccc} X_{<n+r} & \xrightarrow{f} & X_{\le r}\\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h'}\\ X_{<n} & \longrightarrow & C_{\le n+r+1}\end{array},$$

诱导映射 Fib(g) $\to$Fib(h') 是一个等价，因此该方块是笛卡尔的。

接下来讨论 (2)。将 $X_{<r}$ 代替 $X_{\le r}$ 后，(1) 中的论证同样适用，只不过 Blakers–Massey 只能保证 $\pi_iX_{[n,n+r)}\to$ Fib(h) 对于 $i<n+r-1$ 是同构，对于 $i=n+r-1$ 是满射。在临界次数上，有一个长正合列

$$\pi_nX\otimes\pi_rX\to\pi_{n+r}X_{[n,n+r)}\to\pi_{n+r}\operatorname{Fib}(h)\to 0,$$

其第一个映射是怀特海德积。因此，对于 $i=n+r$，它是同构当且仅当 $[\pi_rX,\pi_nX]=0$，而这是该方块为笛卡尔方块的必要条件。□

构造 3.1.5。取一个空间 X 和整数 $1\le r\le n$，并假设 $[\pi_rX,\pi_nX]=0$。在这些假设下，我们构造一个关于 X 函子性的如下对象：

(1) 环空间丛

$$\Pi_{[n,n+r)}X\to X_{<r}$$

在 $X_{<r}$ 上，且满足：对于任意 $x\in X_{<n+r}$，存在一个带基点空间之间的等价

$$\{\tilde{x}\}\times_{X_{<r}}\Pi_{[n,n+r)}X\simeq\{x\}\times_{X_{<n}}X_{<n+r},$$

其中，$\tilde{x}$ 是 x 在 $X_{<r}$中的像。

(2) 一个笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccccc} X_{<n+r} & \longrightarrow & X_{<r} & & \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & \searrow & \\ X_{<n} & \xrightarrow{k} & B_{X_{<r}}\Pi_{[n,n+r)}X & \xrightarrow[p]{} & X_{<r}\end{array},\tag{3.1.6}$$

其中，$B_{X_{<r}}\Pi_{[n,n+r)}X$ 是 $\Pi_{[n,n+r)}X$ 在 $X_{<r}$上的纤维逐点去环化。

要构造这些对象，首先注意到命题 3.1.4给出了形如 (2) 的一个笛卡尔方形，只是将 $B_{X_{<r}}\Pi_{[n,n+r)}X$ 替换为$(X_{<n}\cup_{X_{<n+r}}X_{<r})_{\le n+r}$。截面

$$X_{\le r}\xrightarrow{\tilde{0}}(X_{<n}\cup_{X_{<n+r}}X_{<r})_{\le n+r}\xrightarrow{\tilde{p}}X_{<r}$$

将 $\tilde{p}$ 实现为 $X_{<r}$上的带基点空间丛。这些纤维满足

$$\Omega\tilde{p}^{-1}(x)\simeq\tilde{0}^{-1}(x)\simeq\tau^{-1}(\tilde{x})=\{\tilde{x}\}\times_{X_{<n}}X_{<n+r}$$

对于任意 $x\in X_{\le r}$ 以及提升 x的任意 $\tilde{x}\in X_{<n+r}$，作为带基点空间。因此，如果我们定义

$$\Pi_{[n,n+r)}X:=\Omega_{X_{<r}}\left((X_{<n}\cup_{X_{<n+r}}X_{<r})_{\le n+r}\right),$$

那么 $\Pi_{[n,n+r)}X$ 是 $X_{<r}$ 上的环空间丛，并满足

$$B_{X_{<r}}\Pi_{[n,n+r)}X\simeq(X_{<n}\cup_{X_{<n+r}}X_{<r})_{\le n+r}$$

视需要而定。

警告 3.1.7. 我们提醒读者，当 $n = r$ 时，一般而言

$$\Pi_{[n,2n)}X \neq X_{<2n}$$

作为 $X_{<n}$ 上的空间，尽管这两个空间在 $X_{<n}$ 的任意一点上的纤维都等价。问题在于，作为 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_{/X_{<n}}$ 中的环空间，投影 $\Pi_{[n,2n)}X \to X_{<n}$ 有一个截面，而$X_{<2n} \to X_{<n}$ 则未必有。

这个纤维丛的构造 $\Pi_{[n,n+r)}X$ 有些间接。我们将在下面的 X 于命题 3.3.1 中，给出一个更直接的构造，适用于是超简单的特殊情形。

变体 3.1.8（怀特海德积不消失的空间）。对于任意空间 X和 $r < n$，同样的构造适用于将如下形式的笛卡尔图表与积相乘

$$\begin{array}{ccccc} X_{<n+r} & \longrightarrow & X_{\leq r} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & \searrow & \\ X_{<n} & \xrightarrow{k} & B_{X_{\leq r}}\Pi^{\mathrm{ns}}_{[n,n+r)}X & \xrightarrow{p} & X_{\leq r} \end{array},$$

其中 $\Pi^{\mathrm{ns}}_{[n,n+r)}X \to X_{\leq r}$ 是一个在 $X_{\leq r}$上的环空间丛。在这种情况下，无需对怀特海德积作任何假设。如果恰好有 $[\pi_r X, \pi_n X] = 0$，那么这与构造 3.1.5 相容，其意义是存在一个典范笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{\mathrm{ns}}_{[n,n+r)}X & \longrightarrow & \Pi_{[n,n+r)}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\leq r} & \longrightarrow & X_{<r} \end{array}.$$

定义 3.1.9。我们将图表（3.1.6）和（3.1.8）称为 X 的 Postnikov 方块，并将 k 称为波斯特尼科夫不变量映射。

例 3.1.10。取 $r = 1$，这些 Postnikov 方块复现了 Postnikov 不变量的经典理论。我们先描述非单纯变体。

给定一个空间 X 和点 $x \in X$ 以及 $n \geq 2$，我们有一个阿贝尔群 $\pi_n(X, x)$。该群在函子性上仅取决于 x 在基本群胚 $X_{\leq 1}$中的像；令x 变化，即定义了一个阿贝尔群纤维丛 $\Pi^{\mathrm{ns}}_n X$。现在，$\Pi^{\mathrm{ns}}_{[n,n]}X$ 的变体 3.1.8 的纤维可以识别为 n的第 $\Pi^{\mathrm{ns}}_n X$ 次纤维逐点去环化，且其上的 $X_{\leq 1}$相应 Postnikov 方块就是经典 Postnikov 方块

$$\begin{array}{ccccc} X_{\leq n} & \longrightarrow & X_{\leq 1} & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ X_{<n} & \longrightarrow & B^{n+1}_{X_{\leq 1}}\Pi^{\mathrm{ns}}_n X & \longrightarrow & X_{\leq 1} \end{array}.$$

现在转向一个简单的变体。空间 X 满足 $[\pi_1 X, \pi_n X] = 0$ 当且仅当 $\pi_1(X, x)$ 在 $\pi_n(X, x)$ 上的共轭作用对所有基点 $x \in X$都是平凡的。这确保群纤维丛 $\Pi^{\mathrm{ns}}_n X$ 在 $X_{\leq 1}$ 上唯一地下降为 $\Pi_n X$ 上的纤维丛 $X_{\leq 0}$，并且构造 3.1.5 恢复经典波斯特尼科夫方块

$$\begin{array}{ccccc} X_{\leq n} & \longrightarrow & X_{\leq 0} & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ X_{<n} & \longrightarrow & B^{n+1}_{X_{\leq 0}}\Pi_n X & \longrightarrow & X_{\leq 0} \end{array}$$

将 $X_{\leq n} \to X_{<n}$ 实现为主纤维化的不交并。此外，当 $n = 1$时，也可以构造这个改进后的方形；其中，$[\pi_1 X, \pi_1 X] = 0$ 的条件要求对所有 $x \in X$，$\pi_1(X, x)$ 都是阿贝尔群。

正如 例 3.1.10 所示，取 $r=1$ 这些纤维丛

$$\Pi_{[n,n]}X \to X_{\leq 0}$$

不仅仅是逐纤维环空间：若 $x \in X_{\leq 0}$，则纤维

$$\{x\} \times_{X_{\leq 0}} \Pi_{[n,n]}X \simeq K(\pi_n(X,x),n),$$

作为带基点空间，以唯一的方式具有阿贝尔群对象的结构。特别地，它是一个无限 环空间。这可以推广到 $r>1$，下面我们将对此作出说明。

引理 3.1.11（Freudenthal 悬挂）。设 X 是一个带基点的连通空间，并假设$\pi_i X = 0$ 对于 $0 \leq i < n$。那么映射

$$\pi_i X \to \pi_i \Omega^r \Sigma^r X \cong \pi_{i+r}\Sigma^r X$$

当 $i \leq 2n-2$ 时是一个同构；当 $i = 2n-1$ 时是一个满射，其核由怀特海德积 $[\pi_n X, \pi_n X] \subset \pi_{2n-1}X$ 生成。

证明。 这是布莱克斯–梅西定理 定理 3.1.2的一个特例。 □

这可以进行如下范畴化，它用稳定同伦论描述了具有受限同伦群的带基点空间的某些子范畴。类似的陈述见 [MS16，§5。1]。

记号 3.1.12. 给定一个区间 $I \subset \mathbb{Z}$，记 $\mathcal{S}\mathrm{p}^I \subset \mathcal{S}\mathrm{p}$ 和 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_*^I \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}_*$ 为同伦群在 I之外均消失的对象所构成的满子范畴。

命题 3.1.13. 函子

$$\Omega^\infty : \mathcal{S}\mathrm{p}_*^{[n,2n)} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{[n,2n)}$$

是全忠实的，其本质像由满足 $[\pi_n X, \pi_n X] = 0$ 的那些 X 张成。

证明。 固定 $X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{[n,2n)}$。若 $[\pi_n X, \pi_n X] = 0$，则 $X \to \Omega^\infty\Sigma^\infty X$ 诱导一个等价 $X \simeq X_{<2n} \simeq (\Omega^\infty\Sigma^\infty X)_{<2n}$，从而证明 X 属于 Ω^∞ 的本质像。

要证明 Ω^∞ 在此范围内是满忠实的，固定 X，$Y \in \mathcal{S}\mathrm{p}^{[n,2n)}$。对于

$$\mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{p}}(X,Y) \to \mathrm{map}_*(\Omega^\infty X, \Omega^\infty Y) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{p}}(\Sigma^\infty\Omega^\infty X, Y) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{S}\mathrm{p}}((\Sigma^\infty\Omega^\infty X)_{<2n}, Y)$$

要成为等价，我们必须证明余单位 ϵ：$\Sigma^\infty\Omega^\infty X \to X$ 在 π_i 上对 $i < 2n$诱导同构。为此，只需证明 $\Omega^\infty\epsilon$：$\Omega^\infty\Sigma^\infty\Omega^\infty X \to \Omega^\infty X$ 在同一范围内是等价。三角恒等式给出了一个截面

$$\Omega^\infty X \to \Omega^\infty\Sigma^\infty\Omega^\infty X \to \Omega^\infty X.$$

Freudenthal 悬挂定理表明，单位 η：$\Omega^\infty X \to \Omega^\infty\Sigma^\infty\Omega^\infty X$ 在 π_i 上对 $i < 2n$诱导满射。上述截面随即推出它在此范围内是同构，因此余单位也必然如此。□

令 $X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{[n,2n)}$为满足 $[\pi_n X, \pi_n X] = 0$的空间。 命题 3.1.13 表明， X以唯一且自然的方式带有无限循环空间结构。对我们的目的而言，有必要将这种无限循环空间结构视为实际的结构，而不仅仅是空间 X的连通性性质。这样一来，便可以追踪例如以下事实：这类带基点空间的单纯图表的几何实现再次自然地成为无限循环空间，尽管它未必满足所需的连通性性质。

将相关的无限循环空间结构以图表形式编码会很方便，而 [BP，§7 中引入的稳定去环理论 2] 为此提供了一个便利的框架。我们回顾一下所需的特殊情形。

定义 3.1.14。对于一个连通的 $\mathbf{E}_1$-环谱 R，令

$$\mathcal{R}_0^\omega(R) \subset \mathcal{R}_-^\omega(R) \subset \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$$

表示由 R 和 $\Omega^n R$ 分别在有限余积下生成的右 R-模全子范畴。给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{D}$，

(1) 一个连通右 R-模在 $\mathcal{D}$ 是一个函子

$$X\colon \mathcal{R}_0^\omega(R)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$$

它保有限积。

(2) 一个右 R-模对象在 $\mathcal{D}$ 是一个函子

$$X\colon \mathcal{R}_-^\omega(R)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$$

它保有限积，且典范映射

$$X(P) \to \Omega X(\Omega P)$$

是 $P \in \mathcal{R}_-^\omega(R)$ 的等价。

我们记

$$\mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{R}_0^\omega(R)^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}), \qquad \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{R}_-^\omega(R)^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$$

为这些对象构成的全子范畴。

当 R 是一个$\mathbf{E}\infty$-环时（我们的例子中确实如此），我们将 $\mathrm{Mod}_R = \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R$简写为。名称的由来如下。

引理 3.1.15。设 $\mathcal{D}$ 是一个可呈示的 ∞-范畴。那么存在自然等价 ce

$$\mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R(\mathcal{D}) \simeq \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \otimes \mathcal{D}, \qquad \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}(\mathcal{D}) \simeq \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} \otimes \mathcal{D}$$

其中右侧表示可呈示 ∞-范畴的张量积。

证明。我们只处理右 R-模对象，连通情形的证明完全相同。由[BP，命题 7.2。3] 可知存在一个等价

$$\mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R(\mathcal{S}\mathrm{pc}) \simeq \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R.$$

一般情形可由以下对象的本质像推出

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \otimes \mathcal{D} &\simeq \mathrm{Fun}^R(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Fun}(\mathcal{R}_-^\omega(R)^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc})) \\ &\simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{R}_-^\omega(R)^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{pc}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{R}_-^\omega(R)^{\mathrm{op}}, \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{D}))\end{aligned}$$

由那些属于 Yoneda 嵌入 $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{D})$ 本质像的右 R-模对象 $\mathcal{R}_-^\omega(R)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\mathcal{D})$ 构成，而这等价于 $\mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R(\mathcal{D})$。□

我们还注意到以下结论。

引理 3.1.16。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-topos。那么

$$\mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}(\mathcal{D}) \simeq \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} \otimes \mathcal{X} \to \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R \otimes \mathcal{X} \simeq \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R(\mathcal{X})$$

是全忠实的，其本质像由满足以下性质的右 R-模对象 X：$\mathcal{R}_-^\omega(R)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{X}$ 所张成：典范映射

$$\mathrm{B}X(P) \to X(\Omega P)$$

是 $P \in \mathcal{R}_-^\omega(R)$ 的等价。

证明。当 $\mathcal{X} = \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 时，这一点显然；一般情形可通过将 $\mathcal{X}$ 写成预层范畴的左正合局部化，并逐层处理得出。□

现在我们可以给出如下命题。

命题 3.1.17。 设 X 为一个空间。取整数 $1 \leq r \leq n < \infty$，并假设$[\pi_r X, \pi_n X] = 0$。那么带基点纤维丛

$$\Pi_{[n,n+r)} X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}_{X_{<r}//X_{<r}}$$

唯一且自然地提升为 X 上连通$\mathbf{S}_{<r}$-模对象的纤维丛。若 $r < n$，但我们不假设 $[\pi_r X, \pi_n X] = 0$，则 $\Pi^{\mathrm{ns}}_{[n,n+r)} X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}^{X_{\leq r}//X_{\leq r}}$ 也同样如此。

证明。 我们只处理 $[\pi_r X, \pi_n X] = 0$ 的情形。在直化等价下，我们可以将其视为

$$\Pi_{[n,n+r)} X \in \mathcal{S}\mathrm{pc}_{X_{<r}//X_{<r}} \simeq \mathrm{Fun}(X_{<r}, \mathcal{S}\mathrm{pc}_*)$$

as t将 $x \in X_{<r}$ 映射到其纤维的函子 $\Pi_{[n,n+r)}(X, x) \simeq \{\tilde{x}\} \times_{X_{<n}} X_{<n+r}$。根据 命题 3.1.13，在其中存在唯一且自然的提升

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{S}\mathrm{p}^{[n,n+r)} \\ & \nearrow & \downarrow \Omega^\infty \\ X_{<r} & \xrightarrow[\Pi_{[n,n+r)}]{} & \mathrm{Spc}_*^{[n,n+r)} \end{array} .$$

该命题由以下结果推出：

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}(X_{<r}, \mathcal{S}\mathrm{p}^{[n,n+r)}) &\simeq \mathrm{Fun}(X_{<r}, \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{S}\mathrm{p}^{[n,n+r)})) \\ &\subset \mathrm{Fun}(X_{<r}, \mathrm{Mod}^{\geq 0}_{\mathbf{S}_{<r}}) \simeq \mathrm{Mod}^{\geq 0}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_{/X_{<r}}) \end{aligned}$$

根据引理 3.1.15。 □

记号 3.1.18。 给定空间 X 和 $1 \leq r \leq n$，我们记作

$$K^\bullet_{n,r}(X) \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_{/X_{<r}})$$

表示 $\mathbf{S}_{<r}$-模对象

$$\Omega^n_{X_{<r}} \Pi_{[n,n+r)} X \in \mathrm{Mod}^{\geq 0}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_{/X_{<r}}) \subset \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_{/X_{<r}}),$$

其中 $\Omega^n_{X_{<r}} \Pi_{[n,n+r)} X$ 由命题 3.1.17 构造，第二个包含如引理 3.1.16所述。特别地，$K^\bullet_{n,r}(X)$ 的底层无穷循环空间为

$$K^m_{n,r}(X) := K^\bullet_{n,r}(X)(\Sigma^m \mathbf{S}_{<r}) \simeq \begin{cases} \Omega^{n-m}_X \Pi_{[n,n+r)} X & m \leq n, \\ B^{m-n}_X \Pi_{[n,n+r)} X & m \geq n. \end{cases}$$

对于 $m \geq 0$，按如下方式编号：$K^n_{n,r}(X) = \Pi_{[n,n+r)}(X)$。

注记 3.1.19。 本节的所有构造都显然关于 X 自然。特别地，设 $\mathcal{S}\mathrm{pc}_0 \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 表示满足 $[\pi_r X, \pi_n X] = 0$ 的空间 X 的一个满子范畴。那么函子 $K^\bullet_{n,r}$ 定义了一个 $\mathbf{S}_{<r}$-模对象

$$K^\bullet_{n,r} \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathrm{Fun}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0, \mathcal{S}\mathrm{pc})_{/\tau_{<r}})$$

在 ∞-范畴中，其对象为到 $\tau_{<r}$ 的函子；并且 定义 3.1.9 的 Postnikov 方块定义了笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \tau_{<n+r} & \longrightarrow & \tau_{<r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{<n} & \longrightarrow & K^{n+1}_{n,r} \longrightarrow \tau_{<r} \end{array}$$

的函子。

3.2. ∞范畴的 Postnikov 方块

在 §3.1 中构造的 Postnikov 方块由空间上的保积自函子组成，沿这些自函子进行修改，使我们能够构造范畴的 Postnikov 方块。本节旨在简要阐述这一构造。

注 3.2.1。 由于我们主要关注对 Malcev 理论进行修改，而其映射空间的怀特海德积均消失，因此我们将限制在这一类 ∞-范畴。一般范畴的变体留给有兴趣的读者探究；这些变体可通过使用 变体 3.1.8 替代构造 3.1.5来获得（另请参见例 3.4.6）。

记号 3.2.2. 给定一个在怀特海德积消失的空间中富集的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，对于 $1 \leq r \leq n$，我们记作

$$\mathrm{k}^m_{n,r}\mathcal{C} = \mathcal{C}_{K^m_{n,r}},$$

沿着修改$K^m_{n,\,r}$对记号 3.1.18。

注记 3.2.3. 作为 命题 2.3.4 的推论，复合映射

$$\mathcal{R}^{\omega}_{\leq}(\mathbf{S}_{<r})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{K^{\bullet}_{nr}} \mathrm{Fun}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_0, \mathcal{S}\mathrm{pc})_{/\tau_{<r}} \xrightarrow{\mathcal{C}_-} (\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathrm{h}_r\mathcal{C}}$$

是一个$\mathbf{S}_{<r}$-模对象。特别是，

$$\mathrm{k}^m_{n,r}\mathcal{C} \simeq (\mathrm{k}^{\bullet}_{n,r}\mathcal{C})(\Sigma^m\mathbf{S}_{<r})$$

的记号 3.2.2 组装成 ∞-范畴上的谱对象，底域为$\mathrm{h}_r\mathcal{C}$。

构造 3.2.4。设 $\mathcal{C}$ 是一个富于空间且怀特海德积消失的 ∞-范畴，并设 $1 \leq r \leq n < \infty$ 为整数。范畴化 *Postnikov* 方块

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{C} & & \xrightarrow{\tau_{(n+r,r)}} & & \mathrm{h}_r\mathcal{C} \\
{\scriptstyle \tau_{(n+r,n)}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\
\mathrm{h}_n\mathcal{C} & & \xrightarrow{k} & \mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{C} & \longrightarrow \mathrm{h}_r\mathcal{C}
\end{array}$$

通过沿着构造 3.1.5的 Postnikov 方块修改 $\mathcal{C}$ 得到构造 3.1.5。根据命题 2.3.4，可保证这是一个笛卡尔方形。

例 3.2.5。若 X 是一个 ∞-群胚，那么将其视为一个 ∞-范畴时，X 它富于怀特海德积消失的空间；事实上，它富于超简单空间：对于任意两点 x_1，$x_2 \in X$，我们可以将映射$x(x_1,\ x_2) \simeq \{x_1\} \times_X \{x_2\}$识别为 X的环空间；该空间要么为空，要么与之等价。应用于构造 3.2.4的范畴化 Postnikov 方块 X 是其高一维的普通 Postnikov 方块：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{h}_{n+r}X & \longrightarrow & \mathrm{h}_rX & & \\
\downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
\mathrm{h}_nX & \longrightarrow & \mathrm{k}^{n+1}_{n,r}X & \longrightarrow & \mathrm{h}_rX
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccc}
X_{\leq n+r} & & \longrightarrow & & X_{\leq r} \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
X_{\leq n} & & \longrightarrow & B_{X_{\leq r}}\Pi_{[n+1,n+1+r)}X^{\mathrm{ns}} & \longrightarrow X_{\leq r}
\end{array}
\quad .$$

换句话说，变体 3.1.8可以通过构造 3.1.5，经由构造 3.2.4。

警告 3.2.6. 具有阿贝尔基本群胚的空间 X 的第一个 Postnikov 方可写成

$$\begin{array}{ccccc}
X_{\leq 1} & & \longrightarrow & & X_{\leq 0} \\
\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\
X_{\leq 0} & & \xrightarrow{k} & B^2_{X_{\leq 0}}\Pi_1X & \xrightarrow{p} X_{\leq 0}
\end{array} \quad . \tag{3.2.7}$$

第一个 k-不变量的目标可写为

$$B^2_{X_{\leq 0}}\Pi_1 X \simeq \coprod_{x\in\pi_0 X} K(\pi_1(X,x),2).$$

由于每个 $K(\pi_1(X,\ x),\ 2)$ 都是单连通的，p 的截面空间是连通的。因此 $k \simeq 0$ 在 $X_{\leq 0}$ 上，故

$$X_{\leq 1} \simeq B_{X_{\leq 0}}\Pi_1 X \simeq \mathrm{k}^1_{1,1} X \simeq \coprod_{x\in\pi_0 X} K(\pi_1(X,x),1).$$

然而，同伦 $k \simeq 0$ 并非关于 X 自然，且这两个函子 $k^1_{1,\ 1}$ 和 $\tau_{\leq 1}$ 并不 等价。要形式化地说明这一点，注意根据 例 3.2.5，下一个 Postnikov 方

$$\begin{array}{ccccc} X_{\leq 2} & \longrightarrow & X_{\leq 1} & & \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0'} & \searrow & \\ X_{\leq 1} & \xrightarrow{k'} & B^3_{X_{\leq 1}}\Pi^{\mathrm{ns}}_2 X & \longrightarrow & X_{\leq 1} \end{array}$$

是沿着 X 通过对 (3.2.7) 的方进行修饰得到的。因此，若存在自然等价$k \simeq 0$，那么就会存在自然等价 $k' \simeq 0'$。依此类推，自然等价 $k \simeq 0$ 将意味着所有空间的 k-不变量都平凡，这显然荒谬。

3.3. **Postnikov 修饰子是初等的**

本小节的目标是说明，超简单空间的 Postnikov 塔中出现的所有构造，都可以用定义 2.5.2意义下的初等修饰子来描述。

我们首先重新审视 $\Pi_{[n,n+r)}$的构造；其最初的描述见构造 3.1.5 ，相当间接。当 X 是超简单空间时，它有如下更便捷的刻画。

命题 3.3.1。 设 X 是一个超简单空间。

(1) 比较映射

$$\begin{aligned}\tau_{<r}(X^{S^n\vee\cdots\vee S^n}) &\simeq \tau_{<r}(X^{S^n}\times_X\cdots\times_X X^{S^n})\\ &\to \tau_{<r}(X^{S^n})\times_{X_{<r}}\cdots\times_{X_{<r}}\tau_{<r}(X^{S^n})\end{aligned}$$

对所有 $n \geq 1$ 和 $r \geq 1$都是等价，因此 S^n上的余群结构使 $\tau_{<r}(X^{S^n}) \to X_{<r}$ 成为一个类群状 $\mathbf{E}_n$ 空间的纤维丛。

(2) 若 $r \leq n$，则它唯一地细化为连通$\mathbf{S}_{<r}$-模的纤维丛，并且存在自然等价

$$B^n_{X_{<r}}\tau_{<r}(X^{S^n}) \simeq \Pi_{[n,n+r)}X$$

在 $X_{<r}$上的连通$\mathbf{S}_{<r}$-模纤维丛之间。

换言之，$K^0_{n,\ r}(X) = \tau_{<r}(X^{S^n})$ 当 X 是超简单的。

证明。 (1) 这由 [BP、推论 2.2.15.(2)]。

(2) 只需构造一个自然等价 $B^n_{X_{<r}}\tau_{<r}(X^{S^n}) \simeq \Pi_{[n,n+r)}X$ 在 $X_{<r}$上的带基点纤维丛，因为根据唯一性，$\mathbf{S}_{<r}$-模结构的存在及其相容性随即成立。对于任意空间 X，存在一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} B^n_X X^{S^n} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X_{<n} \end{array}$$

它将 $B^n_X X^{S^n}$ 实现为 X 的逐纤维 n-连通覆盖。将其应用于 $X_{<n+r}$，便得到笛卡尔图表中的左侧方形

$$\begin{array}{ccccc} B^n_{X_{<n+r}}((X_{<n+r})^{S^n}) & \longrightarrow & X_{<n+r} & \longrightarrow & X_{<r} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow 0 \\ X_{<n+r} & \longrightarrow & X_{<n} & \xrightarrow{k} & B_{X_{<r}}\Pi_{[n,n+r)}X \end{array} .$$

虚线箭头的存在表明，底部的复合映射经由 $B_{X_{<r}}\Pi_{[n,n+r)}X$ 的零截面因子分解，从而得到一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} B^n_{X_{<n+r}}((X_{<n+r})^{S^n}) & \longrightarrow & \Pi_{[n,n+r)}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{<n+r} & \longrightarrow & X_{<r} \end{array}$$

与零截面相容。在纤维方向上的 n 重环空间上，这会在一个图表中产生外层矩形

$$\begin{array}{ccccc} (X_{<n+r})^{S^n} & \longrightarrow & \tau_{<r}\left((X_{<n+r})^{S^n}\right) & \longrightarrow & \Omega^n_{X_{<r}}\Pi_{[n,n+r)}X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{<n+r} & \longrightarrow & X_{<r} & \longrightarrow & X_{<r} \end{array} ,$$

它唯一地经由中间列因子分解。因此，只需证明左侧方形（因而右侧方形也如此）是笛卡尔方形，并且典范映射

$$\tau_{<r}(X^{S^n}) \to \tau_{<r}\left((X_{<n+r})^{S^n}\right)$$

是一个等价。将其限制到 X 的各个路径分支后，我们可以假设 X 是一个类群状的 H-空间。这个 H-空间结构给出了相容的分裂

$$X^{S^n} \simeq \Omega^n X \times X, \qquad (X_{<n+r})^{S^n} \simeq X_{<n+r} \times \Omega^n(X_{<n+r}),$$

因此，只需验证典范映射

$$\tau_{<r}(X) \to \tau_{<r}(X_{<n+r}), \qquad \tau_{<r}(\Omega^n X) \to \tau_{<r}(\Omega^n(X_{<n+r})) \leftarrow \Omega^n(X_{<n+r})$$

是等价，这一点显然。 □

现在可以给出以下命题。

命题 3.3.2。 以下修饰子都是初等的：

(1) $X \mapsto B^m_X(X^T)$，其中 $T = S^{m_1} \vee \cdots \vee S^{m_k}$ 是维数为 $m_i \geq m$ 的球面的楔和。(2) 对任意 $r \geq 1$，$X \mapsto \tau_{<r}(X)$。(3) 对 $1 \leq r \leq n < \infty$ 和 $m \geq 0$，$X \mapsto K^m_{n,\,r}(X) \times_{X_{<r}} \cdots \times_{X_{<r}} K^m_{n,\,r}(X)$。

证明。 (1) 我们对 $n \leq m$ 作归纳，情形 $n = 0$ 由初等修饰子的定义成立。在归纳步骤中，注意到

$$B^n_X(X^T) \times_X B^n(X^T) \simeq B^n(X^T \times_X X^T) \simeq B^n(X^{T \vee T}).$$

继续如此，我们可以将 $B^{n+1}_X(X^T)$ 的条构造识别为

$$B^{n+1}_X(X^T) \simeq \left|(B^n_X(X^T))^{\times_X \bullet}\right| \simeq \left|B^n_X(X^{T \vee \cdots \vee T})\right|.$$

通过归纳可知，这个单纯对象中的每一项都是初等的，因此根据定义，其几何实现也是初等的。

（2）注意到

$$X \times_{X_{<r}} X \simeq B^r_X(X^{S^r}), \qquad X \times_{X_{<r}} X \times_{X_{<r}} X \simeq X \times_{X_{<r}} X \times_X X_{<r}X \simeq B^r_X(X^{S^r \vee S^r}),$$

等等。以此方式继续，有效满射 $X \to X_{<r}$ 的 Čech 神经给出一个等价

$$X_{<r} \simeq \operatorname{colim}\left(X \;\leftleftarrows\; B^r_X(X^{S^r}) \;\lleftarrow\; B^r_X(X^{S^r \vee S^r}) \;\lleftarrow\; \cdots \right),$$

其中，该 Čech 神经中的每一项都是 X 中由 (1) 得到的初等修饰子。因此$X \mapsto X_{<r}$ 是初等的。

(3) 我们对 m进行归纳。结合 命题 2.5.4 与 (2)，我们看到，如果 T 是球面的有限楔和的有限乘积，那么

$$X \mapsto (X^T)_{<r}$$

是初等的。 命题 3.3.1 表明

$$K^0_{n,r}(X) \times_{X_{<r}} \cdots \times_{X_{<r}} K^0_{n,r}(X) \simeq (X^{S_n \vee \cdots \vee S^n})_{<r},$$

因此这处理了情形 $m = 0$。归纳步骤通过写成

$$K^m_{n,r}(X) \times_{X_{<r}} \cdots \times_{X_{<r}} K^m_{n,r}(X) \simeq B^m_{X_{<r}}((X^{S^n \vee \cdots \vee S^n})_{<r})$$

作为各项均由归纳得出的初等项的几何实现。 □

3.4. 螺旋系统

正如我们所见，空间的 Postnikov 塔携带着大量额外结构。对于超简单空间，这种结构可以方便地编码如下。

定义 3.4.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个 ∞-范畴。 $\mathcal{D}$ 中的一个螺旋系统 是一个函子

$$H \colon \mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathcal{D}$$

它保持沿逐层有效满射的逐层拉回。我们称螺旋系统 H 是收敛的 ，如果比较映射

$$H(\mathrm{id}) \to \lim_{n\to\infty} H(\tau_{<n})$$

是一个等价。我们记作

$$\mathrm{Spiral}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{E}\mathrm{lm}, \mathcal{D})$$

对于螺旋系统的全子范畴。

注 3.4.2. 初等修饰子的逐级拉回图，恰好是由包含 $\mathcal{E}\mathrm{lm} \subseteq \mathrm{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})$ 保持的那些拉回图。我们不知道 $\mathcal{E}\mathrm{lm}$ 中的所有拉回图是否都具有这一性质。

螺旋系统 H 是塔的一种细化

$$H(\mathrm{id}) \to \cdots \to H(\tau_{\le n}) \to H(\tau_{<n}) \to \cdots H(\tau_{\le 0}),$$

为这个塔赋予额外结构，该结构以超简单空间的 Postnikov 塔为模型。螺旋系统的例子在自然界中随处可见，下面我们将对此加以说明。

例 3.4.3. 设 X 是一个超简单空间。那么，这一赋值

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}, \qquad F \mapsto F(X)$$

显然是一个空间的螺旋系统。

例 3.4.4. 令 $\mathcal{P}$ 为一个具有超简单映射空间的 ∞-范畴（例如 Malcev 理论或 ∞-群胚，参见 例 3.2.5）。那么 命题 2.5.4 表明

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty, \qquad F \mapsto \mathcal{P}_F$$

是一个由 ∞-范畴构成的收敛螺旋系统。

注 3.4.5. 若 $\mathcal{D}$ 是任意一个 ∞-范畴，且具有极限，则

$$\mathrm{Spiral}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{E}\mathrm{lm}, \mathcal{D})$$

在极限下封闭。此外，与任意保拉回的 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$进行后复合会诱导一个函子

$$\mathrm{Spiral}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spiral}(\mathcal{D}).$$

螺旋系统形式体系也足够稳健，能够在非超简单情形中编码波斯尼科夫结构，例如任意空间的 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{pc}^{\mathrm{of}}$。

例 3.4.6. 对于 $m \geq 0$，令 $\mathcal{C}\mathrm{at}^{(\infty,m)}$ 表示 (∞, m)-范畴的 ∞-范畴，并令 $\mathrm{End}^{\times}(\mathcal{C}\mathrm{at}^{(\infty,m)})$表示 $\mathcal{C}\mathrm{at}^{(\infty,m)}$的保积自函子所构成的 ∞-范畴。我们断言，对于所有 $m \geq 0$，都存在一个螺旋系统扩张如下赋值

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathrm{End}^{\times}(\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,m)}), \qquad \tau_{<n} \mapsto (\mathsf{C} \mapsto \mathrm{h}_{(m+n,m)}\mathsf{C}). \tag{3.4.7}$$

In 特别是，命题 3.4.10的线性扩张将扩展波斯尼科夫不变量 s of (∞, m)-范畴，由 Harpaz–Nuiten–Prasma 在 [HNP20] 中构造。

这个螺旋系统通过对 m 归纳构造如下。若 $m = 0$，则 $\mathcal{C}$在$_{(\infty,0)} \simeq \mathcal{S}\mathrm{pc}$等价于空间的 ∞-范畴。将空间视为 ∞-群胚，例 3.4.3 和例 3.2.5 结合起来，为任意空间 X 构造一个扩展赋值的螺旋系统

$$\tau_{<n} \mapsto X_{\leq n} \simeq \mathrm{h}_n X.$$

这个构造关于 X 是自然的，并确定了一个螺旋系统

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathrm{End}^{\times}(\mathcal{S}\mathrm{pc}) \simeq \mathrm{End}^{\times}(\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,0)}),$$

现在，假设归纳地有 $m > 0$，并且我们已经构造了（3.4.7）的螺旋系统。由于

$$\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,m+1)} \simeq \mathcal{C}\mathrm{at}(\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,m)}),$$

Recollection 2.1.5中的富化变换过程确定了一个函子

$$\mathrm{End}^{\times}(\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,m)}) \to \mathrm{End}(\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,m+1)}).$$

复合映射

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathrm{End}^{\times}(\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,m)}) \to \mathrm{End}(\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,m+1)})$$

可见，它定义了一个螺旋系统，取值于保积函子的全子范畴，并扩展赋值 $\tau_{<n} \mapsto$(C $\mapsto$h $_{(m+n+1,m+1)}$C)。

Ex例 3.4.8。设 H 是一个由（∞，$n+1$）-范畴构成的螺旋系统。对于 X，$Y \in H$（id），th e assi赋

$$\mathrm{map}_H(X, Y)(F) = \mathrm{map}_{H(F)}(\pi_{F!}X, \pi_{F!}Y)$$

定义了一个由（∞，n）-范畴构成的螺旋系统；当 H 收敛时，该系统也收敛。

例 3.4.9。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-拓扑斯。对于 $X \in \mathcal{X}$，存在一个螺旋系统，将赋值扩展为

$$\tau_{<n} \mapsto X_{\leq n}.$$

此外，当且仅当 X 超完备时，该系统才是收敛的。可以将 $\mathcal{X}$ 写成某个预层 ∞-拓扑斯的左正合局部化，并对 例 3.4.6 中关于 $m = 0$ 的构造进行层化，从而构造出该螺旋系统。若 X 是由超简单空间构成的层，则也可以直接对 $F \mapsto F(X)$ 进行层化。

螺旋系统所编码的结构中，或许最重要的是以下内容 .

命题 3.4.10. 设 H 是一个 ∞-范畴 $\mathcal{D}$中的螺旋系统。对于所有 $1 \leq r \leq n < \infty$，映射 $H(\tau_{<n+r})$ $\to H(\tau_{<n})$ 是如下意义下的平方零扩张：该集合

$$\{H(K^m_{n,r}) : m \geq 0\}$$

组装成一个对象

$$H(K^\bullet_{n,r}) \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{D}_{/H(\tau_{<r})}),$$

并且存在自然的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccccc} H(\tau_{<n+r}) & \xrightarrow{\tau_{(n+r,r)!}} & H(\tau_{<r}) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{(n+r,n)!}} & & \downarrow{\scriptstyle 0_!} & \searrow\!\!\searrow & \\ H(\tau_{<n}) & \xrightarrow{k_!} & H(K^{n+1}_{n,r}) & \xrightarrow{q_!} & H(\tau_{<r}) \end{array}.$$

证明。 根据 记号 3.1.18，我们有

$$K^\bullet_{n,r} \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{E}\mathrm{lm}_{/\tau_{<r}}).$$

根据定义，这由一个函子编码

$$K^\bullet_{n,r} \colon \mathcal{R}^\omega_-(\mathbf{S}_{<r})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}\mathrm{lm}_{/\tau_{<r}}$$

它保持终对象，并保持沿某些映射的拉回；这些映射在 $\mathcal{E}\mathrm{lm}_{/\tau_{<r}}$ 中被送到逐层有效满射。因此，H 是一个螺旋系统这一假设确保复合

$$H \circ K^\bullet_{n,r} \colon \mathcal{R}^\omega_-(\mathbf{S}_{<r})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}\mathrm{lm}_{/\tau_{<r}} \to \mathcal{D}_{/H(\tau_{<r})}$$

再次定义一个 $\mathbf{S}_{<r}$-模对象，并且 H 将 注记 3.1.19 中的笛卡尔方块映射为 $\mathcal{D}$中的笛卡尔方块。□

注记 3.4.11。 在 命题 3.4.10的设定下，当 $\mathcal{D} = \mathcal{C}$位于$\infty$ 时，我们称 $H(\tau_{<n+r})$是由 $H(\tau_{<n})$ 通过 $H(K^\bullet_{n,\ r})$得到的线性扩张。我们将在后文第 6.2 节中更深入、更一般地研究线性扩张。第 6.2 节。

注记 3.4.12。 设 H 是一个 ∞-范畴 $\mathcal{D}$中的螺旋系统。随着 $1 \leq r \leq n$ 变化，这些对象

$$H(K^\bullet_{n,r}) \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{D}_{/H(\tau_{<r})})$$

满足各种相容性条件：例如，存在纤维列

$$H(\tau_{<r+t}) \times_{H(\tau_{<t})} H(K^{\bullet+r}_{n+r,n+r+t}) \to H(K^\bullet_{n,n+r+t}) \to H(\tau_{<r+t}) \times_{H(\tau_{<r})} H(K^\bullet_{n,n+r})$$

在 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}(\mathcal{D}_{/H(\tau_{<r+t})})$ 中（当这些项有定义时）。螺旋系统提供了一种便捷的方式，将所有这些额外结构打包成一个相干对象。

4. Infinitesimal extensions of Malcev theories

本节的目标是研究赋值在多大程度上

$$\mathcal{M}\mathrm{alc} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty, \qquad \mathcal{P} \mapsto \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

Malcev 理论 $\mathcal{P}$ 的 ∞模型范畴保留拉回。特别地，我们建立了充分条件，使 Malcev 理论的笛卡尔方形在转至模型范畴时得以保留。对于$\mathcal{P}$的 Postnikov 方块，这些充分条件很容易验证，因此我们可以证明引言中讨论的 $\mathcal{P}$ 螺旋方形是笛卡尔方形。

4.1. 一个弱拉回定理

我们先建立一个容易得多的弱拉回定理，定理 4.1.5，它给出了比较映射何时是满忠实的条件，该映射取值于 ∞模型范畴的拉回。举例来说，这一结果已经足以为 Malcev 理论的模型构造有用的映射空间分解，具体见 §4.2。随后，在 §4.4中，我们将在进一步的假设下，把此处给出的定理加强为 ∞范畴之间的实际等价。

Defi定义 4.1.1. 称函子 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是局部 n-连通的，如果对于所有 $a, b \in \mathcal{C}$，诱导出的映射 $\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(a,b) \to \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(a,b)$ 是 n-连通的。

例 4.1.2. 函子 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是局部 0-连通的，当且仅当它是满的。

例 4.1.3. 给定一个连通环谱的映射 $\phi\colon R \to S$，其诱导同态

$$\mathcal{L}_0(R) \to \mathcal{L}_0(S)$$

理论之间的（见 [BP，§9。1]）局部 n-连通，当且仅当 ϕ 是 n-连通的。

引理 4.1.4. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是 Malcev 理论之间的局部 n-连通映射。

(1) 若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，则单位 $\eta_X\colon X \to f^* f_! X$ 是 n-连通的。(2) 若 f本质满且 $Y \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$，则余单位 $\epsilon_Y\colon f_! f^* Y \to Y$是 $(n+1)$-连通的。

证明。 (1) 由于空间之间的 n-连通映射在余极限下封闭，且 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的几何实现是逐层计算的，我们可以用可表对象对 X 作解析，从而将问题归结为某个 $P \in \mathcal{P}$ 的情形。单位 $\nu P \to f^* f_! \nu P$ 在 $P' \in \mathcal{P}$ 上取值后，等价于映射 $\mathcal{P}(P', P) \to \mathrm{map}_{\mathcal{Q}}(fP', fP)$，根据假设，这是 n-连通的。

（2）考虑三角恒等式：

$$\begin{array}{ccc} f^*Y & & \\ {\scriptstyle \eta_{f^*Y}}\downarrow & \searrow & \\ f^* f_! f^* Y & \xrightarrow[f^*\epsilon_Y]{} & f^*Y \end{array} .$$

由（1）可知，单位 η_{f^*Y}是 n-连通的。由 [Lur17，命题 6.5。120] 可知， $f^*\epsilon_Y$ 是（$n+1$）-连通的。由于 f本质满，我们推得 ϵ_Y是 （$n+1$）-连通的。□

定理 4.1.5。设

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{Q}' & \xrightarrow{g} & \mathcal{Q} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}'} & \xrightarrow{g'_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \\ \downarrow{\scriptstyle f'_!} & & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}'} & \xrightarrow{g_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \end{array}$$

是 Malcev 理论与保持余积的函子的交换方块，并且对应地给出 ∞-模型范畴的交换方块。假设 $\mathcal{P}' \to \mathcal{Q}' \times_{\mathcal{Q}} \mathcal{P}$ 是全忠实的，并且 f 是满的。则

（1）比较函子 $L\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}'} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}'} \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 具有一个右伴随R，它将拉回 ∞-范畴中的一个对象（记作三元组）$\langle Y, X, \alpha\rangle$，其中 $Y \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}'}$、 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，以及 $\alpha\colon g_! Y \simeq f_! X$，映射为

$$R(\langle Y, X, \alpha\rangle) = f'^* Y \times_{d^* f_! X} g'^* X,$$

其中 $d := f \circ g' = g \circ f'$。

(2) 对于任意 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}'}$，单位 $X \to RLX$ 是一个等价。等价地， L 是全忠实的。

证明。 断言 (1) 是形式上的。对于 (2)，注意到由于 $\mathcal{P}' \to \mathcal{Q}' \times_{\mathcal{Q}} \mathcal{P}$ 是全忠实的，当 $X = \nu P'$ 对某个 $P' \in \mathcal{P}'$成立时，单位是一个等价。要证明对于任意 X它总是一个等价，因此只需验证

$$RLX = f'^* f'_! X \times_{d^* d_! X} g'^* g'_! X$$

保持几何实现 X。每个函子 $f'^* f'_!$、 $d^* d_!$和 $g'^* g'_!$都保持几何实现，而 f 是满函子的假设，根据引理 4.1.4 可知，$g'^* g'_! X \to d^* d_! X$ 是一个有效满射，因此 [BP、推论 4.1.8.(2)] 说明相关的拉回也保持几何实现。□

4.2. 导出波斯特尼科夫方块

固定一个 Malcev 理论 $\mathcal{P}$。作为定理 4.1.5的应用，本节将说明如何为 $\mathcal{P}$ 的任意模型关联一个导出版本的 Postnikov 塔，此前 Bal25，§5 中已对此进行过研究。4]事实上，我们将做得更多：我们不仅会构造一个导出 Postnikov 塔，还会给出更详尽的螺旋系统数据，从而保证导出 Postnikov 塔具有第 3.4 节中讨论的所有附加结构与自然性。

记号 4.2.1。 给定空间 T 和 $1 \le r \le \infty$，我们记

$$(-)_T \colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}$$

为唯一一个保几何实现的构造，它将下列赋值扩展为

$$\nu_r(P) \mapsto \tau_{<r}(\nu(P)^T)$$

可表对象上的赋值。

注 4.2.2。 给定 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}$，我们可以将其识别为

$$X_T \simeq \pi_\alpha^* \pi_{\alpha!} X$$

其中

$$\pi_\alpha \colon \mathrm{h}_r\mathcal{P} \simeq \mathcal{P}_{\tau_{<r}} \to \mathcal{P}_{\tau_{<r}\,\mathrm{map}(T,-)} \simeq \mathrm{h}_r\mathcal{P}_{\mathrm{map}(T,-)}$$

由自然变换诱导 $\alpha\colon \ \tau_{<r} \to \tau_{<r}$映射$(T, \ -)$沿唯一映射限制 $T \to *$。若 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，则根据命题 2.5.4.(1) 和 命题 3.3.2.(2)，这是初等修饰子之间的自然变换。

警告 4.2.3。 请注意，函子 $(-)_T\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}$ 取决于 ∞-范畴 $\mathcal{P}$，而不仅仅取决于其同伦 r-范畴 $\mathrm{h}_r\mathcal{P}$。这拓展了如下观察：对于空间 X， $\tau_{<r}(X^T)$ 的同伦类型不仅取决于截断 $\tau_{<r}X$。

例 4.2.4。 如果 $\mathcal{P}$ 具有由 T索引的常值余极限，那么 Λ_T 由以下条件刻画 y

$$\mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\nu_r P, \Lambda_T) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\nu_r(T \otimes P), \Lambda);$$

也就是说，$(-)_T$由与 $\mathrm{h}_r\mathcal{P}$ 上由 $T\otimes(-)\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$诱导的自函子进行前合成给出。特别地，在这种情况下，$(-)_T$ 是连续的。

例 4.2.5。 设 R 是一个连通 $\mathbf{E}_1$-环，并且 $\mathcal{L}_0(R)$ 是自由连通 R-模的 Malcev 理论，因此 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}} \simeq \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\ge 0}_{\pi_0 R}$ (见 [BP，§9。1]) 。如果 $M \in \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}^{\ge 0}_{\pi_0 R}$，则

$$M_{S^n} \simeq (\pi_0 R \oplus \pi_n R) \otimes_{\pi_0 R} M \simeq \pi_n R \otimes_{\pi_0 R} M \oplus M.$$

额外的一份 M 是作为 记号 4.2.1 中的非带基点对象出现的。

引理 4.2.6。取 $1 \le r, \ n \le \infty$ 以及 $\Lambda \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}$。

(1) 比较映射 $\Lambda_{S^n \vee S^n} \to \Lambda_{S^n} \times_\Lambda \Lambda_{S^n}$ 是一个等价，因此 S^n 上的余积使 Λ_{S^n} 成为 $(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}})_{/\Lambda}$ 中的类群 $\mathbf{E}_n$-代数。

(2) 如果 $r \leq n$，那么存在一个等价

$$\Lambda_{S^n} \simeq 0^* 0_! \Lambda$$

的 $\mathbf{E}_n$-代数，其中 $0\colon \mathrm{h}_r\mathcal{P} \to \mathrm{k}^0_{n,r}\mathcal{P}$ 如 记号 3.2.2 所述。特别地，$\mathbf{E}_n$-代数结构可唯一地自然细化为 Λ_{S^n} 在 Λ 上的连通$\mathbf{S}_{<r}$-模结构 Λ。

(3) 如果 $\mathcal{P}$ 是环路理论，那么就兼容导出截断，其含义是 e that

$$\tau_{(r,i)!}(\Lambda_T) \simeq (\tau_{(r,i)!}\Lambda)_T$$

对任意 $i \leq r$ 和任意空间 T均成立。

证明。 (1) 对 $\Lambda = \nu P$ 且 $P \in \mathcal{P}$ 的情形，由 命题 3.3.1 得出。由于两边都保持 Λ中的几何实现，左边由构造得出，右边由 [BP、推论 4.1 得出。8], 因此，这对 Λ 任意情形均成立。

(2) 这是 注 4.2.2 在 $T = S^n$ 情形下的重述，因为 $\tau_{<r}$ 映射$(S^n, -) \simeq K^0_{n,\ r}$ 由命题 3.3.1得出。

（3）两种构造

$$\Lambda \mapsto \tau_{(r,i)!}(\Lambda_T), \qquad \Lambda \mapsto (\tau_{(r,i)!}\Lambda)_T$$

都保几何实现，因此只需证明它们限制到可表示对象后相同。若 $P \in \mathcal{P}$，由于环路模型在极限下封闭，我们可以将其识别为

$$\begin{aligned}\tau_{(r,i)!}(\nu_r(P)_T) &\simeq \tau_{(r,i)!}(\tau_{<r}(\nu(P)^T)) \simeq \tau_{(r,i)!}(\tau_{r!}(\nu(P)^T)) \\ &\simeq \tau_{i!}(\nu(P)^T) \simeq \tau_{<i}(\nu(P)^T) \simeq \nu_i(P)_T \simeq (\tau_{(r,i)!}\nu_r(P))_T\end{aligned}$$

如所声称的那样。这里我们用到这样一个事实：若 X 是一个环路模型，则 $\tau_{n!}X \simeq X_{<n}$ [BP，命题 7.1。10]。 □

例 4.2.7。若 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，则

$$(\tau_! X)_{S^n} = \Pi_{n!} X,$$

这是一个 $\mathbb{Z}$ 上的 $\tau_! X$-模对象。

现在我们将这些导出同伦模置于导出 Postnikov 方块之中。一般定理如下。

定理 4.2.8. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论， $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是一个模型。那么

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}, \qquad F \mapsto \pi_F^* \pi_{F!} X$$

这是一个收敛螺旋系统。

证明. 我们首先验证这是一个螺旋系统。假设给定一个逐层笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{\alpha'} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \eta'} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ G' & \xrightarrow{\alpha} & G \end{array}$$

初等修饰子，其中 η 是逐层有效满态射。 命题 2.5.4.(5) 表明，如果 $\mathcal{P}$ 是 Malcev 理论，那么

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{F'} & \xrightarrow{\pi_{\alpha'}} & \mathcal{P}_F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\eta'}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\eta} \\ \mathcal{P}_{G'} & \xrightarrow{\pi_\alpha} & \mathcal{P}_G \end{array}$$

是 Malcev 理论与同态构成的笛卡尔方形。由于 η 是逐层有效满态射，π_η 是满的，因此 定理 4.1.5 表明，如果 $Y \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathcal{P}}_{F'}$ 并且记作$\delta = \alpha \circ \eta' = \eta \circ \alpha'$，那么

$$Y \to \pi^*_{\eta'}\pi_{\eta'!}Y \times_{\pi^*_\delta \pi_{\delta!}Y} \pi^*_{\alpha'}\pi_{\alpha'!}Y$$

是一个等价。将情形特化到 $Y = \pi_{F'!}X$，并进一步应用 $\pi^*_{F'}$，即可证明

$$\pi^*_{F'}\pi_{F'!}X \to \pi^*_{G'}\pi_{G'!}X \times_{\pi^*_G \pi_{G!}X} \pi^*_F \pi_{F!}X$$

是一个等价，如所声称的那样。接下来需要证明该螺旋系统是收敛的，也就是说，

$$X \to \lim_{n\to\infty} \tau^*_n \tau_{n!}X$$

是一个等价。这是因为 $X \to \tau^*_n\tau_{n!}X$ 是 $(n-1)$-连通的，由 引理 4.1.4可知。 □

构造出一个螺旋系统后，我们来单独考察 Postnikov 方块本身。

定义 4.2.9。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，$1 \le r \le n < \infty$ 是整数。模型 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}}$ 的导出 *Postnikov 方形* 是笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tau^*_{(n+r,r)}\tau_{(n+r)!}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau^*_{(n+r,n)}\tau_{(n+r,n)!}X & \longrightarrow & \tau^*_{(n+r,r)}B^{n+1}_{\tau_{(n+r,r)!}X}(\tau_{(n+r)!}X)_{S^n} \end{array} \longrightarrow \tau^*_{(n+r,r)}\tau_{(n+r,r)!}X$$

通过应用定理 4.1.5 于范畴化 Postnikov 方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P} & \xrightarrow{\tau_{(n+r,r)}} & \mathrm{h}_r\mathcal{P} \\ {\scriptstyle \tau_{(n+r,n)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathrm{h}_n\mathcal{P} & \xrightarrow{k} & \mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{P} \end{array} \xrightarrow{k} \mathrm{h}_r\mathcal{P}$$

的 $\mathcal{P}$ 依照构造 3.2.4，并应用引理 4.2.6 以确定 $0^*0_!\Lambda = B^{n+1}_\Lambda \Lambda_{S^n}$对于 $\Lambda \in \mathcal{M}$型$_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}$。

特别地，任意模型 $X \in \mathcal{M}$型$_{\mathcal{P}}$ 都存在一个导出 *Postnikov* 塔

$$X \simeq \lim_{n\to\infty} \tau^*_n\tau_{n!}X,$$

其各层构成笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \tau^*_{(n+r)}\tau_{(n+r)!}X & \longrightarrow & \tau^*_r\tau_{r!}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau^*_n\tau_{n!}X & \longrightarrow & \tau^*_r B^{n+1}_{\tau_{r!}X}(\tau_{r!}X)_{S^n} \end{array} .$$

对于任意 $r \le n$。这引出了 $\mathcal{M}$型$_{\mathcal{P}}$中映射空间的如下有用分解:

命题 4.2.10. 给定 X，$Y \in \mathcal{M}$型$_{\mathcal{P}}$，存在一个分解

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Y,X) \simeq \lim_{n\to\infty} \mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X),$$

其各层均可嵌入笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}_{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}}(\tau_{(n+r)!}Y, \tau_{(n+r)!}X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\tau_{r!}Y, \tau_{r!}X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\tau_{r!}Y, B^{n+1}_{\tau_{r!}X}(\tau_{r!}X)_{S^n}) \end{array} \longrightarrow \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\tau_{r!}Y, \tau_{r!}X)$$

对所有 $1 \le r \le n < \infty$ 均成立。

*Pro*关于。 将 Y映射到 X 的导出 Postnikov 塔中，并应用伴随 $\pi_{F!} \dashv \pi^*_F$。 □

推论 4.2.11。 固定 X，$Y \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 以及一个映射 ϕ: $\tau_{r!}Y \to \tau_{r!}X$。对于 $n \geq r$，记作

$$\mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X)_{\phi} = \{\phi\} \times_{\mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\tau_{r!}Y, \tau_{r!}X)} \mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X)$$

对于映射 $\tau_{n!}Y \to \tau_{n!}X$ 提升 ϕ的空间。于是存在一个分解

$$\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(Y, X)_{\phi} \simeq \lim_{r \leq n \to \infty} \mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X)_{\phi},$$

其层构成笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}_{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}}(\tau_{(n+r)!}Y, \tau_{(n+r)!}X) & \longrightarrow & \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{map}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}(\tau_{n!}Y, \tau_{n!}X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}/\tau_{r!}X}(\tau_{r!}Y, B^{n+1}_{\tau_{r!}X}(\tau_{r!}X)_{S^n}) \end{array}.$$

*Pro*关于。 这由 命题 4.2.10 沿 $\{\phi\} \to$ 映射$_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}(\tau_{r!}Y,\ \tau_{r!}X)$. □

4.3. 截断态射与连通态射

本小节的目标是汇集一些关于连通性的重要技术性质。下一节将用到这些性质来证明定理 4.4.4。回顾 [BP，§3。3]其中指出，若 $\mathcal{P}$ 是 Malcev 理论，则 $(n+1)$-连通态射和 n-截断态射在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$上构成一个分解系统，且连通性与分解可由嵌入$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}},\ \mathcal{S}\mathrm{pc})$反映，即逐层计算。因此，空间的一般连通性性质逐层推导后，便可得到马尔采夫理论的模型所对应的性质。我们先记录其中一些性质。

引理 4.3.1。 令 $X \to Y$ 为一个 n-连通态射。

(1) X 是 n-连通的，当且仅当 Y 是 n-连通的。(2) 如果 X 是 $(n+1)$-连通的，那么 Y是 $(n+1)$-连通的，

证明。 (1) 这是 [Lur17，命题 6.5.1.16(5)]。

(2) 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{\leq n} & \longrightarrow & Y_{\leq n} & \longrightarrow & * \end{array}.$$

由于 $Y \to Y_{\leq n}$ 是 $(n+1)$-连通的， Y是 $(n+1)$-连通的，当且仅当 $Y_{\leq n}$ 是 n-连通的。由于 X 是 $(n+1)$-连通的，复合映射 $X_{\leq n} \to Y_{\leq n} \to *$ 是一个等价，因此[Lur17，命题 6.5.1.20]表明， $Y_{\leq n}$ 是 $(n+1)$-连通的，当且仅当 $X_{\leq n} \to Y_{\leq n}$是 n-连通的。这是 n-连通映射 $X \to Y \to Y_{\leq n}$ 的复合，因此是n-连通的，结论得证。□

定义 4.3.2. 一个方形

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

称为 n-笛卡尔的，如果满足以下任一等价条件:

(1) 比较映射 $A \to B \times_D C$ 是 n-连通的；(2) 在 B 的每个基点处，纤维之间的诱导映射 Fib(f) $\to$ Fib(g) 是 n-连通的；(3) 在 C 的每个基点处，纤维之间的诱导映射 Fib(p) $\to$ Fib(q) 是 n-连通的。

引理 4.3.3。 考虑一个图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{g} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

其中竖直复合为恒等态射。如果底部方块是 $(n+1)$-笛卡尔的，那么顶部方块是 n-笛卡尔的；反之，如果 $B \to D$ 是有效满射，则结论也成立。

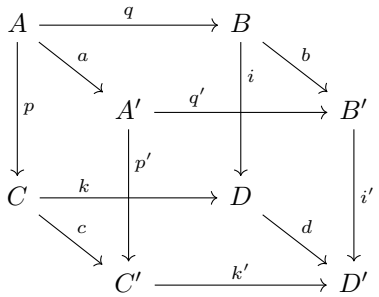
证明。 在 B 的每个基点上，该图表诱导一个截面

$$\mathrm{Fib}(f) \to \mathrm{Fib}(g) \to \mathrm{Fib}(f).$$

根据 [Lur17，命题 6.5.1。20], 我们得到 纤维(f) $\to$ 纤维(g) 是 n-连通，当且仅当纤维(g) $\to$ 纤维(f) 是 $(n+1)$-连通。引理得证。□

引理 4.3.4。 考虑一个立方体

(4.3.5)



其中前侧面和后侧面均为笛卡尔的，即 $A \simeq B \times_C D$ 和 $A' \simeq B' \times_{C'} D'$。

(1) 若右侧面是 n-笛卡尔的，则左侧面是 n-笛卡尔的；若 k 是有效满射，反之亦成立。

(2) 若右侧面是 n-笛卡尔的，且 c 是 n-连通的，则 a 是 n-连通的。(3) 若右侧面是 n-笛卡尔的， a 是 $(n+1)$-连通的，且 p' 是有效满射，则 c 是 $(n+1)$-连通的。

Proof. (1) 由于右侧面是 n-笛卡尔的，且前面和后面都是笛卡尔的，因此 that 对于 C 的任意基点，映射

$$\mathrm{Fib}(A \to C) \simeq \mathrm{Fib}(B \to D) \to \mathrm{Fib}(B' \to D') \simeq \mathrm{Fib}(A' \to C')$$

是 n-连通的，因此左侧面是 n-笛卡尔的。反过来，如果 k 是有效满射，那么 D 的任意基点都可以提升为 C的一个基点，随后同样的论证即可适用。

(2) 假设 c 是 n-连通的。映射 a: $A \to A'$ 是 n-连通的，当且仅当 Fib(a) 是 n-连通的，对 A'的所有基点均如此。这些纤维构成笛卡尔方形

(4.3.6)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fib}(a) & \longrightarrow & \mathrm{Fib}(b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fib}(c) & \longrightarrow & \mathrm{Fib}(d) \end{array} .$$

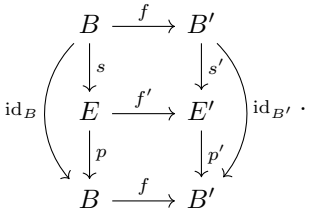
由于 (4.3.5) 的最右方块是 n-笛卡尔的，因此映射 Fib(b) $\to$ Fib(d) 是 n-连通的。由于 n-连通态射在拉回下稳定，因此 Fib(a) $\to$Fib(c) 是 n-连通的。由于 Fib(c) 是 n-连通的，由引理 4.3.1.(1) 可知 Fib(a) 是 n-连通的。

（3）假设 a 是（$n+1$）-连通的，且 p' 是有效满射。映射 c 是（$n+1$）-连通的，当且仅当 Fib(c) 在 C' 的所有基点处都是（$n+1$）-连通的。由于 p'

是有效满射， C' 的任意基点都可提升为 A' 的基点，因此 Fib(c) 可放入如（4.3.6）所示的交换图中。由于（4.3.5）的最右方块是 n-笛卡尔的，Fib(b) $\to$ Fib(d) 是 n-连通的，因此 Fib(a) $\to$Fib(c) 是 n-连通的。由于 Fib(a) 是（$n+1$）-连通的，由引理 4.3.1.(2) 可知，Fib(c) 是（$n+1$）-连通的。□

接下来我们将确立导出函子的一个关键技术性质，命题 4.3.8 如下所述，该性质是 Malcev 理论所特有的。

引理 4.3.7。 考虑一个图表



假设底部方形具有 Malcev 运算。如果 f' 是 n-连通的，那么底部方形是 n-笛卡尔的。

证明。 这是 [BP的命题 2.2 的一个直接推论。14]。 □

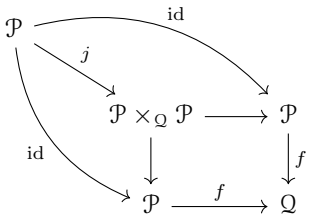
命题 4.3.8。 假设 $m \geq -1$ 并且 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是 Malcev 理论之间的局部 m-连通同态。如果 $X \to Y$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的一个 n-连通映射，那么

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*f_!X & \longrightarrow & f^*f_!Y \end{array} \tag{4.3.9}$$

是 $(n+m)$-笛卡尔的。

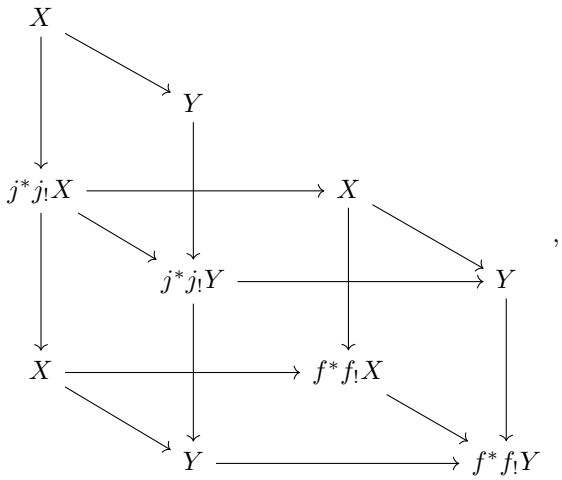
证明。 当 $m=-1$， 引理 4.1.4 表明（4.3.9）中的垂直箭头是 n-连通的。由于任意两个 n-连通对象之间的映射至少是$(n-1)$-连通的，因此该方形是 $(n-1)$-笛卡尔的。

现在假设 $m \geq 0$，并构造图表



其中内方形是笛卡尔方形。这里， $\mathcal{P}\times_{\mathcal{Q}}\mathcal{P}$ 根据 [BP，注 3.1.3、引理 4.1.5.(3)] ，仍是一个 Malcev 理论，因为条件 f 是满的，确保对角线 j 是本质满的。

固定一个 n-连通态射 $X \to Y$ 于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$中。应用 定理 4.1.5 于 $j_!X$ 并沿 j^*作拉回后，可将其扩展为 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的如下形式的图表



其中前侧面和后侧面均为笛卡尔，左侧竖直复合为恒等态射。我们必须证明右侧面是 $(n+m)$-笛卡尔的。由于 f 是满的， $X \to f^*f_!X$ 由引理 4.1.4可知是有效满射，因此根据 引理 4.3.4.(1)，只需证明左下侧面是$(n+m)$-笛卡尔的。

现在我们对 m 作归纳。首先考虑基例 $m=0$。在对象 $P \in \mathcal{P}$ 上取值后，左侧的面是如下形式的矩形

$$\begin{array}{ccc} X(P) & \longrightarrow & Y(P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j^*j_!X(P) & \longrightarrow & j^*j_!Y(P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(P) & \longrightarrow & Y(P) \end{array} .$$

此图表允许一个 Malcev 运算，因此 引理 4.3.7 表明该方块是n-笛卡尔的，前提是 $j^*j_!X \to j^*j_!Y$ 是 n-连通的；根据 $X \to Y$ 是 n-连通的，这在 [BP，命题 6.2 的条件下成立。1]。

接下来考虑归纳步骤 $m>0$。由于 f 是局部 m-连通的， j 是局部（$m-1$）-连通的，并且 $m>0$ 这意味着 $Y \to j^*j_!Y$ 是一个有效满射。根据归纳，图表中的上方方块

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ j^*j_!X & \longrightarrow & j^*j_!Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

是 （$n+m-1$）-笛卡尔的，因此 引理 4.3.3 表明下方方块是 （$n+m$）-笛卡尔的。 □

Ex命题 4.3.10。 连通环谱之间的一个映射 $f\colon R \to S$ 诱导出一个导出函子

$$S \otimes_R (-)\colon \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} \to \mathrm{L}\mathcal{M}\mathrm{od}_S^{\geq 0}.$$

在此语境下，命题 4.3.8 意味着，若 M 是一个 n-连通 R-模，且f 是 m-连通的，那么单位 $M \to S \otimes_R M$ 是$(n+m)$-连通的。

4.4. Malcev 理论模型的拼接

在本节中，我们通过给出一些条件来扩展定理 4.1.5 ，在这些条件下，进入 ∞-模型范畴拉回的比较函子是一个等价。

定义 4.4.1. 若对任意$n \geq 0$ 以及 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$中的任意态射 $\alpha\colon X \to Y$，当 $f_!\alpha$ 是 n-连通时， α 也是 n-连通，则称导出函子 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 反映连通性 。

注 4.4.2. 映射 $\alpha\colon X \to Y$ 是等价，当且仅当对所有n它都是 n-连通的；若 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 反映连通性，则 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 是保守的。

例 4.4.3. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是 Malcev 理论的同态。若 f 本质满，则限制函子 $f^*\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ 反映连通性。

定理 4.4.4. 考虑一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{Q}' & \xrightarrow{g} & \mathcal{Q} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}'} & \xrightarrow{g'_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \\ \downarrow{\scriptstyle f'_!} & & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}'} & \xrightarrow{g_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \end{array}$$

Malcev 理论及其同态，以及相应的模型 ∞-范畴交换方块。假设 f 是满的，且 f' 是本质满的，并且满足以下至少一个条件：

(1) f 反映连通性；(2) g 是满的；(3) $\mathcal{P}$、 $\mathcal{Q}$和 $\mathcal{Q}'$ 是加性的，

那么，相应的模型 ∞-范畴方块是笛卡尔的。

证明。 简记

$$\mathcal{D} = \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}'} \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}.$$

由于 f 是满的，定理 4.1.5 推出比较映射

$$L\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{D}$$

是全忠实的。为证明 L是一个等价，我们必须证明其右伴随 R 是保守的。与定理 4.1.5一样，$\mathcal{D}$ 中的一个对象可以表示为三元组 $\langle Y, X, \alpha\rangle$，其中 $Y \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}'}$, $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$且 $\alpha\colon g_!Y \simeq f_!X$，若简记 $d = fg' = gf'$，则右伴随 R 可描述为

$$R(\langle Y, X, \alpha\rangle) = f'^*Y \times_{d^* f_! X} g'^* X.$$

$\langle Y,\ X,\ \alpha\rangle \to \langle Y',\ X',\ \alpha'\rangle$ 中的一个态射由两个态射 $y\colon Y \to Y'$和$x\colon X \to X'$ 以及一个交换图表示

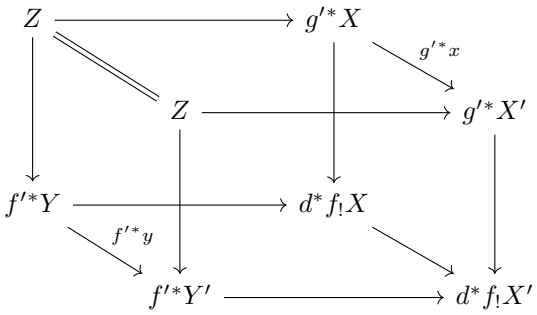
$$\begin{array}{ccc} g_!Y & \xrightarrow{f'_! y} & g_!Y' \\ \simeq\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \simeq\downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ f_!X & \xrightarrow{g'_! x} & f_!X' \end{array} \tag{4.4.5}$$

ide确定 $f'_!y \simeq g'_!x$。固定这样一个态射，并假设它经由 R 映为一个等价 .
Ab简写

$$Z = R(\langle Y, X, \alpha\rangle) \simeq R(\langle Y', X', \alpha'\rangle),$$

从而我们得到一个立方体

(4.4.6)



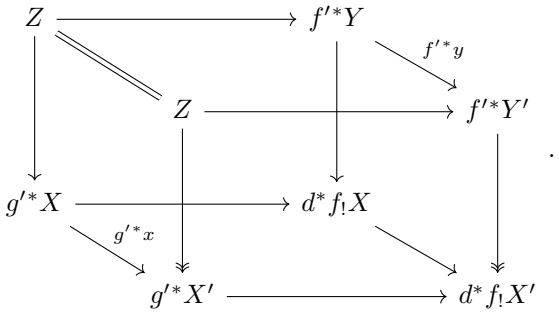
其中前面和后面是笛卡尔的。我们断言，如果 $Y \to Y'$ 是 n-连通的，那么$X \to X'$是 n-连通的；并且如果 $X \to X'$是 n-连通的，那么 $Y \to Y'$是 $(n+1)$-连通的。由于每个态射都是 (-1)-连通的，由归纳可得 $X \to X'$ 和 $Y \to Y'$ 是等价，因此 R 是保守的。

首先，假设$X \to X'$ 是 n-连通的。由于 f 是满的，命题 4.3.8 推出（4.4.6）的右侧面是 n-笛卡尔的，并且引理 4.1.4 推出映射 $g'^*X' \to d^*f_!X'$ 是有效满射。因此 $Z \to f'^*Y'$是有效满射，从而 $f'^*Y \to f'^*Y'$是$(n+1)$-连通的，这是由引理 4.3.4.(3) 得出的。由于 f' 是本质满的，因此 $Y \to Y'$是$(n+1)$-连通的。

接下来假设 y: $Y \to Y'$ 是 n-连通的。由 [BP，命题 6.2。1], 可知 $g_!y$是 n-连通的。由于 $g_!y \simeq f_!x$，这意味着 $f_!$ 是 n-连通的。现在我们根据附加假设（1–3）分情况讨论。

(1) 假设 f 反映连通性。由于 $f_!x$ 是 n-连通的，因此 x 是 n-连通的。

(2) 假设 g 是满的。考虑（4.4.6）的如下旋转：



由于 g是满的，单位 $Y' \to g^*f'_!Y'$由 引理 4.1.4可知是有效满射。由于 f'^*保有效满射，因此可知

$$f'^*Y' \to f'^*g^*f'_!Y' \simeq d^*f_!X'$$

是有效满射。由于有效满射在拉回下稳定，这意味着 $Z \to g'^*X'$是有效满射。由于 $f'^*Y \to f'^*Y'$和 $d^*f_!X \to f^*f_!X'$是 n-连通的，右侧面是 $(n-1)$-笛卡尔的。因此由 引理 4.3.4.(3) 可知 g'^*x 是n-连通的。由于 g' 本质满，因此可知 g' 是 n-连通的。

(3) 假设 $\mathcal{P}$、 Ω和 Ω' 是加性的。将这些 ∞-模型范畴嵌入其稳定化中后，我们便可以取余纤维，并且必须证明 x 的余纤维是 $(n+1)$-连通的。取余纤维后，我们得到一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & g'^{*}C(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f'^{*}C(y) & \longrightarrow & d^{*}C(f_!x) \end{array},$$

这意味着

$$\pi_k f'^{*}C(y) \oplus \pi_k g'^{*}C(x) \cong \pi_k d^{*}C(f_!x)$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立。由于 y 和 $f_!x$ 是 n-连通的，它们的余纤维是 $(n+1)$-连通的。在上述同构中取 $k \leq n$，这意味着对于 $k \leq n$，$\pi_k g'^{*}C(x) = 0$，因此 $g'^{*}C(x)$ 是 $(n+1)$-连通的。由于 g' 是本质满的，遂得出 $C(x)$ 是 $(n+1)$-连通的，正如所声称的那样。□

这使我们能够给出如下结果。

定义 4.4.7. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，且 $1 \leq r \leq n < \infty$ 是整数。$\mathcal{P}$ 的螺旋方块是 ∞-范畴的图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}} & & \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0_!} & \searrow & \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}} & \xrightarrow{k_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}} \end{array}$$

由 构造 3.2.4中的范畴化 Postnikov 方块经由转至 ∞-模型范畴而得到。

引理 4.4.8. 设给定 Malcev 理论之间的导出函子 $f\colon \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 和 $g\colon \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{R}$，且 g 反映连通性。那么，当且仅当 $g \circ f$ 反映连通性时，f 才反映连通性。

证明. 鉴于所有导出函子也保持连通性，这一点显然 [BP，命题 6.2。1]。□

例 4.4.9. 设 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是一个存在截面的同态：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & & \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \searrow & \\ \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathcal{P} \end{array}.$$

由于恒等映射显然反映连通性，引理 4.4.8 蕴含 f 反映连通性。

命题 4.4.10. Malcev 理论的螺旋方块是笛卡尔的。

证明。 根据 定理 4.4.4，只需证明零截面 $0\colon \mathrm{h}_r\mathcal{P} \to \mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{P}$ 是满的且反映连通性。这一点显然：根据构造，它是满的；由于它是一个截面，因此根据 例 4.4.9 可知它反映连通性。□

5. The spiral system of a Malcev theory

与 Malcev 理论 $\mathcal{P}$ 相关联的是其范畴Postnikov塔

$$\mathcal{P} \to \cdots \to \mathrm{h}_{n+1}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_n\mathcal{P} \to \cdots \to \mathrm{h}_1\mathcal{P}.$$

转到模型范畴会产生螺旋塔

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \cdots \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_{n+1}\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}} \to \cdots \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_1\mathcal{P}}.$$

在命题 4.4.10中，我们称出现在这个塔中的函子可以补全为某些笛卡尔螺旋方块。本节的主要目标是证明定理 5.3.1，该定理表明，这个塔实际上自然延拓为一个定义 3.4.1意义下的收敛螺旋系统。

5.1. 一个同调怀特海德定理

本节的主要技术工作是确立以下结果。

定理 5.1.1. 设 $\alpha\colon F \to G$ 是初等修饰子之间的一个自然变换。那么对于任意 Malcev 理论 $\mathcal{P}$，诱导同态 $\pi_\alpha\colon \mathcal{P}_F \to \mathcal{P}_G$ 反映连通性。

这里，如果一个 Malcev 理论的同态所诱导的导出函子在 ∞模型范畴之间反映连通性，我们就称该同态反映连通性。定理 定理 5.1.1 的证明占据了本小节及下一小节。本小节考虑截断 $\mathrm{id} \to \tau_{\leq 0}$这一特殊情形，它断言，对于任意 Malcev 理论 $\tau\colon \mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 都反映连通性。鉴于下面的例子，这可以看作是Malcev 理论背景下的同调怀特海德定理的一个版本。

例 5.1.2. 设 $\mathcal{P} = \langle \bigvee S^2 \rangle \subset \mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{\geq 2}$是由 2-球面的楔和张成的带基点空间的全子范畴。那么 h$\mathcal{P} \simeq \mathcal{L}_0(\mathbb{Z})$ 等价于阿贝尔群理论，而导出函子

$$\tau_! \colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}\mathcal{P}}$$

可与函子

$$\Sigma^{-2}\widetilde{C}_*(X;\mathbb{Z})\colon \mathcal{S}\mathrm{pc}_*^{\geq 2} \to \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}^{\geq 0}$$

作用于单连通空间上的两次悬垂的约化整链。 定理 5.1.1 现在断言，若 $f\colon X \to Y$ 是单连通空间之间的映射，则 f 是 n-连通的，当且仅当$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$诱导映射 $C_*(X;\mathbb{Z}) \to C_*(Y;\mathbb{Z})$ 是 n-连通的，从而恢复了单连通空间的经典同调怀特海德定理 [怀特海德49]。

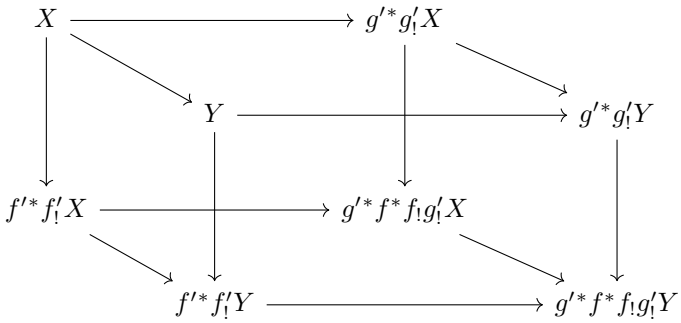
我们在此情形下所需的关键技术要点如下。

命题 5.1.3。 设我们给定一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{Q}' & \xrightarrow{g} & \mathcal{Q} \end{array}$$

由 Malcev 理论及同态构成。若 f 是满的并反映连通性，则 f'也具有同样性质。

证明。 由于满函子在拉回下封闭，我们只需证明 f' 反映 n-连通性。固定一个态射 $X \to Y$于 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}'}$中。根据 定理 4.1.5，我们可以构造一个立方体



其中前侧面和后侧面是笛卡尔的。假设 $f'_! X \to f'_! Y$是 n-连通的。由[BP，命题 6.2。1], 可知 $g_! f'_! X \to g_! f'_! Y$是 n-连通的。这等价于映射 $f_! g'_! X \to f_! g'_! Y$，因此由于 $f_!$ 将 n-连通映射反映出来，可知 $g'_! X \to g'_! Y$是 n-连通的。由于 f 是满的，根据 命题 4.3.8 可知，此立方体的右侧面是n-笛卡尔的，进而由 引理 4.3.4.(2) 可知 $X \to Y$是 n-连通的。 □

现在我们可以给出如下结果。

命题 5.1.4。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。那么 τ: $\mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 反映连通性。

证明。只需固定 $n \geq 0$ 并证明 $\tau_!$ 反映 n-连通态射。由于 $\mathrm{h}\mathcal{P} \simeq \mathrm{h}(\mathrm{h}_m\mathcal{P})$，且对所有 $m > 0$，$X \to \tau_m^*\tau_{m!}X$ 都是 $(m-1)$-连通的，因此我们可以将 $\mathcal{P}$ 替换为 $\mathrm{h}_m\mathcal{P}$，其中 m充分大。根据引理 4.4.8，反映连通性的导出函子在复合下封闭；通过归纳，这就归结为证明：若 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，则 $\mathrm{h}_{m+1}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_m\mathcal{P}$ 反映连通性。事实上，$\mathrm{h}_{m+1}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_m\mathcal{P}$ 位于构造 3.2.4 的范畴化 Postnikov 方块中：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{h}_{m+1}\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathrm{h}\mathcal{P} & & \\ \downarrow & & \downarrow 0 & \searrow & \\ \mathrm{h}_m\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathrm{k}_{m,1}^{m+1}\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \end{array} .$$

映射 $0\colon \mathrm{h}\mathcal{P} \to \mathrm{k}_m^{m+1}{}_{,1}\mathcal{P}$ 根据 例 4.4.9反映连通性，因此 $\mathrm{h}_{m+1}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_m\mathcal{P}$根据 命题 5.1.3反映连通性。□

推论 5.1.5。 设 f: $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是 Malcev 理论之间的一个同态。若 f_1: $\mathrm{h}\mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{Q}$反映连通性，则 f 反映连通性。

证明。 考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Q} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ \mathrm{h}\mathcal{P} & \xrightarrow{f_1} & \mathrm{h}\mathcal{Q} \end{array} .$$

若 f_1 反映连通性，则由于 $\mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 根据定理 5.1.1反映连通性，复合$\mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{Q}$ 根据引理 4.4.8 反映连通性，因此 $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 根据引理4.4.8反映连通性。□

推论 5.1.6。 要建立定理 5.1.1，只需证明：若 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论且 F 是一个初等修饰子，则唯一的自然变换 $\tau_{\leq 0}F \to \tau_{\leq 0}$ 诱导出一个同态 ϵ_F: $\mathcal{P}_{\tau_{\leq 0}F} \simeq \mathrm{h}(\mathcal{P}_F) \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 反映连通性。

证明。 设 α: $F \to G$ 是初等修饰子之间的一个自然变换，并令 $\mathcal{P}$ 为一个 Malcev 理论。根据推论 5.1.5，要证明 π_α: $\mathcal{P}_F \to \mathcal{P}_G$ 反映连通性，只需证明 π_α: $\mathrm{h}(\mathcal{P}_F) \to \mathrm{h}(\mathcal{P}_G)$ 反映连通性。由于对任意修饰子 F，该同态位于一个图表中

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\tau_{\leq 0}F} & \xrightarrow{\pi_{\overline{\alpha}}} & \mathcal{P}_{\tau_{\leq 0}G} \\ & {\scriptstyle \epsilon_F}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \epsilon_G} & \\ & \mathrm{h}\mathcal{P} & \end{array} .$$

根据引理 4.4.8，因此只需证明 ϵ_F 和 ϵ_G 反映连通性。 □

5.2. 初等修饰子的道路分支

根据推论 5.1.6，只要证明以下结论，定理 5.1.1 的证明便告完成。

命题 5.2.1。 设 F 是一个初等修饰子， $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。则唯一的自然变换 $\tau_{\leq 0}F \to \tau_{\leq 0}$ 诱导出一个同态 ϵ_F: $\mathcal{P}_{\tau_{\leq 0}F} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ ，该同态反映连通性。

证明将占据本小节的其余部分。

注 5.2.2. 命题 5.2.1 是本文较为技术性的结果之一。实际中，经常考虑的初等修饰子 F 通常满足 $\tau_{\leq 0}F \simeq \tau_{\leq 0}$，此时便无需证明任何内容。尤其是，本小节的工作对于我们在 §6中关于模空间的分解的应用并非必要。

例 5.2.3. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。我们断言，对于所有 $n \geq 1$，$\mathcal{P}_{\tau_{\leq 0}\text{映射}(S^n,-)} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 反映连通性。根据命题 3.3.1，我们可以将 $\tau_{\leq 0}\,\mathrm{map}(S^n,-) \cong \Pi_n(-)$ 视为相同。因此，∞-范畴 $\mathcal{P}_{\tau_{\leq 0}\text{映射}(S^n,-)} \simeq \mathcal{P}_{\Pi_n}$ 位于一个笛卡尔方形中

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{\tau_{\leq 0}\text{映射}(S^n,-)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}\mathcal{P} \arrow[d, "i"] \arrow[dr, equal] & \\
\mathrm{h}\mathcal{P} \arrow[r, "i"] & \mathcal{P}_{B_{\tau_{\leq 0}}\Pi_n} \arrow[r] & \mathrm{h}\mathcal{P}
\end{tikzcd}.$$

由于 i 有一个截面，它反映连通性。由于 i 是满的，根据命题 5.1.3可知，$\mathcal{P}_{\tau_{\leq 0}\text{映射}(S^n,-)} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 反映连通性。

我们证明命题 5.2.1 所采用的基本策略受例 5.2.3的启发。出于归纳的目的，下面引入一些定义；这些定义在本文其他地方不会用到。

定义 5.2.4。 若对于每个 Malcev 理论 $\mathcal{P}$，唯一的自然变换 $F \to \tau_{\leq 0}$ 诱导出一个<|DELI M_vyJ|>同态 $\mathcal{P}_F \to \mathrm{h}\mathcal{P}$，并且该同态反映连通性，则离散余积保持修饰子 F 是可容许的。

若每个能够容许有效满射映射 $\mathrm{map}(K,\ -) \to F$ 的离散余积保持修饰子 F 都是可容许的，则连通空间 K 是可容许的。

如果 F 是一个初等修饰子，那么存在某个 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，使得存在一个有效满射 映射$(T,\ -) \to F$。因此，只要证明每个 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$ 都是可容许的，命题 5.2.1 就得以证明。我们将通过对 T 的胞腔过滤进行归纳来证明这一点。为了开展这一论证，我们需要了解胞腔附着的结构。

回顾 5.2.5 （环空间对纤维的作用，[Saf17]）。若 $* \to A$ 是一个 ∞-拓扑斯中的带基点对象，则根据 [Lur17，6.1.2。11] 其 Čech 神经是一个群胚，并在$\mathbf{E}_1$-群结构下呈现 $\Omega A := * \times_A *$。若 $B \to A$ 是纤维为 F的态射，则在笛卡尔方形中沿水平方向取 Čech 神经

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
* \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

得到一个单纯对象的态射，它按 [Lura，定义 4.2.22] 的意义构成一个左作用对象。也就是说，$F \to B$ 的 Čech 神经可识别为一个作用群胚

$$\cdots \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} \Omega A \times F \rightrightarrows F$$

表明 ΩA 作用于 F。

注释 5.2.6。 在 回顾 5.2.5 的背景下，由于作用群胚的几何实现可识别为相应的同伦轨道，我们可以将其识别为

$$F_{h\Omega A} \simeq |F^{\times_B \bullet}| \simeq |\check{C}(F \to B)| \simeq \mathrm{im}(F \to B).$$

This 是那些位于 A 的基点分支上的 B 的道路分支的并集 .

构造 5.2.7。 假设我们给定一个余笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & K' \end{array}$$

对于某个 $n \geq 1$，将 K' 实现为通过附加一个正维胞腔而得到的对象，其中 K。映射到空间 X 中，我们得到一个笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}(K', X) & \longrightarrow & \mathrm{map}(K, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathrm{map}(S^{n-1}, X) \end{array}$$

关于空间的 X。应用回顾 5.2.5于 ∞-拓扑 $\mathcal{S}\mathrm{pc}/X$，我们看到

(1) $\mathrm{map}(S^n, X) \simeq \Omega_X \mathrm{map}(S^{n-1}, X)$ 是空间 X 上的一个 $\mathbf{E}_1$-群对象；

(2) $\mathrm{map}(S^n, X)$ 作用于 $\mathrm{map}(K', X)$；(3) 该作用的同伦轨道可以识别为

$$\mathrm{map}(K', X)_{\mathrm{h}\,\mathrm{map}(S^n, X)} \simeq \mathrm{map}(K, X)_{\mathrm{ext}}$$

$\mathrm{map}(K, X)$ 中与那些映射对应的道路分支的并集 $K \to X$ 这些映射可扩张至 K'；等价地，复合映射 $S^{n-1} \to K \to X$ 是零同伦的。

这里，最后一部分是注释 5.2.6。

现在我们来关注 $\mathcal{S}\mathrm{ph}$ 中对象的胞腔结构。

定义 5.2.8. 我们称连通空间之间的映射 $f\colon A \to B$ 为 Σ-零伦 映射，若 Σf 是零伦的。

Σ-零伦映射在研究超简单空间时发挥作用，具体如下。

引理 5.2.9. 连通空间之间的映射 $f\colon A \to B$ 是 Σ-零伦映射，当且仅当满足以下条件：

$(*)$ 对于每个超简单空间 $X \in \mathcal{S}\mathrm{ps}$ 以及每个映射 $B \to X$，复合映射 $A \to B \to X$ 都是零伦的，也就是说，与某个常值映射同伦。

证明. 选取 A的一个基点后，不失一般性，我们可以假设 f 是带基点的连通空间之间的映射。

首先假设条件 $(*)$ 成立。由于 $\eta\colon B \to \Omega\Sigma B$ 是一个映入超简单空间的映射，该假设保证复合映射 $\eta \circ f\colon A \to B \to \Omega\Sigma B$ 是零伦的。由于 Σf 与 $f \circ \eta$ 互为伴随，因此 Σf 是零伦的。

反过来，假设 f 是 Σ-零伦的。取一个超简单空间 X 和映射 $g\colon B \to X$。由于 B 是连通的，该映射的像落在 X 的一个路径分支中。将 X 替换为这个路径分支，并以 B 的基点在 X 下的像作为基点，我们不妨假设 X 带基点且连通。因此，根据 BP 定理 2.2， X 具有一个 H-空间 $\lfloor$ 的结构。再由 James 的经典结果（ $\lfloor$, Jam55，定理 1）， $\eta\colon X \to \Omega\Sigma X$ 有一个截面。因此，要证明 $g \circ f\colon A \to B \to X$ 零伦，只需证明 $\eta \circ g \circ f\colon A \to B \to X \to \Omega\Sigma X$ 零伦；由于这个复合映射与 $\Sigma g \circ \Sigma f\colon \Sigma A \to \Sigma B \to \Sigma X$ 伴随，且根据假设 Σf 是零伦，故结论成立。□

引理 5.2.10。 设 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$。那么 T admits 一个有限过滤

$$* = T_0 \subset \cdots \subset T_m = T$$

具有以下性质：

（$*$）对于所有 $0 \leq k < m$，空间 T_{k+1} 是通过沿一个 Σ-零映射将一个正维胞腔附加到 T_k 上得到的，即存在余纤维序列

$$S^{n-1} \xrightarrow{\alpha} T_k \to T_{k+1}$$

带有 $n \geq 1$，且 α 是 Σ-零的。

证明。为证明起见，我们称连通空间 T 为强 Σ-零 的，若它具有如上所述的滤过；这意味着 ΣT 可分裂为球面的楔和，但这至少是一个先验上更严格的条件。

强 Σ-零空间类显然包含 S^1 和 $*$，因此我们必须证明，若 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$ 是强 Σ-零的，那么 $S^1 \vee T$、 $S^1 \wedge T$和 $S^1 \times T$也都是如此。对于 $S^1 \vee T$，这显然成立，因为 $S^1 \vee T$是沿常值映射 $S^0 \to T$向 T附加一个一维胞腔得到的。对于 $S^1 \wedge T$，基于一般等价作一个简单的归纳

$$S^1 \wedge (A \times B) \simeq (S^1 \wedge A) \vee (S^1 \wedge A \wedge B) \vee (S^1 \wedge B)$$

表明，若 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$，则 $S^1 \wedge T$ 可分裂为正维球面的楔和，这显然是强 Σ-零的。

还需证明，若 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$ 是强 Σ-零的，则 $S^1 \times T$ 也是强 Σ-零的。通过对 T 的一个 Σ-零滤过进行归纳，我们可以归纳地假设给定了一个余笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & T' \end{array}$$

它具有以下性质： $S^1 \times T$是强 Σ-零的，而 α 是 Σ-零的；我们必须证明 $S^1 \times T'$是强 Σ-零的。空间 $S^1 \times T'$ 可以通过附加两个额外的胞腔从 $S^1 \times T$得到，这由两个余笛卡尔图表实现：其中的外部矩形

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & T & \xrightarrow{i} & S^1 \times T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & (S^1 \times T) \cup_T T' \end{array},$$

其中 $i\colon T \to S^1 \times T$由 S^1 的基点诱导，且

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\beta} & (S^1 \times T) \cup_T T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & S^1 \times T' \end{array}.$$

由于 α 是 Σ-零的， $i \circ \alpha$也如此，因此我们必须验证 β 是 Σ-零的。事实上，标准分裂

$$\Sigma(S^1 \times T) \simeq \Sigma S^1 \vee \Sigma(S^1 \wedge T) \vee \Sigma T$$

使我们可以将 $(S^1 \times T) \cup_T T' \to S^1 \times T'$ 的悬挂识别为映射

$$\Sigma S^1 \vee \Sigma(S^1 \wedge T) \vee \Sigma T' \to \Sigma S^1 \vee \Sigma(S^1 \wedge T') \vee \Sigma T'.$$

由于 α 是 Σ-零的， $S^1 \wedge T \to S^1 \wedge T'$ 是一个楔和项的包含，因此这个映射也如此；这说明 $\Sigma\beta$ 是零伦的，从而如所述， β 是 Σ-零的。□

前面的引理可用于证明 命题 5.2.1在以下特殊情形下成立：$F = $ 映射$(T, -)$ 其中 $T \in \mathcal{S}$ph，论证与 例 5.2.3直接类似。要处理更一般的初等修饰子，我们需要了解群作用与 Malcev 运算如何相互作用。

引理 5.2.11。 设 G 是群集的 1-范畴中的一个群对象。那么 G 是阿贝尔的，其群运算由单位 $e \in G$ 和 Malcev 运算确定，具体为 $x \cdot y = t(x,\ e,\ y)$。

证明。 运算 $x * y = t(x,\ e,\ y)$ 在 G 上定义了一个与群运算交换的含单位运算：

$$(w * x) \cdot (y * z) = t(w,e,x) \cdot t(y,e,z) = t(w \cdot y, e, x \cdot z) = (w \cdot y) * (x \cdot z).$$

引理由 Eckmann–Hilton 论证得出。 □

引理 5.2.12。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 预理论，并设给定了一个群对 t

$$\Pi \in \mathcal{A}\mathrm{b}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb},\heartsuit})$$

带基点对象的作用

$$(X, x_0) \in (\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{nb},\heartsuit})_{*/}.$$

记 $i\colon \Pi \to X$ 为由 Π 对 x_0的作用确定的映射。则对于非有界模型的任意有效满射 $\alpha\colon X \to Y$，其像

$$\Pi' = \mathrm{Im}\left(\Pi \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\alpha} Y\right)$$

继承了作用于 Y 的群对象结构。只要 Y 满足以下类群条件，这个作用就是自由的：

($*$) 每个 $P \in \mathcal{P}$ 都有一个 Malcev 余运算，具有如下性质：若 $y_1,\ y_2 \in Y(P)$，则

$$t(-, y_1, y_2)\colon Y(P) \to Y(P)$$

是一个单射。

证明。简记 $\beta = \alpha \circ i$。首先证明 Π' 是 Π 的商群。这是一个逐点命题：我们必须证明，若 $P \in \mathcal{P}$ 和 a、 a'、 b、 $b' \in \Pi(P)$ 满足 $\beta(a) = \beta(a')$ 且 $\beta(b) = \beta(b')$，则 $\beta(ab) = \beta(a'b')$。事实上，若我们在 P 上选取一个 Malcev 余运算，则根据引理 5.2.11，我们可以计算

$$\beta(ab) = \beta(t(a,e,b)) = t(\beta(a), \beta(e), \beta(b)) = t(\beta(a'), \beta(e), \beta(b')) = \beta(a'b').$$

接下来证明 Π 对 X 的作用下降为 Π' 对 Y 的作用。这同样是一个逐点命题：我们必须证明，若 $P \in \mathcal{P}$ 和 $a,\ a' \in X(P)$ 且 $x,\ x' \in Y(P)$，则 $\alpha(a \cdot x) = \alpha(a' \cdot x')$。事实上，请注意一般而言

$$a \cdot x = t(a,e,e) \cdot t(x_0, x_0, x) = t(a \cdot x_0, e \cdot x_0, e \cdot x) = t(a \cdot x_0, x_0, x).$$

由此可得

$$\alpha(a \cdot x) = \alpha(t(i(a), x_0, x)) = t(\beta(a), \alpha(x_0), \alpha(x)) = t(\beta(a'), \alpha(x_0), \alpha(x')) = \alpha(a' \cdot x').$$

最后我们证明，如果满足（$*$），那么 Π' 在 Y 上的作用是自由的。我们必须证明，如果 $P \in \mathcal{P}$ 和 $a \in \Pi'$（P）以及 $x \in Y$（P）满足 $a \cdot x = x$，那么 $a \equiv e$。将 $\bar{a}$ 和 x 提升为元素 $\bar{a} \in \Pi$（P）和 $x \in X$（P）。于是我们希望证明 β（a）$= \beta$（e）。由于

$$t(\beta(a), \alpha(x_0), \alpha(x)) = \beta(a \cdot x) = \beta(x) = t(\beta(e), \alpha(x_0), \alpha(x)),$$

这源于以下假设：我们可以设法使

$$t(-, \alpha(x_0), \alpha(x))\colon Y(P) \to Y(P)$$

成为单射。 □

命题 5.2.13。 假设给定一个余笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & K' \end{array}$$

对于某个 $n \geq 1$。假设 K 是可容许的，且 α 是 Σ-零的。那么 K' 是可容许的。

证明。 对于空间 T，我们将 $\tau_{\leq 0}\operatorname{map}(T,-) = [T,-]$简记为 [BP，推论 2.2.15.(2)],自然映射

$$\tau_{\leq 0}\left(\operatorname{map}(S^n,X)\times_X \operatorname{map}(K',X)\right) \to [S^n,X]\times_{\tau_{\leq 0}X}[K',X]$$

对于任意超简单空间 X，该映射都是双射。因此，$\operatorname{map}(S^n,X)$ 在 X 上对 $\operatorname{map}(K',X)$ 的作用，诱导出 $\Pi_n X = [S^n,X]$ 在 $\tau_{\leq 0}X$ 上对 $[K',X]$ 的作用。该作用关于 X 是自然的，也就是说，它定义了修饰子 Π_n 在 $\tau_{\leq 0}$ 上对 $[K',-]$ 的作用。

考虑一个配备有效满射 $[K',-] \to F$ 的离散余积保持修饰子 F。根据定义，修饰子的 ∞-范畴是 Malcev 预理论的非有界模型的 ∞-范畴：

$$\operatorname{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps}) \simeq \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{nb}}_{\mathcal{S}\mathrm{ps}^{\mathrm{op}}}.$$

根据 [BP，命题 3.2。1], 切片范畴 $\operatorname{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})_{/\tau_{\leq 0}}$也同样如此。映射 $* \to K'$使 K' 带有一个基点，因此使 $[K',-]$ 成为 $\operatorname{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})^{\heartsuit}_{/\tau_{\leq 0}}$中的带基点对象。因此，根据引理 5.2.12 其像

$$\Pi' = \operatorname{Image}\left(\Pi_n \to [K',-] \to F\right)$$

继承了一个作用于 F 上的群的结构。

我们声称，Π_n 在 $[K',-]$ 上的作用以及 Π' 在 F 上的作用都是自由的。为此，我们声称 $[K',-]$ 和 F 都满足 $(*)$ 中的条件，该条件见 引理 5.2.12，并且映射 $\Pi_n \to [K',-]$ 是单态。

我们首先证明 F 满足条件（$*$）。定义切片范畴 $\operatorname{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})_{/\tau_{\leq 0}}$ 的 Malcev 预理论的自由对象，可识别为由一个超简单空间 X和点 $x \in \tau_{\leq 0}X$组成的对。 $F \in \operatorname{End}_\sigma(\mathcal{S}\mathrm{ps})_{/\tau_{\leq 0}}$ 在这个对上的取值为

$$F(X,x) = F(X)\times_{\tau_{\leq 0}X}\{x\}.$$

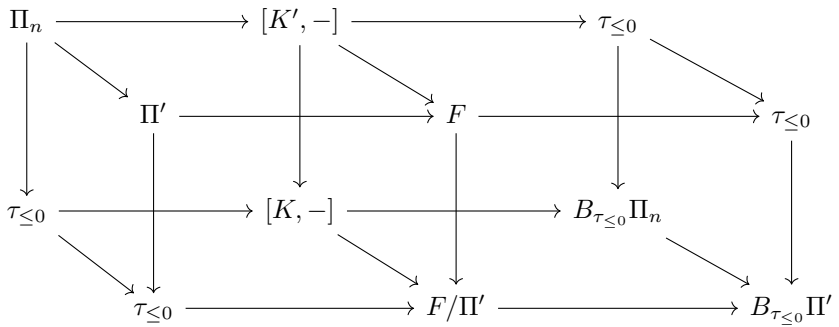
由于 F 保持余积，这等价于在$x \in X$的路径分支处对 F 进行求值。因此，我们只需证明每个连通超简单空间都存在一个 Malcev 运算 t，使得若 y_1， $y_2 \in F(X)$，则

$$t(-,y_1,y_2)\colon F(X) \to F(X)$$

是单射。事实上，由于 X 是一个连通超简单空间，它具有群状 H-空间结构。因此， $F(X)$ 上的 Malcev 运算再次来自群状的 H-空间结构，而此类 Malcev 运算都具有这一性质。同样的论证也适用于用 $[K',-]$ 代替 F的情形，因此 $[K',-]$和 F都满足 $(*)$ 中的条件，该条件来自 引理 5.2.12。

接下来我们证明映射 $\Pi_n \to [K',-]$ 是单态。换言之，我们必须证明：如果X 是任意超简单空间，那么映射 $\Pi_n X \to [K',X]$ 是单态的。由于两边在 X中都保持余积，我们可以将情形约化为 X 连通的情形，因此根据 [BP定理 2.2， H具有一个必然是群状的 13]-空间结构。特别地，这使得 $\Pi_n X \to [K',X]$成为群同态；要证明它是单态的，只需证明它具有平凡核。根据余纤维序列 $K' \to S^n \to \Sigma K$，该同态的核由那些能够沿着 $S^n \to \Sigma K$延拓的映射 $S^n \to X$ 组成。由于 $S^n \to \Sigma K$ 在定向意义下是 Σ-零伦映射 α： $S^{n-1} \to K$的悬挂，因此根据假设它是零伦的。所以，任何通过它延拓的映射都是零，这正是所需证明的结论。

由于 Π' 在 F上自由作用，商映射 $F \to F/\Pi'$ 是 $\tau_{\leq 0}$上的主 Π'-纤维丛。根据构造，这个映射与 $[K',-] \to [K,-]$ 相容；后者同样是一个主Π_n-纤维丛。换言之，我们有如下形式的交换图表



其中前面和后面的面都是笛卡尔的，且对角映射都是有效满射。根据 命题 5.1.3，要证明 $F \to \tau_{\leq 0}$ 反映连通性，只需证明 $F/\Pi' \to B_{\tau_{\leq 0}}\Pi'$ 反映连通性。根据 推论 5.1.5，只需证明 $F/\Pi' \to \tau_{\leq 0}$ 反映连通性，即证明 F/Π' 是可容许的。由于 $[K, -] \to F/\Pi'$ 是一个有效满射，这一点成立，因为根据假设， K 是可容许的。□

现在可以给出如下结果。

证明：命题 *5.2.1*。只需证明每个 $T \in \mathcal{S}\mathrm{ph}$ 均可容许。由于 $T = *$ 显然可容许，结合命题 5.2.13 与引理 5.2.10即可得证。□

5.3. 螺旋塔的收敛性

现在可以给出如下结果。

定理 5.3.1。 设 $\mathcal{P}$ 为一个 Malcev 理论。那么

$$\mathcal{E}\mathrm{lm} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty, \qquad F \mapsto \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_F}$$

defi是一个收敛的 ∞-范畴螺旋系统。特别地， $\mathcal{P}$ 的螺旋塔收敛 :

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}.$$

证明。 我们首先验证这定义了一个螺旋系统。与 定理 4.2.8 的证明中一样，沿逐层有效满态射对初等修饰子作逐层拉回，会沿满同态诱导 Malcev 理论的拉回。根据定理 5.1.1，这个同态反映连通性，因此相应的 ∞模型范畴的方形图是笛卡尔的，这由定理 4.4.4得出。

接下来我们证明收敛性。我们必须证明比较函子

$$L\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \to \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}$$

是一个等价。这是一个左伴随构成的图表，因此存在一个右伴随 R。我们首先断言，单位映射 $X \to RLX$ 对任意 $X \in \mathcal{M}$ 模型 $_{\mathcal{P}}$ 都是等价。这个单位映射可以识别为比较映射 $X \to \mathrm{li}\mathrm{m}_{n\to\infty} \tau_n^*\tau_{n!}X$，由定理 4.2.8可知它是等价。

要证明 L 是等价，现在只需验证 R 是保守的。极限 ∞-范畴中的对象 X 可以识别为一族模型 $X_n \in \mathcal{M}\mathrm{odel}^{h_n\mathcal{P}}$ ，并附带等价 $\tau_{(n+1,n)!}X_{n+1} \simeq X_n$，此时

$$R(X) = \lim_{n\to\infty} \tau_n^* X_n.$$

对于任意 $m \geq n$，映射

$$X_m \to \tau_{(m,n)}^*\tau_{(m,n)!}X_m \simeq \tau_{(m,n)}^* X_n$$

是 $(n-1)$-连通的，由 引理 4.1.4可知。因此

$$\tau_m^* X_m \to \tau_n^* X_n$$

是 $(n-1)$-连通的，因此在极限 $R(X) \to \tau_n^* X_n$ 中至少是 $(n-2)$-连通的。极限 ∞-范畴中的一个箭头f 可以表示为一族相容的箭头 $f_n\colon X_n \to Y_n$。若 $R(f)$ 是一个等价，则可推出对每个 n，$X_n \to Y_n$ 都是 $(n-2)$-连通的。由于$f_1 = \tau_{(n,1)!} f_n$，可推出 $f_1\colon X_1 \to Y_1$ 是 $(n-2)$-连通的。由于 n 是任意的，可推出 $X_1 \to Y_1$ 是一个等价。由命题 5.1.4 应用于 $\mathrm{h}_n\mathcal{P}$，可推出 $X_n \to Y_n$ 是一个等价；又由于 n 是任意的，可推出 f 是一个等价。□

6. 变形理论

根据 定理 5.3.1 和命题 3.4.10，与每个 Malcev 理论相关联的 $\mathcal{P}$ 和整数 $1 \le r \le n < \infty$ 都是笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P} & \xrightarrow{\tau_{(n+r,r)}} & \mathrm{h}_r\mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{(n+r,n)}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathrm{h}_n\mathcal{P} & \xrightarrow{k} & \mathrm{k}_{n,r}^{n+1}\mathcal{P} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}} & \xrightarrow{\tau_{(n+r,r)!}} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{(n+r,n)!}} & & \downarrow{\scriptstyle 0_!} \\ \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}} & \xrightarrow{k_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{k}_{n,r}^{n+1}\mathcal{P}} \end{array},$$

其中，0 和 $0_!$ 都是某个适当的$\mathbf{S}_{<r}$-模对象的零截面。本节的目标是将这些方形置于更一般的 Malcev 理论和 ∞-范畴线性扩张背景中，从而推广环的平方零扩张的经典理论。

特别是，Malcev 理论的线性扩张 $f\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ 可以视为一种一阶变形。我们将说明，这如何导出沿导出函子提升的障碍理论 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，并将引言 §1.2 中给出的例子作为特例得到。

6.1. 范畴上的环空间

我们先对 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 的切片范畴中的环空间对象作一些一般性观察。

记号 6.1.1。给定一个函子 $q_!\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ of ∞-范畴、对象 $X, Y \in \mathcal{K}$ 以及一个映射$\phi\colon q_!X \to q_!Y$ in $\mathcal{H}$，我们记作

$$\mathrm{map}_{\mathcal{K}}(X,Y)_\phi = \{\phi\} \times_{\mathrm{map}_{\mathcal{H}}(q_!X, q_!Y)} \mathrm{map}_{\mathcal{K}}(X,Y)$$

表示将 ϕ 提升为映射 $f\colon X \to Y$ 且指定同伦 $q_!f \simeq \phi$ 的提升空间。

例 6.1.2。假设 $q_!\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ 具有一个截面 $0_!\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$，且该截面具有一个右伴随 $0^*\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}$。如果 $\Lambda \in \mathcal{H}$，那么映射

$$0^*0_!\Lambda \simeq q_!0_!0^*0_! \xrightarrow{\epsilon} q_!0_!\Lambda \simeq \Lambda$$

定义了一个对象 $0^*0_!\Lambda \in \mathcal{H}_{/\Lambda}$；对于 $\mathcal{H}$ 中的任意映射 $\phi\colon \Gamma \to \Lambda$，都有

$$\mathrm{map}_{\mathcal{K}}(0_!\Gamma, 0_!\Lambda)_\phi \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{H}/\Lambda}(\Gamma, 0^*0_!\Lambda).$$

命题 6.1.3。固定 $\mathcal{H} \in \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 和 $\mathcal{B} \in (\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)^{\mathcal{H}//\mathcal{H}}$，并设 $\mathcal{K} = \Omega_{\mathcal{H}}\mathcal{B} \in (\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)^{\mathcal{H}//\mathcal{H}}$.

(1) $0_!\colon \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ 和 $q_!\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ 都是保守的。(2) 对于 $\Lambda \in \mathcal{H}$，存在一个等价

$$\{\Lambda\} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{K} \simeq \{\mathrm{id}_\Lambda\} \times_{\mathrm{aut}_{\mathcal{H}}(\Lambda)} \mathrm{aut}_{\mathcal{B}}(0_!\Lambda).$$

(3) 如果 $p_!\colon \mathcal{B} \to \mathcal{H}$ 也保守，例如 $\mathcal{B}$ 还允许进一步去环化，那么

$$\{\Lambda\} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{K} \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{B}}(0_!\Lambda, 0_!\Lambda)_{\mathrm{id}_\Lambda}.$$

(4) 对于 $\mathcal{H}$中的任意映射 $\phi\colon \Gamma \to \Lambda$，存在一个等价

$$\mathrm{map}_{\mathcal{K}}(0_!\Gamma, 0_!\Lambda)_\phi \simeq \{\phi\} \times_{\mathcal{H}^{[1]}} \mathcal{K}^{[1]}.$$

证明。(1) 考虑笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{K} & \xrightarrow{q_!} & \mathcal{H} & & \\
\downarrow{\scriptstyle q_!} & & \downarrow{\scriptstyle 0_!} & \searrow & \\
\mathcal{H} & \xrightarrow{0_!} & \mathcal{B} & \xrightarrow{p_!} & \mathcal{H}
\end{array} .$$

由于 $0_!\colon \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ 是 $p_!$的截面，因此它是保守的。由于保守函子在基变换下保持不变，因此可得 $q_!$ 是保守的。

（2）考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
\{\Lambda\} & \longrightarrow & \{\Lambda\} & \longleftarrow & \{0_!\Lambda\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{\Lambda\} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \xleftarrow{p_!} & \mathcal{B} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\{\Lambda\} & \longrightarrow & \{\Lambda\} & \longleftarrow & \{0_!\Lambda\}
\end{array} .$$

通过比较垂直方向和水平方向所取的极限，我们可以计算出

$$\begin{aligned}
\{\Lambda\} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{K} &\simeq \Omega\left(\{\Lambda\} \times_{H(\tau_{<r})} \mathcal{B}\right) \\
&\simeq \mathrm{Fib}\left(\{0_!\Lambda\} \times_{\mathcal{B}} \{0_!\Lambda\} \xrightarrow{q_!} \{\Lambda\} \times_{\mathcal{H}} \{\Lambda\}\right) \\
&\simeq \{\mathrm{id}_\Lambda\} \times_{\mathrm{aut}_{\mathcal{H}}(\Lambda)} \mathrm{aut}_{\mathcal{B}}(0_!\Lambda).
\end{aligned}$$

（3）如果 $p_!\colon\ \mathcal{B} \to \mathcal{H}$ 是保守的，那么包含

$$\{\mathrm{id}_\Lambda\} \times_{\mathrm{aut}_{\mathcal{H}}(\Lambda)} \mathrm{aut}_{\mathcal{B}}(0_!\Lambda) \to \mathrm{map}_{\mathcal{B}}(0_!\Lambda, 0_!\Lambda)_{\mathrm{id}_\lambda}$$

是一个等价。

（4）将（2）应用于 $\mathcal{B}^{[1]} \in (\mathcal{C}\text{在}\infty)^{\mathcal{H}^{[1]}//\mathcal{H}^{[1]}}$ 和 $\mathcal{K}^{[1]} \simeq \Omega_{\mathcal{H}^{[1]}}\mathcal{B}^{[1]}$，我们可以计算出

$$\begin{aligned}
\{\phi\} \times_{\mathcal{H}^{[1]}} \mathcal{K}^{[1]} &\simeq \{\mathrm{id}_\phi\} \times_{\mathrm{aut}_{\mathcal{H}^{[1]}}(\phi)} \mathrm{aut}_{\mathcal{B}^{[1]}}(0_!\phi) \\
&\simeq \{\mathrm{id}_\phi\} \times_{\Omega_\phi \mathrm{map}_{\mathcal{H}}(\Gamma,\Lambda)} \Omega_{0_!\phi} \mathrm{map}_{\mathcal{B}}(\Gamma, \Lambda) \\
&\simeq \Omega\left(\{\phi\} \times_{\mathrm{map}_{\mathcal{H}}(\Gamma,\Lambda)} \mathrm{map}_{\mathcal{B}}(0_!\Gamma, 0_!\Lambda)\right) \\
&\simeq \{\phi\} \times_{\mathrm{map}_{\mathcal{H}}(\Gamma,\Lambda)} \mathrm{map}_{\mathcal{K}}(0_!\Gamma, 0_!\Lambda) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{K}}(0_!\Gamma, 0_!\Lambda)_\phi
\end{aligned}$$

正如所声称的。 □

推论 6.1.4. 固定 $\mathcal{H} \in \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 和 $\mathcal{B} \in (\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)^{\mathcal{H}//\mathcal{H}}$，并设 $\mathcal{K} = \Omega_{\mathcal{H}}\mathcal{B} \in (\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)^{\mathcal{H}//\mathcal{H}}$。假设 $p\colon$ $\mathcal{B} \to \mathcal{H}$ 是保守的。那么该赋值

$$\mathcal{H} \ni \Lambda \mapsto \mathrm{map}_{\mathcal{B}}(0_!\Lambda, 0_!\Lambda)_{\mathrm{id}_\Lambda}$$

确定了一个纤维丛，其纤维为环空间，底空间为 $\mathcal{H}^{\mathrm{core}}$，总空间为 $\mathcal{K}^{\mathrm{core}}$。换言之，

$$\mathcal{K}^{\mathrm{core}} \simeq \operatorname*{colim}_{\Lambda \in \mathcal{H}^{\mathrm{core}}} \mathrm{map}_{\mathcal{B}}(0_!\Lambda, 0_!\Lambda)_{\mathrm{id}_\Lambda}.$$

证明。 这只不过是对 命题 6.1.3.(3)的重新表述。 □

注 6.1.5。 本节余下部分，我们主要研究 无限 切片范畴中的循环空间对象 $\mathcal{C}\text{在}\infty$，因为 定理 6.2.1 使得在这一语境下可以给出更简洁的表述。不过，本节的大部分内容很容易推广到双重循环空间对象，部分内容也可推广到循环空间对象，从而得到一种更具非阿贝尔性质的 Malcev 理论变形理论；我们将此留给感兴趣的读者。

6.2. ∞-范畴的线性扩张

经典定理指出，如果 $\mathcal{C}$ 是一个普通范畴，那么存在一个等价

$$\mathcal{A}\mathrm{b}(\mathcal{C}\mathrm{at}_{/\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Tw}(\mathcal{C}), \mathcal{A}\mathrm{b}),$$

其中 $\mathrm{Tw}(\mathcal{C})$ 是 扭箭范畴 的 $\mathcal{C}$，见 [JP05，命题 1。6]。Harpaz–Nuiten–Prasma 证明了这一结果的以下 ∞-范畴版本：

定理 6.2.1 ([HNP18，定理 1.0。3])。 存在一个 ∞-范畴等价

$$\mathcal{S}\mathrm{p}((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Tw}(\mathcal{C}), \mathcal{S}\mathrm{p})$$

对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$。 □

在此等价下，对象 $\mathcal{D}^\bullet \in \mathcal{S}\mathrm{p}((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{C}})$ 对应于一个形如以下的函子 m

$$D\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \to \mathcal{S}\mathrm{p}, \qquad D(\phi\colon \Gamma \to \Lambda) = \mathrm{map}_{\mathcal{D}^{\bullet+1}}(0_!\Gamma, 0_!\Lambda)_\phi.$$

更确切地说，如果我们按照 $\mathcal{R}^\omega(\mathbf{S})^{\mathrm{op}}$ 中的做法，将谱对象编码为从该范畴出发的函子定义 3.1.14，那么

$$D(\phi\colon \Gamma \to \Lambda)(F) = \mathrm{map}_{\mathcal{D}^\bullet(\Omega F)}(0_!\Gamma, 0_!\Lambda)_\phi.$$

For 本小节余下部分中，我们固定一个连通的$\mathbf{E}_1$-环谱 R。更一般地，

$$R\mathcal{M}\mathrm{od}_R((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Tw}(\mathcal{C}), R\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$$

对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，这引出了以下定义。

定义 6.2.2。 一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 上的自然系统 R-模是一个函子

$$D\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \to R\mathcal{M}\mathrm{od}_R.$$

若 D 是一个由 R-模构成的自然系统，我们记

$$\mathcal{D}^\bullet \in R\mathcal{M}\mathrm{od}_R((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{C}})$$

表示相应的 R-模对象，其含义见定义 3.1.14；对于 $n \geq 0$，我们简记为 $\mathcal{D}^n := \mathcal{D}(\Omega^n R)$。特别地，$\mathcal{D}^n \simeq_{\mathcal{C}} \mathcal{D}^{n+1}$。

例 6.2.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个以空间为富集范畴、且怀特海德积消失的 ∞-范畴。那么 $\mathbf{S}_{<r}$-模对象

$$\mathrm{k}^\bullet_{n,r}\mathcal{C} \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{S}_{<r}}((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathrm{h}_r\mathcal{C}})$$

对应于一个连通 $\mathbf{S}_{<r}$-模自然系统的悬挂，我们可以将其记作

$$H\Pi_{[n,n+r)}\colon \mathrm{Tw}(\mathrm{h}_r\mathcal{P}) \to \mathrm{Mod}^{\geq 0}_{\mathbf{S}_{<r}},$$

由下式确定

$$\Omega^\infty H\Pi_{[n,n+r)}(\phi\colon \tau_r P \to \tau_r Q) = \Pi_{[n,n+r)}(\mathrm{map}_{\mathcal{P}}(P,Q), \phi).$$

也就是说，若 $\mathcal{D}^\bullet \in \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}_{<r}((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathrm{h}_r\mathcal{C}})$ 与 $H\Pi_{[n,n+r)}$ 相关联，则 $\mathrm{k}^\bullet_{n,\,r}\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^{\bullet+1}$。

推论 6.1.4在这一稳定情形下可具体化为以下结论。

引理 6.2.4. 设 D 是一个定义在 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 上的 R-模自然系统。那么

$$(\mathcal{D}^n)^{\mathrm{core}} \simeq \operatorname*{colim}_{\Lambda \in \mathcal{C}^{\mathrm{core}}} \mathrm{map}_{\mathcal{D}^{n+1}}(0_!\Lambda, 0_!\Lambda)_{\mathrm{id}_\Lambda} \simeq \operatorname*{colim}_{\Lambda \in \mathcal{C}^{\mathrm{core}}} \Omega^\infty\Sigma^n D(\mathrm{id}_\Lambda)$$

证明。 第一个等价由 推论 6.1.4 得出，第二个则来自如下识别映射$\mathcal{D}^{n+1}(0_!\Lambda, 0_!\Lambda)_{\mathrm{id}_\Lambda} \simeq \Omega^{\infty-n}D(\mathrm{id}_\Lambda)$。
□

推论 6.2.5。 假设 D 是一个连通 R-模的自然系统，即一个函子

$$D\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \to R\mathcal{M}\mathrm{od}^{\geq 0}_R.$$

那么，对于任意 $n \geq 1$，零截面 $\mathbf{0}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^n$ 都是本质满的。 □

现在我们引入以下内容。

定义 6.2.6. 设 D 是 R-模的一个自然系统，定义在一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 上，且 $p\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$是一个位于 $\mathcal{C}$之上的 ∞-范畴。若我们指定了如下形式的、位于 $\mathcal{C}$ 之上的 ∞-范畴的一个笛卡尔方形，则称函子 $f\colon \mathcal{E}\to\mathcal{B}$ 是一个从 $\mathcal{B}$ 到 D 的线性扩张，

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E} & \xrightarrow{t} & \mathcal{C} & & \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & \searrow & \\
\mathcal{B} & \xrightarrow{k} & \mathcal{D}^2 & \xrightarrow{q} & \mathcal{C}
\end{array}\quad .$$

注记 6.2.7. 显然，从 $\mathcal{B}\in(\mathcal{C}\text{在}\infty)/\mathcal{C}$ 到 D 的线性扩张 $\mathcal{B}\in(\mathcal{C}\text{在}\infty)/\mathcal{B}$ 到 p^*D的线性扩张等价。也就是说，在 定义 6.2.6的语境下，不失一般性，可以令 $\mathcal{B}=\mathcal{C}$ 并令 $p\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 为恒等函子。

注 6.2.8. 一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 的*Baues–Wirsching* 上同调，其系数取自自然系统 $D\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C})\to \mathrm{RMod}_R$，对 $n\in\mathbb{Z}$ 定义为以下任一项

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^n(\mathcal{C};D) &\cong \pi_0\,\mathrm{Fun}_{/\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{D}^n)\\
&\cong \pi_0\,\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Tw}(\mathcal{C}),\mathcal{S}\mathrm{p})}(\Sigma^{-1}\mathbf{S},\Sigma^n D)\\
&\cong \pi_{-n-1}\lim D.
\end{aligned}$$

根据定义， $\mathcal{B}$ 被 D 线性扩张的分类由 Baues–Wirsching 上同调群 $\mathrm{H}^2(\mathcal{B};p^*D)$ 给出。当然，如果 $\mathcal{B}$ 很大，解释这一点时可能需要谨慎，因为线性扩张的集合可能并不小。

例 6.2.9。 取 $k=0$，由 $\mathcal{B}$ 被 D 扩张的平凡线性扩张是 $\mathcal{B}\times_{\mathcal{C}}\mathcal{D}^1$。

例 6.2.10。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，且怀特海德积消失。那么，构造 3.2.4 的范畴化 Postnikov 方块实现了 $\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{C}$ 作为 $\mathrm{h}_n\mathcal{C}$被 $H\Pi_{[n,n+r)}$ 这一自然系统扩张的线性扩张，其中$\mathbf{S}_{<r}$是定义在 $\mathrm{h}_r\mathcal{C}$ 上的模；该自然系统来自 例 6.2.3，对所有 $1\le r\le n$均成立。

如果 $\mathcal{C}$ 的怀特海德积不消失，那么 $\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{C}$ 仍将是一个线性扩张，其底为 $\mathrm{h}_n\mathcal{C}$，由定义在 $H\Pi^{\mathrm{ns}}_{[n,n+r)}$ 之上的自然系统 $\mathrm{h}_{r+1}\mathcal{C}$ 扩张；但这只在更受限制的范围 $1\le r<n$内成立，参见变体 3.1.8。

例 6.2.11. 考虑如下所示的线性扩张 定义 6.2.6。若 X， $Y\in\mathcal{E}$，由于 ∞-范畴的极限中的映射空间可由映射空间的极限计算，因此我们有一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{map}_{\mathcal{E}}(Y,X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathcal{C}}(tY,tX)\\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0}\\
\mathrm{map}_{\mathcal{B}}(fY,fX) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathcal{D}^2}(0tY,0tX)
\end{array}$$

with

$$\mathrm{map}_{\mathcal{D}^\bullet}(0tY,0tX)\in \mathcal{S}\mathrm{p}((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\,\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(tY,tX)})\simeq \mathcal{S}\mathrm{p}(\mathcal{S}\mathrm{pc}_{/\,\mathrm{map}_{\mathcal{C}}(tY,tX)}),$$

将映射$\mathcal{E}(Y,\ X)\to$映射$_{\mathcal{B}}(fY,\ fX)$ 实现为一个空间的线性扩张。

例 6.2.12。 考虑一个如 定义 6.2.6 中的线性扩张。若 $\mathcal{J}$ 是一个 ∞-范畴，则由于 $\mathrm{Fun}(\mathcal{J},-)$ 保持 ∞-范畴的极限，$\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{E})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{B})$ 位于一个笛卡尔方形中

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{E}) & \xrightarrow{t_*} & \mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{C})\\
\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle 0_*}\\
\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{B}) & \xrightarrow{k_*} & \mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{D}^2)
\end{array}$$

with

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{D}^{\bullet})\in \mathcal{S}\mathrm{p}((\mathcal{C}\mathrm{at}_{\infty})_{/\,\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{C})}),$$

将 $\mathbf{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{E})$ 实现为 $\mathbf{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{B})$ 的线性扩张。相应的自然系统

$$\tilde{D}\colon \mathrm{Tw}(\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{C}))\to \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_{R}$$

具有如下形式：给定函子 $\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ 的自然变换 $\alpha\colon F\to F'$，我们有

$$\tilde{D}(\alpha)=\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{D}^{\bullet+1})}(0F,0F')_{\alpha}\simeq \lim_{(\phi\colon i\to j)\in\mathrm{Tw}(\mathcal{J})}\mathrm{map}_{\mathcal{D}^{\bullet+1}}(F(i),F'(j))_{F'(\phi)\circ\alpha_i\simeq\alpha_j\circ F(\phi)}.$$

特别地，

$$\tilde{D}(\mathrm{id}_F)\simeq \lim_{\phi\in\mathrm{Tw}(\mathcal{J})}D(F(\phi))=\lim F^{*}D$$

编码了 $\mathcal{J}$ 在系数 $F^{*}D$ 下的 Baues–Wirsching 上同调。

固定一个如 定义 6.2.6 中所述的线性扩张。我们可以利用上一节的讨论来理解沿着 f 的提升的模空间： $\mathcal{E}\to\mathcal{B}$。

定义 6.2.13。 给定一个保守函子 $f\colon \mathcal{E}\to\mathcal{B}$ 和对象 $X\in\mathcal{B}$，对 $\varepsilon\in\{0,1\}$ 定义空间 $\mathbf{Lifts}^{\mathcal{E}}_{\varepsilon}(X)$，其由以下笛卡尔方形给出

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Lifts}^{\mathcal{E}}_{1}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Lifts}^{\mathcal{E}}_{0}(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f}\\ * & \longrightarrow & B\mathrm{Aut}_{\mathcal{B}}(X) & \longrightarrow & \mathcal{B}\end{array}.$$

因此，$\mathbf{Lifts}^{\mathcal{E}}_{0}(X)\subset\mathcal{E}^{\mathrm{core}}$ 是由满足存在一个等价$f(\tilde{X})\simeq X$的对象 $\tilde{X}$ 构成的全子空间，而 $\mathbf{Lifts}^{\mathcal{E}}_{1}(X)$ 是由配备了一个等价 $f(\tilde{X})\simeq X$的对象 $\tilde{X}\in\mathcal{E}$ 构成的空间。

定理 6.2.14。 设 $f\colon \mathcal{E}\to\mathcal{B}$ 是由自然系统 ∞扩张的 D-范畴的线性扩张，如 定义 6.2.6所述。固定 $X\in\mathcal{B}$ 并令 $\Lambda=pX\in\mathcal{C}$。那么，空间 $\mathrm{Lifts}^{\mathcal{E}}_{\varepsilon}(X)$ 对于 $\varepsilon\in\{0,1\}$构成笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Lifts}^{\mathcal{E}}_{0}(X) & \longrightarrow & B\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(\Lambda)\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0}\\ B\mathrm{Aut}_{\mathcal{B}}(X) & \xrightarrow{k} & (\Omega^{\infty}\Sigma^{2}D(\mathrm{id}_{\Lambda}))_{h\mathrm{Aut}(\Lambda)}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}\mathrm{Lifts}^{\mathcal{E}}_{1}(X) & \longrightarrow & \{0\}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \{k(X)\} & \longrightarrow & \Omega^{\infty}\Sigma^{2}D(\mathrm{id}_{\Lambda})\end{array}.$$

特别地，与 X 有典范关联的障碍类

$$k(X)\in\pi_{-2}D(\mathrm{id}_{\Lambda})$$

用于展示 X 到 $\mathcal{E}$ 的提升，而对 $k(X)$ 的一个零伦选择给出一个等价

$$\mathrm{Lifts}^{\mathcal{E}}_{1}(X)\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}^{2}}(0\Lambda,0\Lambda)_{\mathrm{id}_{\Lambda}}\simeq\Omega^{\infty}\Sigma D(\mathrm{id}_{\Lambda}).$$

证明。 线性扩张的定义性笛卡尔方形诱导出一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{E}^{\mathrm{core}} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C}^{\mathrm{core}} & & \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & \searrow^{=} & \\ \mathcal{B}^{\mathrm{core}} & \xrightarrow{k} & (\mathcal{D}^{2})^{\mathrm{core}} & \xrightarrow{1} & \mathcal{C}^{\mathrm{core}}\end{array}\qquad (p:\ \mathcal{B}^{\mathrm{core}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{core}}) \tag{6.2.15}$$

底层 ∞-群胚。在这里，我们可以将其识别为

$$\mathcal{B}^{\mathrm{core}}\simeq\coprod_{X\in\pi_0\mathcal{B}^{\mathrm{core}}}B\mathrm{Aut}_{\mathcal{B}}(X),\qquad \mathcal{E}^{\mathrm{core}}\simeq\coprod_{X\in\pi_0\mathcal{B}^{\mathrm{core}}}\mathrm{Lifts}^{\mathcal{E}}_{0}(X),\qquad \mathcal{C}^{\mathrm{core}}\simeq\coprod_{\Lambda\in\pi_0\mathcal{C}^{\mathrm{core}}}B\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(\Lambda)$$

根据定义，且引理 6.2.4 将其识别为

$$(\mathcal{D}^2)^{\mathrm{core}} \simeq \operatorname*{colim}_{\Lambda\in\mathcal{C}^{\mathrm{core}}} \Omega^\infty\Sigma^2 D(\mathrm{id}_\Lambda) \simeq \coprod_{\Lambda\in\pi_0\mathcal{C}^{\mathrm{core}}} \left(\Omega^\infty\Sigma^2 D(\mathrm{id}_\Lambda)\right)_{\mathrm{hAut}_{\mathcal{C}}(\Lambda)}.$$

因此，第一个笛卡尔方形是将 (6.2.15) 限制到位于 Λ 上的路径分支后得到的，而第二个则可通过取纤维推出。□

6.3. 理论上的自然系统

本节其余部分将上述讨论专门应用于 Malcev 理论及其范畴 s of 模型。我们先作一些一般性观察。

引理 6.3.1. 设 D 是预理论 $\mathcal{P}$ 上由连通 R-模构成的自然系统。以下命题等价：

(1) 相应的对象 $\mathcal{D}^\bullet \in \mathrm{RMod}_R((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{P}})$ 可提升至 $\mathrm{RMod}_R((\mathcal{T}\mathrm{hry})_{/\mathcal{P}})$；

(2) 对所有 $P\in\mathcal{P}$，复合映射

$$\mathcal{P}^{\mathrm{op}}_{/P} \simeq \mathrm{Tw}(\mathcal{P})\times_{\mathcal{P}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{P}}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}\times\{P\}) \to \mathrm{Tw}(\mathcal{P}) \xrightarrow{D} \mathrm{RMod}_R^{\geq 0} \xrightarrow{\Omega^\infty} \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

保积，即定义了一个 $\mathcal{P}_{/P}$ 的模型。

(3) 对任意一组映射 $\{f_i\colon P_i\to P\}$ 连同和 $f\colon \coprod_i P_i\to P$，比较映射

$$D(f\colon \coprod_i P_i\to P) \to \prod_i D(f_i\colon P_i\to P)$$

是一个等价。

证明。显然，(2) 与 (3) 等价，因此我们必须证明它们与 (1) 等价。给定 $\mathcal{D}^\bullet\in\mathrm{RMod}_R((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{P}})$ 以及一组映射 $\{f_i\colon P_i\to P\}$ 连同和 $f\colon\coprod_i P_i\to P$，我们可以将给定的比较映射认作

$$D(f)\simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}^1}(0(\coprod P_i),0(P))_f \to \prod \mathrm{map}_{\mathcal{D}^1}(0(P_i),0(P))_{f_i} \simeq \prod \mathrm{map}_{\mathcal{D}^1}(0(P_i),0(P))_{f_i}.$$

对于任意一组映射 $\{f_i\}$，这是一个等价，当且仅当投影 $0(\coprod_i P_i)\xrightarrow{i} 0(P_i)$ 对任意一组对象 $\{P_i\}$ 在 $\mathcal{P}$ 中实现 $0(\coprod_i P_i)\simeq\coprod_i 0(P_i)$。由于 $0\colon\mathcal{P}\to\mathcal{D}^1$ 是本质满的，这就证明了 (2) 等价于这样的条件：$\mathcal{D}^1$ 是一个预理论，且 $0\colon\mathcal{P}\to\mathcal{D}^1$ 是预理论同态。

接下来还需证明，这意味着整个图表 $\mathcal{D}^\bullet\colon \mathcal{R}^\omega_{\underline{\ }}(R)^{\mathrm{op}}\to(\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{P}}$ 由预理论和同态组成。将上述结果应用于以 D 的悬挂之和替换 D 的情形，可知对于任意 $F\in\mathcal{R}^\omega_{\underline{\ }}(R)$，$\mathcal{D}^\bullet(\Omega F)$ 都是预理论，且 $0:\mathcal{P}\to\mathcal{D}^\bullet(\Omega F)$ 是预理论同态。笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^\bullet(F) & \xrightarrow{q} & \mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{0} & \mathcal{D}^\bullet(\Sigma F) \end{array}$$

由此可知，对于任意 $F\in\mathcal{R}^\omega_{\underline{\ }}(R)$，$\mathcal{D}^\bullet(F)$ 都是预理论，且 $0\colon\mathcal{P}\to\mathcal{D}^\bullet(F)$ 和 $q\colon\mathcal{D}^\bullet(F)\to\mathcal{P}$ 都是预理论同态。此外，q 是保守的。

还需证明，若 $F'\to F$ 是 $\mathcal{R}^\omega_{\underline{\ }}(R)$ 中的任意映射，则 $f\colon\mathcal{D}^\bullet(F)\to\mathcal{D}^\bullet(F')$ 是一个同态。考虑下面的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^\bullet(F) & \xrightarrow{f} & \mathcal{D}^\bullet(F') \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q'} & \\ & \mathcal{P} & \end{array}.$$

由于 q' 是一个保守同态，要证明 f 是同态，只需证明 $q' \circ f = q$ 是同态，而这点我们已经证明过了。□

定义 6.3.2。一个连通 R-模在预理论 $\mathcal{P}$ 上的笛卡尔系统，是满足 R引理 6.3.1 等价刻画的连通 引理 6.3.1。

结合推论 6.2.5与 [BP、注 3.1.3、引理 4.1。5] 可知，若 D 是定义在（Malcev）理论 R上的连通 $\mathcal{P}$-模的笛卡尔系统，则 $\mathcal{D}^{\bullet+1}$ 仍由（Malcev）理论构成。本文的工作现在给出以下结果。

命题 6.3.3。设 D 是定义在 Malcev 理论$\mathcal{P}$上的连通 R-模的笛卡尔系统。那么 $\mathcal{D}^{\bullet+1} \in \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R(\mathcal{M}\mathrm{alc}/\mathcal{P})$ 导出

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}^{\bullet+1}} \in \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}}).$$

相应的自然系统具有如下形式

$$D_!\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}) \to \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R, \qquad D_!(\phi\colon \Gamma \to \Lambda) = \mathrm{map}_{\mathcal{P}_{/\Lambda}}(\Gamma, B^{\bullet}_{\Lambda}\Lambda_D),$$

其中 $\Lambda_D \in \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}((\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/\Lambda})$ 是由下式给出的连通 R-模对象

$$\Lambda_D = 0^* 0_! \Lambda, \qquad \text{where} \qquad 0\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}^{\bullet+1}.$$

证明。 我们首先证明 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}^{\bullet+1}} \in \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R((\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}})$。考虑复合 e

$$\mathcal{R}^{\omega}_{-}(R)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty, \qquad P \mapsto \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}^{\bullet+1}(P)} = \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}^{\bullet}(\Omega P)}.$$

这将 $0 \mapsto \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 送到，并且要证明诱导函子

$$\mathcal{R}^{\omega}_{-}(R)^{\mathrm{op}} \to (\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)_{/\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}}$$

定义一个 R-模对象，只需证明若 P， $P' \in \mathcal{R}^{\omega}_{+}(R)$，那么这两个映射

$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}(\Omega P \oplus \Omega P')} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}(\Omega P)} \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}(\Omega P')},$$
$$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}(\Omega^2 P)} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{D}}(\Omega P)} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

是等价。由于同态 $\mathcal{D}(\Omega P) \to \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{D}(\Omega P')$ 和 $\mathcal{P} \to \mathcal{D}(\Omega P)$ 是满的，这由 定理 4.4.4 得出。相应的自然系统 $D_!$ 满足

$$D_!(\phi) = \mathrm{map}_{\mathcal{D}^{\bullet+1}}(0_!\Gamma, 0_!\Lambda)_{\phi} = \mathrm{map}_{\mathcal{P}_{/\Lambda}}(\Gamma, 0^* 0_! \Lambda)$$

根据构造以及伴随 $0_! \dashv 0^*$，得证最后一个陈述。 □

注记 6.3.4。若 $\Lambda = \nu P$ 对于 $P \in \mathcal{P}$，则

$$(\nu P)_D \in \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}((\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}})_{/\nu P}) \simeq \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0} \otimes \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}_{/P}}$$

由保积函子编码

$$\mathcal{P}^{\mathrm{op}}_{/P} \to \mathrm{Tw}(\mathcal{P}) \xrightarrow{D} \mathrm{R}\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\geq 0}$$

引理引理 6.3.1.(2)。

例 6.3.5。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，并考虑笛卡尔系统 $H\Pi_{[n,n+r)}$ 上的连通 $\mathbf{S}_{<r}$-模 $\mathrm{h}_r\mathcal{P}$，其描述见 例 6.2.3。根据 引理 4.2.6，我们可以识别$\Lambda_{H\Pi_{[n,n+r)}} = B^n_{\Lambda}\Lambda_{S^n}$。

记号 6.3.6。 给定一个映射 $\phi\colon \Gamma \to \Lambda$，可以将其视为

$$\Omega^{\infty-n} D_!(\phi) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}^{n+1}}(\Gamma, \Lambda)_{\phi} \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}_{/\Lambda}}(\Gamma, B^n_{\Lambda}\Lambda_D)$$

作为一种*André-Quillen* 上同调空间。我们记作

$$\mathrm{H}^n_{\mathcal{P}_{/\Lambda}}(\Gamma; \Lambda_D) := \pi_{-n} D_!(\phi) \simeq \pi_0 \,\mathrm{map}_{\mathcal{P}_{/\Lambda}}(\Gamma, B^n_{\Lambda}\Lambda_D).$$

6.4. Malcev 理论的线性扩张

经典的环的平方零扩张理论可推广为线性扩张理论的非阿贝尔推广；Jibladze–Pirashvili 对普通 Lawvere 理论进行了研究 [DP91，JP05]。固定一个笛卡尔系统 D 连通 R-模，其定义在 Malcev 理论 $\mathcal{T}$ 上。

命题 6.4.1. 固定一个同态 $p\colon \mathcal{P}\to\mathcal{T}$，并令 $f\colon \mathcal{Q}\to\mathcal{P}$ 是由 D 对 $\mathcal{P}$ 的底层 ∞-范畴作出的线性扩张。那么 $\mathcal{Q}$ 是一个 Malcev 理论，而 f 是一个同态。

证明。 考虑线性扩张的定义笛卡尔图表：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{Q} & \xrightarrow{t} & \mathcal{T} & & \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & \searrow & \\
\mathcal{P} & \xrightarrow{k} & \mathcal{D}^2 & \xrightarrow{q} & \mathcal{T} \\
 & \searrow^{p} & & \nearrow &
\end{array}.$$

我们首先断言 $\mathcal{Q}$ 是一个预理论，而 f 是一个预理论同态。只需证明 k 是一个预理论同态。由于 q 是一个保守预理论同态，只需检验 $q\circ k\simeq p$ 是一个预理论同态，而这由假设可知。

接下来我们声称 $\mathcal{Q}$ 是 Malcev。由于 D 是连通的，$0\colon \mathcal{T}\to\mathcal{D}^2$ 是满的，因此这由[BP，命题 4.1.6.(2)]得出。

我们最后断言，$\mathcal{Q}$ 是一个理论。由于 D 是连通的，f 是本质满的。由于 f 是保守的，因此它在对象的等价类之间诱导出一个双射。因此，$\mathcal{P}$ 的任何生成对象集合都可提升为 $\mathcal{Q}$的生成对象集合。□

例 6.4.2. 设 B 是一个连通环谱，I 是一个连通的 B-双模。那么，B 由 I 作出的平方零扩张等价于 $\mathcal{L}_0(B)$由 $\mathcal{L}_0(B\oplus I)$作出的线性扩张，其中 $B\oplus I\in \mathcal{S}\mathrm{p}(\mathrm{Alg}^{\mathbf{E}_1}_{/B})$是与 I相关联的平凡平方零扩张。

例 6.4.3. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论，且 F 是一个初等修饰子。那么，命题 5.2.1 的证明表明，同态 $\epsilon_F\colon \mathrm{h}(\mathcal{P}_F)\to \mathrm{h}\mathcal{P}$ 可分解为一个有限塔，其中各层都是由自然系统 $H\Pi_n=\Omega^n H\Pi_{[n,n+1)}$ 在$\mathrm{h}\mathcal{P}$上的阿贝尔群的商所作的线性扩张。

现在我们可以陈述如下结论。

定理 6.4.4. 设 $f\colon \mathcal{Q}\to\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个线性扩张，其扩张由连通 D -模构成的笛卡尔系统 R给出。那么 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}\to\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 的一个线性扩张，其扩张由命题 6.3.3 $D_!$ 中的自然系统给出。

证明。 由于 $0\colon \mathcal{T}\to\mathcal{D}^2$ 诱导出等价 $\mathrm{h}(\mathcal{T})\simeq\mathrm{h}(\mathcal{D}^2)$，这可直接应用定理 4.4.4 于该线性扩张的定义性笛卡尔方形得出。□

例 6.4.5. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。那么

$$\tau_{(n+r,n)!}\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}}\to\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}$$

是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}$ 的一个线性扩张，其扩张由满足以下条件的自然系统 $H\Pi_{[n,n+r)!}$ 给出

$$H\Pi_{[n,n+r)!}(\phi\colon \Gamma\to\Lambda)=\mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}/\Lambda}(\Gamma, B^{n+\bullet}_{\Lambda}\Lambda_{S^n}).$$

这可通过结合定理 6.4.4 与例 6.2.10 和例 6.3.5得出。

6.5. 分解提升的模空间

上述形式体系汇集起来，旨在回答以下基本问题：给定一个线性扩张 $f\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$，何时可以将 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的结构提升为$\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$中的结构？为引入记号，在本节余下部分固定一个图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Q} & \xrightarrow{t} & \mathcal{T} & & \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & \searrow & \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{k} & \mathcal{D}^2 & \xrightarrow{q} & \mathcal{T} \\ & \searrow^{p} & & & \end{array}$$

of Malcev 理论，其中 $\mathcal{D}^\bullet$ 与连通 R-模在 $\mathcal{T}$上的笛卡尔系统 D 相关联 real将 $\mathcal{Q}$ 视为由 D扩张得到的 $\mathcal{P}$ 线性扩张。

定理 6.5.1. 固定 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$，并通过笛卡尔方块为 $\varepsilon \in \{0,1\}$ 定义空间 $\mathbf{Lifts}_{\varepsilon}^{\mathcal{Q}}(X)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Lifts}_1^{\mathcal{Q}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Lifts}_0^{\mathcal{Q}}(X) & \longrightarrow & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ \{X\} & \longrightarrow & B\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(X) & \longrightarrow & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \end{array}.$$

令 $\Lambda = p_!X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{T}}$。那么这些空间构成典范笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lifts}_0^{\mathcal{Q}}(X) & \longrightarrow & B\mathrm{Aut}_{\mathcal{T}}(\Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ B\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(X) & \xrightarrow{k} & \mathrm{map}_{\mathcal{T}/\Lambda}(p_!\Lambda, B^2_{p_!\Lambda}(p_!\Lambda)_D)_{\mathrm{hAut}(p_!\Lambda)} \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Lifts}_1^{\mathcal{Q}}(X) & \longrightarrow & \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{k_!(X)\} & \to & \mathrm{map}_{\mathcal{T}/p_!\Lambda}(p_!\Lambda, B^2_{p_!\Lambda}(p_!\Lambda)_D) \end{array}.$$

特别地，存在一个规范的障碍类

$$k_!(X) \in \mathrm{H}^2_{\mathcal{T}/p_!\Lambda}(p_!\Lambda; (p_!\Lambda)_D)$$

to 寻找将 X 提升到 $\mathcal{Q}$的模型中的提升，以及对 $k_!(X)$ 的一个零伦选择，会诱导出一个等价

$$\mathrm{Lifts}_1^{\mathcal{Q}}(X) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{T}/p_!\Lambda}(p_!\Lambda, B_{p_!\Lambda}(p_!\Lambda)_D),$$

从而得到一个双射 $\pi_0\mathbf{Lifts}_1^{\mathcal{Q}}(X) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathcal{T}/p_!\Lambda}(p_!\Lambda; (p_!\Lambda)_D)$.

证明。 由 定理 6.4.4， $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是由自然系统给出的线性扩张 $D_!$在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{T}}$ 满足

$$D_!(\mathrm{id}_\Lambda) = \mathrm{map}_{\mathcal{T}/p_!\Lambda}(p_!\Lambda, B^\bullet_{p_!\Lambda}(p_!\Lambda)_D).$$

该定理由定理 6.2.14推出。 □

注记 6.5.2。 还可以识别

$$\mathrm{map}_{\mathcal{T}/p_!\Lambda}(p_!\Gamma, B^\bullet_{p_!\Lambda}(p_!\Lambda)_D) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{P}/\Lambda}(\Gamma, B^\bullet_\Lambda \Lambda_{p^*D})$$

对于任意态射 $\Gamma \to \Lambda$ 在 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$；比较注记 6.2.7。

将定理 6.5.1的同一证明应用于由 $f_!\colon \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 经由例 6.2.11 和例 6.2.12导出的线性扩张，可得以下两个定理：

定理 6.5.3。固定 Y， $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$。那么存在典范笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}_{\mathcal{Q}}(Y, X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathcal{T}}(t_!Y, t_!X) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(f_!Y, f_!X) & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathcal{T}}(t_!Y, B_{t_!X}(t_!X)_D) \end{array}.$$

如果我们固定一个映射 $\phi\colon t_!Y \to t_!X$，那么它限制为

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}_{\mathcal{Q}}(Y,X)_{\phi} & \longrightarrow & \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{map}_{\mathcal{P}}(f_!Y,f_!X)_{\phi} & \xrightarrow{k_!} & \mathrm{map}_{\mathcal{T}/t_!X}(t_!Y,B_{t_!X}(t_!X)_D) \end{array}.$$

特别地，给定一个提升 ϕ 的映射 $\alpha\colon\ f_!Y \to f_!X$，存在一个障碍

$$k_!(\alpha) \in \mathrm{H}^1_{\mathcal{T}/t_!X}(t_!Y,(t_!X)_D)$$

从而展示到 $Y \to X$ 的进一步提升。 □

备注 6.5.4。由于它只涉及映射空间的分解，而不是对象的提升空间，定理 6.5.3也可以由更简单得多的定理 4.1.5推导得出，这与命题 4.2.10的情形相同。

Th定理 6.5.5。设 $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中的一个图表，并令 $\mathbf{Lifts}_1^{\mathcal{Q}}(F)$ 为提升到 of lifts 到 $\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}$ 的空间：

$$\mathrm{Lifts}_1^{\mathcal{Q}}(F) = \mathrm{Fun}_{/\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}}(\mathcal{J},\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}}) = \left\{ \begin{array}{ccc} & & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{Q}} \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{F} & \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \end{array} \right\}$$

那么存在如下形式的笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lifts}_1^{\mathcal{Q}}(F) & \longrightarrow & \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{k_!(F)\} & \longrightarrow & \mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{T}})_{/F}}(F,B_F^2F_D) \end{array}.$$

在这里，也可以将其识别为

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{T}})/F}(F,B_F^2F_D) \simeq \lim_{(\phi\colon\, i\to j)\in \mathrm{Tw}(\mathcal{J})} \mathrm{map}_{\mathcal{T}/F(j)}(F(i),B^2_{F(j)}F(j)_D).$$

特别地，当且仅当 $k_!(F) \sim 0$ 时，这样的提升存在。 □

定理 1.2.1如引言中所述，是定理 6.5.1 在线性扩张 $\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_n\mathcal{P}$的一个小变体，下面我们将详细说明：

定理 6.5.6. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 Malcev 理论。固定 $\Lambda \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}$，并令

$$\mathcal{M}(\Lambda) \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}^{\mathrm{core}}$$

为 $X \in \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$ 中满足 $\tau_{r!}X \simeq \Lambda$的全子空间。那么存在一个分解

$$\mathcal{M}(\Lambda) \simeq \lim_{r\le n\to\infty} \mathcal{M}_n(\Lambda),$$

其层适配于笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n+r}(\Lambda) & \longrightarrow & B\mathrm{Aut}(\Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0_!} \\ \mathcal{M}_n(\Lambda) & \xrightarrow{k_!} & \mathrm{map}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}/\Lambda}(\Lambda,B^{n+2}_{\Lambda}\Lambda_{S^n})_{h\mathrm{Aut}(\Lambda)} \end{array} \tag{6.5.7}$$

对所有的 $r \le n$。

证明。 根据构造，

$$\mathcal{M}(\Lambda) \simeq B\mathrm{Aut}(\Lambda) \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}}$$

and

$$\mathcal{M}_n(\Lambda) \simeq B\mathrm{Aut}(\Lambda) \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}.$$

的螺旋塔的收敛性，由定理 5.3.1证明，因此可推出

$$\mathcal{M}(\Lambda) \simeq B\mathrm{Aut}(\Lambda) \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathcal{P}} \simeq B\mathrm{Aut}(\Lambda) \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}} \lim_{r\le n\to\infty} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}}$$
$$\simeq \lim_{r\le n\to\infty} B\mathrm{Aut}(\Lambda) \times_{\mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}} \mathcal{M}\mathrm{odel}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}} \simeq \lim_{r\le n\to\infty} \mathcal{M}_n(\Lambda).$$

根据 定理 6.4.4，线性扩张 $\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P} \to \mathrm{h}_n\mathcal{P}$ 诱导出一个 ∞模型范畴的线性扩张。取其底层的 ∞群胚，得到一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{core}}_{\mathrm{h}_{n+r}\mathcal{P}} & \xrightarrow{\tau_{(n+r,r)!}} & \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{core}}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}} & & \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_{(n+r,n)!}} & & \downarrow{\scriptstyle 0_!} & \searrow & \\
\mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{core}}_{\mathrm{h}_n\mathcal{P}} & \xrightarrow{k_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{core}}_{\mathrm{k}^{n+1}_{n,r}\mathcal{P}} & \xrightarrow{q_!} & \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{core}}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}
\end{array}$$

的空间。将此方形限制到位于 $B\mathrm{Aut}(\Lambda) \subset \mathcal{M}\mathrm{odel}^{\mathrm{core}}_{\mathrm{h}_r\mathcal{P}}$之上的那些路径分支，即可得到所需的笛卡尔方形。□

参考文献

[AF18] David Ayala 和 John Francis，带标记的高阶范畴，《拓扑学与量子理论的相互作用》，Contemp. Math.，第 718 卷，美国数学会，[普罗维登斯], 罗得岛州，2018年，第 137–173 页。MR 3869643[Bal25] William Balderrama，通过代数理论对同伦论进行变形，2025年，第 110496 号论文，共 76 页。MR 4950976[Bas99] M. Basterra，交换 S-代数的 André-Quillen 上同调，J. Pure Appl. Algebra 144（1999），第 2 期，111–143 页（英文）。[BB04] Francis Borceux 和 Dominique Bourn，马尔采夫、原模、同调与半阿贝尔范畴，《数学及其应用》，第 566 卷，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，2004年。MR 2044291[BD89] Hans Joachim Baues 和 Winfried Dreckmann，同伦范畴的上同调与一般线性群，

K **3** 1989 4, 307 338 1047191 -理论（），第 – 期。MR BDG [04]

D. Blanc、W. G. Dwyer 和 P. G. Goerss，一个 Π-代数的实现空间：代数拓扑中的一个模问题，Topology 43（2004），第 4 期，857–892 页。[BIX24] Robert Burklund、Daniel C. Isaksen 和 Zhouli Xu，通过$\mathbb{F}_2$-合成方法研究球面的经典稳定同伦群，arXiv 电子预印本（2024年），arXiv:2408.00987。[BJ02] Hans-Joachim Baues 和 Mamuka Jibladze，阿贝尔轨迹范畴的分类，K-理论 25（2002），第 3 期，299–311 页（英文）。[BL87] Ronald Brown 和 J ean-Louis Loday，空间的 n-立方体的同伦切除与 Hurewicz 定理，Proc. London Math. Soc.（

3 **54** 1987 1, 176 192 872255 ）（），第 – 期。MR [89]

Bou A. K. Bousfield，同伦谱序列与障碍，Israel J. Math. 66 3，54，1989，1 104 1017155（），第 - – 期。MR [BP] William Balderrama 和 Piotr Pstrągowski，不稳定合成变形 I：马尔采夫理论。[BW85] Hans-Joachim Baues 和 Günther Wirsching，小范畴的上同调，J. Pure Appl. Algebra 38（1985），187–211 页（英文）。[BX25] Robert Burklund 和 Zhouli Xu，类 h^3_j 上的 Adams 微分，Invent. Math. 239（

2025 1, 1 77 4841776 ），第 – 期。MR DKS W. G. Dwyer、D. M. Kan 和 J. H. Smith，单纯范 [86]

畴的障碍理论，Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.

48 1986 2, 153 161 849715 （），第 – 期。MR DP [91]

Mamuka Dzhibladze 和 Teimuraz Pirashvili，代数理论的上同调，J. Algebra 137（1991），第 2 期，253–296 页（英文）。[DS06] Daniel Dugger 和 Brooke Shipley，环谱的 Postnikov 扩张，Algebr. Geom. Topol. 6（2006），1785–1829 页（英文）。[GH15] David Gepner 和 Rune Haugseng，通过非对称 ∞-运算子研究富化 ∞-范畴，Adv. Math. 279（2015），575–716 页。MR 3345192[HNP18] Yonatan Harpaz、Joost Nuiten 和 Matan Prasma，富化范畴的抽象余切复形与 Quillen 上同调，J. Topol. 11（2018），第 3 期，752–798 页（英文）。[HNP 20] ，关于（∞，n）-范畴的 k-不变量，预印本，arXiv:2011.12723 [math.AT] （2020年），2020年。[Jam 55] Ioan M James，约化积空间，《数学年刊》62（1955），第 1 期，170–197 页。

[JP05] Mamuka Jibladze 和 Teimuraz Pirashvili，马尔采夫理论的线性扩张与幂零性，Beitr. Algebra Geom. 46（2005），第 1 期，71–102 页（英文）。[Laz01] A. Lazarev， A_∞ 环谱的同伦论及其在 MU-模中的应用， K-理论 24（2001），第 3 期，243–281 页（英文）。[Lura] Jacob Lurie，高阶代数，http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf。[Lurb] ，谱代数几何，http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。[Lur17] Jacob Lurie，高阶拓扑斯理论，http://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HTT.pdf，2017年。[LWX24] Weinan Lin、Guozhen Wang 和 Zhouli Xu，关于最后的 Kervaire 不变量问题，arXiv 电子预印本（2024年），arXiv:2412.10879。[MS16] Akhil Mathew 和 Vesna Stojanoska，通过下降理论研究拓扑模形式的皮卡群，Geom. Topol. 20（2016），第 6 期，3133–3217 页。MR 3590352[Pst23] Piotr Pstrągowski，具有预设同伦群的空间的模空间，Journal of Pure and Applied Algebra 227（2023），第 10 期，107409。[Qui67] Daniel G. Quillen，同伦代数，《数学讲义》，第 43 卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1967年。MR 223432[Rez01] Charles Rezk，一个同伦论之同伦论的模型，Transactions of the American Mathematical Society 353（2001），第 3 期，973–1007 页。[Saf17] Pavel Safronov，对“自由环空间对象与作用”的回答，MathOverflow，https://mathoverflow.net/a/281559，2017年9月。[Sag08] Steffen Sagave，环谱的通用 Toda 括号，Trans. Am. Math. Soc. 360 5，2767，2008，2808（），第 – 期（英文）。[Smi76] Jonathan D. H. Smith，马尔采夫簇，《数学讲义》，第 554 卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1976 432511 。MR Whi J. H. C. Whitehead，组合同伦 I，[49] Bull. Am. Math. Soc.55（1949），213–245 页（英文）。